Projekt Optymalizacja nieliniowa

Cz 1 Optymalizacja jednowymiarowa

Krawiec Piotr

07/11/2021

Zadanie

Dystans Ziemia-Mars zależy od ich pozycji na orbitach i zmienia się w czasie. Zadaniem jest obliczenie najmniejszego dystansu na jaki planety te zbliżą się. Dla ułatwienia orbity obu planet zostaną zamodelowane jako elipsy.

Pozycja planety w dowolnym punkcie czasu

Pozycje planet mogą być modelowane z pomocą liczb zespolonych[1]. Oto równanie pozwalające na symulację ruchu planety. Zostanie ono odpowienio przeskalowane poprzez dostosowanie parametru r. Model zakłada, że początkowy kąt między planetami wynosi 0 rad.

$$planet(t) = r * exp\left(2 \cdot \pi i r^{\frac{-3}{2}} t\right)$$

- r - półoś wielka orbity planety (elipsy)
- AU - jednostka astronomiczna 149 597 870 700 m
- t - czas[2]

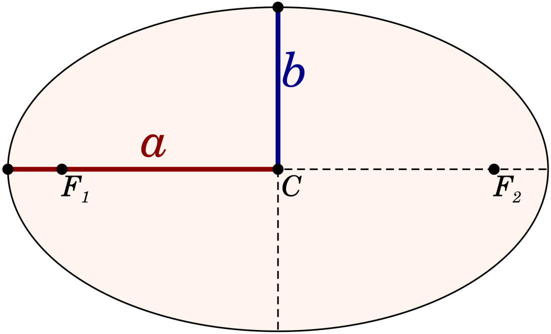
[1] https://www.johndcook.com/blog/2015/10/24/distance-to-mars/

[2] jednostka nie ma znaczenia, ponieważ szukamy najmniejszej odległości

Elipsa

Oto model orbity. Dostosowując parametr r (na rys a), możemy modelować dowolną z planet.

- a - półoś wielka elipsy
- b - półoś mała elipsy



Równanie dla ziemi i marsa

Ponieważ półoś wielka orbity Ziemi wokół słońca to $1AU$ przyjmiemy parametr $r = 1AU$.

$$earth(t) = exp\left(2 \cdot \pi \cdot i \cdot t\right)$$

Ponieważ półoś wielka orbity Marsa wokół słońca to $1.524AU$ przyjmiemy parametr $r = 1.524AU$.

$$mars(t) = 1.524 * exp\left(2 \cdot \pi \cdot i \cdot (1.524)^{\frac{-3}{2}} \cdot t\right)$$

Równanie dla ziemi i marsa - kod w R

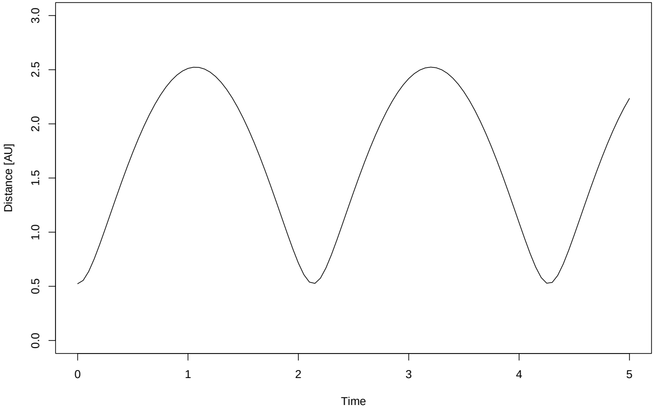
```
r = 1.524 # półoś wielka orbity Marsa w AU

earth <- function(t){ exp(2*pi*1i*t) }

mars <- function(t) { r*exp(2*pi*1i*(r**-1.5*t)) }
```

Odległość między planetami można wyznaczyć jako wartość bezwzględą z różnicy w ich pozycjach w czasie t.

$$f(t) = abs\left(mars(t) - earth(t)\right)$$

```
f <- function(x) { abs(mars(x) - earth(x)) }
```

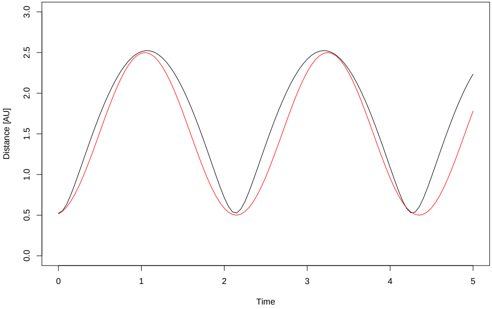
Wykres funkcji odległości planet



Rysunek 1: Wykres funkcji distance(t)

Wykres funkcji odległości planet - porównanie z sin

Przeskalowana funkcja $sin(x)$ na czerwono. Funkcja dystansu przypomina funkcję sinus, ale jak widać na wykresie poniżej nie są identyczne.



Rysunek 2: Wykres funkcji distance(t)

Metody bezgradientowe

Zadanie zostanie roziwązane korzystając z metody Fibonacciego. Do jej implementacji będzie potrzebny *Ciąg Fibonacciego*, który zdefiniowany jest jako:

$$F(0) = 0, F(1) = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Obliczenie Ciągu Fibonacciego

```
# Obliczenie pierwszych 101 wyrazów ciągu fib
phil <- c(rep(0, 100))
phil[1:3] <- c(1,1,1)
for(i in c(3:length(phil))) {
  phil[i] = phil[i-1] + phil[i-2]}

phi <- function(i) {
  if(i <= 0) {return(0)}; # F(0) = 0
  # Obliczenie nowych elementów jeżeli wyjdziemy poza zakres
  if (i > length(phil)) {
    len <- length(phil)
    phil <- c(phil, rep(0, i - len))
    for(j in c(len:length(phil))) {phil[j] = phil[j-1]
      + phil[j-2]}
  }
  return(phil[i])
}
```

Metoda Fibonacciego

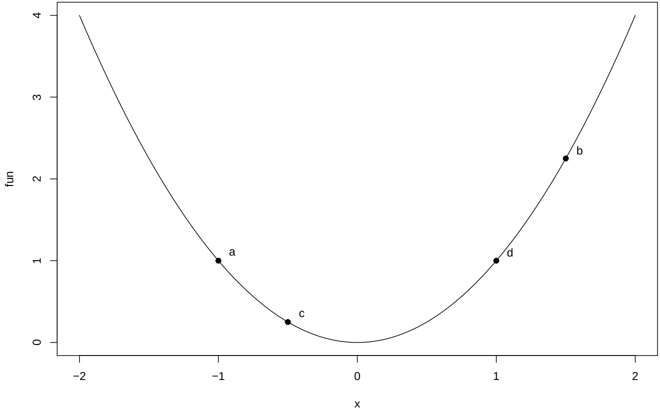
Metoda ta opiera się na metodzie zawężania początkowego przedziału poszukiwania. Zaczynamy od wybrania przedziału $[a, b]$. Nastepnie w każdej iteracji obliczamy punkty $c^{(i)}$ oraz $d^{(i)}$, tak aby spełniały:

$$b^{(i)} - d^{(i)} = c^{(i)} - a^{(i)}$$

oznacza to, że są równo oddalone od aktualnego przedziału przeszukiwań.

Jak działa zawężanie przedziału poszukiwań

- Gdy: $f(c) < f(d)$, wtedy $a^{(i+1)} = a^{(i)}$, $b^{(i+1)} = d^{(i)}$
- Gdy: $f(d) < f(c)$, wtedy $a^{(i+1)} = c^{(i)}$, $b^{(i+1)} = b^{(i)}$



Metoda Fibonacciego

Wyznaczanie punktów $c^{(i)}$ oraz $d^{(i)}$.

$$c^{(i)} = b^{(i)} - \alpha^{(i)} \cdot \left(b^{(i)} - a^{(i)}\right)$$

$$d^{(i)} = a^{(i)} + b^{(i)} - c^{(i)}$$

$$\alpha^{(i)} = \frac{\phi_{k-i-1}}{\phi_{k-i}}$$

$$\phi_k = min\{F(k) : F(k) > \frac{L}{\epsilon}\}$$

Gdzie: $F(k)$ to k-ty wyraz *Ciągu Fibonacciego*, $L =$ | a - b |, ϵ - zadana dokładność

Obliczenie ilości iteracji

Z kryterium obliczającego phi_k wiemy, że należy wykonać k-2 iteracji. Gdyż pierwsze wartości w ciągu fibonacciego są 1 i 0, więc wartość parametru *alpha* wyniesie 1 i 0 (dla iteracji $k-1$ i k), a więc nie dokona się już Ponadto ze względu na błędy zaokrągleń, zwiększam liczbę iteracji o 1.

```r
phi_k <- function(a, b, tol) {
  i <- 1
  L <- b - a
  while(phi(i) < L / tol) {i <- i+1}
  return(i + 1)
}
```

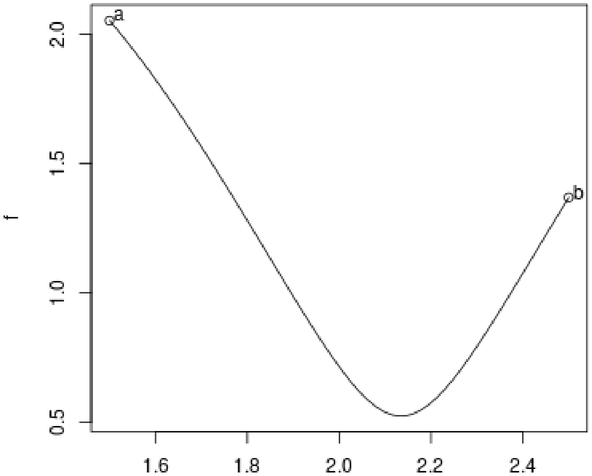
Metoda Fibonacciego implementacja

```
fib <- function(f, a, b, tol) {
  k <- phi_k(a, b, tol)
  for(i in c(0:(k-1))) {
      alpha <- phi(k-i-1)/phi(k-i)
      c <- b - alpha*(b - a)
      d <- a + b - c
      cat("iteracja=", i+1, "a=", a, "c=",c,"d=",d,"b=",
          b , "alpha=", alpha,"\n",sep=" ")
      if( f(c) < f(d) ) {
        b <- d
      } else {
        a <- c
      }
  }
  return((a+b)/2)
}
```

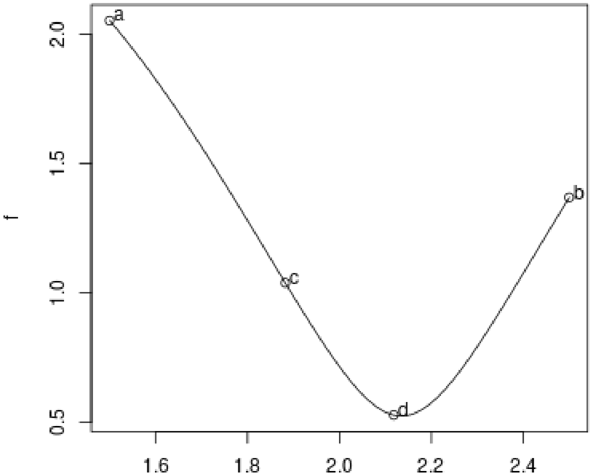
Wizualizacja

```
fib_anim <- function(f, a, b, tol, max_iter) {
  k <- phi_k(a, b, tol)
  lower <- a
  upper <- b
  for(i in c(0: min((k-1), max_iter))) {
      alpha <- phi(k-i-1)/phi(k-i)
      # FITST PLOT
      plot(f, xlim=c(lower, upper))
      points(xp <- c(a,b), yp <- f(xp))
      text(xp+0.02, yp+0.02, c("a", "b"))
      dev.print(png, paste("img/", 3*i + 1, ".png", sep=""), width = 400, height = 400)
      c <- b - alpha*(b - a)
      d <- a + b - c
      # SECOND PLOT
      plot(f, xlim=c(lower, upper))
      points(xp <- c(a,b,c, d), yp <- f(xp))
      text(xp+0.02, yp+0.02, c("a", "b", "c", "d"))
      dev.print(png, paste("img/", 3*i + 2, ".png", sep=""), width = 400, height = 400)
      # THIRD PLOT
      plot(f, xlim=c(lower, upper))
      points(xp <- c(a,b,c, d), yp <- f(xp))
      text(xp+0.02, yp+0.02, c("a", "b", "c", "d"))
      if( f(c) < f(d) ) {
        arrows(b, f(b), d, f(d), col="red")
        b <- d
      } else {
        arrows(a, f(a), c, f(c), col="red")
        a <- c
      }
      dev.print(png, paste("img/", 3*i + 3, ".png", sep=""), width = 400, height = 400) }
  return((a+b)/2)
```

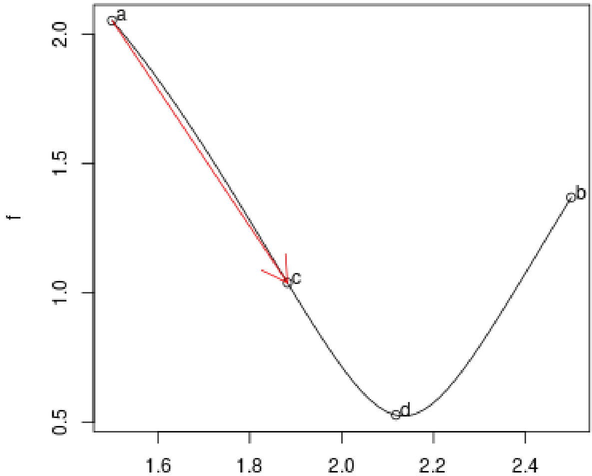
Wizualizacja - animacja



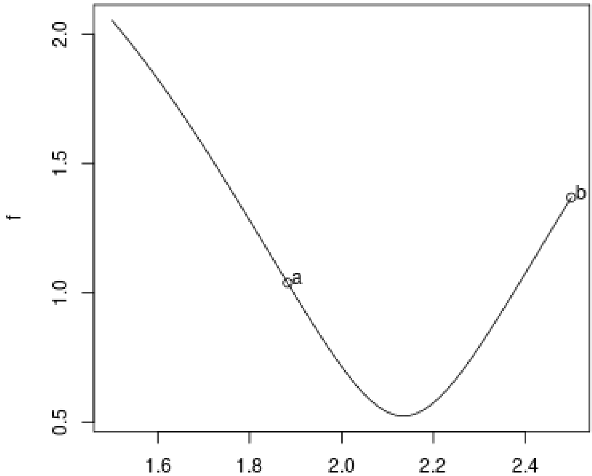
Wizualizacja - animacja



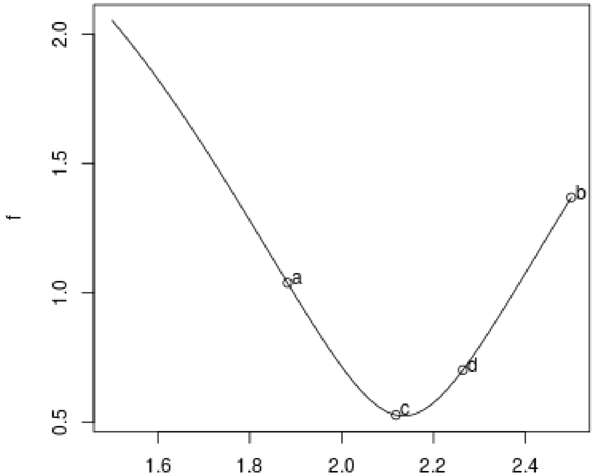
Wizualizacja - animacja



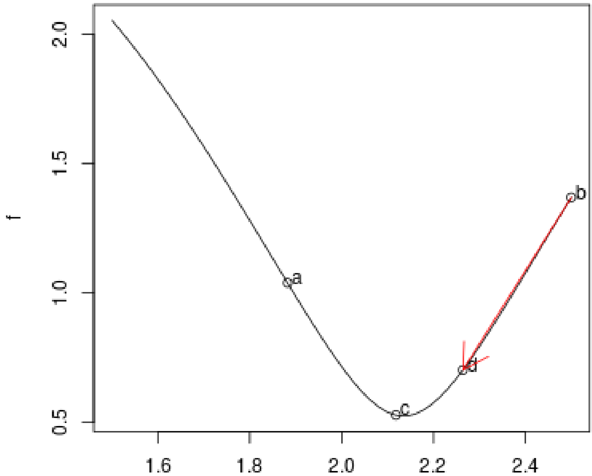
Wizualizacja - animacja



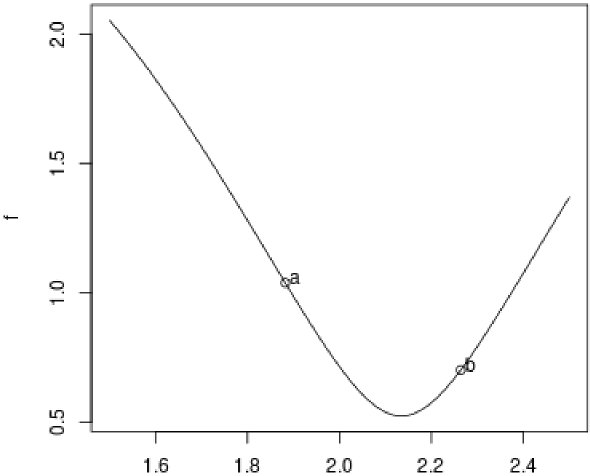
Wizualizacja - animacja



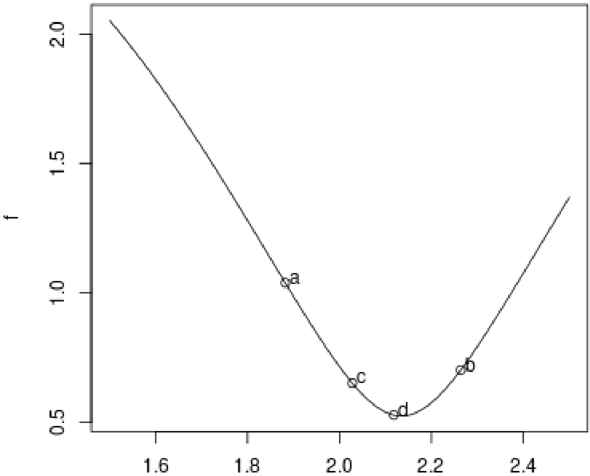
Wizualizacja - animacja



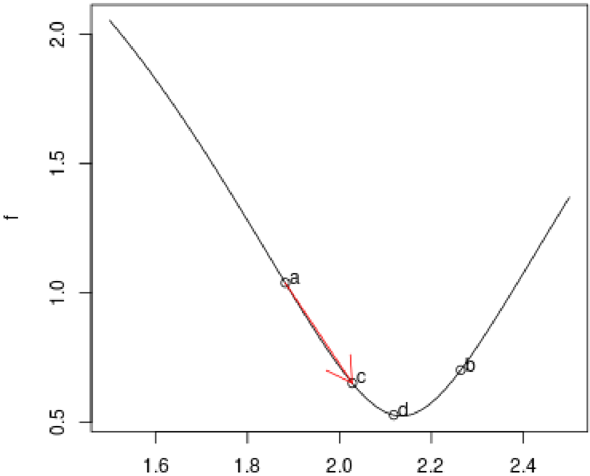
Wizualizacja - animacja



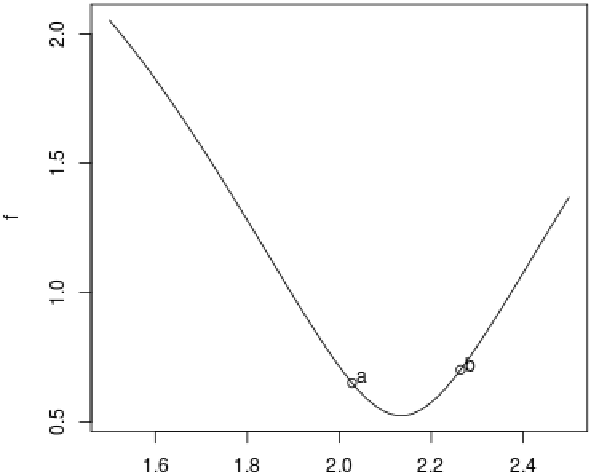
Wizualizacja - animacja



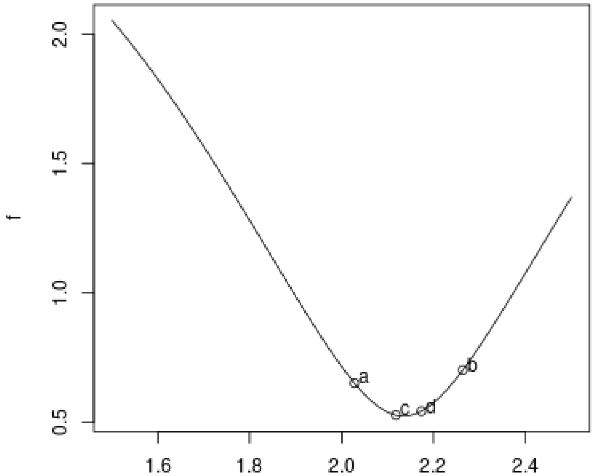
Wizualizacja - animacja



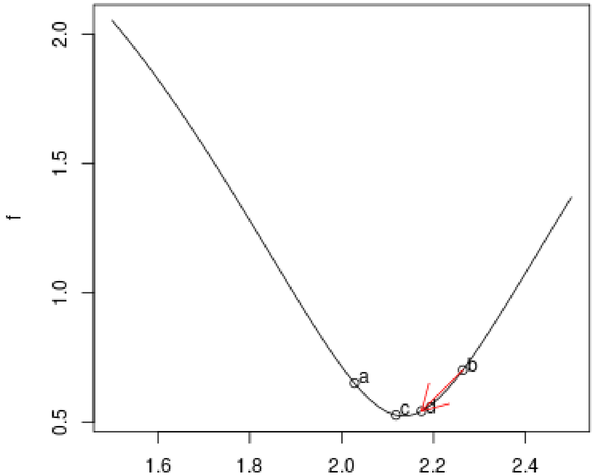
Wizualizacja - animacja



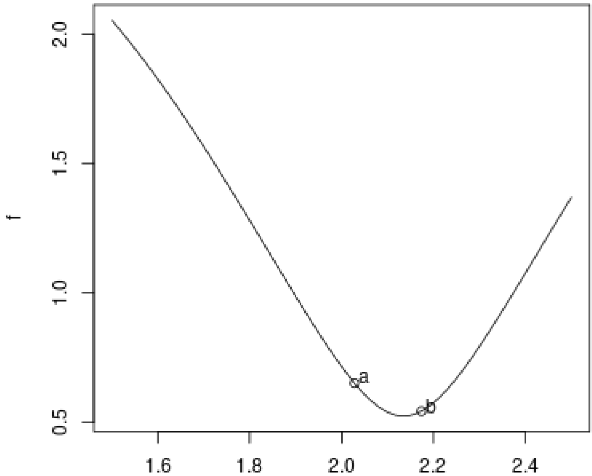
Wizualizacja - animacja



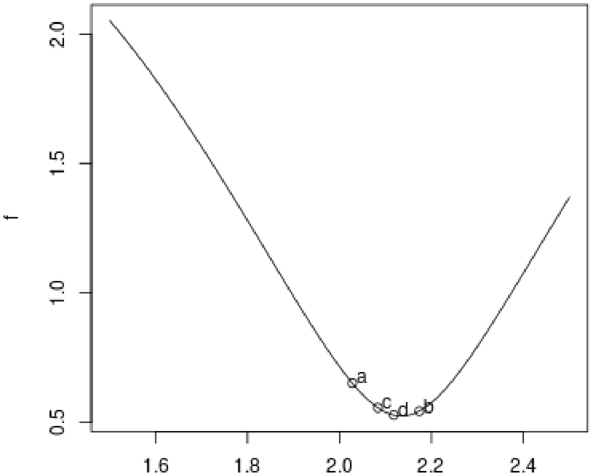
Wizualizacja - animacja



Wizualizacja - animacja



Wizualizacja - animacja



Wizualizacja - animacja