

# Analyse av hastighets- og energiforløp for kule ned krumlinjet bane

T. El-Agroudi<sup>a</sup>, M. A. A. Gjerdseth<sup>a</sup>, F. Gross Maurer<sup>a</sup>, M. Moe Jacobsen<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Institutt for teknisk kybernetikk, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim.

## Sammendrag

Hastighets- og energiforløpet til en kule som rullet rent ned en krumlinjet bane ble numerisk modellert og eksperimentelt analysert med et bildesporingsprogram. Den målte slutfarten var 1,569 m/s, med en standardfeil på 0,02854 m/s. Det tilsvarer 3,088 % lavere enn den teoretiske verdien. En lavere slutthastighet ble begrunnet med unøyaktighet knyttet til oppsett av banen, og mekanisk energitap. Den målte slutfarten var presis, men unøyaktig i forhold til den teoretiske modellen, der energibevarelse og eksakt baneform ble antatt.

## 1. Introduksjon

Sammenhengen mellom bevegelse og energi er grunnmuren i Newtonsk fysikk og bestemmer dynamikken i store deler av den fysiske verden [1]. Et enkelt system hvor dette fenomenet kan analyseres, er det av en kule som ruller langs en bane. Den potensielle energien vil her konverteres til både rotasjons- og translasjonsenergi. Denne rapporten tar for seg et fysisk eksperiment, hvor hastighets- og energiforløpet for en kule som ruller langs en krumlinjet bane analyseres og sammenlignes med en numerisk simulering.

## 2. Teori

Den kinetiske energien til et roterende objekt er summen av translasjonsenergien og rotasjonsenergien

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2, \quad (1)$$

der  $m$  er massen,  $v$  er translasjonsfarten,  $I_0$  er treghetsmomentet rundt senteraksen og  $\omega$  er rotasjonsfarten til objektet [2, s. 546].

Treghetsmomentet er gitt som

$$I_0 = cmr^2, \quad (2)$$

der  $c$  er treghetskonstanten,  $m$  er massen og  $r$  er radiusen til objektet [2, s. 497]. Når rullebetingelsen  $v = \omega r$  [2, s. 541] er oppfylt, det vil si at objektet ruller rent, kan likningene (1) og (2) kombineres til

$$E_K = \frac{1}{2}(1+c)mv^2. \quad (3)$$

Den totale mekaniske energien til objektet som ruller, består av kinetisk energi (3) og den potensielle energien  $mgh$  [2, s. 546]:

$$E_{\text{mekanisk}} = mgh + \frac{1}{2}(1+c)mv^2, \quad (4)$$

hvor  $h$  er høyden objektet befinner seg i, og  $g$  er tyngdeakselerasjonen.

Når objektet ruller rent, vil energien til objektet være bevart og energibevarensloven [2, s. 372] gjelder:

$$mgh_0 + \frac{1}{2}(1+c)mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}(1+c)mv^2, \quad (5)$$

$h_0$  og  $v_0$  er henholdsvis starthøyde og startfart til objektet.

Et numerisk uttrykk for objektets posisjon,  $y(x)$ , kan genereres ved bruk av polynominterpolasjon [3] på et gitt antall festepunkter. Ved å sette  $h = y(x)$  og  $h_0 = y(0)$  inn i (5), kan farten uttrykkes som

$$v(x) = \sqrt{\frac{2g(y(0) - y(x))}{(1+c)} + v_0^2}. \quad (6)$$

For å finne gjennomsnittshastigheten til objektet mellom to posisjoner, der  $x$ ,  $y$ , og  $t$  er kjent, kan følgende kjente likning benyttes:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (7)$$

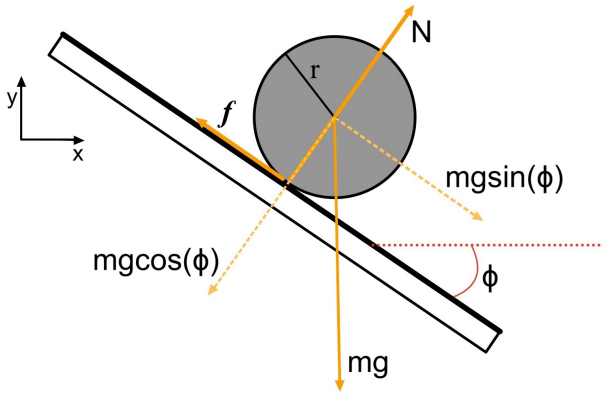
der  $\Delta s = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$  og  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Her er  $x_i$ ,  $y_i$  og  $t_i$  verdiene til punkt  $p_i$ .

I figur 1 vises kreftene på en kule i et vilkårlig punkt på en bane. Newtons 2. lov [4, s. 55] for kreftene, parallelt med underlaget, gir

$$\sum F_{\parallel} = m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = mg \sin(\phi) - f. \quad (8)$$

Dreiemomentet,  $\tau$ , når rullebetingelsen er oppfylt, er gitt ved [4, s. 55]:

$$\tau = fr = I_0 \frac{d\omega}{dt} = \frac{I_0}{r} \frac{dv_{\parallel}}{dt}. \quad (9)$$



**Figur 1:** Kula illustrert med en radius  $r$ , og masse  $m$  i et vilkårlig punkt langs en bane. Krefter som virker på kula er tyngdekraften  $mg$ , normalkraften  $N$  og friksjonskraften  $f$ . Tyngdekraften dekomponeres i to vektorer  $mg \sin(\phi)$  og  $mg \cos(\phi)$ .  $\phi$  er banens helningsvinkel.

Ved å kombinere likning (8) og likning (9), kan friksjonskraften uttrykkes med følgende likning:

$$f = \frac{mg \sin(\phi)}{1 + \frac{mr^2}{I_0}} = \frac{c}{c+1} mg \sin(\phi). \quad (10)$$

Sentripetalakselerasjonen til kula i et punkt langs banen er gitt ved [2, Kap. 6.3]

$$a_{\perp} = v^2 \kappa = \frac{2g(y_0 - y)}{1 + c} \cdot \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}, \quad (11)$$

der likning (6) er brukt med startfarten 0 m/s. Krumningen  $\kappa$  er definert som  $\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$ . Newtons 2. lov for kreftene på kula som virker vinkelrett på banen, gir da et uttrykk for normalkraften  $N$ :

$$N = m(g \cos(\phi) + a_{\perp}). \quad (12)$$

Likningene (10) og (12) kan brukes til å definere en friksjonskoeffisient  $\mu$  slik

$$\mu = \left| \frac{f}{N} \right|. \quad (13)$$

Friksjonskraftens maksimale størrelse er begrenset av den statiske friksjonskonstanten  $\mu_s$ , og normalkraften  $N$  [4, s. 55]:

$$f \leq \mu_s N = \mu_s m(g \cos(\phi) + a_{\perp}). \quad (14)$$

Farten uttrykt ved tiden kan finnes numerisk ved å bruke en variant av Eulers metode [5]. Den avhenger av at  $v(x_n)$  og helningsvinkelen  $\phi(x_n)$  til banen er kjent i alle posisjoner  $x_n$ . Da er den horisontale hastigheten på et intervall  $n$  gitt ved  $v_{x,n} = v_n \cos(\phi(x))$ . Den gjennomsnittlige horisontale hastigheten på intervallet  $n$  er da  $\langle v_x \rangle_n = (v_{x,n-1} + v_{x,n})/2$ .

Likning (7) gir

$$\Delta t_n = \frac{\Delta x_n}{\langle v_x \rangle_n}. \quad (15)$$

Tidspunktet for intervall  $n$  er da gitt som

$$t_n = t_{n-1} + \Delta t_n, \quad (16)$$

og dermed kan farten  $v(x)$ , kobles med farten  $v(t)$ :

$$v(t_n) = v(x_n). \quad (17)$$

Når fysiske størrelser måles, må usikkerheten til målingene beregnes. Ved å gjenta samme måling  $N$  ganger, kan gjennomsnittet  $\bar{x}$  bestemmes [6]:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (18)$$

Standardavviket

$$\delta x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (19)$$

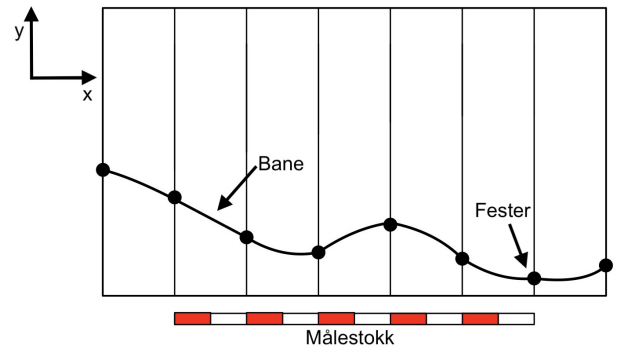
er et mål på usikkerheten i hver enkelt måling [6]. Standardfeilen

$$\delta \bar{x} = \frac{\delta x}{\sqrt{N}} \quad (20)$$

er da et generelt mål på usikkerheten i gjennomsnittet [6].

### 3. Metode

Festepunktene til banen, illustrert i figur 2, ble beregnet i Python [8]. Høyden til de åtte festepunktene ble bestemt ved å tildele dem tilfeldige verdier mellom 50 mm og 300 mm. Denne operasjonen ble gjentatt helt til visse krav var oppfylt. Disse var at første festepunkt skal ligge øverst, og at ulikhet (14) var oppfylt. Minsteverdien til statisk friksjonskoeffisient med de brukte materialene,  $\mu_s$ , ble anslått



**Figur 2:** Den eksperimentelle banen. 8 skruferster ble brukt for å forme banen. Meterstaven brukes som referanse i Tracker [7].

til å være  $0,2$  [9]. Tregghetskonstanten til en kule,  $c$ , ble satt til  $2/5$  [9].

Festepunktene ble festet til skinner, symbolisert med vertikale striper i figur 2, ved bruk av skrufester.

En kule med masse  $m = 29,7 \pm 0,1$  g og  $d = 21 \pm 0,1$  mm ble rullet ned banen. Usikkerheten ble anslått ut fra måleinstrumentenes nøyaktighet. Kulens posisjon ble målt med et kamera plassert vinkelrett på banen. Det ble brukt en bilderate på 30 bilder per sekund. Filmen ble så overført til en pc og analysert i bildesporingsprogrammet Tracker [7]. Funksjonen auto-tracker ble brukt for å spore kulen. Funksjonen genererte tabeller med verdier for x- og y-posisjon og tiden t. For å få riktig størrelsesorden på aksene, ble meterstokken brukt som referanse. Ut i fra dataen for de to siste bildene og likning (7) ble kulens slutfart beregnet.

Forsøket ble gjentatt 10 ganger. Middelverdien og standardfeil til slutfarten ble beregnet ved bruk av henholdsvis likning (18) og (20).

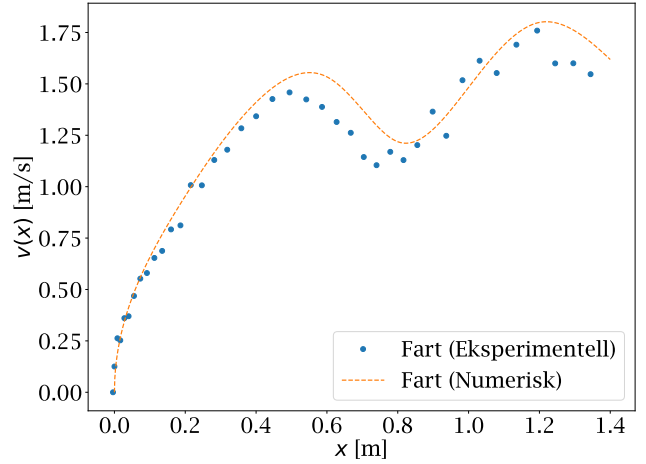
Dataene til et tilfeldig valgt forsøk ble eksportert til Python. Kulens fart langs banen ble beregnet ved bruk av likning (7) og kulens totale energi ble beregnet ved bruk av likning (4), med  $g = 9,81$  N/m [10]. For å finne energi per masse, ble resultatet delt på massen  $m$  ettersom den numeriske modellen, som introduseres nedenfor, regner med masse 1.

Den numeriske modellen for kulens posisjon ble beregnet ut i fra festepunktene og interpolasjonsmetoden CubicSpline fra SciPy-biblioteket [11]. Der ble det beregnet et dobbelt deriverbar tredjegradspolynom utifra festepunktene og en fast steglengde på 1 mm. Videre ble fartsgrafen,  $v(x)$ , friksjonskoeffisient-grafen,  $\mu(x)$ , og energi-per-masse-grafen,  $E/m(x)$ , plottet ved bruk av henholdsvis likning (6), (13) og (4).

Den horisontale posisjonen gitt som en funksjon av tiden,  $x(t)$ , ble beregnet med en variant av Eulers metode. Ved bruk av likning (15) og (16) ble hver x posisjon knyttet opp mot et tidspunkt. Steglengden  $\Delta x_n$  ble satt til 1 mm, og startfarten samt  $t_0$  ble satt til 0.

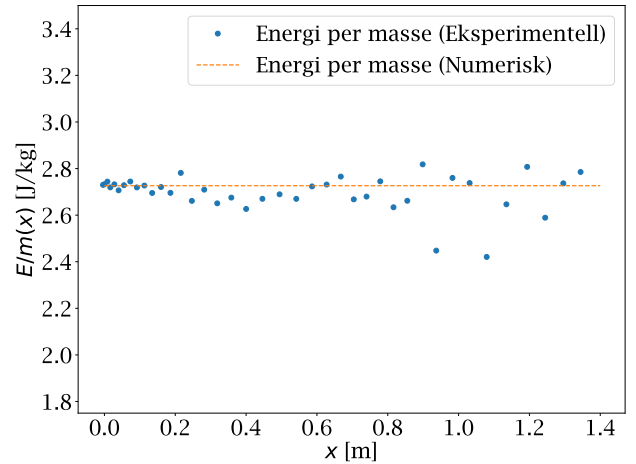
#### 4. Resultater

Kulens gjennomsnittlige slutfart ble målt til å være  $1,569$  m/s, med en standardfeil på  $0,02854$  m/s.



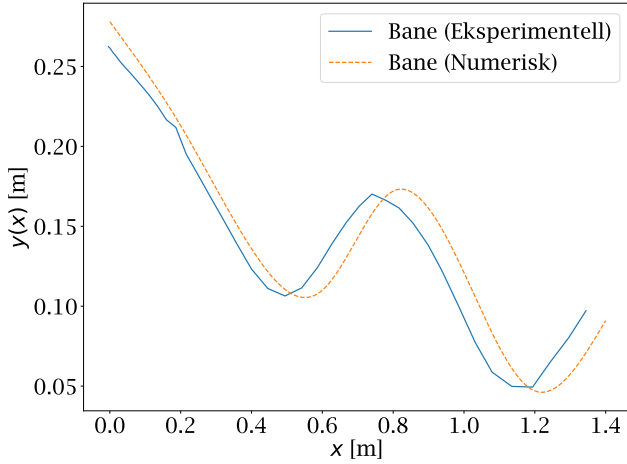
**Figure 3:** Eksperimentell og numerisk fart til kulen med hensyn på x-posisjon.

I figur 3 er den numeriske farten plottet mot den eksperimentelle farten til et tilfeldig valgt forsøk. Den numeriske slutfarten i  $x = 1,4$  m ble beregnet til  $1,619$  m/s. Dermed er den eksperimentelle slutfarten  $3,088\%$  lavere enn den numeriske slutfarten.



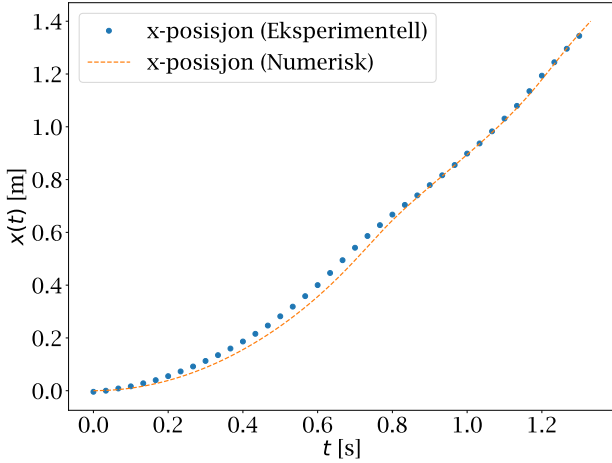
**Figure 4:** Eksperimentell og numerisk energi per masse til kulen med hensyn på x-posisjon.

I figur 4 er energi per masse til kulen plottet mot horisontal posisjon. Den numeriske grafen viser en konstant energi per masse.



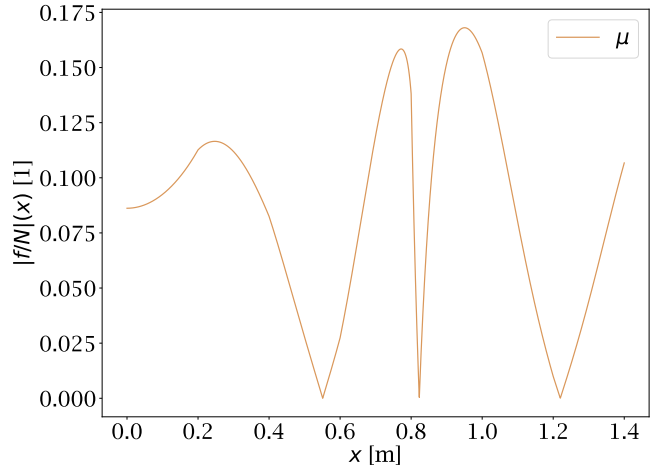
**Figur 5:** Den numerisk beregnede banen plottet mot den eksperimentelle baneformen, målt i Tracker [7].

Den eksperimentelle banen er plottet mot den numeriske banen i figur 5. Den eksperimentelle banen ser ut til å være noe forskyvet mot venstre i forhold til den numeriske. Sluttpunktet til den eksperimentelle banen ligger litt før  $x = 1,4$  m.



**Figur 6:** Eksperimentell og numerisk x-posisjon med hensyn på tiden  $t$ .

Et plott av  $x(t)$  er vist i figur 6. Det ble observert at kulen bruker tilnærmet lik tid gjennom banen som numerisk beregnet.



**Figur 7:** Numerisk beregnet friksjonskoeffesienten  $\mu = |\frac{f}{N}|$  med hensyn på x-posisjon.

Grafen i figur 7 viser friksjonskoeffesienten  $\mu = |\frac{f}{N}|$  med hensyn på x-posisjon. Grafens toppunkt, der  $\mu \approx 0,17$ , samsvarer med posisjonen i figur 5, hvor banehellingen er brattest.

## 5. Diskusjon

Den eksperimentelle slutfarten ble i resultatene kalkulert med en standardfeil på 0,02854 m/s, som er over 50 ganger mindre enn slutfartens verdi på 1,569 m/s. Denne usikkerheten er derfor akseptabel, og tyder på et presist resultat ut fra eksperimentell måling.

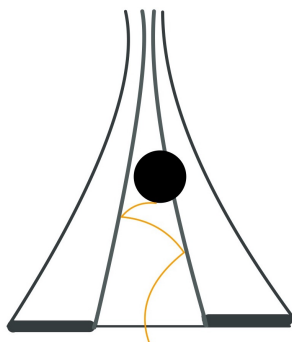
Kulens slutfart var 3,088% lavere enn den numeriske. Ettersom banen er relativt kort og energi i et rent rullende system ideelt sett er bevart, er dette et vesentlig avvik fra den numeriske modellen. Resultatet representerer dermed ikke den ideelle modellen på et akseptabelt nivå. Dette kan både skyldes at den eksperimentelle baneformen ikke nøyaktig gjenspeiler den teoretiske, og et tap i kulens mekaniske energi.

Det at den eksperimentelle banen i figur 5 er kortere og litt venstre-forskyvet kan skyldes at meterstokken, som bruktes for å opprette en referanse i Tracker[7], lå litt foran den faktiske banen. Den var derfor nærmere kameraet enn banen, og medførte da at lengder ble oppfattet litt kortere enn det de faktisk var. Likevel er noen av punktene høyere enn på den teoretiske banen. Dette kan begrunnes med unøyaktig måling av festepunktene med målestokk.

En spesielt relevant observasjon, er at sluthøyden er høyere i den eksperimentelle banen enn i den teoretiske, slik at netto høydeforskjell i banen er mindre. Dette medfører mindre forskjell i potensiell energi totalt i systemet, som videre fører til mindre kinetisk energi på slutten. Dette kan være en betydelig faktor for hvorfor slutfarten er lavere enn den teoretiske.

Fysisk kan et hastighetsfall begrunnes i at kulen har tapt mekanisk energi i løpet av banebevegelsen. Det kan kvalitativt sees fra figur 4 at kulens mekaniske energi følger en generelt negativ trend. En negativ trend betyr at mekanisk energi er tapt i systemet. Dette er en kontrast til den konstante numeriske grafen, hvor energibevarelse er antatt.

Fra figur 7, kan det observeres at friksjonskoeffisienten aldri overskrider den statiske friksjonskoeffisienten på 0,2 nevnt i avsnitt 3. Derfor skyldes energitapet antageligvis ikke friksjon mot underlaget. En grunn for tapet kan derimot være at kulen har en sideveisbevegelse normalt på translasjonsretningen, hvor den blir kastet frem og tilbake mellom kantene på banen. Dette er illustrert i figur 8, og medfører at energi blir tapt i støtet med kantene. I tillegg kan litt av kulens mekaniske energi ha blitt tapt til luftmotstand.



**Figur 8:** Et tverrsnitt av banen og kulens sideveisbevegelse der den blir kastet frem og tilbake mellom banens kanter.

Det kan også sees fra hastighetsgrafen i figur 3 og energi grafen i figur 4 at det er en stor variasjon i målingene. Noen av målingene er over teoretisk maksimalenergi/fart. Disse ujevnheterne kan skyldes unøyaktig hastighetsmåling fra Tracker[7]. En årsak kan være at programmet har sporet forskjellige deler av kulen. Dette forklarer også at unøyaktigheten blir større ved større hastigheter.

Selv om hastigheten generelt er mindre enn den teoretiske, viser figur 6 at kulen bruker omtrent like lang tid på å traversere hele banen. Denne motsigelsen kommer antagelig fra at den eksperimentelle banen er kortere enn den numeriske.

## 6. Konklusjon

Slutfarten til kulen ble målt til 1,569 m/s, med en standardfeil på 0,02854 m/s. Resultatet anses som presist grunnet den lave standardfeilen. Der er likevel en unøyaktig representasjon av den teoretiske modellen da den er 3,088% lavere enn den teoretiske slutfarten.

Det eksperimentelle fartstapet, sammenliknet med den teoretiske modellen, ble forklart med unøyaktighet i banen,

som stammet fra unøyaktig måling. I tillegg kan et mekanisk energitap skyldes kollisjoner med banens kanter og luftmotstand.

## Referanser

- [1] University of Oregon: *21. century science*. [http://abyss.uoregon.edu/~js/21st\\_century\\_science/lectures/lec03.html?fbclid=IwAR14G6BMVemg3s67feMorTC0oNnk1lhZkG7cqH6bl6bC\\_mRvvAoqUAcXMKw](http://abyss.uoregon.edu/~js/21st_century_science/lectures/lec03.html?fbclid=IwAR14G6BMVemg3s67feMorTC0oNnk1lhZkG7cqH6bl6bC_mRvvAoqUAcXMKw), (sjekket 19.10.2020).
- [2] S. J. Link, J. Sanny og W. Moebs: *University Physics, Volume 1*. OpenStax: Rice University, 2018.
- [3] *Interpolasjon*. <https://no.wikipedia.org/wiki/Interpolasjon>, (sjekket 11.10.2020).
- [4] Hauge, E. H. og J. A. Støvneng: *Grunnleggende fysikk - klassisk mekanikk og varmelære*. tapir akademisk forlag, 2. utgave, 2010.
- [5] Hervik, Sigbjørn: *Eulers metode*. [https://snl.no/Eulers\\_metode](https://snl.no/Eulers_metode), (sjekket 12.10.2020).
- [6] Lilledahl, M. B. og V. Risinggård, Institutt for fysikk, NTNU: *Målinger og usikkerhet*. <https://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fyslab/files/usikkerhet.pdf>, (sjekket 11.10.2020).
- [7] Brown, Douglas: *Tracker*. <http://physlets.org/tracker/>, (lastet ned 28.09.2020).
- [8] Foundation, Python Software: *Python*. <https://www.python.org/>, (lastet ned 28.09.2020).
- [9] TFY41xx Fysikk: *Labprosjekt Vår 2020 - Labligninger*. <https://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fyslab/files/labligninger.pdf>, (sjekket 16.10.2020).
- [10] Hofstad, Knut: *tyngdens akselerasjon*. [https://snl.no/tyngdens\\_akselerasjon](https://snl.no/tyngdens_akselerasjon), (sjekket 14.09.2020).
- [11] SciPy developers: *scipy.interpolate.CubicSpline*. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.interpolate.CubicSpline.html>, (lastet ned 14.09.2020).