Vorlesung 1

Wozu Analysis ?

Endliche Mengen knnen *sehr gross* sein. Manchmal ist es praktisch, eine diskrete Struktur durch eine **kontinuierliche** Struktur zu *approximieren.*

Ziel der Vorlesung: Bereitstellen wichtiger Techniken aus der Analysis, u.a.
- Approximation
- Differential -und Integralrechnung in einer und mehreren Variablen
- wichtige Funktionsklassen und ihre Eigenschaften
- Differentialgleichungen

Quantoren:
$\forall x$ bedeutet fr alle x
$\exists x$ bedeutet es existiert ein x

Kapitel 1: Reelle Zahlen

Bem. 1.1:

$(\mathbb{R}, +, \bullet)$ ist angeordnet, d.h. $\exists$ ein Praedikat $a > 0$ mit folgenden Eigenschaften
1) $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt **genau eine** der 3 Aussagen $a = 0, a > 0$ *oder* $-a > 0$
2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ gilt: $a + b > 0$ *und* $a \cdot b > 0$

Schreibweisen:
$a > b$ steht fr $a - b > 0$
$a < b$ steht fr $b - a > 0$
$a \geq b$ steht fr $a > b$ oder $a = b$
$a \leq b$ steht fr $a < b$ oder $a = b$

Bem 1.2:

Die Menge der Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ *kann nicht angeordnet werden.*
Beweis:
Angenommen, $\mathbb{C}$ waere angeordnet, Sei $a \in \mathbb{C}$

$a > 0 \Rightarrow a \cdot a > 0$
$-a > 0 \Rightarrow a^2 = (-a)(-a) > 0$

Fuer beides $\Rightarrow a^2 > 0 \forall a \neq 0$

insbesondere $1 = 1 \cdot 1 > 0 \Rightarrow 0 > -1 = i^2$ ↯ Widerspruch

Def. 1.3:

$M \subseteq \mathbb{R}$ heit *nach oben beschraenkt*, falls $\exists s_0 \in \mathbb{R}$ mit $a \leq s_0 \ \forall a \in M$
s_0 heisst *obere Schranke von M.*

Bsp:

$M = (0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ jedes $s_0 \geq 1$ ist eine obere Schranke. In diesem beispiel liegt kein obere Schranke in M.

Bem. 1.4:

$\mathbb{R}$ erfllt das *Supremumsaxiom:* Jede nichtleere nach oben beschrnkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ besitzt eine **kleinste obere Schranke sup**$M \in \mathbb{R}$, das *Supremum von M.*

Bsp:

$sup\{\frac{-1}{n} : n \in \mathbb{N} = 0\}$

Konventionen:
sup $M = \infty$ falls M nicht nach oben beschrnkt
sup $\emptyset = -\infty$
$-\imath < a < \infty \forall \in \mathbb{R}$

Bem. 1.5:

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erfllt *nicht* das Supremumsaxiom
z.B.
$M = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 \leq 2\}$ hat keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$: $supM = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Bem 1.6:

Jede nichtleere nach unten beschraenkte teilmenge M von $\mathbb{R}$ besitzt eine *grte untere Schranke inf $M \in \mathbb{R}$, das Infimum von M.*

Falls $supM \in M$, heit $supM$ auch *Maximum* von M
Falls $infM \in M$, heit $infM$ auch *Minimum* von M

Satz 1.7:

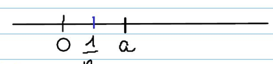
$\mathbb{R}$ **ist archimedisch** d.h. $\forall a \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ mit $a < n$. *Insbesondere gibt es keine unendlich grosse Zahlen in* $\mathbb{R}$.

Widerspruchsbeweis:

Angenommen es gilt nicht: $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $a < n$
$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\quad a \geq n$
$\Rightarrow \mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt.
Sei $s = \sup \mathbb{N}$. s ist die kleinste obere Schranke $\Rightarrow$ $s-1$ ist keine obere Schranke von $\mathbb{N}$
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $s-1 < n$
$\Rightarrow s < n+1$ und $n+1 \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ s ist keine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Widerspruch. $\square$

<ins>Folgerung</ins>: Sei $a > 0$. $\Rightarrow \frac{1}{a} > 0$ Nach Satz 1.7 existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{a} < n$

$\Rightarrow \frac{1}{n} < a$



$\Rightarrow$ Es gibt keine unendlich kleinen Zahlen in $\mathbb{R}$.

Satz 1.8:

Die rationalen Zahlen sind dicht in $\mathbb{R}$ d.h. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b$ existiert $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$

Konsquenz:
Jedes $a \in \mathbb{R}$ kann *beliebig gut durch Brche approximiert werden:*
$\forall n \in \mathbb{N} \exists r \in \mathbb{Q}$ mit $a - 10^{-n} < r < a$
$\Rightarrow a \in (r, r + 10^{-n})$
Damit wird a mit einer Genauigkeit von 10^{-n} approximiert.