Vorlesung 3

Letztes Mal: <u>Wichtige Ungleichungen</u>

Dreiecksungleichung: $|x+y| \leq |x|+|y|$ $\quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Umgekehrte Dreiecksungleichung: $|x+y| \geq ||x|-|y||$

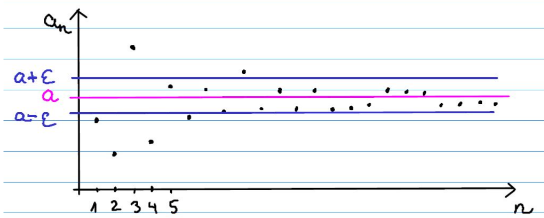
Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, wobei $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Konvergenz von Folgen

Def. 3.2:

Eine komplexe Folge $(a_n)n \in \mathbb{N}_n$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{C}$, falls für jede Genauigkeit $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$

Kurzschreibweise: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n - a| < \varepsilon$
a heißt **Grenzwert**. Man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \longrightarrow_{n\to\infty} a$.



Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, liegen für jede Präzision $\varepsilon > 0$ nur endlich viele a_n außerhalb von $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Bsp. 3.3:

$a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

D.h. $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}$,...

Beh: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Sei $\epsilon > 0$. Dann ist $\frac{1}{\epsilon} \in \mathbb{R}$. da $\mathbb{R}$ archimedisch ist, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\epsilon} < n_0 \Leftrightarrow \frac{1}{n_0} < \epsilon$ $(\star)$
Für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} <_\star \epsilon$

Wie kommt man auf diesen Beweis ?
Sei $\epsilon > 0$. Suche n_0, so dass $\forall n \geq n_0, |a_n - a| < \epsilon, |a_n - a| = \frac{1}{n}$

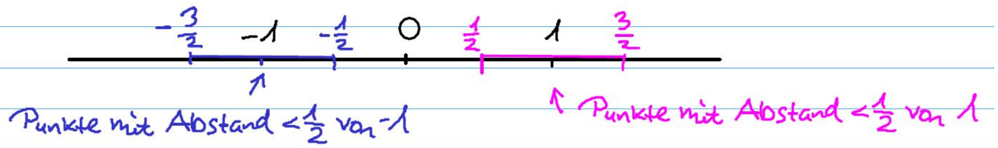
Bedingung: $\forall n \geq n_0, \frac{1}{n} < \epsilon = \frac{1}{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$
Wähle $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$.

Bsp. 3.4:

$a_n = (-1)^n$,$n \in \mathbb{N}$.
Beh. $(a_n)n \in \mathbb{N}$ konvergiert nicht. Solche Folgen heißen divergent.
Konvergenz bedeutet: $\exists a \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n - a| < \epsilon$
Für Divergenz müssen wir zeigen:

$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |a_n - a| \geq \epsilon, (\star)$

Es gilt: $|a_n - a| = |1 - a|$ oder $|a_n - a| = |-1 - a|$
Jedes $a \in \mathbb{R}$ hat von 1 oder -1 einen Abstand $\geq \frac{1}{2}$



$\Rightarrow (*)$ gilt für $\varepsilon = \frac{1}{2}$

Rechenregeln für Grenzwerte:

Satz 3.5:

Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, so gilt auch:

a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
b) $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a, \forall a \in \mathbb{R}$
c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
d) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$
Spezialfall: $a_n = 1, \forall n \Rightarrow a = 1, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$, falls $b \neq 0$

Bsp

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n-7}{2n^2+1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4+\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}$

$\underset{(d)}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{4+0-0}{2+0}$

$= \frac{4}{2} = 2$

Intuition: $2n^2+1 \approx 2n^2$
für großen $4n^2+3n-7 \approx 4n^2$
Bruch $\approx \frac{4n^2}{2n^2} = 2$

$\lim \frac{1}{n} = 0 \underset{(c)}{\Rightarrow} \lim \frac{1}{n^2} = 0$
$\Downarrow (b) \qquad \Downarrow (b)$
$\lim \frac{3}{n} = 0 \qquad \lim -\frac{7}{n^2} = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+4n^2+2}{8n^5-1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\frac{2}{n^5}}{8-\frac{1}{n^5}}$

$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\frac{2}{n^5}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-\frac{1}{n^5}\right)} = \frac{0}{8} = 0$

Intuition: Für großen ist
Bruch $\approx \frac{n^3}{8n^5} = \frac{1}{8n^2} \longrightarrow 0$

Def. 3.6:

$(a_n)n \in \mathbb{N}$ *divergiert* gegen $+\infty$, falls $\forall K > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a_n \geq K$
$(a_n)n \in \mathbb{N}$ *divergiert* gegen $-\infty$, falls $\forall K > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a_n \leq -K$

Man sagt auch: Die Folge **konvergiert uneigentlich**

Beachte: Nicht jede divergente Folge konvergiert uneigentlich. Bsp: $(-1)^n$

Bsp. für uneigentliche Konvergenz:
$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$
$\lim_{n\to\infty}(n^3 - n) = \infty$
$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es folgende Möglichkeiten:
- Konvergenz gegen $a \in \mathbb{R}$
- uneigentliche Konvergenz gegen $-\infty$ oder $+\infty$
- Keines von beiden

Def 3.7:

Folgen $(a_n)_{n\exists\mathbb{N}n}(b_n)_{n\exists\in\mathbb{N}}$ von Zahlen $\neq 0$ heißen **asymptotisch gleich**, falls

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$, $(\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 1)$

Man schreibt: $a_n \simeq b_n$ für $n \to \infty$

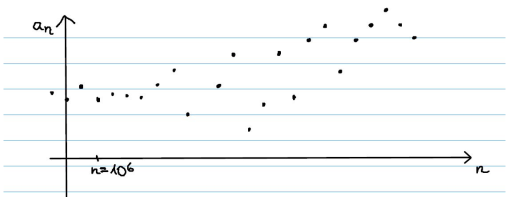
Bsp. 3.8:

$n \simeq n+1$ Denn: $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$

$n_0^2 \simeq n^2+7n+13$ Denn: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+7n+13}{n^2} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{7}{n}+\frac{13}{n^2}) = 1$

$n^5 \simeq n^5+3n^4+17n^3-2n^2+3n+\pi$

Bemerkung: Bei der Konvergenz und der asymptotischen Gleichheit kommt es nur auf die großen Folgenglieder an.



Satz 3.9:

Jede konvergente Folge $(a_n)n \in \mathbb{N}$ reeller Zahlen ist beschränkt.
D.h. $\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq c$

Satz 3.10:

a) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = n, \lim_{n\to\infty} b_n = b$ und $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, dann gilt:
$a \leq b$

b) **Einschließungsregel:** Es gelte $a_n \leq b_n \leq c_n$ fr alle bis auf endlich viele n. Falls $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert mit
$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \lim_{n\to\infty} b_n$,
dann gilt: $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

Beweis von b): Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1\ |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_2\ |c_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3}$

Sei $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. und $n \geq n_0$. Dann gilt

$$|b_n - \alpha| \leq \underbrace{|b_n - a_n|}_{= b_n - a_n} + \underbrace{|a_n - \alpha|}_{< \frac{\varepsilon}{3}}$$

$$\leq c_n - a_n = |c_n - a_n| \leq |c_n - \alpha| + |\alpha - a_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$\Rightarrow |b_n - \alpha| < \varepsilon$ $\square$