Vorlesung 2

Dezimaldarstellung: $\pi = 3.12415$

Sobald man die Dezimaldarstellung abbricht, erhaelt man man nur eine Approximation an π.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Dezimaldarstellung von a ist von der Gestalt
$\pm d_0 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot ...$
wobei $d_0 \in \mathbb{N}_0, d_i \in \{0, 1, ..., 9\} \forall i \in \mathbb{N}$

Jede abbrechende Dezimalzahl laesst sich als rationale zahl schreiben:
$d_0 \cdot d_1 \cdot ...d_n = \frac{p_n}{10^n}$
wobei $p_n \in \mathbb{N}_0 die Dezimalziffern d_0 d_1 ...d_n$ besitzt.

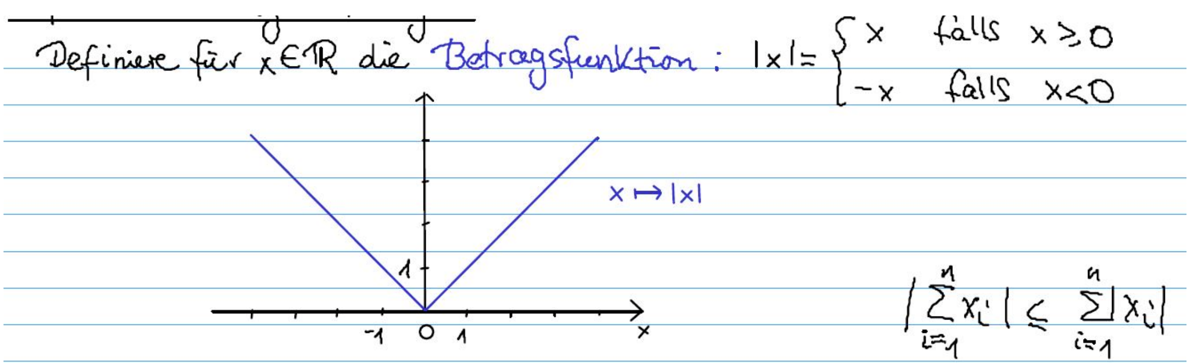
Zur positiven Dezimalzahl $d_0 \cdot d_1 d_2 ...$ gehoert die reelle zahl $\sup r_n \in \mathbb{Q} : p \leq 10^n a, \frac{p}{10^n} \leq a$
Max existiert, weil die Menge nach oben beschrnkt ist. Schreibe $\frac{p_n}{10^n}$ als $d_0 \cdot d_1 ...d_n$

Dies liefert die Dezimaldarstellug $d_0 \cdot d_1 ...$ von a.
Dies liefert eine *Bijektion zwischen* $\mathbb{R}$ *und den durch Entwicklung entstandenen Dezimalzahlen.*

Berechenbare Zahlen:

Sei B $= a = \pm d_0 \cdot d_1 d_2 ... \in \mathbb{R} : \exists$ Programm P_a mit $P_a(n) = d_0 \cdot d_1 ...d_n \forall n$
Fuer eine gegebene Maschine ist ein Programm eine endliche Folge von Zeichen eines endlichen Alphabets.
$\Rightarrow$ Es gibt nur abzaehlbar viele Programme
$\Rightarrow$ B ist abzaehlbar
$\mathbb{R}$ ist ueberabzaehlbar $\Rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$
Wenn man eine Zahl gleichverteilt aus [0,1] zieht, ist sie mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht in B.

Kapitel 2 Ungleichungen

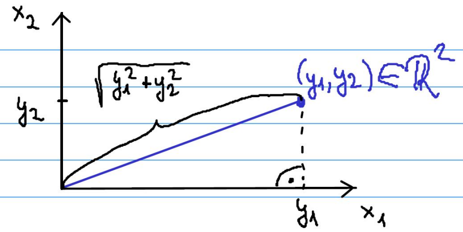


Wichtige Ungleichungen fr den Betrag:

1) Dreiecksgleichung $|x + y| \leq |x| + |y| \forall x, y \in \mathbb{R}$
mit Gleichheit genau fr $x \cdot y \geq D$, d.h. fr x,y mit gleichen Vorzeichen.
Allgemeiner gilt: $|\sum_{i=1}^n x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \forall n \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$

2) Umgelehrte Dreiecksungleichung:
$|x + y| \geq ||x| - |y|| \forall x, y \in \mathbb{R}$
mit Gleichheit genau fuer $x \cdot y \leq 0$, d.h. fr x,y mit verschiedenen Vorzeichen

Fr $n \geq 2$ ist $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, ...x_n) : x_i \in \mathbb{R} \forall 1 \leq i \leq n\}$
Die *Laenge* eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch $||x|| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$



Das Skalarprodukt von $x=(x_1,..,x_n)$ und $y=(y_1,..,y_n)$ ist definiert durch

$$<x,y> := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\Rightarrow \|x\|^2 = <x,x>$

Satz 2.1 (Couchy-Schwarz-Ungleichung):

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $| < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y||$
mit Gleichheit genau dann, wenn x=0,y=0 oder $x = \lambda \in \mathbb{R}$
Beweis:
Spezialfall: $||x|| = 0$
$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ Ungleichung gilt mit Gleichheit, da $< x, y >=< D, y >= D, ||x|| = 0$ Analog fr $||y|| = 0$
Im Folgenden sei $||x|| > 0, ||y|| > 0$ Setze $a_i = \frac{|x_i|}{||x||}$, $b_i = \frac{|y_i|}{||y||}$

Es gilt: $0 \leq (a_i - b_i)^2 = a_i^2 - 2a_ib_i + b_i^2 \Leftrightarrow a_ib_i \leq \frac{1}{2}(a_i^2 + b_i^2)$

Mit Gleichheit genau für $a_i = b_i \Leftrightarrow |x_i| = \frac{\|x\|}{\|y\|}|y_i|$ (2)

Aufsummieren von (1): $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|}{\|x\|}\frac{|y_i|}{\|y\|} \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^2}{\|x\|^2}+\frac{y_i^2}{\|y\|^2}\right) = \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{\|x\|^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{\|y\|^2}\sum_{i=1}^{n}y_i^2}_{=1}\Bigg) = 1$$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leq \|x\|\cdot\|y\|$ (3)

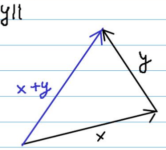
Damit folgt Couchy Schwarz: $|<x,y>| = |\sum_{i=1}^{n} x_iy_i| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \overset{(3)}{\leq} \|x\|\cdot\|y\|$

Gleichheit $\Leftrightarrow$ alle x_iy_i haben das gleiche Vorzeichen

Gleichheit wegen (2) genau falls $x=\lambda y$ mit $\lambda = \frac{\|x\|}{\|y\|}$. $\square$

Auch im $\mathbb{R}^n$ gilt die Dreiecksungleichung:

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n$



Kapitel 3: Folgen

Eine Folge$(a_n)_n \in \mathbb{N}$ Konplexe Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}, n \longmapsto a_n$
Man schreibt auchc $a_0, a_1, a_2...$

Folgen entstehen z.B. durch Rekursionen

Bsp. 3.1:

Sei $q \in \mathbb{R}$. Setze $a_0 = 1, a_{n+1} = q \cdot a_n \ \forall n \in \mathbb{N}_0$
Die gleiche Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ kann man explizit durch
$a_n = q^n, n \in \mathbb{N}_0$, beschreiben.

Oft interessiert man sich fr das *asymptotische Verhalten* einer Folge. Im Beispiel haengt das von q ab. z.B.

- $q = 2 : a_n = 2^n$strebt nach ∞ - $q = \frac{1}{2} : a_n = \frac{1}{2^n}$ strebt nach 0 - $q = -1 : a_n = (-1)^n$ hpft zwischen -1 und 1.

Def. 3.2:

Eine komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ **konvergiert gegen** $a \in \mathbb{C}$, alls fr jede Genauigkeit $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass fr alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$
Kurzschreibweise: $\forall\varepsilon > 0\exists n_0 \in \mathbb{N}\forall n \geq n_0|a_n - a| < \varepsilon$
a heisst **Grenzwert**. Man schreibt
$lim_{n\to\infty}a_n = a$ **oder** $a_n \to^{n\to\infty} a$