Vorlesung 4

Letztes Mal: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen kann folgendes Verhalten haben:

1) Konvergent: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$
2) divergent
   a) uneigentlich konvergent $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$
   b) nichts von alldem

Konvergent $\Rightarrow$ beschränkt
beschränkt $\not\Rightarrow$ konvergent

Bei der Konvergenz kommt es auf endlich viele Folgenglieder nicht an.

Bsp. 3.11:

$b_n = \frac{1}{n+\sqrt{n+5}}, n \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $0 \leq b_n \leq \frac{1}{n}, n \to \infty$

Einschließungsregel $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Def. 3.12:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heit monoton
wachsend falls $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$
fallend falls $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$

Gilt sogar $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$, so heit die Folge streng monoton wachsend.
Gilt sogar $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$, so heit die Folge streng monoton fallend.

Satz 3.13:

Für jede monoton wachsende/fallende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$gilt:

$\lim_{n\to\infty} a_n = sup_{n\in\mathbb{N}} a_n, inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Insbesondere ist jede beschränkte monotone Folge konvergent und jede unbeschränkte monotone Folge ist uneigentlich konvergent gegen $\pm\infty$.
Beweis fr monoton wachsende Folgen

Fall $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt: $\qquad$ Dann existiert $s = sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$

Sei $\epsilon > 0$. Da s die kleinste obere Schranke der a_n ist, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit
$a_{n_0} > s - \epsilon$

(Falls es so ein n_0 nicht gbe, wre $a_n \leq a - \epsilon \forall n$. Dann wre $s - \epsilon$ eine kleinere obere Schranke.)

Wegen der Monotomie gilt: $s - \epsilon < a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq a_{n_0+2} \leq ... \leq s$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad |a_n - s| < \epsilon \quad \Rightarrow lim_{n\to\infty} a_n = s.$

Fall $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ...$
$\Rightarrow$ Die Folge ist nach oben unbeschränkt $\Rightarrow sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \infty$
$\Rightarrow \forall K \qquad \exists n_o \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > K$
Monotonie $\Rightarrow \forall n \geq n_0 \qquad a_n \geq a_{n_0} > K$
$\Rightarrow lim_{n\to\infty} a_n = \infty = sup_{n\in\mathbb{N}} a_n. \qquad \boxdot$

Anwendung: Satz 3.14:

Der Grenzwert der Folge $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, n \in \mathbb{N}$ existiert

$e := lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = sup_{n\in\mathbb{N}}(1 + \frac{1}{n})^2$
heißt Eulerische Zahl (Euler,1728) $\qquad e \approx 2,718...$

Beh: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend

Zu zeigen: $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \quad \forall n\geq 2$

Es gilt: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n \overbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}^{=\frac{n}{n-1}}$

$= \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}} = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = 1-\frac{1}{n^2}$

Beweis:

$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1}$

Bernoullische Ungleichung: $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n\in\mathbb{N}_0 \quad \forall x>-1$

Anwenden mit $x=-\frac{1}{n^2} > -1 \quad \forall n\geq 2$ liefert:

$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \left(1-\underbrace{n\cdot\frac{1}{n^2}}_{=\frac{1}{n}}\right)\frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n-1} = 1$

Beh: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt, d.h.

$\exists c \quad \forall n \quad a_n \leq c$

Binomische Formel:

$\forall a,b\in\mathbb{R} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \binom{(a+b)^n=\sum_{k=0}^n n}{k a^k b^{n-k}}$

Anwenden:

$a_n (1+\frac{1}{n})^n = \binom{\sum_{k=0}^n n}{k \frac{1}{n^k}}$

Es gilt: $\binom{n}{k \frac{1}{n^k}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{l!}\frac{n(n-1)\dots n(n-k+1)}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\dots\frac{n-k+1}{n} \quad \frac{1}{k!}$

Weiter gilt $\forall K\geq 1 \quad K! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots K \geq 2^{k-1}$

$\Rightarrow \frac{1}{K!} \leq \frac{1}{2^k-1} \quad \forall K\geq 1$

Einsetzen liefert: $a_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{K!} \leq 1+\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$ Setze i=k-1

$\Rightarrow a_n \leq 1+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i}$

Formel für die geometrische Summe: $\forall q\neq 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}_0 \quad \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Beweis: $(1-q)\sum_{i=0}^n q^i = \sum_{i=0}^n (q^i - q^{i+1}) = (q^0-\cancel{q^1})+(\cancel{q^1}-\cancel{q^2})+(\cancel{q^2}-\cancel{q^3})+\cancel{\dots}+(\cancel{q^n}-q^{n+1})$

$= q^0 - q^{n+1} = 1-q^{n+1}$ □ ↑ Teleskopsumme

Anwendung: $a_n \leq 1+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i} = 1+\frac{1-\overbrace{(\frac{1}{2})^n}^{\geq 0}}{1-\frac{1}{2}} \leq 1+\frac{1}{\frac{1}{2}} = 3 \quad \forall n$

$\Rightarrow$ (a_n) ist beschränkt und monoton wachsend, also konvergent. □

Numerische Berechnungen ergeben $a_{100} = 2.70481$

Monotonie und unsere obere Schranke liefern: $a_{100} \leq a_n \leq 3 \quad \forall n\geq 100$

Satz 3.10 $\Rightarrow e = \lim_{n\to\infty} a_n \in [a_{100}, 3] \Rightarrow e\in[2.7, 3]$

Bsp.3.15: Harmonische Zahlen

Bsp 3.15 : Harmonische Zahlen

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

C_n = mittlere Anzahl von Vergleichen, die Quicksort zum Sortieren von n zufällig angeordneten Zahlen benötigt

$C_n = 2(n+1) H_n - 2n$

Betrachte $n = 2^k$: $H_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\underbrace{\frac{1}{3}}_{\geq \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\right) + \left(\underbrace{\frac{1}{5}}_{\geq \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\geq \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{7}}_{\geq \frac{1}{8}} + \frac{1}{8}\right) + \left(\underbrace{\frac{1}{9}}_{\geq \frac{1}{16}} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$

$+ \left(\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1}}_{\geq \frac{1}{2^k}} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)$

$\Rightarrow H_{2^k} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^k} = 1 + \frac{k}{2} \quad (*)$

Da $(H_n)_n$ monoton wächst, $\quad H_n \geq 1 + \frac{\lfloor log_2 n \rfloor}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
wobei $\lfloor x \rfloor$ =größte ganze Zahl $\leq$ x, z.B. $\lfloor 1,3 \rfloor = 1$

$(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und wegen (*) unbeschränkt. Satz 3.13 liefert $lim_{n\to\infty} H_n = \infty$

Die Divergenz ist sehr langsam. Man kann zeigen
$minn : H_n \geq 100 \approx 1.5 \cdot 10^4 3$