

Simulation - 2D Wärmeleitung auf einer Verbundplatte

Einführung in die Computerphysik - Software Projekt

Project Report von Finn Reimann

Darmstadt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

FB20 Informatik

Inhaltsverzeichnis

1 Die Idee	3
2 Die Simulation	4
2.1 Definition: Geometrie	4
2.1.1 Koordinatensystem	4
2.1.2 Rechteckiger Einschluss (sec-area)	4
2.1.3 Lokale Heizregion (hotspot)	5
2.2 Materialien & Parameter	5
2.3 Thermische Diffusivität	6
3 Partial Differential Equation (PDE) & Rand-/Anfangsbedingungen	7
3.1 Herleitung der 2D-Wärmeleitungsgleichung	7
3.2 Wärmequelle (Hotspot)	8
3.3 Anfangsbedingungen	8
3.4 Randbedingungen (äußere Kanten)	9
3.4.1 Dirichlet-Randbedingung	9
3.4.2 Robin-Randbedingung (Konvektiv)	9
3.5 Zusatz: Thermische Energie	10
4 Numerische Lösung mit Finite Differenzen (FTCS)	12
4.1 Gitter in Raum und Zeit	12
4.2 Diskretisierung von $\nabla \cdot (k \nabla T)$	13
4.3 Exzitäre Zeitschrittmethode FTCS (Zeitdiskretisierung)	14
4.4 Stabilitätsbedingung (CFL)	16
4.5 Energie auf dem Finite-Differenzen-Gitter	16
5 Beispielrechnung: Händische Berechnung	17
5.1 Modellaufbau	17
5.2 Gitterskizze	18
5.3 Robin-Randbedingung	19
5.4 Zeitschritt $n=0 \rightarrow n=1$	20
5.5 Zeitschritt $n=1 \rightarrow n=2$	21
5.6 Energiebilanz mit Robin-Randbedingung	23
5.7 Vergleich: Robin vs. Dirichlet	25
5.8 Zusammenfassung der Ergebnisse	25

1 Die Idee

Die Simulation besteht aus 3 Hauptelementen:

- Großes rechteckiges Gebiet (äußere Platte)
- Kleines rechteckiges Gebiet (innere Platte)
- kleiner heißer Fleck (lokale Heizung)

Das Setup dieser Elemente ist wie folgt aufgebaut: Das große Rechteck umschließt das kleinere Rechteck und zusammen bilden beide die Verbundplatte. Auf dieser Verbundplatte wird es einen heißen Punkt geben bei dem die Wärme eingespeist wird. Die beiden Platten bestehen aus 2 unterschiedlichen Materialien (zB. Material A, Material B), Welche jeweils unterschiedliche Wärmeleitfähigkeit haben.

Die Visualisierung wird eine 2D-Heatmap (zB. Farbkarte von $T(x, y, t)$) zeigen bei der der Nutzer sieht wie sich die Wärmewelle ausbreitet und sich das Muster ändert, wenn diese auf das kleinere Rechteck (Material B) trifft.

Die Simulation kann vom Nutzer beeinflusst werden, in dem er folgende Änderungen an den Simulations-Elementen macht: (a) verändern der Materialien (A,B), (b) verändern der Stärke der eingespeisten Hitze und (c) positions-änderung der lokalen Heizung.

2 Die Simulation

2.1 Definition: Geometrie

Wir simulieren eine **2D-Platte** mit einem **rechteckigen Einschluss** und einer **lokalen Heizregion** in der 2D-Platte. Namen werden wie folgt definiert:

- **2D-Platte** := base-area (Material A)
- **rechteckigen Einschluss** := inclusion-area (Material B)
- **lokalen Heizregion** := hotspot

2.1.1 Koordinatensystem

- Koordinaten: x in horizontaler Richtung, y in vertikaler Richtung.
- Simulationsgebiet: $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$
- Beispielwerte: $L_x = 0.1m$, $L_y = 0.1m$

Da wir 2D simulieren wird die Platte als dünn in z-Richtung angenommen, dadurch kann die Temperaturveränderung über die Dicke vernachlässigt werden. Also die klassische 2D-Approximation in der Wärmeleitung (Plan Wall Model) Wikipedia, 2025e.

2.1.2 Rechteckiger Einschluss (sec-area)

Im inneren der Simulationsfläche liegt das kleinere Rechteck Ω_{inc} . Dieses Besteht aus einem anderen Material und wird definiert als: $\Omega_{inc} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ mit Beispielsweise:

- $x_1 = 0.04m$
- $x_2 = 0.06m$
- $y_1 = 0.04m$
- $y_2 = 0.06m$

Also haben wir für die Gebiete:

- **base-area** (Material A): $\Omega_A = \frac{\Omega}{\Omega_{inc}}$
- **sec-area** (Material B): $\Omega_B = \Omega_{inc}$

2.1.3 Lokale Heizregion (hotspot)

Eine Punktquelle ist numerisch schwer darzustellen, deshalb wird in der Simulation eine kleine, aber endliche Heizfläche Ω_h um den Punkt (x_h, y_h) simuliert. Also für die Simulation haben wir:

- Mittelpunkt der Heizregion: (x_h, y_h)
- Heizbereich als kleineres Quadrat: $\Omega_h = [x_h - \Delta_h, x_h + \Delta_h] \times [y_h - \Delta_h, y_h + \Delta_h]$
- Beispielweise: $(x_h, y_h) = (0.02m, 0.05m)$
- Beispielweise: $\Delta_h = 0.0025m$ (5mm x 5mm Quadrat)

In der Numerik entspricht das ein paar Gitterpunkten, in denen ein volumetrische Wärmeerzeugungsterm $\dot{q}(x, y, t)$ ungleich 0 ist.

2.2 Materialien & Parameter

Es wir eine Auswahl von 10 unterschiedlichen Materialien geben.

Tabelle 2.1: Thermophysikalische Eigenschaften ausgewählter Materialien

Material	Wärmeleitfähigkeit k [W/(m·K)]	Wärmekapazität c_p [J/(kg*K)]	Dichte ρ [kg/m ³]
Diamond	1000	506	3500
Silver	426.77	236	10500
Copper	397.48	385	8940
Gold	317.98	128	19300
Aluminium	225.94	921	2698
Bronze	54.392	377	8750
Basalt	2.55	627–950	2700–3000
Water	0.6	4181	997.05
Fiberglass	0.176	1130	1230
Air	0.0025	1004	1.29

Die Materialen Werten wurden aus Folgenden Seiten entnommen Matmake, 2025; Thermstest, 2025; Wikipedia, 2025f. Es wird anfangs ein festgelegtes Setup genommen, später erweiterbar mit mehreren Materialien.

- Base (Material A): Basalt (schlechte Wärmeleitung)
- Inclusion (Material B): Aluminium (gute Wärmeleitung)

2.3 Thermische Diffusivität

Für den Wärmetransport ist die thermische Diffusivität wichtig, sie kann als zeitliche Ableitung der Temperatur eines Materials betrachtet werden und beschreibt damit die Geschwindigkeit mit der die Wärmeausbreitung in einem Material abnimmt/geglättet wird. Damit können zwei Materialien und ihre Wärmeleitfähigkeit gut verglichen werden. Folgende Formel beschreibt die Thermische Diffusivität Wikipedia, 2025g:

$$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c_p} \quad (2.1)$$

Nehmen wir die beiden Materialien aus 2.2 erhalten wir mit den Werten aus der Tabelle 2.1 folgende Rechnungen:

$$\alpha_A \approx \frac{2.55W/(mK)}{3000kg/m^3 \cdot 950J/(kg \cdot K)} \approx 8.95 \times 10^{-7} m^2/s \quad (2.2)$$

$$\alpha_B \approx \frac{225W/(mK)}{2700kg/m^3 \cdot 920J/(kg \cdot K)} \approx 1.027 \times 10^{-4} m^2/s \quad (2.3)$$

$$\alpha_B > \alpha_A \quad (2.4)$$

Also ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wärme in Aluminium um ein Vielfaches höher als in Basalt, was auch in der Simulation zu sehen sein wird. Die Simulation speichert dann für jede Zelle:

$$k_{i,j}, \rho_{i,j}, c_{p_{i,j}} \quad (2.5)$$

3 Partial Differential Equation (PDE) & Rand-/Anfangsbedingungen

3.1 Herleitung der 2D-Wärmeleitungsgleichung

Die Herleitung der Wärmeleitungsgleichung basiert auf dem *Fourier'schen Gesetz* und der lokalen Energieerhaltung. Für ein isotropes Medium mit konstanter Wärmeleitfähigkeit k , Dichte ρ und Wärmekapazität c_p gilt:

Schritt 1: Fourier'sches Gesetz

Der Wärmeflussvektor ist proportional zum negativen Temperaturgradienten:

$$\mathbf{q}(x, y, t) = -k\nabla T(x, y, t), \quad (3.1)$$

wobei $\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right)$ der Temperaturgradient ist.

Schritt 2: Energieerhaltung

Die zeitliche Änderung der inneren Energie pro Volumen ist gleich der Divergenz des Wärmeflusses plus einer volumetrischen Wärmequelle $\dot{q}_V(x, y, t)$:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \dot{q}_V(x, y, t). \quad (3.2)$$

Schritt 3: Einsetzen des Fourier-Gesetzes

Setzt man $\mathbf{q} = -k\nabla T$ ein, folgt:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k\nabla T) + \dot{q}_V(x, y, t). \quad (3.3)$$

Schritt 4: Vereinfachung für konstantes k

Für konstantes k reduziert sich der Divergenzterm zu:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \dot{q}_V(x, y, t), \quad (3.4)$$

mit dem Laplace-Operator in 2D:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (3.5)$$

Schritt 5: Endform der 2D-Wärmeleitungsgleichung

Division durch ρc_p ergibt die Standardform:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\dot{q}_V(x, y, t)}{\rho c_p}, \quad (3.6)$$

wobei die thermische Diffusivität definiert ist als

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}. \quad (3.7)$$

Wikipedia, 2025d.

3.2 Wärmequelle (Hotspot)

Wir modellieren $\dot{q}(x, y, t)$ als:

$$\dot{q}(x, y, t) = \begin{cases} q_0 & \text{für } (x, y) \in \Omega_h \text{ und } 0 < t < t_{heat} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.8)$$

Wobei $q_0 [W/m^3]$ die konstante Wärmeerzeugungsrate in der "Hotspot-Region" ist und t_{heat} die Dauer der Wärmezufuhr ist. Physikalisch könnte das Beispielsweise ein Laser darstellen, der eine kleine Fläche aufheizt oder ein eingebauter Chip der Abwärme produziert.

3.3 Anfangsbedingungen

Zur eindeutigen Lösung müssen Anfangs- und Randbedingungen spezifiziert werden. Wir starten mit einer gleichmäßigen Temperatur, z.B. der Umgebungstemperatur T_{amb} :

$$T(x, y, 0) = T_0 = T_{amb} \quad (3.9)$$

z.B. $T_{amb} = 293K$ ($20^\circ C$).

3.4 Randbedingungen (äußere Kanten)

3.4.1 Dirichlet-Randbedingung

Der Einfachheit halber wird für den Anfang die **Dirichlet-Randbedingung** genommen, die Platte ist an den Rändern mit einem Wärmespeicher mit T_{amb} in Kontakt:

$$T(x, y, t) = T_{amb} \quad \text{für } (x, y) \in \delta\Omega, t > 0 \quad (3.10)$$

Physikalische Bedeutung Die Temperatur am Rand ist fest vorgegeben und unabhängig vom inneren Verhalten.

Beispiel Die Platte liegt in einem perfekten Material das immer die konstante Temperatur T_{amb} hat.

Usage Vereinfachte „unrealistische“ Simulation. Der Fokus liegt auf Wärmeausbreitung in den Materialien, nicht einem realistischen Modell.

3.4.2 Robin-Randbedingung (Konvektiv)

Für eine Realistische Simulation bei der die Umgebung der Platte auch eine Rolle spielt kann die konvektive Randbedingung genommen werden:

$$-k\delta_n T = h(T - T_{amb}) \quad (3.11)$$

,mit:

- h : Wärmeübergangskoeffizient [$W/(m^2 \cdot k)$]
- T_{amb} : Umgebungstemperatur

Physikalische Bedeutung Der Wärmefluss am Rand ist proportional (abhängig) zur Temperaturdifferenz zwischen der Platte und der Umgebung.

Beispiel Die Platte wird von außen durch ein Material runter gekühlt, diese Temperatur wird aber von der Platte selber beeinflusst.

Usage Realistische Simulation bei der die Temperatur am Rand nicht fix ist, sondern durch Austausch der Umgebung bestimmt wird. Man will gleichzeitig simulieren wie sich die wärme Ausbreitung auf der Platte verhält wenn sich diese in unterschiedlichen Umgebungen befindet.

3.5 Zusatz: Thermische Energie

Neben der Temperaturverteilung $T(x, y, t)$ kann in der Simulation auch gut gezeigt werden, wie sich die Gesamtenergie des Systems verändert. Je nach dem was für eine Randbedingung anliegt und aus welchen Materialien die Platte besteht. Die Formel für die **thermische Energie** $E(t)$ lässt sich mit der bereits hergeleiteten Wärmeleitungsgleichung und dem Prinzip der Energieerhaltung wie folgt herleiten:

Innere Energie und Energiedichte

Die Thermische Energie eines Stoffes ist definiert alsChemieSchule, 2025:

$$E = c \cdot m \cdot T,$$

wobei

- c : spezifische Wärmekapazität [$J/(kg \cdot K)$]
- m : Masse [kg]
- T : Temperatur [K]

Mit $m = \rho \cdot V$ (Masse = Dichte * Volumen) ergibt sich für ein Volumenelement dV :

$$dE = \rho c_p T dV$$

wobei

- ρ : Dichte [kg/m^3]
- c_p : Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck [$J/(kg \cdot K)$]
- T : Temperatur [K]

Für die Felder in unserer Simulation gilt daher (Energie pro Volumen):

$$e(x, y, t) = \rho(x, y) c_p(x, y) T(x, y, t)$$

Für das gesamte Volumen Ω der Platte erhält man die Gesamtenergie als Integral:

$$E(t) = \int_{\Omega} \rho(x, y) c_p(x, y) T(x, y, t) e \, dA \quad (3.12)$$

da wir eine 2D Platte haben schreiben wir für das Volumen: $dV = e \, dA$, wobei e eine Konstante Dicke der Platte ist und $dA = dx \cdot dy$. (um relative Veränderungen zu zeigen wird $e = 1.0$, entspricht Energie pro Meter Plattendicke, gesetzt.)

lokale → globaler Energiebilanz

Um die globale Energiebilanz zu erhalten wird über das gesamte Volumen Ω der Formel der lokalen Energieerhaltung (siehe 3.1) integriert:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q}_V(x, y, t)$$

$$\int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla T) dV + \int_{\Omega} \dot{q}_V dV$$

Die Linke Seite ist die zeitliche Ableitung der Gesamtenergie:

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV.$$

Für den Divergenzterm auf der rechten Seite verwendet man den Gaußschen Integralsatz (Volumenintegral → Oberflächenintegral) Wikipedia, 2025c:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla T) dV = \oint_{\partial\Omega} k \nabla T \cdot \vec{n} dA,$$

wobei \vec{n} = äußere Normalenvektor auf der Randfläche $\partial\Omega$ ist erhält man für die **globale Energiebilanz** der Platte:

$$\frac{dE}{dt} = \oint_{\partial\Omega} k \nabla T \cdot \vec{n} dA + \oint_{\Omega} \dot{q}_V dV \quad (3.13)$$

- Das Oberflächenintegral beschreibt die Wärmestromleistung über den Rand,
- das Volumenintegral beschreibt die eingespeiste Leistung durch Volumenquellen.

Globale Energiebilanz (Robin)

Bei Robin ist der Wärmefluss am Rand gegeben als:

$$-k \nabla T \cdot \vec{n} = h(T - T_{amb})$$

Auflösen und in Energiebilanzterm (3.13) einsetzen:

$$k \nabla T \cdot \vec{n} = -h(T - T_{amb}) \oint_{\partial\Omega} k \nabla T \cdot \vec{n} dA = \oint_{\partial\Omega} (-h(T - T_{amb})) dA$$

Wir erhalten für **globale Energiebilanz (Robin)**:

$$\frac{dE}{dt} = - \oint_{\partial\Omega} h(T - T_{amb}) dA + \oint_{\Omega} \dot{q}_V dV \quad (3.14)$$

was einfach dargestellt $\frac{dE}{dt} = Q_{in}(t) - Q_{out}(t)$ ist.

4 Numerische Lösung mit Finite Differenzen (FTCS)

Zur numerischen Lösung der 2D-Wärmeleitung für das **explizite Finite-Differenzen-Schema** (Forward Time - Centered Space) genommen und auf die variablen $k(x, y), \rho(x, y), c_p(x, y)$ (Material Werte) erweitert. Das FTCS ist eine Finite-Differenzen-Methode (FDM). FDM nähert die Ableitungen in der PDE mithilfe endlicher Differenzenausdrücke, die aus Taylorreihenentwicklungen abgeleitet sind, und wandelt die PDE in ein System linearalgebraischer Gleichungen um, das effizient mit iterativen Algorithmen gelöst werden kannHaque et al., 2025; Wikipedia, 2025b.

4.1 Gitter in Raum und Zeit

Es wird ein regelmäßiges Gitter für,

1. Raumdiskretisierung:

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0, \dots, N_x \quad (4.1)$$

$$y_j = j\Delta y, \quad j = 0, \dots, N_y \quad (4.2)$$

mit

$$\Delta x = \frac{L_x}{N_x}, \quad \Delta y = \frac{L_y}{N_y} \quad (4.3)$$

2. Zeitdiskretisierung:

$$t^n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Und approximieren:

$$T_{i,j}^n \approx T(x_i, y_j, t^n) \quad (4.5)$$

Beispielwerte sind: $N_x = N_y = 100 \Rightarrow \Delta x = \Delta y = 10^{-3}m$ (1 mm Raster) und Δt wird anhand der Stabilitätsbedingung (siehe 4.4) gewählt. Für jeden Gitterpunkt (i,j) werden die Werte es Materials gespeichert ($k_{i,j} = k_A$ oder k_B und die entsprechenden Werte $\rho_{i,j}, c_{p,i,j}$):

$$(k_{i,j}, c_{p,i,j}, \rho_{i,j}) = \begin{cases} (k_A, c_{p,A}, \rho_A), & (x_i, y_i) \in \Omega_A, \\ (k_B, c_{p,B}, \rho_B), & (x_i, y_i) \in \Omega_B \end{cases} \quad (4.6)$$

Und entsprechend den Hotspot (siehe 3.2):

$$\dot{q}_{i,j}^n \approx \dot{q}(x_i, y_i, t^n) \quad (4.7)$$

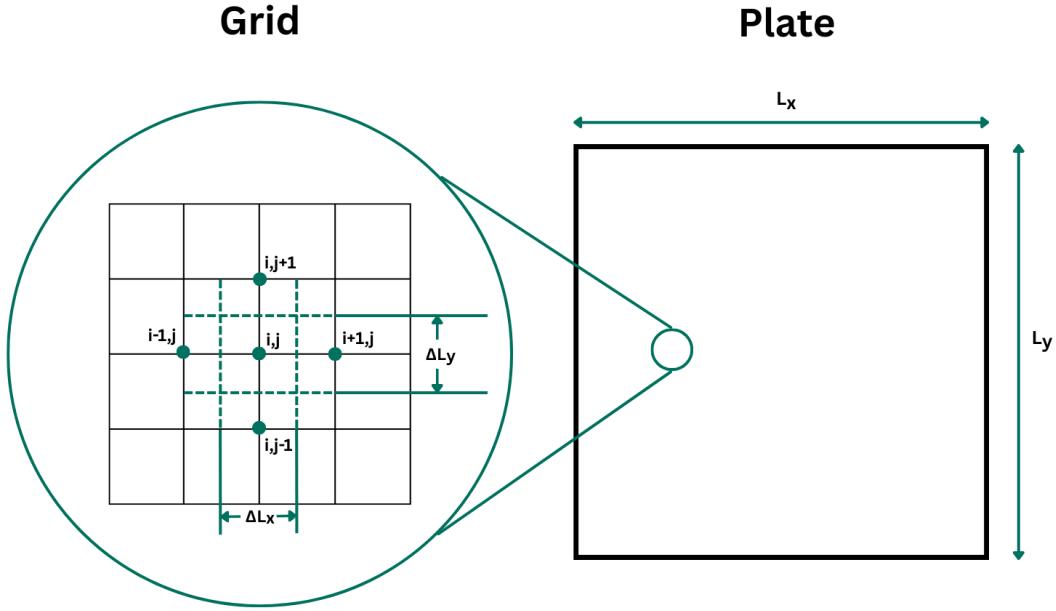


Abbildung 4.1: Das Gitter auf der Platte

4.2 Diskretisierung von $\nabla \cdot (k \nabla T)$

Der Operator beschreibt eine Form die auch bei verschiedenen k in Nachbarzellen sinnvoll ist für 2D:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k \frac{\partial T}{\partial y}) \quad (4.8)$$

Damit die ortsabhängige Leitfähigkeit berücksichtigt wird werden Leitfähigkeiten an den Zellengrenzen als Mittelwerte definiert. Somit ergibt sich das arithmetische Mittel für die vier Kanten in einem Punkt durch:

$$k_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}(k_{i+1,j} + k_{i,j}), \quad k_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}(k_{i-1,j} + k_{i,j}), \quad (4.9)$$

$$k_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(k_{i,j+1} + k_{i,j}), \quad k_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(k_{i,j-1} + k_{i,j}). \quad (4.10)$$

Mit den zentralen Differenzen ergibt sich für die Divergenz im Punkt (i, j) :

$$[\nabla \cdot (k \nabla T)]_{i,j}^n \approx \frac{1}{\Delta x} (k_{i+\frac{1}{2},j} \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta x} - k_{i-\frac{1}{2},j} \frac{T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n}{\Delta x}) + \frac{1}{\Delta y} (k_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y} - k_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n}{\Delta y}) \quad (4.11)$$

4.3 Explizite Zeitschrittmethode FTCS (Zeitdiskretisierung)

Die PDE (siehe 3.1 (Formel(3.7))) lautet:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\dot{q}v(x, y, t)}{\rho c_p} \quad (4.12)$$

$$(4.13)$$

Nach umstellen und Vereinfachter Darstellung (unter Berücksichtigung für Konstantes k) erhalten wird:

$$\rho_{i,j} c_{p_{i,j}} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} \quad (4.14)$$

Die diskrete Zeitableitung wird mit einem Vorwärtsschritt approximiert:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{i,j}^n \approx \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (4.15)$$

Einsetzen in (4.15):

$$\rho_{i,j} c_{p_{i,j}} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = [\nabla \cdot (k \nabla T)]_{i,j}^n + \dot{q}_{i,j}^n \quad (4.16)$$

Und erhalten die **Update-Formel** (für innere Punkte ohne Randbedingung):

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\rho_{i,j} c_{p_{i,j}}} ([\nabla \cdot (k \nabla T)]_{i,j}^n + \dot{q}_{i,j}^n), \quad (4.17)$$

mit $[\nabla \cdot (k \nabla T)]_{i,j}^n$ aus (4.11).

Umsetzung der Dirichlet-Randbedingung

Die Dirichlet-Randbedingung (siehe 3.4.1) werden auf dem Gitter durch

$$T_{i,j}^n = T_{amb} \quad \text{für } i = 0, i = N_x \text{ oder } j = 0, j = N_y, \forall n \quad (4.18)$$

umgesetzt und in der numerischen Implementierung nach jedem Zeitschritt explizit gesetzt und nicht durch (4.17) aktualisiert.

Umsetzung der Robin-Randbedingung

Es wird angenommen, dass die Platte an der Umgebung mit Temperatur T_{amb} durch Konvektion mit Wärmeübergangskoeffizient h gekoppelt ist. Für alle Punkte des äußeren Randes gilt:

$$-k_{i,j} \nabla T_{i,j}^n \cdot \vec{n} = h(T_{i,j}^n - T_{amb}), \quad \text{für } i = 0, i = N_x \text{ oder } j = 0, j = N_y, \forall n, \quad (4.19)$$

anders ausgedrückt:

$$-k(x, y) \nabla T(x, y, t) \cdot \vec{n} = h(T(x, y, t) - T_{amb}), \quad (x, y) \in \partial\Omega, t > 0. \quad (4.20)$$

Für jede Randseite für wird die Normale explizit zu:

- Linker Rand: $x = 0$, Normale $\vec{n} = (-1, 0)$
- Rechter Rand: $x = L_x$, Normale $\vec{n} = (+1, 0)$
- Unterer Rand: $y = 0$, Normale $\vec{n} = (0, -1)$
- Oberer Rand: $y = L_y$, Normale $\vec{n} = (0, +1)$

Somit ist z.B. der rechte Rand gegeben durch:

$$-k(x, y) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = h(T(L_x, y, t) - T_{amb}). \quad (4.21)$$

Beispiel Diskretisierung am rechten Rand $x = L_x$ ($i = N_x$)

Betrachten wir den Randknoten ($i = N_x, j$) und nehmen für die partielle Ableitung $\partial T / \partial x$ eine einseitige Differenz nach innen (1. Ordnung), so erhalten wir:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_x} \approx \frac{T_{N_x,j}^n - T_{N_x-1,j}^n}{\Delta x}. \quad (4.22)$$

Damit lautet die diskrete Form der Robin-Randbedingung:

$$-k_{N_x,j} \frac{T_{N_x,j}^n - T_{N_x-1,j}^n}{\Delta x} = h(T_{N_x,j}^n - T_{amb}). \quad (4.23)$$

Dies ist eine lineare Beziehung zwischen der Randtemperatur $T_{N_x,j}^n$ und dem Innenwert $T_{N_x-1,j}^n$. Durch Umformen nach der Randtemperatur erhalten wir die **Update-Formel** (rechter Rand mit Robin-Randbedingung):

$$\begin{aligned} -k_{N_x,j} T_{N_x,j}^n + k_{N_x,j} T_{N_x-1,j}^n &= h\Delta x T_{N_x,j}^n - h\Delta x T_{amb}, \\ (k_{N_x,j} + h\Delta x) T_{N_x,j}^n &= k_{N_x,j} T_{N_x-1,j}^n + h\Delta x T_{amb}, \end{aligned}$$

also schließlich

$$T_{N_x,j}^n = \frac{k_{N_x,j}}{k_{N_x,j} + h\Delta x} T_{N_x-1,j}^n + \frac{h\Delta x}{k_{N_x,j} + h\Delta x} T_{amb}. \quad (4.24)$$

Analog erhalten wir für die restlichen Seiten:

- **Linker Rand** ($x = 0, i = 0$):

$$T_{0,j}^n = \frac{k_{0,j}}{k_{0,j} + h\Delta x} T_{1,j}^n + \frac{h\Delta x}{k_{0,j} + h\Delta x} T_{amb}. \quad (4.25)$$

- **Unterer Rand** ($y = 0, j = 0$):

$$T_{i,0}^n = \frac{k_{i,0}}{k_{i,0} + h\Delta y} T_{i,1}^n + \frac{h\Delta y}{k_{i,0} + h\Delta y} T_{amb}. \quad (4.26)$$

- **Oberer Rand** ($y = L_y, j = N_y$):

$$T_{i,N_y}^n = \frac{k_{i,N_y}}{k_{i,N_y} + h\Delta y} T_{i,N_y-1}^n + \frac{h\Delta y}{k_{i,N_y} + h\Delta y} T_{amb}. \quad (4.27)$$

4.4 Stabilitätsbedingung (CFL)

Die „Courant-Friedrichs-Lowy-Zahl“ gibt an um wie viele Zellen sich die Strömung in einem Zeitschritt ausbreiten darf Wikipedia, 2025a. Für das explizite FTCS Verfahren ist die Schrittweite Δt also durch die Stabilitätsbedingung eingeschränkt. Für die lokale thermische Diffusivität

$$\alpha_{i,j} = \frac{k_{i,j}}{\rho_{i,j} c_{p_{i,j}}} \quad (4.28)$$

wählen wir

$$\Delta t \leq \frac{1}{2}(\alpha_{max}(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}))^{-1}, \quad \alpha_{max} = \max_{i,j} \alpha_{i,j}, \quad (4.29)$$

um numerische Stabilität sicherzustellen. Note die Robin-Randbedingung kann die effektive Stabilität etwas beeinflussen, aber im Rahmen bleibt die obige Bedingung ein guter Richtwert.

4.5 Energie auf dem Finite-Differenzen-Gitter

Diskrete Formel der Energie E^n auf dem Gitter basieren auf der Herleitung der **globalen Energiebilanz** (siehe 3.5) und der Definition des Gitters (siehe 4.1): Das Gitter ist definiert als:

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0, \dots, Nx, \quad y_i = i\Delta y, \quad j = 0, \dots, Ny$$

fügen wird dazu eine Plattendicke e ein erhalten wir für jedes Gitterelement als kleines Volumen:

$$\Delta V = e\Delta x\Delta y \quad (4.30)$$

Die diskrete Approximation der Gesamtenergie zu Zeitschritt t^n ist damit:

$$E^n \approx \sum_{i=0}^{Nx} \sum_{j=0}^{Ny} \rho_{i,j} c_{p_{i,j}} T_{i,j}^n \Delta V \quad (4.31)$$

Mit der einfachen Annahme $e = 1$ (Energie pro Meter Plattendicke) erhalten wir:

$$E^n \approx \sum_{i=0}^{Nx} \sum_{j=0}^{Ny} \rho_{i,j} c_{p_{i,j}} T_{i,j}^n \Delta x \Delta y \quad (4.32)$$

Zum Schluss Definieren wir die Energiedifferenz zur Anfangsenergie:

$$\Delta E^n = E^n - E^0. \quad (4.33)$$

5 Beispielrechnung: Händische Berechnung

In diesem Kapitel wird ein Konkretes Beispiel durchgerechnet, bei dem ich die FTCS-Zeitschritte auf einem vereinfachten Gitter mit Robin-Randbedingung (konvektiver Wärmeübergang) händisch ausführen.

5.1 Modellaufbau

Geometrie und Gitter

Wir wählen ein stark vereinfachtes 5×5 Gitter (also $N_x = N_y = 4$) auf einer quadratischen Platte:

- Plattengröße: $L_x = L_y = 0.04m$
- Gitterabstand: $\Delta x = \Delta y = 0.01m = 1cm$
- Indizes: $i, j \in 0, 1, 2, 3, 4$

Materialverteilung

- **Base (Basalt):** Alle Punkte außer der mittel Punkt (2,2)
- **Inclusion (Aluminium):** Nur der mittel Punkt (2,2)

Materialparameter (Tabelle 2.1): mit $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ (thermische Diffusivität).

Tabelle 5.1: Thermophysikalische Eigenschaften der gewählten Materialien

Material	k [W/(m*K)]	c_p [J/(kg*K)]	ρ [kg/m ³]	α [m ² /s]
Basalt (Bst)	2.55	950	3000	8.95×10^{-7}
Aluminium (Al)	225.94	921	2698	9.10×10^{-5}

Robin-Randbedingung Parameter

- Umgebungstemperatur: $T_{amb} = 293K(20^\circ C)$
- Wärmeübergangskoeffizient: $h = 25W/(m^2 \cdot K)$ (typisch für freie Konvektion in Luft)

Anfangsbedingung und Hotspot

- Anfangstemperatur: $T_{i,j}^0 = 293K$ für alle Punkte
- Hotspot bei (1,2): $\dot{q}_{1,2} = 10^6W/m^3$

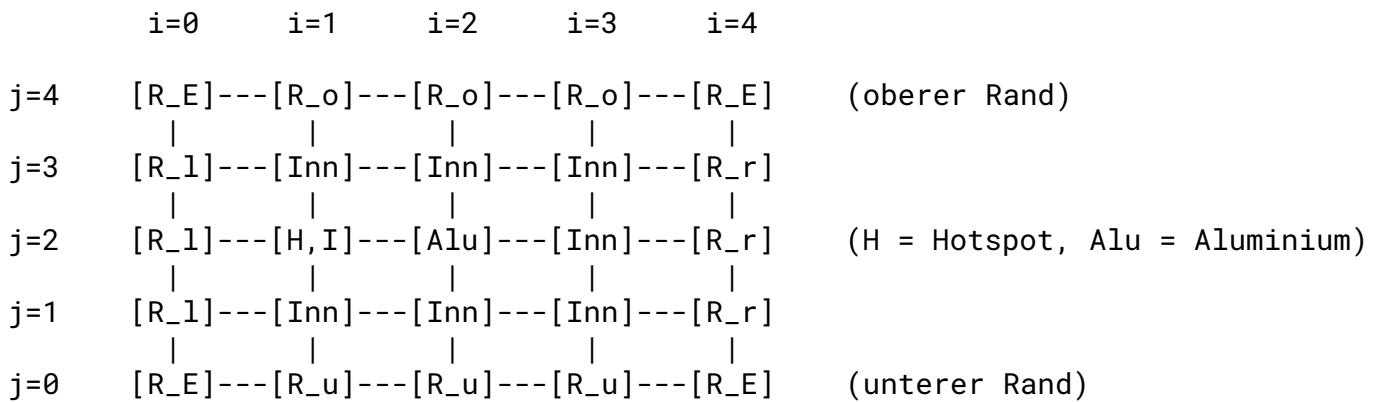
Zeitschritt

Aus der Stabilitätsbedingung (Gl. 4.29) mit $\alpha_{max} = 9.10 \times 10^{-5}m^2/s$:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \cdot (9.10 \times 10^{-5} \cdot \frac{2}{(0.01)^2})^{-1} \approx 0.275s \quad (5.1)$$

Wir wählen konservativ: $\Delta t = 0.1s$

5.2 Gitterskizze



Legende:

- R_E = Eckpunkt (Robin)
- R_l, R_r, R_o, R_u = Randpunkte links/rechts/oben/unten
- Inn = Innerer Punkt (Basalt)
- Alu = Aluminium-Einschluss
- H,I = Hotspot (innerer Punkt mit Wärmequelle)

5.3 Robin-Randbedingung

Allgemeine Form (aus Kapitel 4, Gl. 4.24-4.27)

Die Robin-Randbedingung koppelt die Randtemperatur an den inneren Nachbarn:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_{amb})$$

Diskrete Formeln für jeden Rand

- Rechter Rand ($i=4$):

$$T_{4,j}^n = \frac{k_{4,j}}{k_{4,j} + h\Delta x} T_{3,j}^n + \frac{h\Delta x}{k_{4,j} + h\Delta x} T_{amb} \quad (5.2)$$

- Linker Rand ($i=0$):

$$T_{4,j}^n = \frac{k_{4,j}}{k_{4,j} + h\Delta x} T_{3,j}^n + \frac{h\Delta x}{k_{4,j} + h\Delta x} T_{amb} \quad (5.3)$$

- Oberer Rand ($j=4$):

$$T_{i,4}^n = \frac{k_{i,4}}{k_{i,4} + h\Delta y} T_{i,3}^n + \frac{h\Delta y}{k_{i,4} + h\Delta y} T_{amb} \quad (5.4)$$

- Unterer Rand ($j=0$):

$$T_{i,0}^n = \frac{k_{i,0}}{k_{i,0} + h\Delta y} T_{i,1}^n + \frac{h\Delta y}{k_{i,0} + h\Delta y} T_{amb} \quad (5.5)$$

Brechung der Koeffizienten für Basalt Rand

Mit $k = 2.55W/(m \cdot K)$, $h = 25W/(m^2 \cdot K)$, $\Delta x = \Delta y = 0.01m$:

$$h\Delta x = 25 \cdot 0.01 = 0.25W/(m \cdot pK) \quad (5.6)$$

$$hk + h\Delta x = 2.55 + 0.25 = 2.80W/m \cdot pK \quad (5.7)$$

damit sind die Koeffizienten:

$$\beta_k = \frac{k}{k + h\Delta x} = \frac{2.55}{2.80} = 0.9107 \quad (5.8)$$

$$\beta_h = \frac{h\Delta x}{k + h\Delta x} = \frac{0.25}{2.80} = 0.0893 \quad (5.9)$$

Kontrolle: $\beta_k + \beta_h = 0.9107 + 0.0893 = 1$

Randformel (vereinfacht für Basalt)

$$T_{Rand}^n = 0.9107 \cdot T_{innen}^n + 0.0893293 \cdot 293 \quad (5.10)$$

$$T_{Rand}^n = 0.9107 \cdot T_{innen}^n + 26.165K \quad (5.11)$$

5.4 Zeitschritt n=0→n=1

Schritt 1: Anfangszustand (t^0)

Alle Temperaturen: $T_{i,j}^0 = 293K$

Schritt 2: Update der inneren Punkte

- P(1,2) Hotspot in Basalt
- P(0,2) Randpunkt $T_{0,2}^0 = 293$
- P(2,2) Aluminium $T_{2,2}^0 = 293$
- P(1,1) Basalt $T_{1,1}^0 = 293$
- P(1,3) Basalt $T_{1,3}^0 = 293$

Katenleitfähigkeiten:

$$\begin{aligned} k_{1+\frac{1}{2},2} &= \frac{1}{2}(k_{2,2} + k_{1,2}) = \frac{1}{2}(226 + 2.55) = 114.275W/(m \cdot pK) \\ k_{1-\frac{1}{2},2} &= \frac{1}{2}(k_{0,2} + k_{1,2}) = \frac{1}{2}(2.55 + 2.55) = 2.55W/(m \cdot pK) \\ k_{1,2+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(k_{1,3} + k_{1,2}) = \frac{1}{2}(2.55 + 2.55) = 2.55W/(m \cdot pK) \\ k_{1,2-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(k_{1,1} + k_{1,2}) = \frac{1}{2}(2.55 + 2.55) = 2.55W/(m \cdot pK) \end{aligned}$$

Divergenzterm: Da alle $T^0 = 293K$ sind alle Temperaturdifferenzen null:

$$[\nabla \cdot (k \nabla T)]_{1,2}^0 = 0$$

Update-Formel (Gl.4.17):

$$\begin{aligned} T_{1,2}^1 &= T_{1,2}^0 + \frac{\Delta t}{\rho_{1,2} c_{p_{1,2}}} ([\nabla \cdot (k \nabla T)]_{1,2}^0 + \dot{q}_{1,2}^0) \\ &= T_{1,2=293}^1 + \frac{0.1}{3000 \cdot 950} (0 + 10^6) \\ &= 293 + \frac{10^5}{2.85 \times 10^6} = 293.035K \end{aligned}$$

Punkt(2,2)-Aluminium-Einschluss: Keine Wärmequelle, alle Nachbartemperaturen gleich:

$$T_{1,2}^1 = 293 + \frac{0.1}{2700 \cdot 920} (0 + 0) = 293K$$

Alle anderen inneren Punkte: Ohne Wärmequelle mit gleichen Nachbartemperaturen:

$$T_{i,j}^1 = 293K \text{ für alle anderen inneren Punkte}$$

Schritt 3: Update der Randpunkt (Gl. 5.11)

Linker Rand ($i=0$), z.B. Punkt(0,2):

$$\begin{aligned} T_{0,2}^1 &= 0.9107 \cdot T_{1,2}^1 + 26.165 \\ T_{0,2}^1 &= 0.9107 \cdot 293.035 + 26.165 \\ T_{0,2}^1 &= 293.032K \end{aligned}$$

Da die anderen inneren Nachbar noch bei 293K sind:

$$T_{Rand}^1 = 0.9107 * 293 + 26.165 = 293.000K$$

5.5 Zeitschritt n=1 → n=2

Ausgangslage nach t¹

Punkt	Temperatur T ¹ [K]	Material
(1,2)	293.035	Basalt + Hotspot
(0,2)	293.032	Basalt (Rand)
(2,2)	293.000	Aluminium
Alle anderen	293.000	-

Update des Aluminium-Punktes (2,2)

Nachbarn:

- (1,2): $T_{1,2}^1 = 293.035K$ (Hotspot)
- (3,2): $T_{3,2}^1 = 293.000K$
- (2,1): $T_{2,1}^1 = 293.000K$
- (2,3): $T_{2,3}^1 = 293.000K$

Kantenleitfähigkeiten (alle Nachbarn sind Basalt):

$$k_{2\pm\frac{1}{2},2} = k_{2,2\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(226 + 2.55) = 114.275 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$$

Divergenzterm:

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot (k \nabla T)]_{2,2}^1 &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[k_{2+\frac{1}{2},2} (T_{3,2}^1 - T_{2,2}^1) - k_{2-\frac{1}{2},2} (T_{2,2}^1 - T_{1,2}^1) \right] \\ &\quad + \frac{1}{(\Delta y)^2} \left[k_{2,2+\frac{1}{2}} (T_{2,3}^1 - T_{2,2}^1) - k_{2,2-\frac{1}{2}} (T_{2,2}^1 - T_{2,1}^1) \right] \end{aligned}$$

x-Richtung:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(0.01)^2} \left[114.275(293 - 293) - 114.275(293 - 293.035) \right] \\ &= 10^4 \left[0 - 114.275 \cdot (-0.035) \right] = 10^4 \cdot 4.0 = 40000 \text{ W/m}^3 \end{aligned}$$

y-Richtung:

$$\frac{1}{(0.01)^2} \left[114.275 \cdot 0 - 114.275 \cdot 0 \right] = 0$$

Gesamt:

$$[\nabla \cdot (k \nabla T)]_{2,2}^1 = 40000 \text{ W/m}^3$$

Update:

$$\begin{aligned} T_{2,2}^2 &= 293 + \frac{0.1}{2700 \cdot 920} \cdot 40000 \\ T_{2,2}^2 &= 293 + \frac{4000}{2.484 \times 10^6} = 293 + 0.00161 \\ T_{2,2}^2 &= 293.0016 \text{ K} \end{aligned}$$

Update des Hotspot-Punktes (1,2)

Nachbarn:

- (0,2): $T_{0,2}^1 = 293.032 \text{ K}$ (Robin-Rand!)
- (2,2): $T_{2,2}^1 = 293.000 \text{ K}$
- (1,1): $T_{1,1}^1 = 293.000 \text{ K}$
- (1,3): $T_{1,3}^1 = 293.000 \text{ K}$

Divergenzterm:

x-Richtung:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(0.01)^2} \left[114.275(293 - 293.035) - 2.55(293.035 - 293.032) \right] \\ &= 10^4 \left[114.275 \cdot (-0.035) - 2.55 \cdot 0.003 \right] \\ &= 10^4 \left[-4.0 - 0.00765 \right] = -40076.5 \text{ W/m}^3 \end{aligned}$$

y-Richtung:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(0.01)^2} \left[2.55(293 - 293.035) - 2.55(293.035 - 293) \right] \\ &= 10^4 \left[2.55 \cdot (-0.035) - 2.55 \cdot 0.035 \right] \\ &= 10^4 \left[-0.0893 - 0.0893 \right] = -1786 \text{ W/m}^3 \end{aligned}$$

Gesamt:

$$[\nabla \cdot (k \nabla T)]_{1,2}^1 = -40076.5 - 1786 = -41862.5 \text{ W/m}^3$$

Update:

$$\begin{aligned} T_{1,2}^2 &= 293.035 + \frac{0.1}{3000 \cdot 950} (-41862.5 + 10^6) \\ T_{1,2}^2 &= 293.035 + \frac{0.1 \cdot 958137.5}{2.85 \times 10^6} \\ T_{1,2}^2 &= 293.035 + 0.0336 = 293.069 \text{ K} \end{aligned}$$

Update der Robin-Randpunkte

Punkt (0,2) – Linker Rand neben Hotspot:

$$\begin{aligned} T_{0,2}^2 &= 0.9107 \cdot T_{1,2}^2 + 26.165 \\ T_{0,2}^2 &= 0.9107 \cdot 293.069 + 26.165 = 266.90 + 26.165 \\ T_{0,2}^2 &= 293.063 \text{ K} \end{aligned}$$

5.6 Energiebilanz mit Robin-Randbedingung

Globale Energiebilanz (Gl. 3.14)

$$\frac{dE}{dt} = - \oint_{\partial\Omega} h(T - T_{amb}) dA + \int_{\Omega} \dot{q}_V dV \quad (5.12)$$

Diskrete Berechnung für n=1

Eingespeiste Wärme (Hotspot):

$$Q_{in} = \dot{q} \cdot \Delta V \cdot \Delta t = 10^6 \cdot (0.01)^2 \cdot 1 \cdot 0.1 = 10 J$$

(mit Plattendicke $e = 1\text{m}$)

Wärmeverlust über den Rand:

Der Wärmestrom über ein Randsegment der Länge Δx (oder Δy) und Dicke $e = 1\text{m}$:

$$\dot{Q}_{out,Segment} = h \cdot (T_{Rand} - T_{amb}) \cdot \Delta x \cdot e$$

Für Punkt (0,2) nach Zeitschritt 1:

$$\dot{Q}_{out,(0,2)} = 25 \cdot (293.032 - 293) \cdot 0.01 \cdot 1 = 25 \cdot 0.032 \cdot 0.01 = 0.008 W$$

Über $\Delta t = 0.1\text{s}$:

$$Q_{out,(0,2)} = 0.008 \cdot 0.1 = 0.0008 J$$

Gesamter Randverlust (alle 16 Randpunkte):

Da nur (0,2) eine merklich erhöhte Temperatur hat:

$$Q_{out,total} \approx 0.0008 J$$

Netto-Energieänderung

$$\Delta E^1 \approx Q_{in} - Q_{out} = 10 - 0.0008 \approx 10 J$$

Kontrolle über Temperaturänderung

Die Energie im Hotspot-Punkt:

$$\Delta E_{1,2} = \rho c_p \Delta T \cdot \Delta V = 3000 \cdot 950 \cdot 0.035 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 9.975 J$$

Die Energiebilanz ist konsistent!

Tabelle 5.2: Vergleich der Randbedingungen

Eigenschaft	Dirichlet	Robin ($h = 25$)
Randtemperatur T^0	fix 293 K	fix 293 K
Randtemperatur $T_{0,2}^1$	fix 293 K	293.032 K
Randtemperatur $T_{0,2}^2$	fix 293 K	293.063 K
Wärmefluss am Rand	maximal (erzwungen)	proportional zu ΔT
Physikalische Bedeutung	Perfekter Wärmespeicher	Konvektive Kühlung

5.7 Vergleich: Robin vs. Dirichlet

Interpretation der Robin-Koeffizienten

$$\beta_k = \frac{k}{k + h\Delta x} = 0.9107$$

- $\beta_k \approx 1$: Der Rand folgt fast der inneren Temperatur (schwache Kühlung)
- $\beta_k \approx 0$: Der Rand bleibt nahe T_{amb} (starke Kühlung, nähert sich Dirichlet)

Für stärkere Kühlung (z.B. $h = 500 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$):

$$\beta_k = \frac{2.55}{2.55 + 5} = 0.338$$

Der Rand würde dann viel näher an T_{amb} bleiben.

5.8 Zusammenfassung der Ergebnisse

Temperaturrentwicklung

Tabelle 5.3: Temperaturrentwicklung über die Zeitschritte

Zeitschritt n	$T_{1,2}$ (Hotspot)	$T_{2,2}$ (Alu)	$T_{0,2}$ (Robin-Rand)
0	293.000 K	293.000 K	293.000 K
1	293.035 K	293.000 K	293.032 K
2	293.069 K	293.002 K	293.063 K

Energiebilanz

Physikalische Erkenntnisse

1. **Robin-Rand reagiert auf innere Erwärmung:** Die Randtemperatur steigt mit der inneren Temperatur an ($T_{0,2}$ folgt $T_{1,2}$).

Tabelle 5.4: Energiebilanz pro Zeitschritt

Zeitschritt	Q_{in} [J]	Q_{out} [J]	ΔE [J]
$0 \rightarrow 1$	10.0	≈ 0.001	≈ 10.0
$1 \rightarrow 2$	10.0	≈ 0.003	≈ 10.0

2. **Wärmeverlust ist anfangs minimal:** Bei kleinen Temperaturunterschieden ($\Delta T \approx 0.03\text{K}$) ist der konvektive Wärmestrom vernachlässigbar.
3. **Langzeitverhalten:** Im stationären Zustand wird sich ein Gleichgewicht einstellen, bei dem $Q_{in} = Q_{out}$.
4. **Material-Kontrast wirkt:** Die hohe Kantenleitfähigkeit zum Aluminium (114.275 W/(m·K)) sorgt für schnellen Wärmetransport zum Einschluss.

Literatur

- ChemieSchule. (2025). *Thermische Energie*. Verfügbar 2. Dezember 2025 unter https://chemie-schule.de/KnowHow/Thermische_Energie
- Haque, M. N., Akter, R., & Mojumder, M. S. H. (2025). An Efficient Explicit Scheme for Solving the 2D Heat Equation with Stability and Convergence Analysis. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 13(7), 2234–2244.
- Matmake. (2025). *specific-heat-capacity-of-rocks*. Verfügbar 28. November 2025 unter <https://matmake.com/properties/specific-heat-capacity-of-rocks.html>
- Thermstest. (2025). *thermal-resources/materials-database*. Verfügbar 28. November 2025 unter <https://thermtest.com/thermal-resources/materials-database>
- Wikipedia. (2025a). *CFL Zahl*. Verfügbar 29. November 2025 unter <https://de.wikipedia.org/wiki/CFL-Zahl>
- Wikipedia. (2025b). *Finite Difference Method*. Verfügbar 3. Dezember 2025 unter https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_method
- Wikipedia. (2025c). *Gaußischer Integralsatz*. Verfügbar 2. Dezember 2025 unter https://de.wikipedia.org/wiki/Gau%C3%9Fscher_Integralsatz
- Wikipedia. (2025d). *Heat Equation*. Verfügbar 28. November 2025 unter https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation
- Wikipedia. (2025e). *Heat Transfer*. Verfügbar 28. November 2025 unter https://en.wikibooks.org/wiki/Heat_Transfer/Conduction
- Wikipedia. (2025f). *List of thermal conductivities*. Verfügbar 28. November 2025 unter https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_thermal_conductivities
- Wikipedia. (2025g). *Termal Diffusitiy*. Verfügbar 28. November 2025 unter https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_diffusivity