Лабораторная работа № 6
Приближенное вычисление площади фигуры методом Монте-Карло

Цель: изучение метода Монте-Карло (метода статистических испытаний) на примере вычисления площади фигуры.

Теория:

Применим метод статических испытаний или метод Монте-Карло к задаче вычисления площади геометрической фигуры на плоскости.

Метод заключается в следующем. Поместим данную фигуру в квадрат и будем наугад бросать точки в этот квадрат. Будем исходить из того, что чем больше площадь фигуры, тем чаще в нее будут попадать точки. Таким образом, при большом числе ***N*** точек, наугад выбранных внутри квадрата, доля точек, содержащихся в данной фигуре ***k***, приближенно равна отношению площади этой фигуры и площади квадрата:

Если площадь квадрата равна ***S_0*** (4x4=16 отрезки [-2;2]) и в результате ***N*** испытаний, из которых при ***k*** исходах случайные точки оказались внутри фигуры, то площадь фигуры ***S*** будет определяться выражением***:***

$$\mathrm{S} = \frac{K}{N} S_0$$

Относительная погрешность метода Монте-Карло определяться выражением***:***

$$\sigma = \frac{|\mathrm{S} - S_T|}{S_T}$$

Алгоритм

1) Генерируем случайные числа ***x*** и ***y*** равномерно распределенные на отрезке [-2;2] Это будут координаты случайной точки в квадрате, в которую заключена фигура, площадь которой требуется найти.
2) Проверяем принадлежность точки к исследуемой фигуре. Если попадания нет, т.е. не выполняется хотя бы одно из неравенств системы, то переходим к пункту 1 и генерируем координаты новой точки.
3) Пункты 1 и 2 следует повторить в цикле достаточно большое число N раз. От этого, в конечном итоге, зависит точность вычислений. После проведения N повторов площадь фигуры найдем по формуле

Задание 1:
Составить и отладить программу определения площади фигуры методом Монте-Карло в соответствии с индивидуальным заданием.

Задание 2:
Вычислить методом Монте-Карло определенный интеграл. Сравните результат со значением, полученным аналитическим путем при значениях N=10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000. Выразите относительную погрешность метода Монте-Карло при каждом значении N.

Исходные данные к заданию 1

Условия, ограничивающие область фигуры

1. $\begin{cases} x^2 - y^3 < 2 \\ x + y < 1 \\ -2 < x < 2 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x^2 + y^3 < 2 \\ x + y < 1 \\ -2 < x < 2 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x^2 + y^3 < 2 \\ x - y < 1 \\ -2 < x < 2 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -x^3 + y^5 < 2 \\ x - y < 1 \\ -2 < x < 2 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -x^2 + y^3 < 2 \\ x - y < 1 \\ -2 < x < 2 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x^3 + y^4 < 3 \\ x - y < 1 \\ -2 < x < 2 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -x^3 + y^3 < 1 \\ -x + y < 1 \\ -2 < x < 2 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} -x^3 + 10y^3 < 2 \\ -x + y < 2 \\ -2 < x < 2 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -x^3 - 5y^3 < 2 \\ -x + y < 2 \\ -2 < x < 2 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -x^3 - y^3 < 2 \\ -x + y^2 < 2 \\ -2 < x < 2 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$

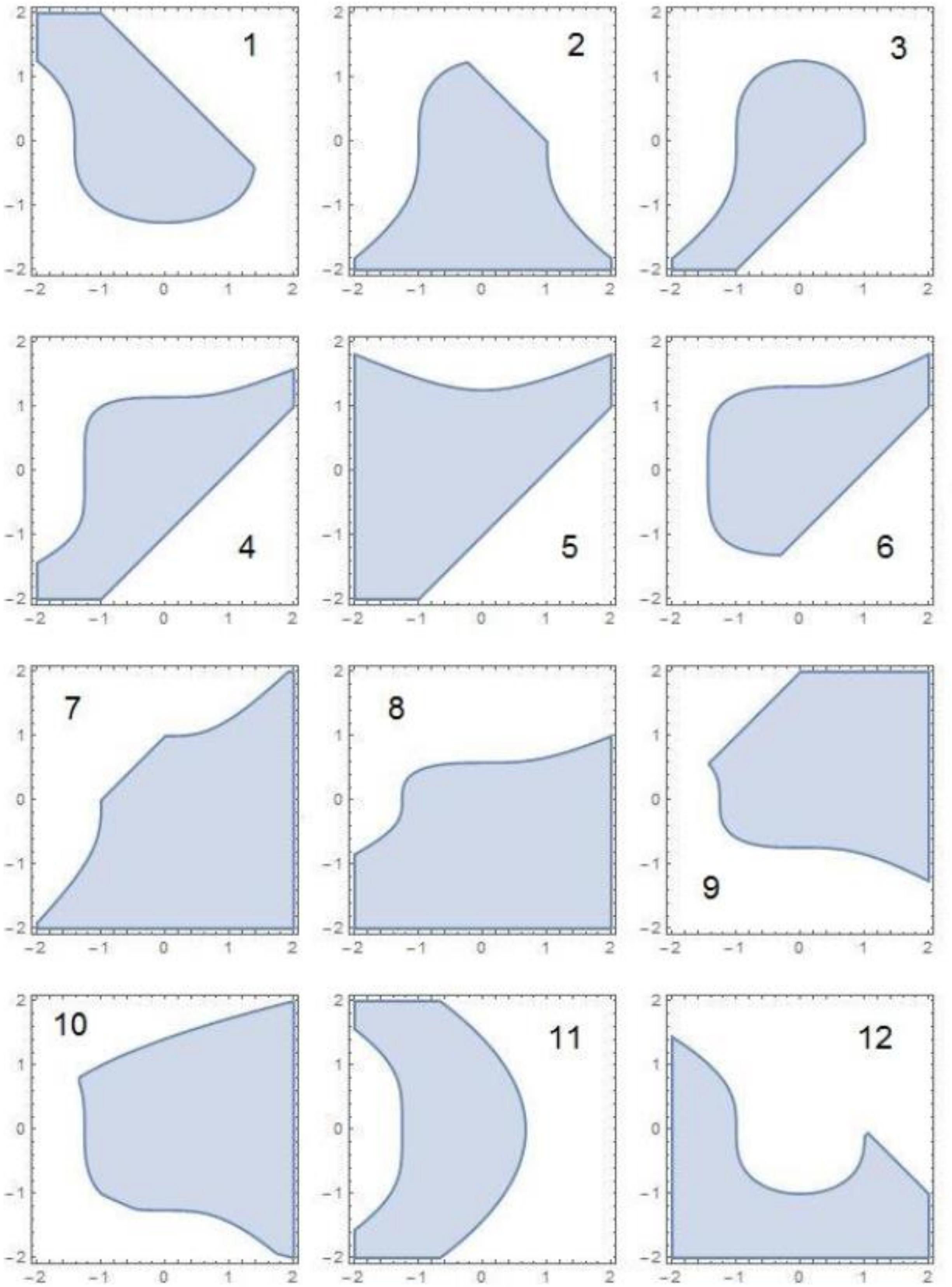
11. $\begin{cases} -x^3 - y^4 < 2 \\ 3x + y^2 < 2 \\ -2 < x < 2 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} -x^2 + y^3 < -1 \\ x + y < 1 \\ -2 < x < 2 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$

Контрольные значения площадей фигур по вариантам

Вариант	S_T
1	6,37517
2	6,94246
3	4,82702
4	6,57343
5	9,39411
6	6,33624
7	9,92969
8	9,64255
9	8,38467
10	9,37331
11	7,13684
12	6,84359

Фигуры, площадь которых необходимо определить методом Монте-Карло



Исходные данные к заданию 2

1	$\int_0^2 x^2 dx$	2	$\int_0^4 \sqrt{x} dx$	3	$\int_0^\pi \sin x\, dx$
4	$\int_0^2 x^3 dx$	5	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx$	6	$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$
7	$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\, dx$	8	$\int_0^1 (1+x)^2 dx$	9	$\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx$
10	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x\, dx$	11	$\int_0^{\pi/4} \cos\ 2x\, dx$	12	$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$