

Mathematical Analysis of the Motion of a Vortex Filament

相木 雅次

東京理科大学理工学部数学科

本講演においては、渦糸の運動について紹介する。渦糸とは、流体における速度場の回転成分を表す渦度が空間曲線上に集中して分布したものである。非圧縮非粘性流体において渦度は流れに沿って保存されるラグランジュ保存量であるため、渦糸の運動は3次元ユークリッド空間内を運動する1本の曲線の運動として定式化することができる。

その中で最も単純かつ基本となる方程式が1906年に Da Rios [3] によって提唱された以下で与えられる Localized Induction Equation (LIE) である。

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_{ss}.$$

ここで、 $\mathbf{X}(s, t) = (X_1(s, t), X_2(s, t), X_3(s, t))$ は、時刻 t において弧長 s でパラメーター付けされた渦糸の位置を表すベクトル、 \times は3次元ユークリッド空間における外積、下付き添字はその変数に関する偏微分を表す。LIE の特徴の1つとして、「LIE にしたがって運動する渦糸は伸び縮みしない」というものがある。特に、初期時刻における渦糸が弧長パラメーター表示されていれば、 $t > 0$ においても弧長が保存される、ということである。この性質は、西山-谷 [8] や相木-井口 [1] などで扱われた初期値問題および初期値-境界値問題の可解性を示す上で重要な役割を果たす。

また、橋本変換と呼ばれる未知変数の変換によって LIE に対する初期値問題の可解性は

$$iq_t = q_{ss} + \frac{i}{2}|q|^2q$$

で与えられる非線形シュレディンガー方程式に対する初期値問題の可解性と同値であることが知られている。

LIE 以外にも渦糸の運動を表すモデル方程式は多数提唱されており、本講演内でそのうちのいくつかを紹介するとともに各方程式の導出方法についても触れる。また、軸方向流を考慮した渦糸の運動を表す

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_{ss} + \alpha \left\{ \mathbf{X}_{sss} + \frac{3}{2} \mathbf{X}_{ss} \times (\mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_{ss}) \right\},$$

に対する初期値-境界値問題の時間局所解の存在と一意性に関する結果を紹介する。

References

- [1] M. Aiki and T. Iguchi, Motion of a vortex filament in the half-space, *Nonlinear Anal.*, **75** (2012), pp. 5180–5185.
- [2] R. J. Arms and F. R. Hama, Localized-Induction Concept on a Curved Vortex and Motion of an Elliptic Vortex Ring, *Phys. Fluids*, **8** (1965), No.4, pp. 553–559.
- [3] L. S. Da Rios, Sul Moto D'un Liquido Indefinito Con Un Filetto Vorticoso Di Forma Qualunque, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **22** (1906), no.1, pp. 117–135 (written in Italian).
- [4] Y. Fukumoto and T. Miyazaki, Three-dimensional distortions of a vortex filament with axial velocity, *J. Fluid Mech.*, **222** (1991), pp. 369–416.
- [5] H. Hasimoto, A soliton on a vortex filament, *J. Fluid Mech.*, **51** (1972), pp. 477–485.
- [6] N. Koiso, The Vortex Filament Equation and a Semilinear Schrödinger Equation in a Hermitian Symmetric Space, *Osaka J. Math.*, **34** (1997), No.1, pp. 199–214.
- [7] Y. Murakami, H. Takahashi, Y. Ukita, and S. Fujiwara, On the Vibration of a Vortex Filament, *Applied Physics Seminar*, **6** (1937), pp. 1–5. (article title and journal title translated from its original Japanese titles by Aiki. Not official translation).
- [8] T. Nishiyama and A. Tani, Initial and Initial-Boundary Value Problems for a Vortex Filament with or without Axial Flow, *SIAM J. Math. Anal.*, **27** (1996), no. 4, pp. 1015–1023.