word2vec公式推导

(objective funtion + 梯度更新公式)

skip-gram model:

$$\max J'(\theta) = \prod_{t=1}^{T} \prod_{\substack{-m \le j \le m \\ j \ne 0}} p(w_{t+j} \mid w_t ; \theta) \Rightarrow \theta: \text{word vectors}$$

$$\Leftrightarrow \text{minimize } J(\theta) = -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \sum_{\substack{-m \le j \le m \\ j \ne 0}} \log p(w_{t+j} \mid w_t ; \theta)$$

实际为最小化交叉熵. $-p \cdot \log(p)$

$$\left(p(o \mid c) = \frac{\exp(u_o^T v_c)}{\sum_{w=1}^{V} \exp(u_w v_c)} \right) :$$

[V : vocabulary size

u_o : word vector for "outside" words

v_c : word vector for "center word"]

梯度下降

$$A: \frac{\partial}{\partial v_c} \log \frac{\exp(u_o^T v_c)}{\sum_{w=1}^{V} \exp(u_w^T v_c)} = \frac{\partial}{\partial v_c} \log \exp(u_o^T v_c) - \frac{\partial}{\partial v_c} \log \sum_{w=1}^{V} \exp(u_w^T v_c)$$

[① $(a^x)' = a^x \ln a$ ② $(e^x)' = e^x$ ③ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$]

$$\frac{\partial}{\partial v_c} \log \exp(u_o^T v_c) = \frac{\partial}{\partial v_c} (u_o^T v_c) = u_o$$

$$\frac{\partial}{\partial v_c} \log \sum_{w=1}^{V} \exp(u_w^T v_c) = \frac{1}{\sum_{w=1}^{V} \exp(u_w^T v_c)} \cdot \underbrace{\sum_{w=1}^{V} \frac{\partial}{\partial v_c} \exp(u_w^T v_c)}_{= \sum_{w=1}^{V} \left(\exp(u_w^T v_c) \cdot u_w \right)}$$

Therefore:

$$A = u_o - \frac{\sum_{w=1}^{V} \left(\exp(u_w^T \cdot v_c) \cdot u_w \right)}{\sum_{w=1}^{V} \exp(u_w^T \cdot v_c)} = u_o - \sum_{w=1}^{V} \frac{\exp(u_w^T v_c)}{\sum_{w=1}^{V} \exp(u_w^T v_c)} \cdot u_w$$

$$= u_o - \sum_{w=1}^{V} P(w \mid c) \cdot u_w$$

$$B:\frac{\partial}{\partial u_o}\log\frac{\exp(u_o^T v_c)}{\sum_{w=1}^{V}\exp(u_o^T v_c)}=\frac{\partial}{\partial u_o}\log\exp(u_o^T v_c)-\frac{\partial}{\partial u_o}\sum_{w=1}^{V}\log(u_w^T v_c)$$

（除了w=0，其余对u_o的偏导数为0）

$$=\frac{\partial}{\partial u_o}u_o^T v_c-\frac{\partial}{\partial u_o}\log(u_o^T v_c)$$

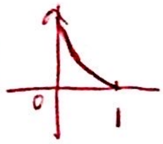
$$=v_c-\frac{1}{u_o^T v_c}\frac{\partial}{\partial u_o}(u_o^T v_c)=v_c-\frac{v_c}{u_o^T v_c}=v_c-\frac{1}{u_o}\ \#$$

△交叉熵：机器/深度学习中常用来描述目标与预测值差距，即定义目标函数

$\boxed{\text{信息量}}$：一个事件发生的概率越低，获取到的信息量就越大

A：巴西队进入2018年世界杯决赛　B：中国队进入2018年世界杯决赛

显然A发生的概率高，因此A的信息量更大　$I(X=A)=-\log(p(A))$



$\boxed{\text{熵}}$：所有信息量的期望　$H(x)=-\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\log(p(x_i))>0$

$\boxed{\text{相对熵}}$：也称KL散度（Kullback-Leibler divergence）
用于衡量两个分布的差异

机器学习中，P⇒真实分布[1，0，0]；Q⇒模型预测分布[0.7，0.2，0.1]
显然Q用来描述样本分类不够完美，信息量不足，需要额外的信息增量

$$\underbrace{D_{KL}(p\|q)}_{\text{用}p\text{比用}q\text{多出来的信息增量}}=\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\log\frac{p(x_i)}{q(x_i)}$$

$\boxed{\text{交叉熵}}$ $D_{KL}(p\|q)=\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\log p(x_i)-\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\log q(x_i))$

$$=\underbrace{-H(p(x))}_{}-\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\log q(x_i))$$

机器/深度学习中此项为固定值，只需优化 $-\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\log q(x_i)$ 使其最小.