概述

一、本次期中考试明显感觉做错了两题。

首先是题 1 的第三小题，由于计算量过大时间不够没有算出来

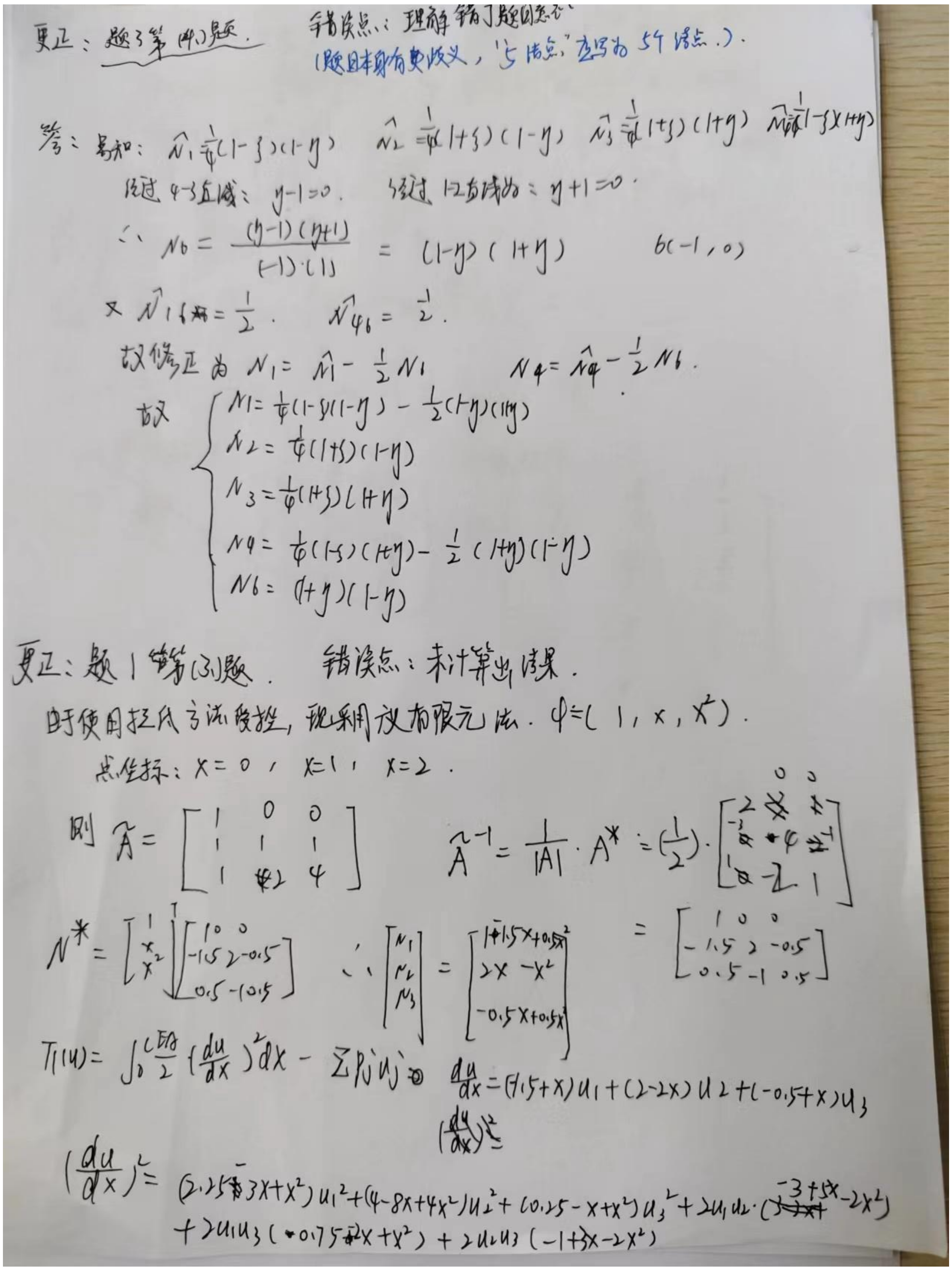
其次是题 3 的第四小题，本人理解错了题目的意思，以为是计算结合体单元 5 节点的插值函数。

二、值得一提的是题 2 第三小题证明协调性，个人感觉思路是很清晰的：1、求出三角形单元边界任意一点 p 在以该边界设定的自然坐标系下的位移函数 2、求出矩形单元边界任意一点 p 在以该边界设定的自然坐标系下的位移函数 3、由于没有用到其他的节点，使用的坐标为自然坐标，所以如果 12 求出的函数形式一致，则可以证明其协调性。

但是证明有点繁琐，故偷懒了些，略写了一点，这里就不再补交了。

其余题目个人感觉在考试当时作出的答案都大概准确，也不在本文件中展示。

补交图片


更正：题3第(4)题.　错误点：理解错了题目意思（题目本身有些歧义，"5 节点"应写为 5 个结点.）.

答：易知：$\hat{N}_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$　$\hat{N}_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$　$\hat{N}_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$　$\hat{N}_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$

经过 4-3 直线：$\eta-1=0$.　经过 1-2 直线为：$\eta+1=0$.

$\therefore N_6=\frac{(\eta-1)(\eta+1)}{(-1)\cdot(1)}=(1-\eta)(1+\eta)$　$6(-1,0)$

又 $\hat{N}_{16}=\frac{1}{2}$.　$\hat{N}_{46}=\frac{1}{2}$.

故修正为 $N_1=\hat{N}_1-\frac{1}{2}N_6$　$N_4=\hat{N}_4-\frac{1}{2}N_6$.

故
$$\begin{cases} N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)-\frac{1}{2}(1-\eta)(1+\eta) \\ N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)-\frac{1}{2}(1+\eta)(1-\eta) \\ N_6=(1+\eta)(1-\eta) \end{cases}$$

更正：题1第(3)题.　错误点：未计算出结果.

当时使用拉氏方法复杂，现采用有限元法. $\varphi=(1, x, x^2)$.

点坐标：$x=0$，$x=1$，$x=2$.

则 $\tilde{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{bmatrix}$　$\tilde{A}^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^*=(\frac{1}{2})\cdot\begin{bmatrix}2&0&0\\-3&4&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1.5&2&-0.5\\0.5&-1&0.5\end{bmatrix}$

$N^*=\begin{bmatrix}1\\x\\x^2\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&0&0\\-1.5&2&-0.5\\0.5&-1&0.5\end{bmatrix}$　$\therefore\begin{bmatrix}N_1\\N_2\\N_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-1.5x+0.5x^2\\2x-x^2\\-0.5x+0.5x^2\end{bmatrix}$

$\Pi(u)=\int_0^{L}\frac{EA}{2}(\frac{du}{dx})^2dx-\sum P_i u_i$　$\frac{du}{dx}=(-1.5+x)u_1+(2-2x)u_2+(-0.5+x)u_3$

$(\frac{du}{dx})^2=$

$(\frac{du}{dx})^2=(2.25-3x+x^2)u_1^2+(4-8x+4x^2)u_2^2+(0.25-x+x^2)u_3^2+2u_1u_2\cdot(-3+5x-2x^2)$
$+2u_1u_3(0.75-2x+x^2)+2u_2u_3(-1+3x-2x^2)$

$$\int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \left(2.25\cdot 2 - \frac{3}{2}\cdot 2^2 + \frac{2^3}{3}\right)\cdot u_1^2 + \left(4\cdot 2 - \frac{8}{2}\cdot 2^2 + \frac{4}{3}\cdot 2^3\right)\cdot u_2^2$$

$$+\left(0.25\cdot 2 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3}\right)\cdot u_3^2 + \left(-3\cdot 2 + \frac{5\cdot 2^2}{2} - \frac{2}{3}2^3\right)\cdot 2u_1u_2$$

$$+\left(0.75\cdot 2 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3}\right)\cdot 2u_1u_3 + \left(-1\cdot 2 + \frac{3}{2}\cdot 2 - 2\cdot\frac{2^3}{3}\right)\cdot 2u_2u_3$$

$$= \frac{7}{6}u_1^2 + \frac{8}{3}u_2^2 + \frac{7}{6}u_3^2 - \frac{4}{3}u_1u_2 + \frac{1}{3}u_1u_3 - \frac{8}{3}u_2u_3$$

$$\therefore \frac{\partial \pi}{\partial u_1} = \frac{EA}{l}\cdot\left(\frac{7}{3}u_1 - \frac{8}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3\right) = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_2} = \frac{EA}{l}\cdot\left(\cancel{\frac{16}{3}u_2} - \frac{8}{3}u_1 + \frac{16}{3}u_2 - \frac{8}{3}u_3\right) = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_3} = \frac{EA}{l}\left(\frac{1}{3}u_1 - \frac{8}{3}u_2 + \frac{7}{3}u_3\right) - \cancel{u_3} = 0$$

$\therefore$ 刚度矩阵

$$\frac{EA}{L}\cdot\begin{bmatrix} \frac{79}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{19}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{26}{3} \\ \frac{17}{3} & -\frac{26}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

刚度矩阵

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

还有一需要提到的是在题 1 中可以感觉出，将一个三节点轴力杆单元拆成两个单元后叠加而成的总体刚度矩阵，和将三节点轴力杆单元视为整体算出来的刚度矩阵不一样。这是由这两种方法的拟合方式不同而引起的，总的来说后者会更准确。