

Topik ke 1

Teknik Mencacah



Suatu percobaan atau eksperimen seringkali mempunyai beberapa kemungkinan hasil. Atau suatu persoalan dapat diselesaikan dengan beberapa cara. Teknik mencacah merupakan suatu metode untuk menghitung banyaknya kemungkinan hasil dari suatu percobaan atau banyaknya solusi dari suatu persoalan. Secara umum ada 4 teknik yang dipergunakan, yaitu teknik penjumlahan, perkalian, permutasi dan kombinasi. Dalam persoalan yang rumit, keempat metode ini dipergunakan secara bersamaan.

1.1 Faktorial, Kombinasi dan Permutasi

Sebelum masuk ke pembahasan lebih jauh mengenai teknik-teknik mencacah, diberikan terlebih dahulu beberapa operator matematika yang nantinya akan sering dipakai. Operator-operator tersebut adalah :

1. **Faktorial**, yang disimbolkan dengan ‘!’.
2. **Kombinasi**, yang disimbolkan dengan C_r^n
3. **Permutasi**, yang disimbolkan dengan P_r^n

Faktorial

Operator faktorial disimbolkan dengan “!” dipakai untuk menyatakan perkalian mulai dari bilangan yang difaktorialkan sampai dengan satu. **n!** dibaca “n faktorial”. Misalkan : **6!** dibaca : “enam faktorial”.

Faktorial didefinisikan sebagai :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1.$$

Contoh :

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 5! = 720$$

Perlu dicatat bahwa **0! = 1**

Kombinasi

Operator kombinasi disimbolkan dengan :

$$C_r^n = {}_n C_r = C(n, r) = \binom{n}{r}$$

dibaca sebagai : “**kombinasi tingkat r dari n unsur**”. Dalam hal ini $n \geq r$.

C_r^n didefinisikan sebagai :

$$C_r^n = \frac{n!}{r! \cdot x(n-r)!}$$

Contoh :

$$C_2^5 = \frac{5!}{2! \cdot x(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot x(3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$$

Permutasi

Operator permutasi disimbolkan dengan :

$$P_r^n = {}_n P_r = P(n, r)$$

dibaca sebagai : “**permutasi tingkat r dari n**”. Dalam hal ini $n \geq r$. P_r^n didefinisikan sebagai :

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh :

$$P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{6} = 20$$

Selain ketiga operator diatas juga dikenal operator berikut :

$$\binom{n}{r_1 \ r_2 \ \dots \ r_k} = \frac{n!}{r_1! \cdot x r_2! \cdot x \dots x r_k!}$$

sebagai contoh adalah :

$$\binom{12}{1 \ 8 \ 2 \ 1} = \frac{12!}{1! \cdot x 8! \cdot x 2! \cdot x 1!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{1 \cdot 8! \cdot x (2 \cdot 1) \cdot x 1} = 5940$$

1.2 Kaidah Penjumlahan

Kaidah : Andaikan suatu pekerjaan dapat **dipilah** menjadi n kemungkinan dan masing-masing kemungkinan dapat diselesaikan dengan r_1, r_2, \dots, r_n cara, maka secara keseluruhan, pekerjaan tersebut dapat diselesaikan dengan $(r_1 + r_2 + \dots + r_n)$ cara.

Contoh :

- a. Dalam suatu rak tersedia tiga jenis buku, yaitu 10 buku Fisika, 15 buku Matematika dan 25 buku Ilmu Komputer. Jika diambil satu buku dari rak tersebut, maka ada berapa banyak pilihan buku yang bisa diambil?

Jawab : total = $10 + 15 + 25 = 50$ pilihan.

- b. Dalam suatu pemilihan presiden terdapat 3 partai, yaitu partai A, B, dan C yang mempunyai calon untuk menjadi presiden. Partai A, B, C masing-masing mempunyai jumlah calon sebanyak 4, 3 dan 5 orang. Ada berapa banyak pilihan untuk memilih satu calon presiden?

Jawab : total = $4 + 3 + 5 = 12$ pilihan.

1.3 Kaidah Perkalian

Kaidah : Andaikan suatu pekerjaan merupakan rangkaian dari n pekerjaan dan masing-masing pekerjaan dapat diselesaikan dengan r_1, r_2, \dots, r_n cara, maka secara keseluruhan, pekerjaan tersebut dapat diselesaikan dengan $(r_1 \times r_2 \times \dots \times r_n)$ cara.

Contoh :

- a. Dari pelemparan dua buah dadu sisi enam yang bernomor 1, 2, ..., 6 ada berapa kemungkinan kemunculan yang mungkin terjadi ?
- b. Lima pasang muda-mudi ingin didudukkan dalam 10 kursi berjejer. Ada berapa cara mendudukkan 10 orang tersebut, jika :

- i) Tidak ada persyaratan lain
- ii) Perempuan dan pria harus terpisah sesuai keompoknya
- iii) Perempuan dan laki-laki harus selang-seling
- iv) Masing-masing sesuai dengan pasangannya

- c. Dalam suatu pemilihan presiden dan wakil presiden terdapat 3 partai, yaitu partai A, B, dan C yang mempunyai calon untuk menjadi presiden/wakil. Partai A, B, C masing-masing mempunyai jumlah calon sebanyak 4, 3 dan 5 orang. Ada berapa kemungkinan terbentuknya pasangan presiden-wakil presiden, jika :

- i) Tidak ada persyaratan lain.
- ii) Presiden dan wakil tidak boleh dari partai yang sama
- iii) Jika presiden dari A, maka wakil tidak boleh dari B

iv) Presiden dan wakil harus dari partai yang sama

1.4 Permutasi

Kaidah : Jika dari n obyek yang berbeda akan dilakukan penyusunan/pengambilan sebanyak r obyek ($0 \leq r \leq n$) dengan memperhatikan urutan susunan/terambilnya, maka banyaknya susunan/cara pengambilan yang dapat dilakukan adalah :

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ cara/susunan}$$

Contoh :

- Dari 10 orang akan diambil 3 orang, masing-masing sebagai ketua, sekretaris dan bendahara. Ada berapa susunan kepengurusan yang dapat terbentuk?
- Ada berapa cara menyusun huruf-huruf dalam kata “BUAH” yang dapat dilakukan?

Jika dari n obyek tersebut ada yang kembar, maka banyaknya cara menyusun adalah seperti rumus di atas, tetapi masih dibagi lagi dengan faktorial dari jumlah yang kembar.

Contoh :

- Ada berapa cara menyusun huruf-huruf dalam kata “STATISTIKA” yang dapat dilakukan?
- Ada berapa permutasi dari huruf-huruf dalam kata “ARITMETIKA” ?

Catatan : persoalan-persoalan mengenai permutasi seringkali akan lebih mudah jika diselesaikan dengan kaidah perkalian.

1.5 Kombinasi

Kaidah : Jika dari n obyek yang berbeda akan dilakukan penyusunan/pengambilan sebanyak r obyek ($0 \leq r \leq n$) dengan **tidak** memperhatikan urutan susunan/terambilnya, maka banyaknya susunan/cara pengambilan yang dapat dilakukan adalah :

$$C_r^n = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \text{ cara/susunan}$$

Contoh :

- Dari 10 orang akan diambil 3 orang, masing-masing sebagai perwakilan dari kelompok tersebut. Ada beberapa cara mengambil 3 dari 10 orang tersebut ?
- Dalam kotak terdapat 10 kelereng merah, 5 biru dan 8 kuning. Dari kotak tersebut ingin diambil 4 kelereng secara acak. Ada berapa cara mengambil 4 kelereng tersebut ?
 - Tidak ada persyaratan tambahan

- ii) Ada 2 merah
- iii) Ada 1 merah, 2 biru dan sisanya kuning

Latihan Pertemuan Pertama

Bagian I

1. Tentukan nilai-nilai berikut :

- | | | |
|--|------------|---|
| a. $8!$ | d. C_5^7 | h. $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| b. $\frac{10!}{7!}$ | e. C_2^7 | |
| c. $\frac{15! \times 20!}{13! \times 19! \times 2!}$ | f. P_5^7 | |
| | g. P_2^7 | |

2. Tentukan nilai n pada setiap pernyataan berikut :

- | | | |
|----------------|---------------------|-------------------------|
| a. $P(n,2)=90$ | b. $P(n,3)=3P(n,2)$ | c. $2P(n,2)+50=P(2n,2)$ |
|----------------|---------------------|-------------------------|

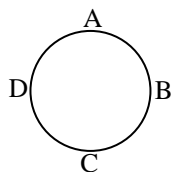
Bagian II

- Seseorang akan mengambil satu buku dari suatu rak buku. Misalkan di dalam rak ada 4 tipe buku, yaitu kimia (ada 20 buku), matematika (ada 10 buku), fisika (ada 9 buku) dan ilmu komputer (ada 23 buku). Berapa cara mengambil buku yang dapat dilakukan oleh orang tersebut ?
- Ada berapa plat mobil yang dapat dibuat, jika plat tersebut terdiri dari 6 digit, dengan digit pertama adalah huruf, 4 digit berikutnya adalah angka, dan sisanya huruf.
 - tak ada syarat tambahan
 - tidak boleh ada angka kembar
 - tidak boleh ada angka kembar dan angka nol tidak boleh di depan
- Dari 10 orang akan dibuat suatu kelompok yang terdiri dari 4 orang. Ada berapa kelompok yang dapat dibuat ?
 - Tidak ada syarat tambahan
 - Si A (salah satu dari 10 orang tersebut) harus terpilih
 - Si A dan si B tidak boleh terpilih secara bersamaan
- Dari satu set kartu bridge akan diambil 8 kartu. Ada berapa cara mengambil delapan kartu tersebut ?
 - tidak ada syarat tambahan

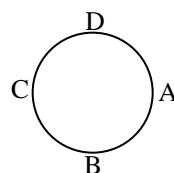
- b. ada 4 merah dan 4 hitam
 - c. ada 3 Ace terpilih
 - d. Ada 2 Ace, 3 King dan sisanya adalah kartu diamond
5. Ada berapa bilangan yang terdiri dari 4 angka yang dapat dibuat dari angka-angka 0, 1, 2, ..., 9 ?
- a. tidak ada syarat tambahan
 - b. tidak boleh ada angka berulang
 - c. bilangan tersebut genap
 - d. bilangan tersebut ganjil
 - e. bilangan tersebut lebih dari 3000
6. Ada 40 mahasiswa akan piknik menggunakan 3 kendaraan, yaitu kijang (muat 12 orang), L300 (muat 15 orang) dan sisanya minibus. Ada berapa cara memberangkatkan 40 mahasiswa tersebut dengan 3 mobil ?
- a. tak ada syarat tambahan
 - b. Jika ada 4 pasang muda-mudi tertentu harus dalam satu mobil?
 - c. Jika ada 3 orang tertentu tidak mau dalam satu mobil yang sama
7. Dari 5 pasang muda-mudi akan didudukkan dalam 10 kursi berjejer. Ada berapa cara mendudukkan, jika :
- a. tak ada syarat tambahan
 - b. Harus berselang-seling
 - c. Harus berpasangan
 - d. Ada 2 pasangan tertentu tidak mau berdampingan

1.6 Permutasi Melingkar

Permutasi melingkar adalah susunan dalam bentuk melingkar. Karena melingkar, maka tidak dikenal posisi ujung dan awal. Sebagai contoh berikut ini adalah permutasi melingkar dari 4 unsur :



Adalah sama dengan



Oleh karena itu banyaknya permutasi melingkar dari n unsur adalah $(n-1)!$

1.7 Teorema Binomial

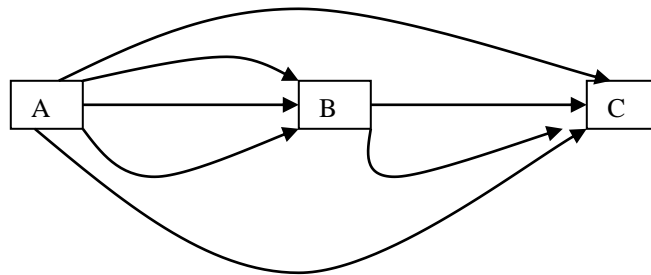
Jika x dan y adalah suatu peubah (variabel), dan n adalah bilangan bulat positif, maka berlaku

$$(x+y)^n = C(n,0) x^0 y^n + C(n,1) x^1 y^{n-1} + C(n,2) x^2 y^{n-2} + \dots + C(n,n) x^n y^{n-n}$$

Dalam hal ini $C(n,r)$ adalah koefisien dari suku $x^r y^{n-r}$.

Latihan Pertemuan Kedua

1. Suatu produk komputer yang akan diluncurkan ditentukan oleh 4 jenis komponen, yaitu model (ada 3 jenis model), kecepatan prosesor (ada 4 pilihan kecepatan), kapasitas memory (ada 3 pilihan), serta tipe layar (ada 2 tipe). Ada berapa banyak kemungkinan jenis produk yang dapat dibuat?
2. Seorang operator komputer pada suatu hari menerima 12 job untuk diselesaikan secara berurutan. Ada berapa cara menyelesaikan pekerjaan tersebut jika :
 - a. Tidak ada batasan apapun
 - b. Ada 4 job yang mempunyai prioritas harus dikerjakan.
 - c. Dua belas job tersebut dikelompokkan dalam 3 kelas, yaitu 4 job dalam kelompok penting, 5 job dalam kelompok kurang penting dan sisanya tidak penting. Dan operator tersebut menyelesaikan job tersebut berdasarkan tingkat pentingnya.
3. Berdasar gambar berikut, sda berapa cara untuk mencapai dari kota A ke kota C?



4. Suatu komunikasi didasarkan pada 40 simbol yang ada. Ada berapa pesan yang dapat dibuat jika pesan ini terdiri dari 25 simbol yang diambil dari 40 simbol yang ada.
 - a. tidak ada batasan lain.
 - b. Tidak boleh ada simbol yang sama dalam pesan tersebut

- c. Jika 10 simbol tertentu (dari 40 simbol yang ada) harus muncul dalam 10 urutan pertama dalam pesan tersebut, dan sisanya adalah 30 simbol lainnya (boleh ada simbol yang kembar).
5. Misalkan dalam suatu bahasa pemrograman tertentu, suatu identifier (variabel) boleh dinyatakan dengan simbol (angka atau huruf) dengan panjang maksimum adalah 7 digit/symbol dan simbol pertama harus huruf. Selain itu juga ada kata-kata tertentu tidak boleh dipakai (karena telah menjadi kata kunci dalam bahasa tersebut). Dalam hal ini ada 40 kata kunci. Oleh karena itu ada berapa identifier yang dapat dibuat dalam bahasa tersebut?
6. Seorang professor komputer ingin menyusun buku yang dimiliki dalam suatu rak. Ada 3 buku Fortran, 4 buku Basic, dan 5 Pascal. Ada berapa cara menyusun ?
 - a. tidak ada batasan
 - b. buku-buku harus mengelompok sesuai kelompoknya
 - c. disusun berdasar urutan abjad pertama dari kelompok buku tersebut
 - d. buku Basic harus paling kanan
7. Perlihatkan bahwa
$$P(n+1, r) = \left(\frac{n+1}{n+1-r} \right) P(n, r)$$
8. Ada berapa cara seorang siswa menjawab 10 soal pilihan ganda (ada 4 pilihan untuk setiap soal) secara acak?
9. Satu byte adalah terdiri dari 8 digit biner (0 atau 1). Ada berapa jenis byte yang mengandung :
 - a. Tepat mempunyai digit 1 sebanyak 2.
 - b. Tepat mempunyai digit 1 sebanyak 4
 - c. Paling sedikit mempunyai digit 1 sebanyak 6.
10. Seorang siswa harus memilih 7 dari 10 soal yang diberikan. Ada berapa cara memilih jika :
 - a. Tidak ada batasan lain
 - b. Dua soal pertama harus dipilih
 - c. Dia harus memilih 4 dari 6 soal pertama
11. Ada berapa cara membagikan 12 buku kepada 4 anak, jika :
 - a. Setiap anak mendapat 3 buku
 - b. Dua yang tertua masing-masing mendapat 4 buku dan dua yang termuda masing-masing 2 buku
12. Suatu string dibentuk dari dari angka 0, 1 dan 2. Jika panjang string tersebut adalah 10, ada berapa string yang dapat dibuat jika
 - a. mengandung 4 angka 0, 3 angka 1 dan sisanya adalah angka 2
 - b. mengandung paling sedikit delapan angka 1

- c. bobot suatu string adalah jumlah angka-angka dalam string tersebut, maka ada berapa string dengan bobot 4

13. Buktikan $n \binom{m+n}{m} = (m+1) \binom{m+n}{m+1}$

14. Dari 5 pasang muda-mudi akan didudukkan dalam 10 kursi melingkar. Ada berapa cara mendudukkan, jika :

- Tak ada syarat tambahan
- Harus berselang-seling
- Harus berpasangan
- Ada A dan B tidak mau berdampingan

16. Uraikan bentuk $(x+y)^5$

17. Tentukan koefisien dari x^5y^7 pada ekspansi $(x+y)^{12}$

18. Tentukan koefisien dari x^5y^7 pada ekspansi $(-x+2y)^{12}$

19. Tentukan koefisien dari $x^5y^7z^5$ pada ekspansi $(-x+2y+z)^{12}$