École **S**upérieure **Pr**ivée d'**I**ngénierie et de **T**echnologies

Analyse Numérique

Série d'exercices N^{o}1 : Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires

Niveau : 3A & 3 B

Exercice 1

On considère le système d'équations linéaires (S)*, dont l'écriture matricielle est donnée par* $AX = b$ *avec :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ et\, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Partie I :

1. (a) *Montrer que* (S) *admet dans* $\mathbb{R}^3$ *une unique solution.*
   (b) *Résoudre* (S) *en utilisant la méthode du pivot de Gauss.*
2. (a) *Justifier la convergence de la méthode de Jacobi et de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système* (S).
   (b) *Écrire les schémas itératifs des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution du système* (S).
   (c) *Pour le vecteur initial* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$*, donner les résultats des deux premières itérations en utilisant*
      i. *la méthode de Jacobi.*
      ii. *la méthode de Gauss-Seidel.*

Partie II :

3. *En considérant l'erreur* $E = ||X - X^{(k)}||_2$*, avec* X *la solution exacte,* $X^{(k)}$ $(k \in \{1, 2\})$ *une solution approchée par l'une des deux méthodes et* $||\,.\,||_2$ *la norme euclidienne définie par*

$$||X||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

calculer les erreurs commises par les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour les deux premières itérations.

4. *Comparer alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel en terme de précision pour les deux premières itérations pour la résolution du système (S).*

Exercice 2

On considère le systéme d'équations linéaires (S_α) : $A_\alpha X = b$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ et\, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les valeurs de α pour lesquelles A_α est inversible.*
2. *Déterminer une condition suffisante sur α assurant la convergence de la méthode de Jacobi pour la résolution du système (S_α).*
3. *Pour $\alpha = 3$,*
   (a) *Résoudre (S_3) par la méthode du pivot de Gauss.*
   (b) *Donner le schéma itératif de la méthode de Jacobi.*
   (c) *Pour le vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donner les résultats des deux premières itérations de la méthode de Jacobi pour la résolution du (S_3) .*
4. *On considère la suite numérique $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\begin{cases} X_0 = b \\ A_3^n X_n = b \end{cases}$$

   (a) *Vérifier l'existence de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$*
   (b) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*; A_3 X_n = X_{n-1}$.*
   (c) *Pour $n = 2$ donner un raisonnement (sans faire le calcul de A_3^2) pour la résolution du système*

$$A_3^2 X = b$$

Exercice 3 *On considère le système linéaire suivant :$Ax = b$ avec :*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \ et\, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

1. *Trouver les matrices L et U telles que $A = LU$, où :*
   — *L est triangulaire inférieure avec des coefficients diagonaux égaux à 1.*
   — *U est triangulaire supérieure.*
2. *Résoudre $Ax = b$ en utilisant cette décomposition.*

Nous allons explorer une autre décomposition de A, en recherchant cette fois une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux ne sont pas nécessairement égaux à 1.

$$A = LL^T$$

où L est une matrice triangulaire inférieure, et L^T sa transposée.

3. *Déterminer les coefficients de L.*
4. *Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant cette nouvelle décomposition.*
5. *Comparer la solution obtenue avec les deux méthodes, que peut-on remarquer ?*