BULANIK MANTIK VE YAPAY SİNİR AĞLARINA GİRİŞ

HAFTA – 2.2

KLASİK VE BULANIK İLİŞKİLER

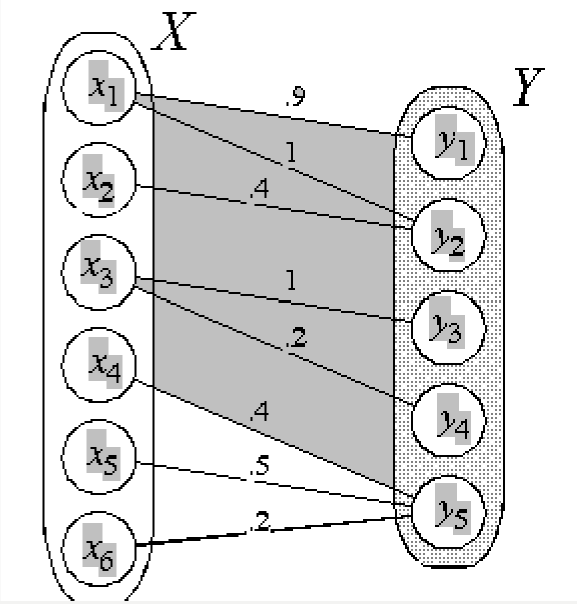
DR. ÖĞR. ÜYESİ M. FATİH ADAK

İÇERİK

- Kartezyen Çarpım
- Crips İlişki
- Bulanık İlişki
- Bulanık İlişkiler Üzerine İşlemler
- Bulanık Kartezyen Çarpım
- Çözünürlük Prensibi
- İlişkilerin Bileşimi
  - Max-Min Bileşim
  - Max-Çarpım Bileşim

TANIM

- Kümeler üzerinde ilişki kurabilmek için bazı işlemler yapılmaktadır.
  - Kartezyen çarpımı
  - İlişkilerin birleşimi
  - Eşitlik özellikleri
- İlişkiler benzerliği ifade edebilmek için kullanılabilirler.



İLİŞKİLERİN KULLANILDIĞI TEMEL ALANLAR

- Mantık
- Ortalama akıl yürütme (approximate reasoning)
- Kural tabanlı sistemler
- Lineer olmayan simülasyon
- Sınıflandırma
- Örüntü tanıma
- Kontrol

KARTEZYEN ÇARPIM

- Kümeler üzerinde sıralı ilişkilerin tanımlanmasıdır.
- Sıralı n kadar eleman yazılış şekli

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$$

- Örnek:
  - A ve B iki küme olsun A={1, 2, 3} B={a, b}

Bu iki kümenin Kartezyen çarpımları

$$A \times B = \{(1,\mathrm{a}), (1,\mathrm{b}), (2,\mathrm{a}), (2,\mathrm{b}), (3,\mathrm{a}), (3,\mathrm{b})\}$$

$$B \times A = \{(\mathrm{a},1), (\mathrm{a},2), (\mathrm{a},3), (\mathrm{b},1), (\mathrm{b},2), (\mathrm{b},3)\}$$

$$A \times A = A^2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

$$B \times B = B^2 = \{(\mathrm{a},\mathrm{a}), (\mathrm{a},\mathrm{b}), (\mathrm{b},\mathrm{a}), (\mathrm{b},\mathrm{b})\}$$

CRISP İLİŞKİ

- Eğer herhangi bir ikili Kartezyen çarpımının elemanı ise ilişki vardır ve değeri 1'dir.
- Eğer herhangi bir ikili Kartezyen çarpımının elemanı değil ise ilişki yoktur ve değeri 0'dır.

$$\chi A \times B(a,b) = \begin{cases} 1, & (a,b) \in A \times B \\ 0, & (a,b) \notin A \times B \end{cases}$$

BULANIK İLİŞKİ

- Crisp ilişkiye benzer özellikler içerir.
- İlişkinin gücü karakteristik bir fonksiyon ile ölçülmez
- Aksine üyelik fonksiyonu ile ifade edilir. Bu [0, 1] aralığında bir değerdir.

$$\mu_R(x, y)$$

BULANIK İLİŞKİLER ÜZERİNE İŞLEMLER

Birleşim	$\mu_{\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{S}}(x, y) = \max(\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y), \mu_{\underset{\sim}{S}}(x, y))$
Kesişim	$\mu_{\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{S}}(x, y) = \min(\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y), \mu_{\underset{\sim}{S}}(x, y))$
Değil	$\mu_{\underset{\sim}{\overline{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y)$
Kapsama	$\underset{\sim}{R} \subset \underset{\sim}{S} \Rightarrow \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) \leq \mu_{\underset{\sim}{S}}(x, y)$

BULANIK KARTEZYEN ÇARPIMI

- İki veya daha fazla bulanık küme üzerine Kartezyen çarpım tanımlanabilir.
- $\underset{\sim}{A}$, X uzayında bir bulanık küme, $\underset{\sim}{B}$, Y uzayında bir bulanık küme olsun.
- $\underset{\sim}{A}$ ile $\underset{\sim}{B}$ arasındaki Kartezyen çarpım, $\underset{\sim}{R}$ bulanık ilişkisinde gerçekleşecektir.

$$\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{R} \subset X \times Y$$

- $\underset{\sim}{R}$ bulanık ilişkisinin sahip olduğu üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B}}(x, y) = \min(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(y))$$

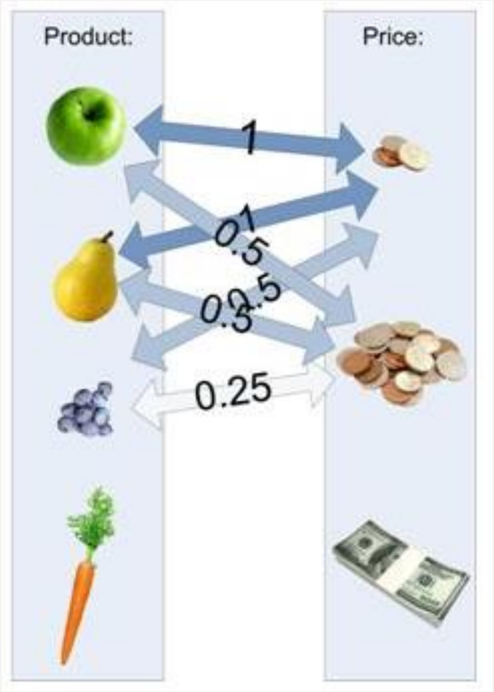
ÇÖZÜNÜRLÜK (RESOLUTİON) PRENSİBİ

- Verilen çözünürlük değerini taban kabul edip Kartezyen çarpımı güncellemek.
- Herhangi bir bulanık ilişki bütün çözünürlüklerin toplamına eşittir.

$$R = aR_a + bR_b + cR_c + dR_d$$

İLİŞKİLERİN BİLEŞİMİ

- Genelde iki farklı bileşim türü kullanılır.
  - Max-Min Bileşimi
  - Max-Çarpım Bileşimi



MAX-MIN BİLEŞİMİ

- R ve S diye iki farklı ilişki tanımlı olsun

$R(\mathrm{X}\times \mathrm{Y})$ $\mathrm{S}(\mathrm{Y}\times \mathrm{Z})$

- $T = R \circ S$ T, Max-Min bileşimi olarak ifade edilsin.

$$\begin{aligned}\mu_T(x,z) &= \max-\min[\mu_R(x,y), \mu_S(y,z)] \\ &= V[\mu_R(x,y) \wedge \mu_S(y,z)]\end{aligned}$$

MAX-ÇARPIM BİLEŞİMİ

- R ve S diye iki farklı ilişki tanımlı olsun

$R(X\times Y)$ $S(Y\times Z)$

- $T = R \circ S$ T, Max-Çarpım bileşimi olarak ifade edilsin.

$$\begin{aligned}\mu_T(x,z) &= \max[\mu_R(x,y).\mu_S(y,z)] \\ &= V[\mu_R(x,y).\mu_S(y,z)]\end{aligned}$$

ÇIKARIM

- Tüm kurallar değerlendirilir.
- Eğer bir girdi tam olarak kurala karşılık gelmiyorsa kısmi eşleşme kullanılır.
- Örneğin bir sistem, sıcaklık ve nemi ölçüp sırasıyla 0.7 ve 0.1 üyelik derecelerine eşleştirir.
- Sistem daha sonra herbir bulanık kuralın doğruluk tablosunu çıkarır.
- Bunu yapmak için örneğin basit bir metot olan Max-Min kullanılabilir.
- Bu nedenle sistem, örneğin kural 1,2 ve 3 için sırasıyla 0.7, 0.1 ve 0.1 bulanık değerlerini çıkarır.
- Bileşimler çalışan farklı kurallardan bir sonuç çıkarmayı sağlar.

BULANIK KURALIM BULANIK İLİŞKİ OLARAK TEMSİLİ

$\underbrace{A \rightarrow B}_{R}$ = IF x is A then y is B

$$\mu_R(x,y) = \mu_{A\rightarrow B}(x,y)$$

KAYNAKLAR

- Ross, Timothy J. Fuzzy logic with engineering applications. John Wiley & Sons, 2005.
- Nguyen, Hung T., and Elbert A. Walker. A first course in fuzzy logic. CRC press, 2005.
- Dubois, Didier J. Fuzzy sets and systems: theory and applications. Vol. 144. Academic press, 1980.
- Bishop, Christopher M. "Pattern recognition and machine learning, 2006." 60.1 (2012): 78-78.