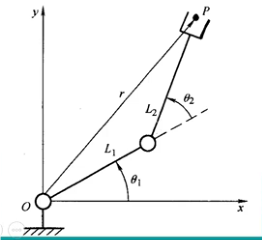
不考虑引起运动的力，本章考虑位移关系



从几何学的观点来处理机器人末端位置P与关节变量L_1, L_2，θ_1和θ_2的关系称为运动学(Kinematics)。

正运动学：给定关节转动角度和位移量，求末端位置姿态

- 定义末端位置和关节变量：

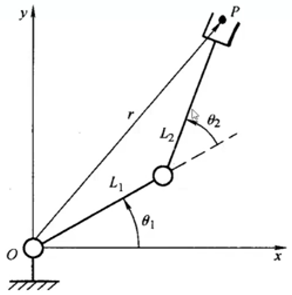
$$r=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \theta=\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

- 根据几何关系：

$$x=L_1\cos\theta_1+L_2\cos(\theta_1+\theta_2)$$

$$y=L_1\sin\theta_1+L_2\sin(\theta_1+\theta_2)$$

一般向量形式表达： $r=f(\theta)$



逆运动学：给定末端位置姿态，求关节转动角度和位移量

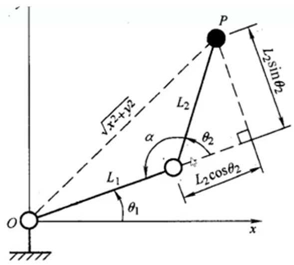
$$\theta_2=\pi-\alpha$$

$$\theta_1=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-\arctan\left(\frac{L_2\sin\theta_2}{L_1+L_2\cos\theta_2}\right)$$

式中：

$$\alpha=\arccos\left[\frac{-(x^2+y^2)+L_1^2+L_2^2}{2L_1L_2}\right]$$

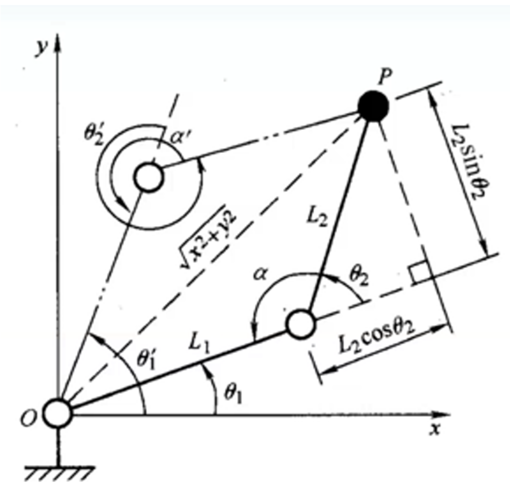
机器人运动学基本概念.mp4



同样，如果用向量表示上述关系式，其一般可表示为：

$$\theta=f^{-1}(r)$$

逆运动学解不唯一，需要筛选



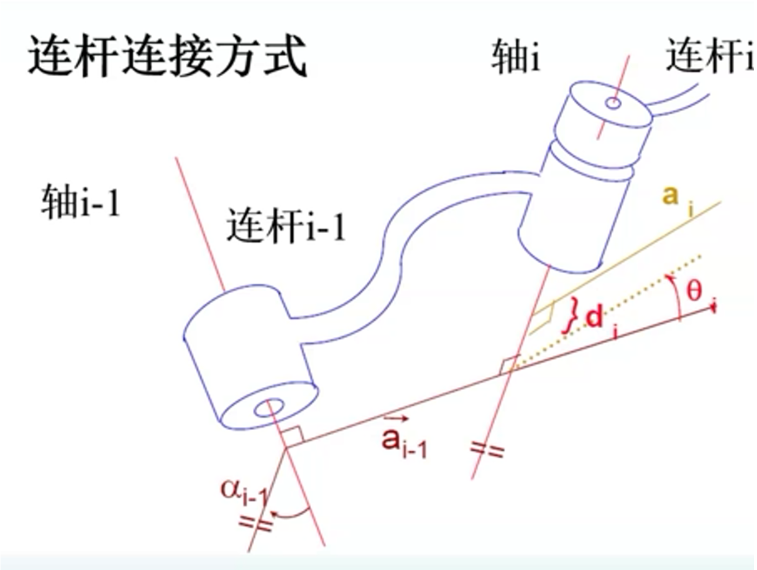
广义连杆

4个D-H参数

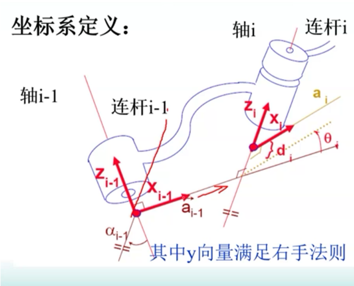
- 连杆长度：公法线长度
- 连杆扭角：右手，拇指移动方向，四指为正扭角方向
- 连杆偏移量：旋转平移后，沿着目标轴再平移
- 关节转角

判定条件：与公法线夹角的是θ，沿着公法线移动的是a

以公法线为轴的是α



旋转+移动+旋转+移动



(1)绕 X_{i-1} 轴旋转 α_{i-1} 角，使 Z_{i-1} 转到与 Z_i 平行；

(2)沿X_{i-1} 轴平移一距离a_{i-1}，把z_{i-1} 移到与 Z_i 同一直线上。

(3)绕 z_{i-1}轴旋转 θ_i 角，使 X_{i-1} 轴转到与X_i相平行；

(4) 沿 Z_i 轴平移一距离 d_i，使连杆 $i-1$ 坐标系的原点与 连杆 i 的坐标系原点重合。

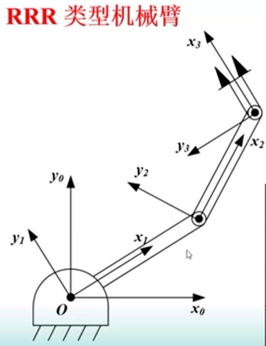
得到任意两坐标系之间的齐次变换矩阵

$$A_i = Rot(x,\alpha_{i-1})Trans(a_{i-1},0,0)Rot(z,\theta_i)Trans(0,0,d_i)$$

展开上式可得：

$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

举例：RRR 类型机械臂



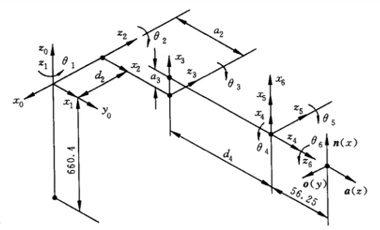
α_i = 从轴z_i 到轴 z_{i+1} 关于绕轴x_i扭角

a_i = 从轴 z_i 到轴 z_{i+1} 沿轴 x_i偏移量

θ_i = 从轴x_{i-1} 到轴 x_i关于绕轴z_i转角

d_i = 从轴x_{i-1} 到轴 x_i 沿轴 z_i方向的位移

连杆	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3



连杆 i	变量 θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	变量范围
1	$\theta_1(90°)$	0°	0	0	−160°～160°
2	$\theta_2(0°)$	−90°	0	d_2	−225°～45°
3	$\theta_3(-90°)$	0°	a_2	0	−45°～225°
4	$\theta_4(0°)$	−90°	a_3	d_4	−110°～170°
5	$\theta_5(0°)$	90°	0	0	−100°～100°
6	$\theta_6(0°)$	−90°	0	0	−266°～266°

可得连杆变换通式为：

$$
{}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$