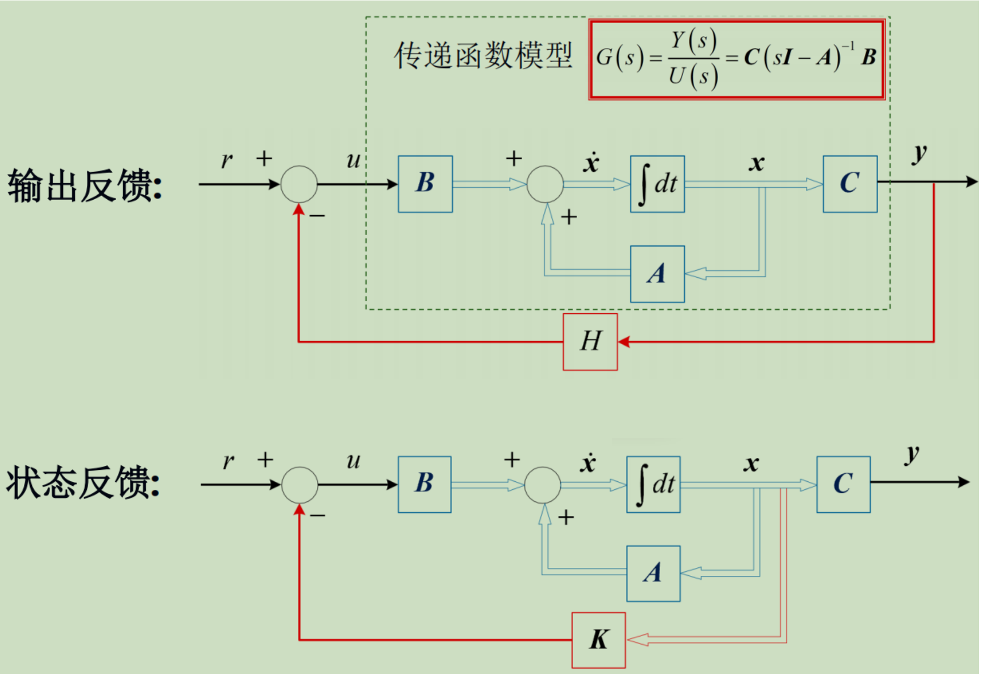
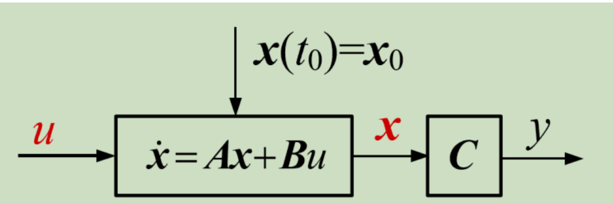


T1--能控性&能观性判定

- 能控性：所有状态受输入信号影响

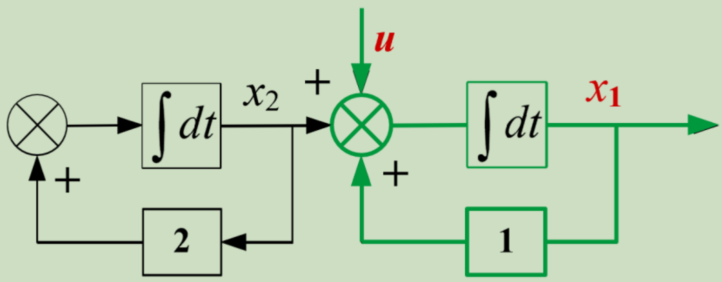


如果存在无约束的控制信号$u(t)$，能够使系统从任意一个初始状态 $x(t_0)$ 转变到另一个预期状态 $x(t)$ ，$t_0 \le t \le T$，则称该系统是完全能控的。

例11-1 判断如下线性状态方程的能控性

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1=x_1+x_2+u\\ \dot{x}_2=2x_2\end{cases}$$

x_2不能控



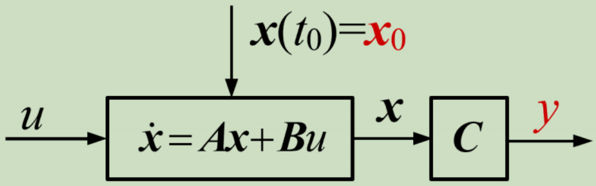
- 注意矩阵AB和框图模型的对应：A和B的0代表，u对于x2无影响
- A的对角线代表了反馈，右上角代表x2对x1有多大影响

能控性秩判据: 对n维连续时间线性时不变系统，系统完全能控的充分必要条件为能控性判别矩阵 P_c 满秩，即

$$rank\left(\boldsymbol{P}_c\right)=n$$

能控性矩阵：$P_c=\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$

- 能观性：状态变量能测量，由观测值确定初态

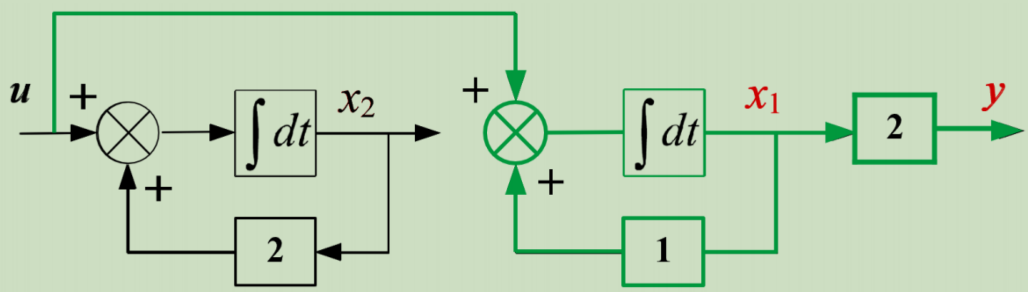


当且仅当存在有限时间 T，给定控制变量 $u(t)$，$0\le t\le T$ 之后，可以由 $y(t)$ 在 $[\,0, T\,]$ 上的观测值确定系统的初始状态 $x(0)$，则称系统是**完全能观**的。

例11-2 判断如下线性状态方程的能观性

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1=x_1+u\\ \dot{x}_2=2x_2+u\\ y=2x_1\end{cases}$$

x_2不能观



- u对x1和x2都有影响
- A右上角0，表示x2对x1无影响

能观性秩判据: **对n 维连续时间线性时不变系统，系统完全能观的充分必要条件为能观性判别矩阵 P_o 满秩，即**

$$rank\left(\boldsymbol{P}_o\right)=n$$

$$\text{能观性矩阵：}\boldsymbol{P}_o=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

T2-全状态反馈控制器设计

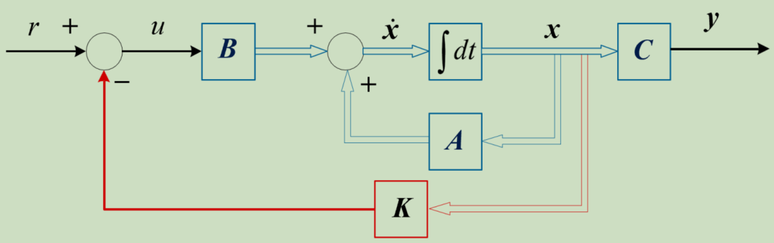
1. 解$\boldsymbol{Pc}$，检验完全能控性
2. 根据性能要求，确定期望的闭环系统的特征方程$\boldsymbol{q}(\lambda)$;
3. 阿克曼公式，确定K

系统状态方程： $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{B}u$

控制律： $u=-\boldsymbol{Kx}$

状态反馈增益矩阵：

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$



系统状态方程： $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{B}u$

控制信号： $u=-\boldsymbol{Kx}$

闭环系统状态方程：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}\right)\boldsymbol{x}$$

极点配置设计的问题在于选择合适的矩阵 K，将闭环系统状态矩阵$(A-BK)$的特征值（闭环控制系统的极点）配置到预定的位置。

阿克曼公式

$$\boxed{K=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}P_c^{-1}q(A)}$$

其中，

P_c是能控性矩阵：$P_c=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}$

$q(A)$是关于A的多项式：$q(A)=A^n+\alpha_{n-1}A^{n-1}+\cdots+\alpha_1A+\alpha_0I$

$q(A)$的系数与期望的闭环系统特征方程$q(\lambda)$的系数相同。

$$q(\lambda)=\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_1\lambda+\alpha_0$$

例11-4：已知线性定常控制系统状态空间模型为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}x$$

设计状态反馈控制器，使得闭环系统满足如下指标：

1. 调节时间 $T_s<$ 1s (2%准则)
2. 超调量 P. O. < 5%

解：

1. 求解能控性矩阵P_c，检验系统的状态完全能控性；

已知系统的状态矩阵A和控制矩阵B为：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

则，系统的能控性矩阵P_c为：

$$P_c=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$$

$Rank(P_c)=2$，系统的状态完全能控。

2. 根据性能要求确定期望的闭环系统的特征方程$q(\lambda)$；

根据系统对性能指标的要求，设置主导极点为：$-4\pm 4j$

期望的闭环系统特征方程：

$$q(\lambda)=(\lambda+4-4j)(\lambda+4+4j)=\lambda^2+8\lambda+32$$

则：

$$q(A)=A^2+8A+32I=\begin{bmatrix}41 & 10\\0 & 41\end{bmatrix}$$

3. 采用阿克曼公式确定状态反馈增益矩阵K。

假设控制信号：$u=-Kx$　其中，$K=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{bmatrix}$

由阿克曼公式得到：

$$K=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}P_c^{-1}q(A)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}41 & 10\\0 & 41\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}41 & -31\end{bmatrix}$$

因此，控制器信号为：

$$u=-\begin{bmatrix}41 & -31\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=-41x_1+31x_2$$

- 要求转化主导结点，可以背
- 由主导结点算闭环特征方程

T3--状态观测计设计

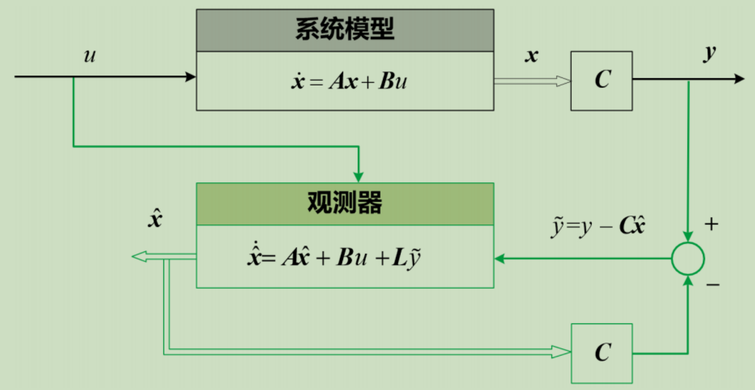
> 不是所有状态变量可直接测量，为能形成反馈， 就用状态观测器给出状态估值

- 状态观测问题：从系统的输入、输出信号中估计状态变量

1. 解Po，检验完全可观性

2. 根据性能要求，确定期望的闭环系统的特征方程p(λ)；

3. 阿克曼公式，确定L



状态观测器: $\boxed{\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}u + \boldsymbol{L}\left(y - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}\right)}$

L为状态观测器增益矩阵，确定L是观测器设计的核心

状态观测器的估计误差：

即： $\dot{\boldsymbol{e}} = \left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{e}$

状态观测器的特征方程为： $\det\left[\lambda \boldsymbol{I} - \left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\right)\right] = 0$

通过选择状态观测器的增益矩阵 L 将观测器特征方程的根配置到指定位置。

阿克曼公式

$$\boxed{\boldsymbol{L} = \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{P}_o^{-1}\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}}$$

其中， $\boldsymbol{P}_o$为能观性矩阵：$\boldsymbol{P}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1} \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$是关于$\boldsymbol{A}$的多项式：

$$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{A}^n + \beta_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + \beta_1\boldsymbol{A} + \beta_0\boldsymbol{I}$$

预期的观测器特征多项式：

$$p\left(\lambda\right) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0$$

例11-5：已知系统的状态空间描述为

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$$

式中，

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$$

试设计全阶状态观测器，假设希望的观测极点位于：

$$s_1 = -10, s_2 = -10$$

解：

1. 求解能观性矩阵 P_o，检验系统状态的可观性；

已知系统的状态矩阵A和输出矩阵C为：

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$$

则，系统的能观性矩阵P_o为：

$$P_o = \begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$Rank(P_o) = 2$，**系统的状态完全能观。**

2. 根据性能要求确定预期的观测器特征方程$p(\lambda)$；

期望的闭环系统特征方程：

$$p(\lambda) = (\lambda + 10)(\lambda + 10) = \lambda^2 + 20\lambda + 100$$

则：

$$P(A) = A^2 + 20A + 100I = \begin{bmatrix}121 & 22\\ 0 & 121\end{bmatrix}$$

3. 采用阿克曼公式确定状态观测器增益矩阵L。

由阿克曼公式得到：

$$L = P(A)P_o^{-1}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}121 & 22\\ 0 & 121\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}143\\ 121\end{bmatrix}$$

状态观测器方程为： $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix}143\\ 121\end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$$

- 希望观测结点，确定期望闭环特征方程

T4--带观测器的全状态反馈控制器