一、优化问题

1、标准形式

> min
>
> 不等约束要小于等于

$$
\begin{array}{lll}
\min & f_0(x) & \\
\text{s.t.} & f_i(x) \leq 0, & i=1,\ldots,m \\
& h_i(x)=0, & i=1,\ldots,p
\end{array}
$$

- 定义域

$$\mathcal{D}=\bigcap_{i=0}^{m} \operatorname{dom} f_i \cap \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{dom} h_i$$

- 不起作用（inactive）约束：fi（x）<0时<=0不起作用
- 冗余约束：去掉不改变可行集
- 可行性问题feasible

> 用于判断约束条件是否一致（有解）

$$
\begin{array}{lll}
\text{find} & x & \\
\text{subject to} & f_i(x) \leqslant 0, & i=1,\cdots,m \\
& h_i(x) = 0, & i=1,\cdots,p.
\end{array}
$$

2、最优解

$$p^\star = \inf\{f_0(x) \mid f_i(x) \leqslant 0,\ i=1,\cdots,m,\ h_i(x)=0,\ i=1,\cdots,p\}$$

- p*为无穷：空集下确界是无穷
- p*为负无穷：无下界unbounded blow

ε-次优解

$$f_0(x) \leq p^\star + \varepsilon$$

局部最优

$$
\begin{aligned}
f_0(x) = \inf\{f_0(z) \mid\ & f_i(z) \leqslant 0,\ i=1,\cdots,m, \\
& h_i(z)=0,\ i=1,\cdots,p,\ \|z-x\|_2 \leqslant R\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\min & f_0(z) & \\
\text{s.t.} & f_i(z) \leq 0, & i=1,\ldots,m \\
& h_i(z) = 0, & i=1,\ldots,p \\
& \|z-x\|_2 \leq R &
\end{array}
$$

例子

- $f_0(x) = 1/x$: $p^\star = 0$，但最优值不可达。
- $f_0(x) = -\log x$: $p^\star = -\infty$，所以该问题无下界。
- $f_0(x) = x\log x$: $p^\star = -1/e$ 在（唯一的）最优解 $x^\star = 1/e$ 处达到。

3、等价形式

> 从一个问题的解可以很容易得到另一个问题的

$$
\begin{array}{lll}
\min & \tilde{f}(x) = \alpha_0 f_0(x) & \\
\text{s.t.} & \tilde{f}_i(x) = \alpha_i f_i(x) \le 0, & i = 1, \dots, m \\
 & \tilde{h}_i(x) = \beta_i h_i(x) = 0, & i = 1, \dots, p
\end{array}
$$

- $\alpha_i > 0, i = 0, \dots, m$
- $\beta_i \neq 0, i = 1, \dots, p$

1.框约束

> 改成上下界的样子

- Box constraints

$$
\begin{array}{lll}
\min & f_0(x) & \\
\text{s.t.} & l_i \le x_i \le u_i, & i = 1, \dots, n
\end{array}
$$

- Reformulation

$$
\begin{array}{lll}
\min & f_0(x) & \\
\text{s.t.} & l_i - x_i \le 0, & i = 1, \dots, n \\
 & x_i - u_i \le 0, & i = 1, \dots, n
\end{array}
$$

2.换元

- ——映射
- 最优解相同，问题未必相同

例 4.3 最小函数和最小范数平方问题。 作为一个简单的例子，考虑无约束的 Euclid 范数极小化问题

$$\text{minimize} \quad \|Ax - b\|_2, \tag{4.5}$$

其变量为 $x \in \mathbf{R}^n$。因为范数总是非负的，所以我们可以只求解问题

$$\text{minimize} \quad \|Ax - b\|_2^2 = (Ax - b)^T(Ax - b), \tag{4.6}$$

在这里，我们极小化 Euclid 范数的平方。问题 (4.5) 和问题(4.6) 显然等价；最优解相同。但是，这两个问题是不相同。例如 问题(4.5) 的目标函数在任意满足 $Ax - b = 0$ 的 x 处都是不可微的，而问题(4.6) 的目标函数对所有的 x 都是可微的（事实上，它是二次的）。

3.松弛变量slack variables

> fi（x）⩽0等价于存在一个si⩾0，满足f（x）＋ si ＝ 0

> 把每个不等约束，变成：一个等式约束+一个非负约束

$$\begin{array}{lll} \min & f_0(x) & \\ \text{s.t.} & s_i \geq 0, & i=1,\dots,m \\ & f_i(x)+s_i=0, & i=1,\dots,m \\ & h_i(x)=0, & i=1,\dots,p \end{array}$$

4.消除等式约束

> **x=φ(z)替换，把等式约束参数化**

$$\begin{array}{lll} \min & \tilde{f}_0(z)=f_0(\phi(z)) & \\ \text{s.t.} & \tilde{f}_i(z)=f_i(\phi(z)) \leq 0, & i=1,\dots,m \end{array}$$

消除线性等式约束

> 线性方程 Ax =b的通解可以表示为Fz+x0
>
> z:Rk，k=n-rankA
>
> 可以减少rankA个变量，且消除了线性等式约束

$$\begin{array}{lll} \min & f_0(Fz+x_0) & \\ \text{s.t.} & f_i(Fz+x_0) \leq 0, & i=1,\dots,m \end{array}$$

5.引入等式约束

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & f_0(A_0x+b_0) & \\ \text{subject to} & f_i(A_ix+b_i) \leqslant 0, & i=1,\cdots,m \\ & h_i(x)=0, & i=1,\cdots,p, \end{array}$$

- 引入yi=Ai*x+bi

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & f_0(y_0) & \\ \text{subject to} & f_i(y_i) \leqslant 0, & i=1,\cdots,m \\ & y_i=A_ix+b_i, & i=0,\cdots,m \\ & h_i(x)=0, & i=1,\cdots,p. \end{array}$$

该问题含有 $k_0+\cdots+k_m$ 个新变量：

$$y_0 \in \mathbf{R}^{k_0}, \quad \cdots, \quad y_m \in \mathbf{R}^{k_m},$$

及 $k_0+\cdots+k_m$ 个新的等式约束：

$$y_0 = A_0x+b_0, \quad \cdots, \quad y_m = A_mx+b_m,$$

其目标函数与等式约束是独立的，即它们各自包含不同的优化变量。

6.优化部分变量

> 总可以通过先优化一部分变量，再优化另一部分变量，来优化函数

- Consider the problem

$$\begin{array}{lll} \min & f_0(x_1,x_2) & \\ \text{s.t.} & f_i(x_1) \le 0, & i=1,\ldots,m_1 \\ & \tilde{f}_i(x_2) \le 0, & i=1,\ldots,m_2 \end{array}$$

- An Equivalent Problem

$$\begin{array}{lll} \min & \tilde{f}_0(x_1) & \\ \text{s.t.} & f_i(x_1) \le 0, & i=1,\ldots,m_1 \end{array}$$

  - where

$$\tilde{f}_0(x_1) = \inf\{f_0(x_1,z) | \tilde{f}_i(z) \le 0, i=1,\ldots,m_2\}$$

不懂：

Example

- Minimize a Quadratic Function

$$\begin{array}{lll} \min & x_1^\top P_{11}x_1 + 2x_1^\top P_{12}x_2 + x_2^\top P_{22}x_2 & \\ \text{s.t.} & f_i(x_1) \le 0, & i=1,\ldots,m \end{array}$$

- Minimize over x_2

$$\inf_{x_2} \left(x_1^\top P_{11}x_1 + 2x_1^\top P_{12}x_2 + x_2^\top P_{22}x_2\right) = x_1^\top(P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^\top)x_1$$

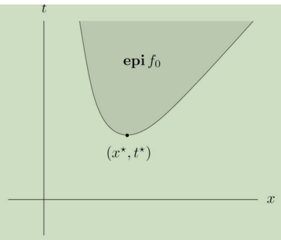
- An Equivalent Problem

$$\begin{array}{lll} \min & x_1^\top(P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^\top)x_1 & \\ \text{s.t.} & f_i(x_1) \le 0, & i=1,\ldots,m \end{array}$$

7.标准问题的上镜图问题形式

> 目标函数是t和x的线性函数

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & t & \\ \text{subject to} & f_0(x) - t \leqslant 0 & \\ & f_i(x) \leqslant 0, & i=1,\cdots,m \\ & h_i(x) = 0, & i=1,\cdots,p, \end{array}$$



- Find the point in the epigraph that minimizes t

8.隐式约束

> 限制都被写进定义域

$$\min\ F(x)$$

- $\mathrm{dom}\, F = \{x \in \mathrm{dom}\, f_0 \mid f_i(x) \le 0, i = 1, \ldots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \ldots, p\}$

- **缺点：破坏可微性**

二、凸优化

1、标准形式

> 理解：在凸集合上最小化一个凸函数
>
> 最大凹函数可以转化为最小凸函数

$$\begin{array}{lll} \min & f_0(x) & \\ \text{s.t.} & f_i(x) \le 0, & i = 1, \ldots, m \\ & a_i^\top x = b_i, & i = 1, \ldots, p \end{array}$$

区别：三个条件

> 目标函数f为凸
>
> 不等约束函数constraint：凸
>
> 等号约束：仿射

- 把条件变为凸集合

Feasible set of a convex optimization problem is convex

$$\bigcap_{i=0}^{m} \operatorname{dom} f_i \cap \bigcap_{i=1}^{m} \{x \mid f_i(x) \le 0\} \cap \bigcap_{i=1}^{p} \{x \mid a_i^{\top} x = b_i\}$$

✓ Minimize a convex function over a convex set

- 目标函数严格凸，则最优解至多一个

例--转化为凸优化

- 抽象成凸优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) = x_1^4 + x_2^4 \\ \text{s.t.} \quad & f_1(x) = x_1/(1 + x_2^2) \le 0 \\ & h_1(x) = (x_1 + x_2)^2 = 0 \end{aligned}$$

- 等价变形，变凸优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & f_1(x) = x_1 \le 0 \\ & h_1(x) = x_1 + x_2 = 0 \end{aligned}$$

2、凸优化问题局部最优一定全局最优

证明：

```
先设出local是x，global是y
y与x有距离，因为y不是这个局部的最优解
构造z为xy两点结构，能用上琴声
最后推出z比x更优，与x局部最优矛盾
```

设 x 是凸优化问题的局部最优解，即 x 是可行的并且对于某些 $R > 0$，有

$$f_0(x) = \inf\{f_0(z) \mid z \text{ 可行}, \|z - x\|_2 \leqslant R\}, \tag{4.19}$$

现在假设 x 不是全局最优解，即存在一个可行的 y 使得 $f_0(y) < f_0(x)$。显然 $\|y - x\|_2 > R$，因为否则的话有 $f_0(x) \leqslant f_0(y)$。考虑由

$$z = (1-\theta)x + \theta y, \qquad \theta = \frac{R}{2\|y - x\|_2}$$

给出的点 z，我们有 $\|z - x\|_2 = R/2 < R$。根据可行集的凸性，z 是可行的。根据 f_0 的凸性，我们有

$$f_0(z) \leqslant (1-\theta) f_0(x) + \theta f_0(y) < f_0(x),$$

这与式(4.19) 矛盾。因此不存在满足 $f_0(y) < f_0(x)$ 的可行解 y，即 x 是全局最优解。

3、Optimality Criterion最优解判定

判定定理&证明：

- 假设fdifferentiable可微，X为feasible set可行解集合

设凸优化问题的目标函数 f_0 是可微的，对于所有的 $x, y \in \mathbf{dom}\, f_0$ 有

$$f_0(y) \geqslant f_0(x) + \nabla f_0(x)^T (y - x) \tag{4.20}$$

（参见 §3.1.3）。令 X 表示其可行集，即

$$X = \{x \mid f_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \cdots, m,\ h_i(x) = 0,\ i = 1, \cdots, p\}.$$

那么，x 是最优解，当且仅当 $x \in X$ 且

$$\nabla f_0(x)^T (y - x) \geqslant 0,\ \forall\, y \in X. \tag{4.21}$$

这个最优性准则可以从几何上进行理解：如果 $\nabla f_0(x) \neq 0$，那么意味着 $-\nabla f_0(x)$ 在 x 处定义了可行集的一个支撑超平面（参见图4.2）。

- [ ] 充分条件sufficient condition

```
代入即可，利用梯度性质和一阶条件
```

- [ ] 必要条件necessary condition

```
反设x最优但不满足不等式
两点构造z，求导可出现目标式子
与x最优矛盾
```

- Suppose x is optimal but
$$\exists y \in X, \nabla f_0(x)^{\top}(y-x) < 0$$
- Define $z(t) = ty + (1-t)x, t \in [0,1]$

$$f_0(z(0)) = f_0(x), \qquad \frac{d}{dt} f_0(z(t))\Big|_{t=0} = \nabla f_0(x)^{\top}(y-x) < 0$$

- So, for small positive t, $f_0(z(t)) < f_0(x)$

无约束定理

> 无约束，才行

- x is optimal if and only if $\nabla f_0(x) = 0$
  - Consider $y = x - t\nabla f_0(x)$ and $t > 0$
  - When t is small, y is feasible

$$\nabla f_0(x)^{\top}(y-x) = -t\|\nabla f_0(x)\|_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow \nabla f_0(x) = 0$$

例：无约束二次规划

```
讨论线性方程组的解3种可能性
首先通过q属于R（p）分成有无解两种情况
1、无解：p不属于q列向量的空间：向下优化会达到负无穷
2、唯一解：p正定矩阵，可逆，直接求解、
3、无穷解：p奇异，有无穷解，用伪逆得到一个解
//与消掉等号约束部分类似
```

例4.5 无约束二次规划。 考虑极小化二次函数

$$f_0(x) = (1/2)x^T P x + q^T x + r,$$

其中，$P \in \mathbf{S}_+^n$（保证了 f_0 为凸函数）。x 为 f_0 的最小解的充要条件是：

$$\nabla f_0(x) = Px + q = 0.$$

根据这个（线性）方程无解、有唯一解或有多解的不同，有几种可能的情况

- 如果 $q \notin \mathcal{R}(P)$，则无解。此类情况 f_0 无下界。
- 如果 $P \succ 0$（意味着 f_0 严格凸），则存在唯一的最小解 $x^\star = -P^{-1}q$。
- 如果 P 奇异但 $q \in \mathcal{R}(P)$，则最优解集合为（仿射）集合 $X_{\text{opt}} = -P^\dagger q + \mathcal{N}(P)$，其中 $P^\dagger$ 表示 P 的伪逆（参见 §A.5.4）。

等号约束定理&证明

- Consider the Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

- x is optimal if and only if

$$\nabla f_0(x)^\top (y-x) \geq 0, \forall\, Ay = b$$

- 等价形式

Lagrange Multiplier Optimality Condition

$$\boxed{\begin{gathered} Ax = b \\ \nabla f_0(x) + A^\top v = 0 \end{gathered}}$$

- 证明

$$\left.\begin{aligned} \nabla f_0(x)^\top (y-x) \geq 0, \forall\, Ay = b \\ \{y | Ay = b\} = \{x + v | v \in \mathcal{N}(A)\} \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \nabla f_0(x)^\top v \geq 0, \forall\, v \in \mathcal{N}(A)$$

$$\Leftrightarrow \nabla f_0(x)^\top v = 0, \forall\, v \in \mathcal{N}(A)$$

$$\Leftrightarrow \nabla f_0(x) \perp \mathcal{N}(A) \Leftrightarrow \nabla f_0(x) \in \mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^\top)$$

$$\Leftrightarrow \exists v \in \mathbf{R}^p, \nabla f_0(x) + A^\top v = 0$$

例：非负象限最小化问题

作为另一个例子，我们考虑问题

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_0(x) \\ \text{subject to} \quad & x \succeq 0, \end{aligned}$$

这里唯一的不等式约束是变量的非负约束。

于是，最优性条件 (4.21) 为

$$x \succeq 0, \qquad \nabla f_0(x)^T (y - x) \geqslant 0, \ \forall\, y \succeq 0.$$

$\nabla f_0(x)^T y$ 是 y 的线性函数并且在 $y \succeq 0$ 上无下界，除非我们有 $\nabla f_0(x) \succeq 0$。于是，这个条件简化为 $-\nabla f_0(x)^T x \geqslant 0$。但是 $x \succeq 0$ 且 $\nabla f_0(x) \succeq 0$，所以必须有 $\nabla f_0(x)^T x = 0$，即

$$\sum_{i=1}^{n} (\nabla f_0(x))_i x_i = 0.$$

这里求和中的每一项都是两个非负数的乘积，因此可知每一项都必须为零，即对于 $i = 1, \cdots, n$，有 $(\nabla f_0(x))_i x_i = 0$。

因此，最优性条件可以表示为

$$x \succeq 0, \qquad \nabla f_0(x) \succeq 0, \qquad x_i (\nabla f_0(x))_i = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

最后一个条件称为互补性，因为它意味着向量 x 和 $\nabla f_0(x)$ 的稀疏模式（即非零分量对应的索引集合）是互补的（即交集为空）。我们将在第 5 章中再次深入地讨论互补条件。

4、等价凸优化问题

> 有用的保凸

引入等式约束

```
f（Ax+b）变为f（y）和y=Ax+b
```

松弛变量

- Introduce new constraint $f_i(x) + s_i = 0$ and requiring that f_i is affine
- Introduce slack variables for linear inequalities preserves convexity of a problem

局部变量最小化

- It preserves convexity. $f_0(x_1, x_2)$ needs to be jointly convex in x_1 and x_2

上镜图问题形式

5、拟凸优化

- 局部最优非全局最优

三、其他问题

1、线性规划

☐ Linear Program (LP)

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^\top x + d \\
\text{s.t.} & Gx \preccurlyeq h \\
 & Ax = b
\end{array}
$$

- $G \in \mathbf{R}^{m\times n}$ and $A \in \mathbf{R}^{p\times n}$
- It is common to omit the constant d
- Maximization problem with affine objective and constraint functions is also an LP
- The feasible set of LP is a polyhedron $\mathcal{P}$

不等形式

> 无等号约束

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^\top x \\
\text{s.t.} & Ax \preccurlyeq b
\end{array}
$$

标准形式

> 唯一不等式是x》=0

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^\top x \\
\text{s.t.} & Ax = b \\
 & x \succcurlyeq 0
\end{array}
$$

转化为标准形式

```
引入slack变量s
```

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^\top x + d \\
\text{s.t.} & Gx \preccurlyeq h \\
 & Ax = b
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\min & c^\top x + d \\
\text{s.t.} & Gx + s = h \\
 & Ax = b \\
 & s \succcurlyeq 0
\end{array}
$$

```
decompose x变换（干啥呢）
```

- Decompose x

$$x = x^+ - x^-, \qquad x^+, x^- \succcurlyeq 0$$

- Standard Form LP

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x + d \\ \text{s.t.} & Gx + s = h \\ & Ax = b \\ & s \succcurlyeq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \min & c^\top x^+ - c^\top x^- + d \\ \text{s.t.} & Gx^+ - Gx^- + s = h \\ & Ax^+ - Ax^- = b \\ & x^+ \succcurlyeq 0, x^- \succcurlyeq 0, s \succcurlyeq 0 \end{array}$$

2、二次规划问题

- Quadratic Program (QP)

$$\begin{array}{ll} \min & (1/2)x^\top Px + q^\top x + r \\ \text{s.t.} & Gx \preccurlyeq h \\ & Ax = b \end{array}$$

- $P \in \mathbf{S}_+^n, G \in \mathbf{R}^{m\times n}$ and $A \in \mathbf{R}^{p\times n}$
- The objective function is (convex) quadratic
- The constraint functions are affine
- When $P = 0$, QP becomes LP

变二次约束

> 椭圆与超平面

- Quadratically Constrained Quadratic Program (QCQP)

$$\begin{array}{lll} \min & (1/2)x^\top P_0 x + q_0^\top x + r_0 & \\ \text{s.t.} & (1/2)x^\top P_i x + q_i^\top x + r_i \le 0, & i = 1, \dots, m \\ & Ax = b & \end{array}$$

- $P_i \in \mathbf{S}_+^n, i = 0, \dots, m$
- The inequality constraint functions are (convex) quadratic
- The feasible set is the intersection of ellipsoids (when $P_i \succ 0$) and an affine set
- Include QP as a special case

二阶锥优化问题

> 不等约束是二阶锥SOC

- Second-order Cone Program (SOCP)

$$\begin{aligned} \min \quad & f^\top x \\ \text{s.t.} \quad & \|A_i x + b_i\|_2 \le c_i^\top x + d_i, \qquad i = 1, \dots, m \\ & Fx = g \end{aligned}$$

  - $A_i \in \mathbf{R}^{n_i \times n}, F \in \mathbf{R}^{p \times n}$
  - Second-order Cone (SOC) constraint: $\|Ax + b\|_2 \le c^\top x + d$ where $A \in \mathbf{R}^{k \times n}$, is same as requiring $(Ax + b, c^\top x + d) \in \text{SOC in } \mathbf{R}^{k+1}$

$$\begin{aligned} \text{SOC} \quad & = \left\{ (x, t) \in \mathbf{R}^{k+1} \,|\, \|x\|_2 \le t \right\} \\ & = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \,|\, \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \le 0, t \ge 0 \right\} \end{aligned}$$

3、几何规划Geometric Programming（GP）

> 定义域，c都>0

- 单项式，多项式

$$f(x) = c x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

> 加减乘除运算闭合
>
> 但多项式除运算未必闭合

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k x_1^{a_{1k}} x_2^{a_{2k}} \dots x_n^{a_{nk}}$$

转化为几何规划

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(x) \le 1, \qquad i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 1, \qquad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

> f多项式，h单项式，定义域正
>
> 总能化成<=1,<1形式
>
> 最大要变成最小
>
> 隐含了不等约束x>0

例子

$$\begin{aligned} \max \quad & x/y \\ \text{s.t.} \quad & 2 \le x \le 3 \\ & x^2 + 3y/z \le \sqrt{y} \\ & x/y = z^2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \min \quad & x^{-1} y \\ \text{s.t.} \quad & 2x^{-1} \le 1, (1/3)x \le 1 \\ & x^2 y^{-1/2} + y^{1/2} z^{-1} \le 1 \\ & x y^{-1} z^{-2} = 1 \end{aligned}$$

凸化几何优化

- 先e幂

```
用e的幂代替x，可以合并连乘
```

■ f is the monomial function

$$f(x) = c x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}, \qquad x_i = e^{y_i}$$

$$f(x) = f(e^{y_1}, \dots, e^{y_n}) = c(e^{y_1})^{a_1} \cdots (e^{y_n})^{a_n}$$

$$= e^{a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n + \log c} = e^{a^\top y + b}$$

■ f is the posynomial function

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k x_1^{a_{1k}} x_2^{a_{2k}} \dots x_n^{a_{nk}}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} e^{a_k^\top y + b_k}$$

- 再取log

```
取log可以把约束变换成凸形式
```

□ New Form

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{k=1}^{K_0} e^{a_{0k}^\top y + b_{0k}} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^{K_i} e^{a_{ik}^\top y + b_{ik}} \le 1, \qquad i = 1, \dots, m \\
& e^{g_i^\top y + h_i} = 1, \qquad i = 1, \dots, p
\end{aligned}$$

□ Taking the Logarithm

$$\begin{aligned}
\min \quad & \tilde{f}_0(y) = \log\left(\sum_{k=1}^{K_0} e^{a_{0k}^\top y + b_{0k}}\right) \\
\text{s.t.} \quad & \tilde{f}_i(y) = \log\left(\sum_{k=1}^{K_i} e^{a_{ik}^\top y + b_{ik}}\right) \le 0, \qquad i = 1, \dots, m \\
& \tilde{h}_i(y) = g_i^\top y + h_i = 0, \qquad i = 1, \dots, p
\end{aligned}$$

4、广义不等约束Generalized

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ \text{s.t.} & f_i(x) \preccurlyeq_{K_i} 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b \end{array}$$

- $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ is convex;
- $K_i \subseteq \mathbf{R}^{k_i}$ are proper cones
- $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{k_i}$ is K_i-convex w.r.t. proper cone $K_i \subseteq \mathbf{R}^{k_i}$

锥形式

> 仿射，线性

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & Fx + g \preccurlyeq_K 0 \\ & Ax = b \end{array}$$

标准形式

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & x \succcurlyeq_K 0 \\ & Ax = b \end{array}$$

不等形式

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & Fx + g \preccurlyeq_K 0 \end{array}$$

5、半正定SDP问题

> 锥形式广义不等约束

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & x_1 F_1 + \cdots + x_n F_n + G \preccurlyeq 0 \\ & Ax = b \end{array}$$

标准形式

$$
\begin{array}{ll}
\min & \operatorname{tr}(CX) \\
\text{s.t.} & \operatorname{tr}(A_i X) = b_i, \qquad i = 1, \dots, p \\
& X \succcurlyeq 0
\end{array}
$$

不等形式

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^\top x \\
\text{s.t.} & x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n \preccurlyeq B
\end{array}
$$