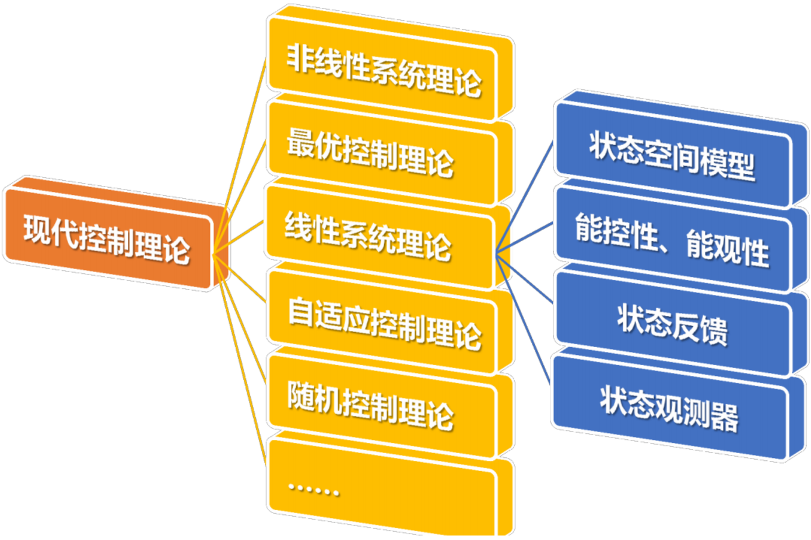
经典控制理论

- 研究对象是单输入单输出的线性定常系统。
- 控制系统设计的优劣依赖于工程经验
- 不能包含系统的全部运动状态
- 采用传递函数描述对象的输入、输出关系

一、基本概念



- 采用系统状态描述系统内部运行的基本规律
- 系统状态：表示系统的一组变量

> 当前取值情况、输入信号和描述系统动态特性的方程，
> 就能够完全确定系统未来的状态和输出响应

- 状态向量：能够**完全表征**动力学系统时间域行为的一个最小内部变量组
- 状态变量的个数 = 系统中独立的储能元件个数 = 系统微分方程的阶次

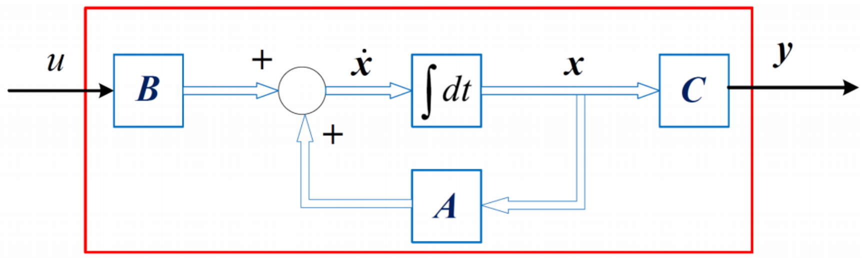
状态空间：以各状态变量$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$为坐标轴所构成的$n$维空间。

单输入单输出线性系统的状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u & \text{状态方程} \\ y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} & \text{输出方程} \end{cases}$$

状态向量：$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$　状态矩阵：$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$　控制矩阵：$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

输入：$\boldsymbol{u}$　　输出：$\boldsymbol{y}$　　输出矩阵：$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$

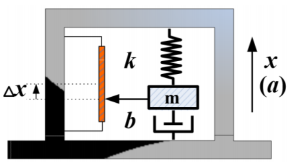


状态空间模型结构框图

T1建立状态空间模型

例3-1：建立弹簧-质量-阻尼系统的状态空间模型。

$$\boxed{m\frac{d^2\Delta x(t)}{dt^2} + b\frac{d\Delta x(t)}{dt} + k\Delta x(t) = u(t)}$$



解：

$$x_1 = \Delta x \qquad \dot{x}_1 = x_2$$

$$x_2 = \frac{d\Delta x(t)}{dt} \qquad \dot{x}_2 = \frac{1}{m}\left(-kx_1 - bx_2\right) + \frac{1}{m}u$$

$$y = \Delta x \qquad y = x_1$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

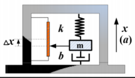
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-kx_1 - bx_2) + \frac{1}{m}u \qquad y = x_1$$

即：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

质量-弹簧-阻尼系统

$$m\frac{d^2\Delta x(t)}{dt^2} + b\frac{d\Delta x(t)}{dt} + k\Delta x(t) = u(t)$$



$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u \\ y &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{aligned} \qquad G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

二、与传递函数关系

状态空间方程之间的等价变换

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u \\ y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + Du \end{cases} \xrightarrow{\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}} \begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{B}}u \\ y = \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}} + Du \end{cases}$$

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}, \quad \bar{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}, \quad \bar{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

1、能控标准型

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_c u \\ y = \boldsymbol{C}_c\boldsymbol{x} + D_c u \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_c = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1}b_0 & \cdots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}, D_c = b_0$$

2、能观标准型

$$
\boldsymbol{A}_o=\left[\begin{array}{cccc|c}
0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ \hline
1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\
0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1
\end{array}\right], \boldsymbol{B}_o=\begin{bmatrix} b_n-a_nb_0 \\ b_{n-1}-a_{n-1}b_0 \\ \vdots \\ b_1-a_1b_0 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{C}_o=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right], D_o=b_0
$$

能控标准型 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_cu \\ y=\boldsymbol{C}_c\boldsymbol{x}+D_cu\end{cases}$ $\boldsymbol{A}_o=\boldsymbol{A}_c{}^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{B}_o=\boldsymbol{C}_c{}^{\mathrm{T}}$

能观标准型 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}_o\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_ou \\ y=\boldsymbol{C}_o\boldsymbol{x}+D_ou\end{cases}$ $\boldsymbol{C}_o=\boldsymbol{B}_c{}^{\mathrm{T}}$ $D_o=D_c$

3、对角线标准型

$$
G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}=b_0+\frac{c_1}{s+p_1}+\frac{c_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{c_n}{s+p_n}
$$

$$
\boxed{\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}u \\ y=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+Du\end{cases}}
$$

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}
-p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -p_2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & -p_{n-1} & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & -p_n
\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{bmatrix}, D=b_0
$$

T2-状态空间方程&&传递函数

$$
G(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{B}}{|(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})|}
$$

$\boxed{|sI-A|=0 \text{ 为系统特征方程}}$

$$G(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1\\ \frac{k}{m} & s+\frac{b}{m}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}=\frac{1}{ms^2+bs+k}$$

三、线性定常系统状态方程的解

1、一阶微分方程&状态微分方程

$$\dot{x}=ax+bu,\ x(0)=x_0,\ t\geq 0$$

拉普拉斯变换后得到：

$$sX(s)-x(0)=aX(s)+bU(s)$$

因此，

$$X(s)=\frac{x(0)}{s-a}+\frac{b}{s-a}U(s)$$

进行拉普拉斯反变换，得到:

$$\boxed{x(t)=e^{at}x(0)+\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau}$$

状态微分方程的解：

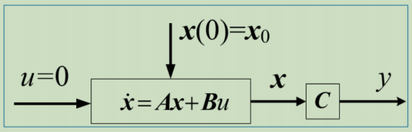
$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau,\ t\geq 0$$

其中：

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^kt^k}{k!}$$

2、零输入响应

（3）系统的零输入响应



$$\dot{x}=Ax,\ x(0)=x_0,\ t\geq 0$$

系统自治状态方程的解，具有以下形式：

$$x(t)=e^{At}x(0),\ t\geq 0$$

3、状态转移矩阵

初始时刻$t_0=0$:

$$x(t)=e^{At}x(0)\xrightarrow{\Phi(t)=e^{At}}x(t)=\Phi(t)x(0)$$

初始时刻$t_0\neq 0$:

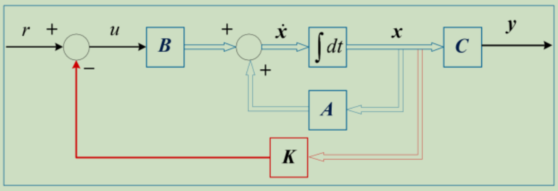
$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)\xrightarrow{\Phi(t)=e^{A(t-t_0)}}x(t)=\Phi(t)x(t_0)$$

状态矩阵A决定了系统状态的演变规律。

连续时间线性时不变自治系统 $\dot{x}=Ax,\ x(0)=x_0,\ t\geq 0$ **内部稳定的充分必要条件：状态矩阵A的所有特征值均具有负实部。**

4、状态反馈控制

（5）状态反馈控制系统



$$u=-Kx$$

$$K=[k_1,k_2,\cdots,k_n]$$

引入状态反馈后系统的自治状态方程：

$$\dot{x}=Ax+Bu=Ax-BKx=(A-BK)x$$

状态反馈控制通过改变状态矩阵以改善控制系统的性能。