空间定义

R（A）矩阵范围

> m*n
> 表示：所有可以写成列向量线性组合的所有向量

$$\mathcal{R}(A) = \{Ax | x \in \mathbf{R}^n\} \subseteq \mathbf{R}^m$$

> x是n个权重，Ax是所有线性组合

零空间nullspace

$$\mathcal{N}(A) = \{x | Ax = 0\} \subseteq \mathbf{R}^n$$

> 是x（列向量）的集合，是与A的行向量垂直的那个空间
> A每一行和x相乘都为0，x与所有A行向量垂直

补空间subspace

If $\mathcal{V}$ is a subspace of $\mathbf{R}^n$, its orthogonal complement, denoted $\mathcal{V}^\perp$, is defined as:

$$\mathcal{V}^\perp = \{x | z^\top x = 0 \text{ for all } z \in \mathcal{V}\}$$

> 与v中所有向量垂直的向量空间

- 关系

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^\top)^\perp$$

特征值分解

> 实对称矩阵

- Suppose $A \in \mathbf{S}^n$, i.e., A is a real symmetric $n \times n$ matrix. Then A can be factored as

$$A = Q\Lambda Q^\top$$

where $Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$ is orthogonal, i.e., satisfies $Q^\top Q = I$, and $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$

> 分解成两个正交Q，中间对角Λ
> diag：把向量放到矩阵对角线上，其他位置补0
> Q列向量是特征向量，λ1最大特征值，降序

性质

> det：行列式

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

范数性质

$$\|A\|_2 = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i| = \max(\lambda_1, -\lambda_n)$$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)^{1/2}$$

> tr（a,b,c）有循环不变性

正定矩阵

> 所有特征值为正
>
> Sn++：正定nn矩阵

- 半正定positive semidefinite

> Sn+

奇异值分解SVD

singular value decomposition

> 对任意矩阵都可以分解，没有实对称要求
>
> A：m*n。秩r
>
> 区别:是UV不是Q，且正交性只是单方面

$$A = U\Sigma V^{\top}$$

- U

> m*r，瘦长矩阵
>
> UTU=I，但U不正交，UUT！=I
>
> 列向量之间正交，称为左奇异向量

- V

> n*r
>
> VTV=I，但V不正交，VUV！=I
>
> 列向量之间正交，称为右奇异向量

- Σ

> =diag（σ1,σ2,,,,,σr）
>
> σ1-r，必有降序r个正奇异值，不像特征值可正可负

- U按列，V按行分成r块（特征值也能这么干）

> 只有r个非零的保留下来
> σi是Σ退化成的系数
> 每个矩阵秩1，加在一起秩r

$$A=\sum_{i=1}^{r}\sigma_i u_i v_i^{\top}$$

范数性质

$$\|A\|_2=\sigma_1$$

$$\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{1/2}$$

同一个实对称矩阵？？

伪逆pseudo-inverse

Pseudo-inverse

- Let $A=U\Sigma V^{\top}$ be the singular value decomposition of $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, with $\operatorname{rank}A=r$. The pseudo-inverse or Moore-Penrose inverse of A is

$$A^{\dagger}=V\Sigma^{-1}U^{\top}\in\mathbf{R}^{n\times m}$$
$$AA^{\dagger}A=A$$

舒尔补schur complement

> a满秩时，定义S为舒尔补

- $A\in\mathbf{S}^k$, and a matrix $X\in\mathbf{S}^n$ partitioned as

$$X=\begin{bmatrix}A & B\\ B^{\top} & C\end{bmatrix}$$

- If $\det A\neq 0$, the matrix

$$S=C-B^{\top}A^{-1}B$$

is called the Schur complement of A in X

应用1：计算行列式

$$\det X = \det A \det S$$

应用2：计算（半）正定

PD Matrices

- $X \succ 0$ if and only if $A \succ 0$ and $S \succ 0$
- If $A \succ 0$, then $X \succcurlyeq 0$ if and only if $S \succcurlyeq 0$

PSD Matrices

$$X \succcurlyeq 0 \Leftrightarrow A \succcurlyeq 0, (I - AA^{\dagger})B = 0, C - B^{\top}A^{\dagger}B \succcurlyeq 0$$