求极大无关组

解　作矩阵 $\boldsymbol{A}$,它以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 为 5 个列向量:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 0 & 3 & 5\\ 1 & 4 & -1 & 6 & 7\\ 1 & 3 & 0 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

易计算,经一些初等行变换后可化成下列阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由前一例题知 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组有相同的线性关系.由 $\boldsymbol{B}$ 的形状知它的第 1,2,4 列三个向量是线性无关的,其他列向量都可由它们线性表出.于是 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,2,4 列三个向量线性无关,$\boldsymbol{A}$ 的其他列向量都可由 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,2,4 列线性表出.故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是原向量组的一个极大线性无关组.

求矩阵秩

- 法一：k级子式不为0，k+1级均为零

> 麻烦

- 法二：初等变换后，非零行数=秩

> 简单

证明等价

- 法一：可以互相线性表示，初等变换后写出表达式
- 法二：构造合并矩阵C

> 合并两向量组为同一矩阵

1. 求C的秩
2. 使A和B先等价于其极大无关

> 使组内线性无关

3. 等价后均为C极大线性无关组

例5 证明向量组A与向量组B等价.

$$A: \alpha_1 = (1,1,0,0)^T, \alpha_2 = (1,0,1,1)^T.$$

$$B: \beta_1 = (2,-1,3,3)^T, \beta_2 = (0,1,-1,-1)^T.$$

证: (法1)二者可以相互线性表示.事实上

$$C = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = [\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\beta_1 = -\alpha_1 + 3\alpha_2$，$\beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$，知$B$由$A$线性表出，且

$\alpha_1 = \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{3}{2}\beta_2$，$\alpha_2 = \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2$，知$A$由$B$线性表出.

证: (法2)A与B为同一向量组的极大无关组.考虑向量组C： $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$.由

$$[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

向量组C的秩为2.而α_1, α_2及β_1, β_2均线性无关, 所以同为向量组C的极大无关组.因此两向量组等价. ||

基础解系

> 向量.取x_2,x_4为自由未知量，得方程组的一般解
>
> $$\begin{cases} x_1=-2x_2+x_4 \\ x_3=0 \end{cases}(x_2,x_4\text{为自由未知量}).\text{令}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
>
> 得方程组的一个基础解系：$\eta_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
>
> 方程组的全部解为
>
> $$\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2(k_1,k_2\text{为任意常数}.$$

1. 取定自由未知
2. 给自由未知赋值（单位向量式）
3. 解出基础解系

引理

1. A可由B线性表出，则A的秩小于等于B（T12）

> 等价于极大无关组的线性表出关系

2. a1～an线性无关《==》任意n维可由它们线性表出（T14）
3. 任意r个线性无关组都是极大无关组（T7）
4. 任意n-r个线性无关解都是基础解系（T25）

含未知数方程组讨论有解

- [ ] 法一：克拉默（仅限n*n）

> 用有解判定定理反而麻烦

- 克拉默法则

> 系数不等于特值时有唯一解

- 系数等于特值（行列式为零）

> 带入特值，逐步讨论

- [ ] 法二：增广矩阵

- 化为阶梯形

- 系数在最右端必为0

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

有解？在有解的情形，求一般解.

解 对增广矩阵作初等行变换化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & a-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & b-5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}.$$

易见只有 $a=0$ 且 $b=2$ 时原方程组才有解. 由它的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \end{cases}$$

解出它的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -2 + x_3 + x_4 + 5x_5, \\ x_2 = 3 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5. \end{cases}$$

它有一个特解 $\boldsymbol{\eta} = (-2, 3, 0, 0, 0)$，它的导出组的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, -2, 1, 0, 0)$，$\boldsymbol{\eta}_2 = (1, -2, 0, 1, 0)$，$\boldsymbol{\eta}_3 = (5, -6, 0, 0, 1)$. 原方程组的全部解为

<步骤>

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + k_3\boldsymbol{\eta}_3, \quad k_1, k_2, k_3 \text{ 取全部常数.}$$

展开步骤

26. 证明：如果 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是一线性方程组的解，那么 $u_1\boldsymbol{\eta}_1+u_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+u_t\boldsymbol{\eta}_t$（其中 $u_1+u_2+\cdots+u_t=1$）也是一个解.

证明 设方程组为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

记

$$\boldsymbol{\eta}_k=(l_{k1},l_{k2},\cdots,l_{kn}),\quad k=1,2,\cdots,t.$$

它满足

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_{kj}=b_i,\quad i=1,2,\cdots,s;k=1,2,\cdots,t.$$

于是 $u_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+u_t\boldsymbol{\eta}_t=\left(\sum_{k=1}^{t}u_kl_{k1},\sum_{k=1}^{t}u_kl_{k2},\cdots,\sum_{k=1}^{t}u_kl_{kn}\right)$. 代入第 i 个方程得

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{t}u_kl_{kj}\right)=\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_kl_{kj}=\sum_{k=1}^{t}u_k\sum_{j=1}^{n}a_{ij}l_{kj}$$
$$=\sum_{k=1}^{t}u_kb_i=b_i.$$

故 $u_1\boldsymbol{\eta}_1+u_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+u_t\boldsymbol{\eta}_t$ 是解.

方法：合并矩阵

- [ ] 用处：证等价，合并同解方程组

> 秩相同