一、保凸运算（证明凸）：

1、交集

> 多面体：半空间和超平面交集

半正定锥

$$\mathbf{S}_{+}^{n}=\bigcap_{z\neq 0}\{X\in\mathbf{S}^{n}|z^{\top}Xz\geq 0\}$$

> 任意z，满足>=0

> 每一个都是关于X的线性不等式，即半空间
> 半正定锥是无穷个半空间的交集，凸

- [ ] 证明关键：搞清楚谁是索引，谁是变量，再找到取交集前的凸集合

复杂例子

$$S=\left\{x \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, |p(t)| \leq 1 \text{ for } |t| \leq \frac{\pi}{3}\right\}$$

- $p(t)=\sum_{k=1}^m x_k \cos kt$

- 变形

> t是索引，揉在交集里
> 把范数写成向量不等式
> St是关于x集合，里面是x的线性不等式，
> St是个多面体，两个半空间的交集

$$S=\bigcap_{|t|\leq \pi/3} S_t$$

- $S_t=\{x \mid -1 \leq (\cos t, \ldots, \cos mt)^\top x \leq 1\}$

2、仿射函数双向保持凸性

> S：Rn，是n维空间子集，凸
> f（x）=Ax+B是仿射函数

b) Show that if $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is convex, and $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, then $A(S)=\{Ax : x \in S\}$, is convex.

c) Show that if $S \subseteq \mathbb{R}^m$ is convex, and $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, then $A^{-1}(S)=\{x : Ax \in S\}$, is convex.

c) For any $y_1, y_2 \in A^{-1}(S)$, according to the definition of $A^{-1}(S)$, there exist $x_1, x_2 \in S$ satisfying $A(y_1)=x_1$ and $A(y_2)=x_2$. Since S is a convex set, then for any $t \in (0,1)$ we have $tx_1+(1-t)x_2 \in S$. Hence, we have

$$A(ty_1+(1-t)y_2)=tAy_1+(1-t)Ay_2=tA(y_1)+(1-t)A(y_2)=tx_1+(1-t)x_2 \in S,$$

which implies $ty_1+(1-t)y_2 \in A^{-1}(S)$. This follows the definition of convex set.

缩放scaling

$$\alpha S=\{\alpha x \mid x \in S\}$$

平移Translation

$S + a = \{x + a \mid x \in S\}$

投影Projection（取前m维）

$T = \{x_1 \in \mathbf{R}^m | (x_1, x_2) \in S \text{ for some } x_2 \in \mathbf{R}^n\}$

- $S \subseteq \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ is convex

相加

$$S_1 + S_2 = \{x + y | x \in S_1, y \in S_2\}$$

- [ ] 证明：利用定义中相乘保持凸性，再构造相加仿射函数

- Cartesian product: $S_1 \times S_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$
- Linear function: $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

局部相加（比相加更一般）

$$S = \{(x, y_1 + y_2) | (x, y_1) \in S_1, (x, y_2) \in S_2\}$$

多面体

> 利用仿射逆向保持凸性
>
> 非要故意映射一下，和凸集合Rm+攀关系
>
> 把x经过b-Ax映射，变成》=0，在非负象限上

- 多面体可表示为：非负象限和原点的 Cartesian乘积在仿射函数f(x)=（b- Ax，d-Cz）下的原象

$$\{x | Ax \preccurlyeq b, Cx = d\} = \{x | f(x) \in \mathbf{R}_+^m \times \{0\}\}$$

- $f(x) = (b - Ax, d - Cx)$

线性矩阵不等式LMI

> 把x分量作为权重，对x把n个矩阵线性变换，变成矩阵
>
> 证明x的集合凸，只需和半正定锥攀关系

- 这个LMI的解是凸集，
- 实际是半正定锥在由f(x)=B-A(x)给定的仿射映射 f：Rn→Sm 下的原象。

$$A(x) = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n \preccurlyeq B$$

- The solution set $\{x | A(x) \preccurlyeq B\}$

$$\{x | A(x) \preccurlyeq B\} = \{x | B - A(x) \in \mathbf{S}_+^m\}$$

双曲锥

$$\{x \mid x^T P x \leqslant (c^T x)^2,\ c^T x \geqslant 0\}$$

是凸集，其中 $P \in \mathbf{S}_+^n$，$c \in \mathbf{R}^n$。这是因为它是二阶锥

$$\{(z,t) \mid z^T z \leqslant t^2,\ t \geqslant 0\}$$

在仿射函数 $f(x) = (P^{1/2}x, c^T x)$ 下的原象。

3、透视函数perspective

> R++正实数
>
> 透视函数对向量伸缩，即规范化，使最后一维分量为1并舍去

Perspective function $P: \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$

$$P(z,t) = \frac{z}{t}, \operatorname{dom} P = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_{++}$$

$(x_1, x_2, x_3) \mapsto -(x_1/x_3, x_2/x_3, 1)$

透视象

- If $C \subseteq \operatorname{dom} P$ is convex, then its image

$$P(C) = \{P(x) | x \in C\}$$

is convex

二、概念拓展

1、正常锥与广义不等式

称锥 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 为**正常锥**，如果它满足下列条件

- K 是凸的。
- K 是闭的。
- K 是实的，即具有非空内部。
- K 是尖的，即不包含直线（或者等价地，$x \in K,\ -x \in K \implies x = 0$）。

- 用于定义广义不等式

正常锥 K 可以用来定义广义不等式，即 $\mathbf{R}^n$ 上的偏序关系。这种偏序关系和 $\mathbf{R}$ 上的标准序有很多相同的性质。用正常锥 K 可以定义 $\mathbf{R}^n$ 上的偏序关系如下

$$x \preceq_K y \iff y - x \in K.$$

$y \preceq_K x$ 也可以写为 $x \succeq_K y$。类似地，我们定义相应的严格偏序关系为

$$x \prec_K y \iff y - x \in \mathbf{int}\, K,$$

并且可以同样地定义 $x \succ_K y$。（为将广义不等式 $\preceq_K$ 与严格的广义不等式区分开，我们有时也称 $\preceq_K$ 为不严格的广义不等式）。

- 分量不等式

> 广义不等式出现在向量之间时，看作分量不等式

- 半正定锥是正常锥

例 2.15 半正定锥和矩阵不等式。 半正定锥是 $\mathbf{S}^n$ 空间中的正常锥，相应的广义不等式 $\preceq_K$ 就是通常的矩阵不等式，即 $X \preceq_K Y$ 等价于 $Y - X$ 为半正定矩阵。（在 $\mathbf{S}^n$ 中）$\mathbf{S}^n_+$ 的内部由正定矩阵组成，因此严格广义不等式也等同于通常的对称矩阵的严格不等式，即 $X \prec_K Y$ 等价于 $Y - X$ 为正定矩阵。

这里，也是由于经常使用这种偏序关系，因此省略其下标，即对于对称矩阵，我们将广义不等式简写为 $X \preceq Y$ 或 $X \prec Y$，它们表示关于半正定锥的广义不等式。

广义不等式性质

- $\preceq_K$ **对于加法是保序的**：如果 $x \preceq_K y$ 并且 $u \preceq_K v$，那么 $x + u \preceq_K y + v$。
- $\preceq_K$ **具有传递性**：如果 $x \preceq_K y$ 并且 $y \preceq_K z$，那么 $x \preceq_K z$。
- $\preceq_K$ **对于非负数乘是保序的**：如果 $x \preceq_K y$ 并且 $\alpha \geqslant 0$，那么 $\alpha x \preceq_K \alpha y$。
- $\preceq_K$ **是自反的**：$x \preceq_K x$。
- $\preceq_K$ **是反对称的**：如果 $x \preceq_K y$ 并且 $y \preceq_K x$，那么 $x = y$。
- $\preceq_K$ **对于极限运算是保序的**：如果对于 $i = 1, 2, \cdots$ 均有 $x_i \preceq_K y_i$，当 $i \to \infty$ 时有 $x_i \to x$ 和 $y_i \to y$，那么 $x \preceq_K y$。

- If $x \prec_K y$ then $x \preccurlyeq_K y$.
- If $x \prec_K y$ and $u \preccurlyeq_K v$ then $x + u \prec_K y + v$.
- If $x \prec_K y$ and $\alpha > 0$ then $\alpha x \prec_K \alpha y$.
- $x \nprec_K x$.
- If $x \prec_K y$, then for u and v small enough, $x + u \prec_K y + v$.

最小元与极小元

如果对于每个 $y \in S$，均有 $x \preceq_K y$，我们称 $x \in S$ 是 S（关于广义不等式 $\preceq_K$）的**最小元**。类似地，我们可以定义关于广义不等式的**最大元**。如果一个集合有最小（或最大）元，那么它们是唯一的。相对应的概念是**极小元**。如果 $y \in S$，$y \preceq_K x$ 可以推得 $y = x$，那么我们称 $x \in S$ 是 S 上（关于广义不等式 $\preceq_K$）的**极小元**。同样地，可以定义**极大元**。一个集合可以有多个极小（或极大）元。

2、分离与支撑超平面

超平面分离定理

本节中我们将阐述一个在之后非常重要的想法：用超平面或仿射函数将两个不相交的凸集分离开来。其基本结果就是**超平面分离定理**：假设 C 和 D 是两个不相交的凸集，即 $C \cap D = \emptyset$，那么存在 $a \neq 0$ 和 b 使得对于所有 $x \in C$ 有 $a^T x \leqslant b$，对于所有 $x \in D$ 有 $a^T x \geqslant b$。换言之，仿射函数 $a^T x - b$ 在 C 中非正，而在 D 中非负。超平面 $\{x \mid a^T x = b\}$ 称为集合 C 和 D 的**分离超平面**，或称超平面**分离**了集合 C 和D，参见图2.19。

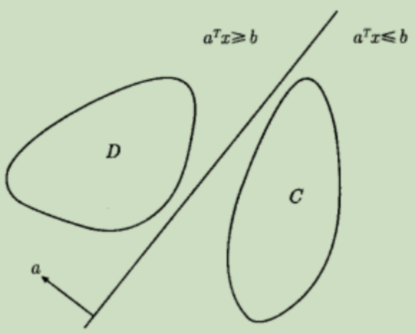
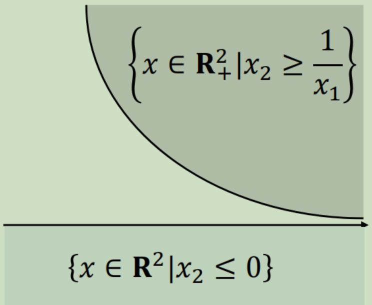


图2.19　超平面 $\{x \mid a^T x = b\}$ 分离了两个不相交的凸集 C 和 D。仿射函数 $a^T x - b$ 在 C 上非正而在 D 上非负。

严格分离

> 不相交的凸集未必能被超平面严格分离

- $a^\top x < b$ for all $x \in C$ and $a^\top x > b$ for all $x \in D$
- May not be possible in general



逆定理不成立

> 存在分离超平面，不能说明C和D不相交

- 反例

$C = D = \{0\} \subseteq \mathbf{R}$，超平面 $x = 0$ 可以分离 C 和 D。

但可以加条件：

- 两个凸集若至少有一个是开集，当且仅当存在分离超平面时，不相交

支撑超平面定理

设 $C \subseteq \mathbf{R}^n$ 而 x_0 是其边界 $\mathbf{bd}\, C$ 上的一点，即

$$x_0 \in \mathbf{bd}\, C = \mathbf{cl}\, C \setminus \mathbf{int}\, C.$$

如果 $a \neq 0$，并且对任意 $x \in C$ 满足 $a^T x \leqslant a^T x_0$，那么称超平面 $\{x \mid a^T x = a^T x_0\}$ 为集合 C 在点 x_0 处的**支撑超平面**。这等于说点 x_0 与集合 C 被超平面所分离 $\{x \mid a^T x = a^T x_0\}$。其几何解释是超平面 $\{x \mid a^T x = a^T x_0\}$ 与 C 相切于点 x_0，而且半空间 $\{x \mid a^T x \leqslant a^T x_0\}$ 包含 C，参见图2.21。

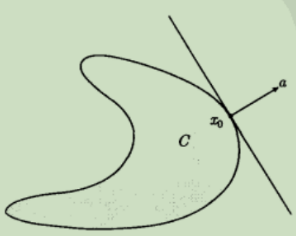


图2.21 超平面 $\{x \mid a^T x = a^T x_0\}$ 在 x_0 处支撑 C。

- 非空凸集和边界上的点x处有支撑超平面

不完全逆定理

- 闭集合有非空内部，且边界上每个点都有支撑超平面，则凸

3、对偶锥与广义不等式

令 K 为一个锥。集合

$$K^* = \{y \mid x^T y \geqslant 0,\ \forall\, x \in K\} \tag{2.19}$$

称为 K 的**对偶锥**。顾名思义，K^* 是一个锥，并且它总是凸的，即使 K 不是凸锥（参见习题 2.31）。

从几何上看，$y \in K^*$ 当且仅当 $-y$ 是 K 在原点的一个支撑超平面的法线，如图2.22所示。

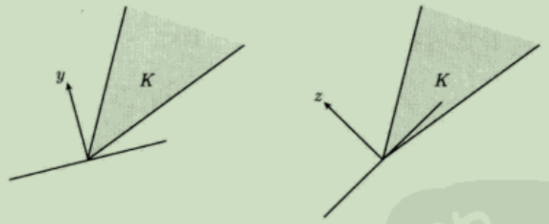


图2.22　左. 以 y 为内法向量的半空间包含锥 K，因此，$y \in K^*$。

右. 以 z 为内法向量的半空间不包含 K，因此，$z \notin K^*$。

对偶锥例子

例 2.22　子空间。子空间 $V \subseteq \mathbf{R}^n$（这是一个锥）的对偶锥是其正交补 $V^\perp = \{y \mid y^T v = 0,\ \forall\, v \in V\}$。

例 2.23　非负象限。锥 $\mathbf{R}^n_+$ 的对偶是它本身：

$$y^T x \geqslant 0,\ \forall\, x \succeq 0 \iff y \succeq 0.$$

我们称这种锥**自对偶**。

例 2.24　半正定锥。在 $n \times n$ 对称矩阵的集合 $\mathbf{S}^n$ 上，我们使用其标准内积 $\mathbf{tr}(XY) = \sum_{i,j=1}^{n} X_{ij} Y_{ij}$（参见附录 A.1.1）。半正定锥 $\mathbf{S}^n_+$ 是自对偶的，即对于任意的 $X,\ Y \in \mathbf{S}^n$，

$$\mathbf{tr}(XY) \geqslant 0, \forall\ X \succeq 0 \iff Y \succeq 0.$$

下面，我们将说明这一结论。

假设 $Y \notin \mathbf{S}^n_+$，那么存在 $q \in \mathbf{R}^n$ 并且

$$q^T Y q = \mathbf{tr}(qq^T Y) < 0.$$

于是半正定矩阵 $X = qq^T$ 满足 $\mathbf{tr}(XY) < 0$，由此可知 $Y \notin (\mathbf{S}^n_+)^*$。

假设 $X,\ Y \in \mathbf{S}^n_+$，我们可以利用特征值分解将 X 表述为 $X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^T$，其中（特征值）$\lambda_i \geqslant 0$，$i = 1, \cdots, n$。于是，我们有

$$\mathbf{tr}(YX) = \mathbf{tr}\left(Y \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^T\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i^T Y q_i \geqslant 0.$$

以上表明 $Y \in (\mathbf{S}^n_+)^*$。

对偶锥性质

- K^* 是闭凸锥。
- $K_1 \subseteq K_2$ 可导出 $K_2^* \subseteq K_1^*$。
- 如果 K 有非空内部，那么 K^* 是尖的。
- 如果 K 的闭包是尖的，那么 K^* 有非空内部。
- K^{**} 是 K 的凸包的闭包。(因此，如果 K 是凸和闭的，则 $K^{**} = K$。)