6、范数球&范数锥

一、仿射集合affine

> 包含所有经过任意内部两个的点的直线
> C：Rn，任意x1，x2：C，任意θ

$$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$$

1、定义延申generalized form

- Affine Combination

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k \in C$$

- $\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k = 1$

2、统一表示

> 线性方程组解的集合==仿射集合

$$C = \{x | Ax = b\}$$

> 此关系有仿射不变性，易于证明

3、子空间subspace

> 求和、标量相乘，闭合
> 相当于把直线平移过原点

$$V = C - x_0 = \{x - x_0 | x \in C\}$$

> C维度和V维度相同

4、仿射包affC

> 包含C的最小的仿射集合，可以把集合变得一定仿射
> 单位圆的仿射包是整个二维平面，仿射维度为2

$$\text{aff } C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \, | x_1, \cdots, x_k \in C, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$$

- 仿射维度：仿射包的维度

5、相对内部relintC

> 仿射包维度小于整个时
>
> 和内部的区别：取了一个和仿射包的交集
>
> 只要这一部分包含在c里就可以了
>
> 有的集合没有内部，但有相对内部

$$\text{relint } C = \{x \in C \mid B(x,r) \cap \text{aff } C \subseteq C \text{ for some } r > 0\}$$

- $B(x,r) = \{y \mid \|y - x\| \leq r\}$, the ball of radius r and center x in the norm $\|\cdot\|$

- **内部intC（回顾）**

> 所有内点集合

内点定义：存在ε>0

$$\{y \mid \|y - x\|_2 \leq \epsilon\} \subseteq C$$

- **相对边界**

> 闭包-相对内部

$$\text{cl } C \setminus \text{relint } C$$

- **相对内部举例**

> 三维空间里的二维实心正方

```
内部为空，仿射包是z=0
边界：闭包-内部=自己
相对内部，把方框去掉
相对边界：方框
```

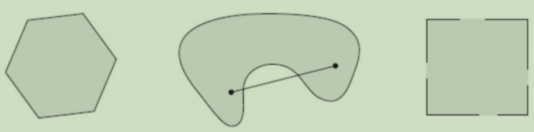
二、凸集合

> 凸集合>仿射集合

- 定义1：（2点）

> 内部任意两点连线线段都在内部
>
> 任意x1,x2，系数为正，和为1

$$\theta x_1 + (1 - \theta) x_2 \in C$$



- 凸组合

■ Convex combination

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k \in C$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \geq 0, i = 1, \cdots, k$$

- 定义2:

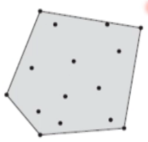
> 凸集合包含内部任意k给定的凸组合
>
> 系数为正，和为1

1、凸包convC

> 是包含C的最小凸集合
>
> 系数为正，和为1

□ Convex hull

$$\text{conv } C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k | \\ x_i \in C, \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \geq 0, i = 1, \cdots, k\}$$



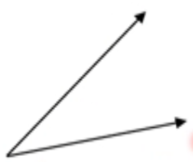
三、锥Cone

> 任意非负系数θ
>
> 包含所有从原点出发，以x为方向的射线

Cone is a set that

$$x \in C, \theta \geq 0 \Longrightarrow \theta x \in C$$

> 锥未必是凸的

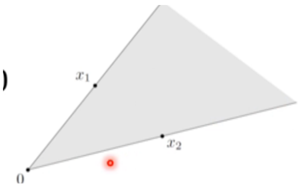


1、凸锥

> 包含任意元素的锥组合

For any $x_1, x_2 \in C$, $\theta_1, \theta_2 \geq 0$

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$$



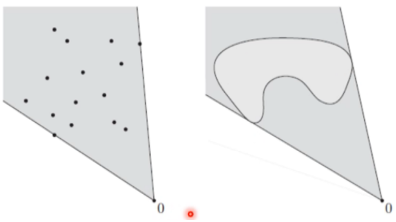
- 锥组合

Conic combination

■ $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, $\theta_i \geq 0, i = 1, \cdots, k$

2、锥包

$\{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k | x_i \in C,\ \theta_i \geq 0, i = 1, \cdots, k\}$



3、半正定锥

对称矩阵Sn

> 本质是n（n+1）/2的线性空间

$$\mathbf{S}^n = \{X \in \mathbf{R}^{n \times n} | X = X^\top\}$$

对称半正定矩阵Sn+

> X是对称半正定矩阵

$$\mathbf{S}_+^n = \{X \in \mathbf{S}^n | X \succcurlyeq 0\}$$

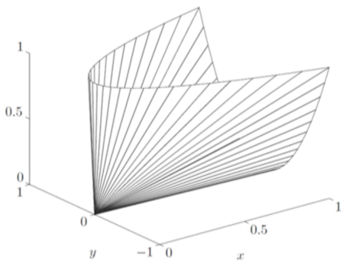
对称正定矩阵Sn++

$$\mathbf{S}_{++}^{n} = \{X \in \mathbf{S}^{n} | X \succ 0\}$$

例子：2*2半正定锥

- 限制条件

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in \mathbf{S}_{+}^{2} \iff x \geq 0, z \geq 0, xz \geq y^2$$



4、对偶锥

- 一定凸，一定是锥

> K是一个cone

$$K^* = \{y \mid x^T y \geqslant 0, \ \forall \ x \in K\}$$

四、一些综合例子

- 规定：空集和点是仿射的
- 线段：凸，不仿射
- 非原点射线，啥也不是
- 子空间：仿射，凸锥（双向的也可以）

1、超平面Hyperplanes

> 线性方程无穷个解的集合，仿射的

$$\{x|a^\top x = b\}$$

- $a \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$ and $b \in R$

> a决定方向，b决定位置
> 理解2：解得x0，与aT垂直的所有向量相加

几何形式

- ☐ Other Forms

$$\{x|a^\top (x - x_0) = 0\}$$

  - x_0 is any point such that $a^\top x_0 = b$

$$\{x|a^\top (x - x_0) = 0\} = x_0 + a^\perp$$

  - $a^\perp = \{v|a^\top v = 0\}$

2、半空间

> 被超平面分成的两个半空间，包含超空间本身
> 约定写成小于等于

$$\{x|a^\top x \leq b\}$$

- $a \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$ and $b \in R$

几何形式

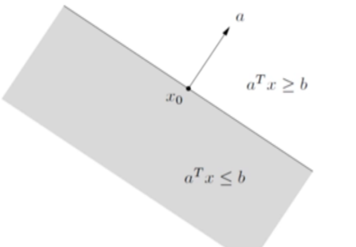
> 内积<=0，即与aT成钝角
> 与法向量相反那个半空间
> 凸，但不仿射

- ☐ Other Forms

$$\{x|a^\top (x - x_0) \leq 0\}$$

  - x_0 is any point such that $a^\top x_0 = b$

  - Convex
  - Not affine



3、多面体Polyhedra

> 多面体是有限个线性等式和不等式的交集
> （不等）半空间和（相等）超平面的交集
> 很多其实都是多面体

$$\mathcal{P} = \{x | a_j^\top x \leq b_j, j = 1, \cdots, m, c_j^\top x = d_j, j = 1, \cdots, p\}$$

矩阵形式

> 广义不等号《=，定义在向量、矩阵
> 把约束条件简写

$$\mathcal{P} = \{x | Ax \preccurlyeq b, Cx = d\}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1^\top \\ \cdots \\ a_m^\top \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1^\top \\ \cdots \\ c_p^\top \end{bmatrix}$$

单纯形Simplexes

> 仿射且无关的k+1个点的凸包
> 是多面体（书上有证明）
> 仿射无关：vi-v0得到k个，这k个线性无关

$$\operatorname{conv}\{v_0, \cdots, v_k\} = \{\theta_0 v_0 + \cdots + \theta_k v_k | \theta \succcurlyeq 0, 1^\top \theta = 1\}$$

- 仿射维度是k

> 一维单形：两个点
> 二维单形：三角形

- 单位单纯形Unit simplex

> n维
> 元素非负，元素求和<=1
> 扔掉了x0，所以是<=1

$$x \succcurlyeq 0, 1^\top x \leq 1$$

- 概率单纯形Probability simplex

> n-1维
> 元素非负，元素求和=1
> 构造基v0-vk的方式不同

$$x \succcurlyeq 0, 1^\top x = 1$$

4、球

3种定义方式

$$
\begin{aligned}
B(x_c,r) = \ & \{x \mid \|x-x_c\|_2 \le r\} \\
= \ & \{x \mid (x-x_c)^\top (x-x_c) \le r^2\} \\
= \ & \{x_c + ru \mid \|u\|_2 \le 1\}
\end{aligned}
$$

5、椭圆Ellipsoids

> P对称正定矩阵，决定延展程度
>
> 特征值λ，决定半轴长
>
> A=根号P
>
> 凸的

两种定义方式

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \{x \mid (x-x_c)^\top P^{-1}(x-x_c) \le 1\} \\
&= \{x_c + Au \mid \|u\|_2 \le 1\}
\end{aligned}
$$

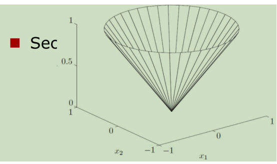
6、范数球&范数锥

> 2范数时就是球

$$C = \{x \mid \|x-x_c\| \le r\}$$

范数锥

$$C = \{(x,t) \mid \|x\| \le t\} \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$$



二阶锥

$$
\begin{aligned}
C &= \{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 \leq t\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \leq 0, t \geq 0 \right\}
\end{aligned}
$$