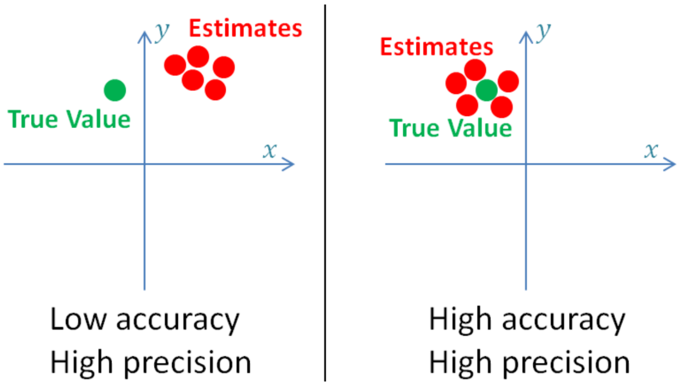
滤波

- 滤波即加权
- 降噪就是给信号一个高的权重而给噪声一个低的权重
- 维纳滤波, 根据信号的统计知识来设计权重，典型的降噪滤波器。

卡尔曼滤波

> 递推预测滤波算法

- 只能减小均值为0的测量噪声的影响
- 假设状态所有的变量都是随机的且都服从高斯分布，每个变量都有其对应的均值以及方差（它代表了不确定性）。
- 伟大之处就在于它能够处理传感器噪声
- 需要初始猜测作为预设，这可能非常粗糙

- **两个独立的高斯分布相乘之后会得到一个新的具有其均值和协方差矩阵的高斯分布**
- 

- 低精度系统称为偏置系统，因为它们的测量具有内置的系统误差（偏置）

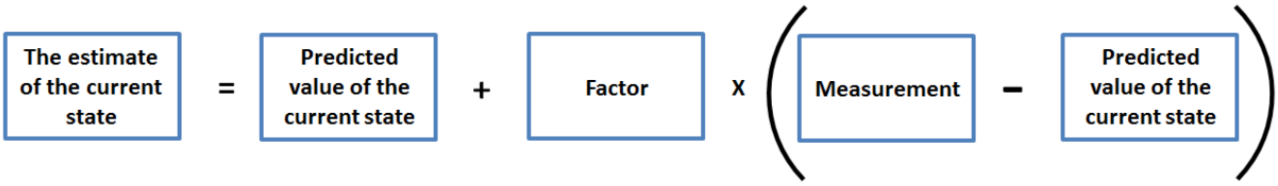
一、五个方程

These are the updated Kalman Filter equations in one dimension:

Equation	Equation Name	Alternative names used in the literature
$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + K_n \left(z_n - \hat{x}_{n,n-1} \right)$	State Update	Filtering Equation
$\hat{x}_{n+1,n} = \hat{x}_{n,n} + \Delta t \hat{\dot{x}}_{n,n}$ $\hat{\dot{x}}_{n+1,n} = \hat{\dot{x}}_{n,n}$ (For constant velocity dynamics)	State Extrapolation	Predictor Equation Transition Equation Prediction Equation Dynamic Model State Space Model
$K_n = \frac{p_{n,n-1}}{p_{n,n-1}+r_n}$	Kalman Gain	Weight Equation
$p_{n,n} = \left(1 - K_n \right) p_{n,n-1}$	Covariance Update	Corrector Equation
$p_{n+1,n} = p_{n,n} + q_n$ (For constant dynamics)	Covariance Extrapolation	Predictor Covariance Equation

1、状态更新方程

$$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + K_n \left(z_n - \hat{x}_{n,n-1} \right) = \left(1 - K_n \right) \hat{x}_{n,n-1} + K_n z_n$$



- factor：很重要，可能随着每次迭代变化（第n次测量是）

> 能消除抖动起到作用，全靠这个逐渐减小的factor

- zn：measured value of the weight at time n

α-β跟踪滤波方程

> 设置两个不变的参数
>
> 不能处理有加速度的情况

带有速度的模型，如果只用一个K，就会出现滞后误差

且滞后是恒定的，不会因为迭代次数增加而消失

位置的更新状态公式：

$$\hat{x}\text{n}, _{n}= \hat{x}_{n}, _{n-1}+ \alpha\left(z_n - \hat{x}_{n}, _{n-1}\right)$$

速度的更新状态方程：

$$\dot{\hat{x}}\text{n}, _{n}= \dot{\hat{x}}_{n}, _{n-1}+ \beta\left(\frac{z_n - \hat{x}_{n}, _{n-1}}{\text{δ吨}}\right)$$

使用状态更新公式重置当前估计值，再使用状态外推进行状态转移，计算下一个估计值（预测值）

α-β-γ跟踪滤波方程

$$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + \alpha\left(z_n - \hat{x}_{n,n-1}\right)$$

$$\dot{\hat{x}}_{n,n} = \dot{\hat{x}}_{n,n-1} + \beta\left(\frac{z_n - \hat{x}_{n,n-1}}{\Delta t}\right)$$

$$\ddot{\hat{x}}_{n,n} = \ddot{\hat{x}}_{n,n-1} + \gamma\left(\frac{z_n - \hat{x}_{n,n-1}}{0.5\Delta t^2}\right)$$

以下列表包括最受欢迎的$\alpha - \beta - (\gamma)$过滤 器：

- 维纳过滤器
- 贝叶斯滤波器
- 衰落记忆多项式滤波器
- 扩展内存（或增长内存）多项式滤波器
- 最小二乘过滤器
- 本尼迪克特-博德纳滤波器
- 集总过滤器
- 折扣最小二乘$\alpha - \beta$滤波器
- 临界阻尼$\alpha - \beta$滤波器
- 增长内存筛选器
- 卡尔曼滤波器
- 扩展卡尔曼滤波器
- 无味卡尔曼滤波器
- 扩展复数卡尔曼滤波器
- 高斯-埃尔米特卡尔曼滤波器
- 古巴卡尔曼滤波器
- 粒子过滤器

2、预测方程（状态外推方程）

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \dot{x}_n$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n$$

3、一维卡尔曼增益方程

$$K_n = \frac{Uncertainty \quad in \quad Estimate}{Uncertainty \quad in \quad Estimate \quad + \quad Uncertainty \quad in \quad Measurement} = \frac{p_{n,n-1}}{p_{n,n-1} + r_n}$$

Where:

$p_{n,n-1}$ is the extrapolated estimate uncertainty

r_n is the measurement uncertainty

由于卡尔曼增益产生最小方差估计，因此卡尔曼滤波也称为**最优滤波器**

卡尔曼增益代表了估计值的权重

- 动态的，不像αβ
- p：估计不确定性，**是估计误差的平方**
- r：测量不确定性，**是测量误差的平方**
- Kn=1时，直接在第一次迭代中消除初始猜测
- 如果是目标速度变化，应设Kn尽量大（0.9），高精度雷达
- 如果是测量误差，则应使Kn尽量小（0.1）
- =0测量没意义，=1过去的估计没意义**（初始化没意义）**
- 如果测量不确定度等于估计不确定度，则卡尔曼增益等于 0.5

4、协方差更新方程

> 估计不确定性更新

$$p_{n,n} = \left(1 - K_n\right) p_{n,n-1}$$

Where:

K_n	is the Kalman Gain
$p_{n,n-1}$	is the estimate uncertainty that was calculated during the previous filter estimation
$p_{n,n}$	is the estimate uncertainty of the current state

- 每次滤波器迭代时，估计不确定性都在不断变小

> 当测量不确定度较小时，卡尔曼增益较高，估计不确定性将很快收敛到零。

5、协方差外推方程

$$p^x_{n+1,n} = p^x_{n,n} + \Delta t^2 \cdot p^v_{n,n}$$

$$p^v_{n+1,n} = p^v_{n,n}$$

Where:

p^x	is the position estimate uncertainty
p^v	is the velocity estimate uncertainty

考虑过程噪声

> 动态模型的不确定性称为**过程噪声q，会产生估计偏差**

$$p_{n+1,n} = p_{n,n} + q_n$$

- q可能设置为很小很小的定值，但太小可能导致滞后错误
- 设置高的过程噪声可以消除滞后误差，但现实意义不强，不如建一个更合适的模型，而不是用过程噪声修修补补

二、一维流程

0、初始化

- Initial System State ($\hat{x}_{1,0}$)
- Initial State Uncertainty ($p_{1,0}$)

1、测量

- Measured System State (z_n)
- Measurement Uncertainty (r_n)

2、状态更新输入

更新Kn，根据K更新当前估计值，当前不确定性（不是外推）

- Measured Value (z_n)
- The Measurement Uncertainty (r_n)
- Previous Predicted System State Estimate ($\hat{x}_{n,n-1}$)
- Previous Predicted System State Estimate Uncertainty ($p_{n,n-1}$)

3、状态更新输出

- System State Estimate ($\hat{x}_{n,n}$)
- Estimate Uncertainty ($p_{n,n}$)

在第一次滤波器迭代中，估计不确定度接近测量不确定度并迅速降低。经过10次测量，估计不确定度（σ^2）为 2.47，即估计误差标准差为：$\sigma = \sqrt{2.47} = 1.57$米

所以我们可以说建筑高度估计是：$49.57\pm\ 1.57$米

4、预测

将当前系统状态估计及其不确定性外推到下一个系统状态

三、多维

> 描述飞机位置、速度和加速度的状态向量是九维的

状态外推方程

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{n+1,n} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}_{n,n} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{w}_n$$

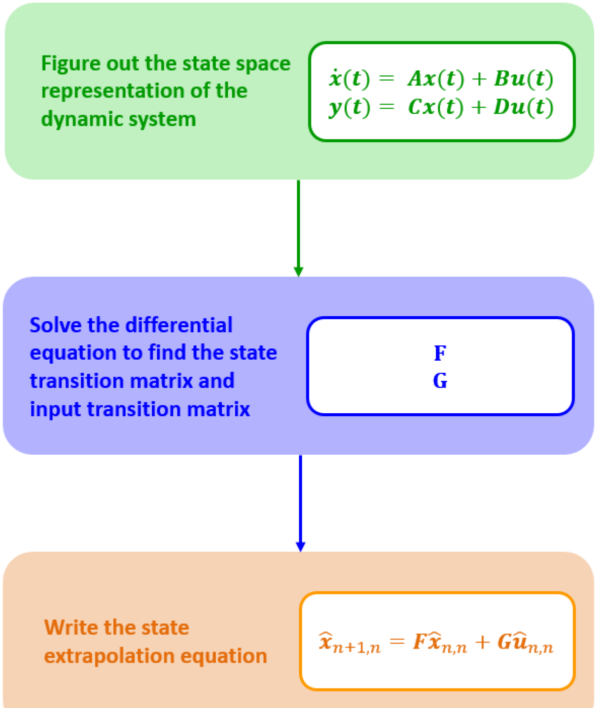
Where:

$\hat{\boldsymbol{x}}_{n+1,n}$	is a predicted system state vector at time step $n+1$
$\hat{\boldsymbol{x}}_{n,n}$	is an estimated system state vector at time step n
$\boldsymbol{u}_n$	is a **control variable** or **input variable** - a measurable (deterministic) input to the system
$\boldsymbol{w}_n$	is a **process noise** or disturbance - an unmeasurable input that affects the state
$\boldsymbol{F}$	is a **state transition matrix**
$\boldsymbol{G}$	is a **control matrix** or **input transition matrix** (mapping control to state variables)

Variable	Description	Dimension
$\boldsymbol{x}$	state vector	$n_x \times 1$
$\boldsymbol{F}$	state transition matrix	$n_x \times n_x$
$\boldsymbol{u}$	input variable	$n_u \times 1$
$\boldsymbol{G}$	control matrix	$n_x \times n_u$
$\boldsymbol{w}$	process noise vector	$n_x \times 1$

- F：公式决定，记录位移和速度
- G：外力决定，记录加速度
- un：输入的外部影响

时不变系统是指输入序列中的时间延迟（或移位）导致系统输出序列中的等效时间延迟的系统



协方差外推方程

$$P_{n+1,n} = FP_{n,n}F^T + Q$$

Where:

$P_{n,n}$	is the uncertainty of an estimate-covariance matrix of the current state
$P_{n+1,n}$	is the uncertainty of a prediction-covariance matrix for the next state
F	is the state transition matrix that we derived in the "Modeling linear dynamic systems" section
Q	is the process noise matrix

- F：在“线性动态系统建模”部分中推导出的状态转换矩阵
- Q：过程噪声矩阵：分离散模型和连续模型