> 1. 用劳斯判据判定线性系统稳定性
> 2. 用劳斯判据设计参数

一、稳定性

- 平衡状态：没有任何扰动或者输入信号的激励，控制系统输出量保持在某个状态
- 稳定系统：扰动消失后，扰动后效随时间消失，系统能恢复到平衡
- 状态

> 不倒翁全局稳定
>
> 稳定性是系统的固有属性，只与系统自身有关

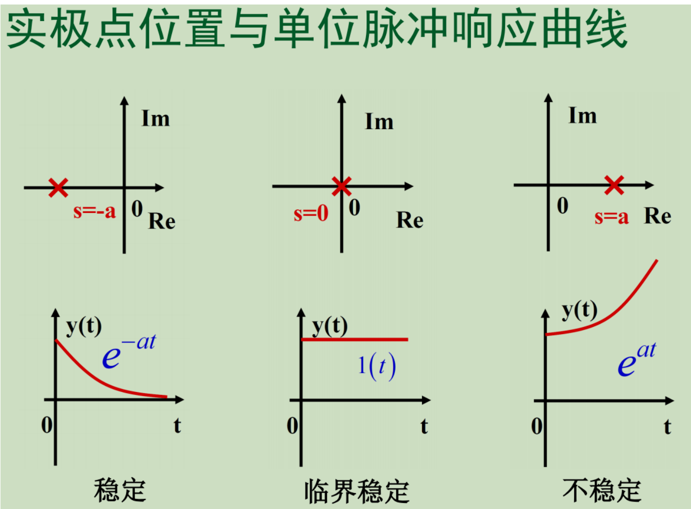
BIBO稳定性

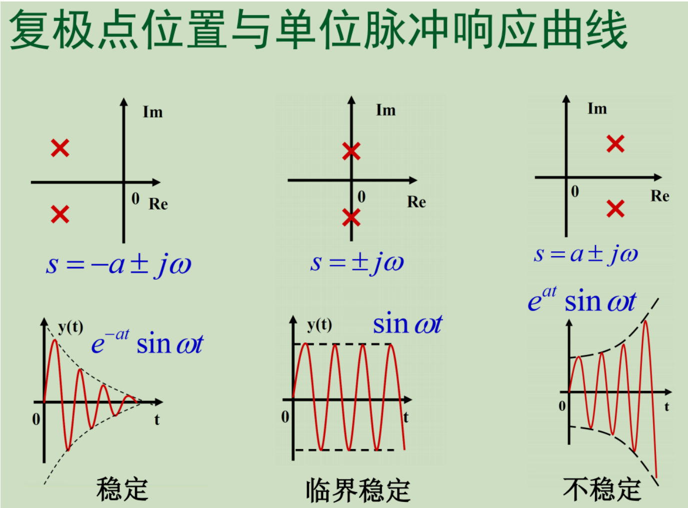
- 有界输入的激励下，系统只会产生有界的输出

$$y(t) = -1 + 0.5e^{-t} + 0.5e^{t}$$ 不稳定！

二、线性系统稳定的充要条件

所有闭环极点的实部为负





- 输出：有界输入与单位脉冲响应的卷积（组合）
- 有一个非负，则无界（不稳定）

> 闭环传递函数的脉冲响应是否有界

T1--判断系统稳定性

(1) $T(s)=\dfrac{1}{s-1}$ 不稳定

(2) $T(s)=\dfrac{1}{s^2+2s+2}$ 稳定

(3) $T(s)=\dfrac{1}{s^2+2}$ 不稳定

例6.2 判断下列系统特征方程的稳定性：

$q(s)=s^2-s+4=0$ 不稳定

$q(s)=s^3+2s^2+9=0$ 不稳定

待定！

$q(s)=s^3+3s^2+3s+1$ 稳定

$q(s)=s^3+s^2+2s+8$ 不稳定

$$q(s)=(s+2)(s^2-s+4)=s^3+s^2+2s+8$$

三、劳斯-赫尔维茨稳定性判据（劳斯判据）

> 韦达定理

- 已知系统的闭环特征方程，不必求解特征根。
- 根据特征多项式的系数，判别闭环系统的稳定性

根据韦达定理，特征根都有负实部的必要条件：系数都>0

劳斯判定表

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & h_{n-1} & &
\end{array}
$$

劳斯-赫尔维茨稳定性判据：$q(s)$的正实部根的数目等于劳斯判定表首列中符号变化的次数。

闭环系统稳定的充要条件：

(1) 特征方程的各项系数$a_i > 0$

(i = 0，1，2，…，n)

(2)“劳斯判定表”中第一列所有项均为正

如果同时满足以上两个条件，则系统稳定。

且，实部为正的特征根数＝

劳斯判定表中第一列的系数符号改变的次数

——劳斯-赫尔维茨稳定性判据

劳斯判定表

- 第一、第二行，由特征多项式系数间隔排列构成

1) b_{n-1}的计算

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & h_{n-1} & &
\end{array}
$$

$$
b_{n-1} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}
$$

一撇减一捺，除以左下角

注意只算两列就行

2) b_{n-3}的计算

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s^0 & h_{n-1} & & \end{array}$$

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

上一行首列元素始终为分母。上两行首列元素始终参与行列式运算，其他轮值。

3) 其它行的计算规律与b行相同，仅涉及该行的前两行

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s^0 & h_{n-1} & & \end{array}$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-3} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix}$$

- bn-5算不了，所以0

T2--劳斯判据稳定性

- 特征方程是分母

例6.4 三阶系统的特征方程如下，分析其稳定性。

$$q(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & a_0 & \end{array}$$

$$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}}{a_2} = \frac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2}$$

系数大于0的三阶系统稳定的充要条件是：

$$a_2 a_1 > a_3 a_0$$

例6.5 判断如下5阶系统的稳定性

$$q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$$

特殊情况1：首列中有**1**个元素为零

用无穷小正数 ε 代替 0，继续运算

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 2 & 11 \\
s^4 & 2 & 4 & 10 \\
s^3 & \varepsilon & 6 & 0 \\
s^2 & c_2 & c_0 & \\
s^1 & & & \\
s^0 & & &
\end{array}
$$

$$c_2 = \frac{-\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \varepsilon & 6 \end{vmatrix}}{\varepsilon} = 4 - \frac{12}{\varepsilon}$$

$$c_0 = \frac{-\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ \varepsilon & 0 \end{vmatrix}}{\varepsilon} = 10$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 2 & 11 \\
s^4 & 2 & 4 & 10 \\
s^3 & \varepsilon & 6 & 0 \\
s^2 & 4-\frac{12}{\varepsilon} & 10 & \\
s^1 & d_1 & & \\
s^0 & 10 & &
\end{array}
$$

$$d_1 = \frac{-\begin{vmatrix} \varepsilon & 6 \\ 4-\frac{12}{\varepsilon} & 10 \end{vmatrix}}{4-\frac{12}{\varepsilon}} = -\frac{10\varepsilon^2 - 24\varepsilon + 72}{4\varepsilon - 12}$$

令无穷小正数 ε 趋近于零，首列符号变化两次，系统不稳定。

特殊情况2： 劳斯判定表中存在全零行

例6.6 判断如下 3 阶系统的稳定性

$$q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + 8$$

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 4 \\
s^2 & 2 & 8 \\
s^1 & 0 & 0 \\
s^0 & &
\end{array}
$$

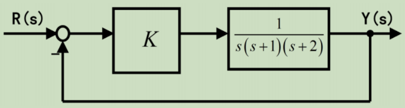
全 0 行的前一行多项式是$q(s)$的因子

$$2s^2 + 8 = 2(s^2 + 4)$$
$$= 2(s + j2)(s - j2)$$

全 0 行的情况下，系统不稳定

T3--根据劳斯判据设计

例6.8 设计参数 K 的取值范围，以保证闭环系统稳定。



闭环传递函数：$T(s)=\dfrac{K}{s^3+3s^2+2s+K}$

列劳斯判定表

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s & \frac{6-K}{3} & \end{array} \Rightarrow \frac{6-K}{3}>0 \Rightarrow 0<K<6$$

例6.9 已知系统的特征方程为:

$$-0.025s^3-0.325s^2-s-k=0$$

(1)试确定使系统稳定的 k 的取值范围；

(2)如果要求特征根均位于 $s=-1$ 垂线左侧，问 k 的取值又应该如何调整?

列劳斯判定表可知，系统稳定要求：

$$\left.\begin{array}{l} k>0 \\ 0.325>0.025*k \end{array}\right\} \Rightarrow 0<k<13$$

$$(s_n-1)^3+13(s_n-1)^2+40(s_n-1)+40k=0$$

$$\Downarrow$$

$$s_n^3+10s_n^2+17s_n+(40k-28)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 40k-28>0 \\ 10*17>40k-28 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.7<k<4.95$$