

计算流体力学

第三次作业

王煜沣
2200011013
2025.3

作业要求：

采用多种数值格式（不少于三种）计算如下一阶波动方程的解：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

初始条件为：

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x)$$

计算区域取为 $0 < x < 3$ ，采用周期边界条件。

- (1) 验证格式的稳定性条件，观察到发散现象；
- (2) 验证格式的精度阶数；
- (3) 观察数值解的耗散以及相位的超前和滞后。

数理算法原理

本次作业采用的三种数值格式分别为：

- (1) Lax 格式

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(1-c)u_{j+1}^n + \frac{1}{2}(1+c)u_{j-1}^n$$

放大因子：

$$G = \cos k\Delta x - ic \sin k\Delta x$$

可见格式精度为 1 阶，当 $|c| \leq 1$ 时格式稳定，相位角 $\varphi = -\tan^{-1}(c \tan k\Delta x)$ ，相位滞后。

- (2) 一阶迎风格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

放大因子：

$$G = 1 - c(1 - \cos k\Delta x) - ic \sin k\Delta x$$

格式精度为 1 阶，当 $|c| \leq 1$ 时格式稳定，相位角 $\varphi = -\tan^{-1}(\frac{c \sin k\Delta x}{1 - c(1 - \cos k\Delta x)})$ 。在 $|c| \leq$

1，且 $k\Delta x \ll 1$ 的情况下，相位滞后。

- (3) 隐式 BTCS 格式

$$u_j^{n+1} + \frac{1}{2}c(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n$$

放大因子：

$$G = \frac{1}{1 + icsink\Delta x}$$

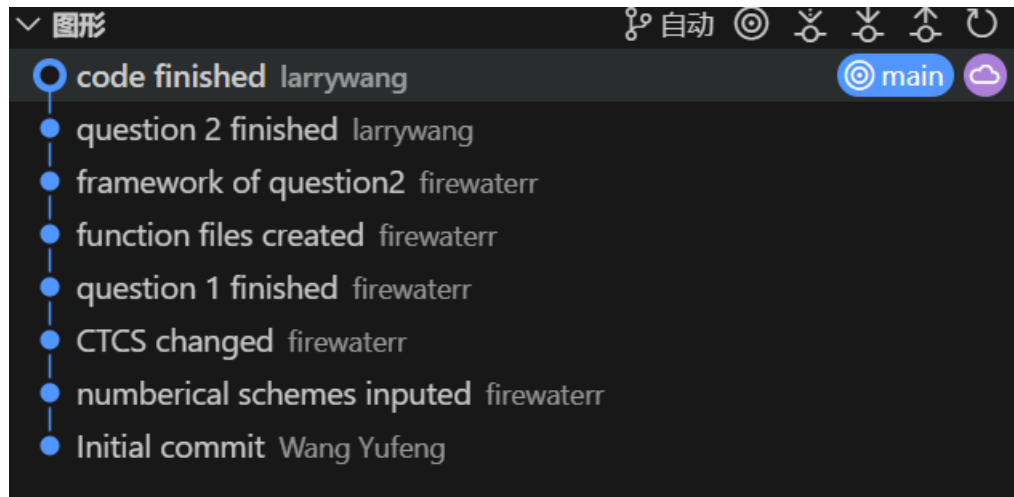
格式精度为 1 阶，无条件稳定，相位角 $\varphi = -\tan^{-1}(csin(k\Delta x))$ ，相位滞后。

边界条件：题目要求对称边界条件，可代入 $u_j^{N-1} = u_j^{-1}$, $u_j^{N+1} = u_j^2$ 计算边界处的函数值，这样相当于保证了 $u_j^N = u_j^1$ 。

代码生成与调试

代码请见压缩包中‘code’文件夹中。其中‘homework’文件夹中三份代码分别解决作业第一问、第二问、第三问；‘function’文件夹中四份代码分别为 Lax、Upwind（一阶迎风）、Implicit（隐式 BTCS）以及函数精确解的生成。分别运行‘homework’文件夹中的三份代码，即可得到作业结果。

代码调试过程请见 VscodeGit 截图：



结果讨论和物理解释

（1）稳定性

稳定性的讨论见‘homework3_1.m’文件生成的结果图。本代码生成了九张热力图。由图可见， $c = 2$ 时，一阶迎风格式和 Lax 格式都有不稳定情况出现； $c = 0.5$ 时，一阶迎风格式和 Lax 格式稳定，但数值耗散很大； $c = 1$ 时，一阶迎风格式和 Lax 格式稳定，且数值耗散很小。相比之下，隐式 BTCS 格式在三种 CFL 数下的表现几乎相同，且均有一定的数值耗散。

这些结果与“数理算法原理”部分的讨论符合。

（2）格式的精度阶数

数值验证格式精度的方法为：

$$p = \log_q \frac{\|u - u_{qh}\|}{\|u - u_h\|}$$

其中 $\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2 / N}$, N 是计算域内的格点总数。

具体代码实现见 ‘homework3_2.m’ 文件。

对于本次作业采用的三种数值格式，有修正方程

(Lax 格式)

$$u_t + u_x = \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{1}{c} - c \right) u_{xx} + \dots$$

(一阶迎风格式)

$$u_t + u_x = \frac{\Delta x}{2} (1 - c) u_{xx} + \dots$$

(隐式 BTCS 格式)

$$u_t + u_x = \frac{\Delta x}{2} c u_{xx} + \dots$$

故三种格式均为一阶精度。将理论精度与数值验证格式精度列表如下：

格式	数值精度	理论精度
Lax	0.9505	1
一阶迎风	0.9794	1
隐式 BTCS	0.9094	1

表 1 三种数值格式的精度计算

可见理论与数值结果基本一致。

需要注意的是，取 $c = 1$ 会使 Lax 和一阶迎风格式修正方程右端第一项取 0，相当于提高了数值精度。为了表示一般情况，此处取 $c = 0.8$ 得到结果。

(3) 数值解的耗散、相位的超前和滞后

具体讨论见 ‘homework3_3.m’ 文件生成的结果图。取 $x = 3$ 最后格点画图，发现随着时间 t 逐渐增大，三种格式的最大值逐渐减小，体现出耗散性；取 $t = 3$ 最后时刻的结果画图，三种格式最大值均小于精确解，且零点均滞后精确解出现，与 ‘数理算法原理’ 中的讨论一致。