

计算流体力学

第二次作业

王煜沅

2200011013

2025.3

数理算法原理

题目要求构造差分格式，在均匀网格上，针对一阶导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和二阶导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ，各构造两种不同阶数的差分格式。要求为差分格式的模板不超过 4 个网格点。

本课程讲授了四种差分形式构造方法，分别为：待定系数法（Taylor 展开方法）、多项式方法、积分方法、有限体积法。题目中没有给出控制方程的具体形式，因此，无法通过积分方法、有限体积法构造差分格式。所以本题在待定系数法、多项式方法中选用待定系数法构造差分格式

待定系数法（Taylor 展开方法）：

选取 u_{j-2} u_{j-1} u_{j+1} u_{j+2} 构造差分：

$$u_{j-2} = u_j - 2\Delta x \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{1}{2!}(2\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} - \frac{1}{3!}(2\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u_j}{\partial x^3} + \frac{1}{4!}(2\Delta x)^4 \frac{\partial^4 u_j}{\partial x^4} - \frac{1}{5!}(2\Delta x)^5 \frac{\partial^5 u_j}{\partial x^5}$$

$$u_{j-1} = u_j - \Delta x \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} - \frac{1}{3!}(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u_j}{\partial x^3} + \frac{1}{4!}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 u_j}{\partial x^4} - \frac{1}{5!}(\Delta x)^5 \frac{\partial^5 u_j}{\partial x^5}$$

$$u_{j+1} = u_j + \Delta x \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{1}{3!}(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u_j}{\partial x^3} + \frac{1}{4!}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 u_j}{\partial x^4} + \frac{1}{5!}(\Delta x)^5 \frac{\partial^5 u_j}{\partial x^5}$$

$$u_{j+2} = u_j + 2\Delta x \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{1}{2!}(2\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{1}{3!}(2\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u_j}{\partial x^3} + \frac{1}{4!}(2\Delta x)^4 \frac{\partial^4 u_j}{\partial x^4} + \frac{1}{5!}(2\Delta x)^5 \frac{\partial^5 u_j}{\partial x^5}$$

假设

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} = Au_{j-2} + Bu_{j-1} + Cu_{j+1} + Du_{j+2}$$

应满足方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2\Delta x & -\Delta x & \Delta x & 2\Delta x \\ 2(\Delta x)^2 & \frac{1}{2}(\Delta x)^2 & \frac{1}{2}(\Delta x)^2 & 2(\Delta x)^2 \\ -\frac{4}{3}(\Delta x)^3 & -\frac{1}{6}(\Delta x)^3 & \frac{1}{6}(\Delta x)^3 & \frac{4}{3}(\Delta x)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix} \quad (1)$$

精度：

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} - (Au_{j-2} + Bu_{j-1} + Cu_{j+1} + Du_{j+2}) = \frac{1}{90}(\Delta x)^4 \frac{\partial^5 u_j}{\partial x^5}$$

算式为四阶精度

假设

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = Eu_{j-2} + Fu_{j-1} + Gu_{j+1} + Hu_{j+2}$$

应满足方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2\Delta x & -1\Delta x & 1\Delta x & 2\Delta x \\ 2(\Delta x)^2 & \frac{1}{2}(\Delta x)^2 & \frac{1}{2}(\Delta x)^2 & 2(\Delta x)^2 \\ -\frac{4}{3}(\Delta x)^3 & -\frac{1}{6}(\Delta x)^3 & \frac{1}{6}(\Delta x)^3 & \frac{4}{3}(\Delta x)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{bmatrix} E \\ F \\ G \\ H \end{bmatrix} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (2)$$

精度：

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} - (Eu_{j-2} + Fu_{j-1} + Gu_{j+1} + Hu_{j+2}) = -\frac{5}{8}(\Delta x)^2 \frac{\partial^4 u_j}{\partial x^4}$$

算式为二阶精度

选取 u_{j-1} u_j u_{j+1} 构造差分：

$$u_{j-1} = u_j - \Delta x \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} - \frac{1}{3!}(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u_j}{\partial x^3} + \frac{1}{4!}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 u_j}{\partial x^4}$$

$$u_j = u_j$$

$$u_{j+1} = u_j + \Delta x \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{1}{3!}(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u_j}{\partial x^3} + \frac{1}{4!}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 u_j}{\partial x^4}$$

假设

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} = Iu_{j-1} + Ju_j + Ku_{j+1}$$

应满足方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\Delta x & 0 & \Delta x \\ \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 & 0 & \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ J \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{bmatrix} I \\ J \\ K \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

精度

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} - (Iu_{j-1} + Ju_j + Ku_{j+1}) = -\frac{1}{3}(\Delta x)^2 \frac{\partial^3 u_j}{\partial x^3}$$

算式为二阶精度

假设

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = Lu_{j-1} + Mu_j + Nu_{j+1}$$

应满足方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\Delta x & 0 & \Delta x \\ \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 & 0 & \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

精度

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} - (Lu_{j-1} + Mu_j + Nu_{j+1}) = -\frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial^4 u_j}{\partial x^4}$$

算式为二阶精度。

代码生成与调试

所生成的代码见 'homework.py', 'homework-question4.py' 文件。

代码调试过程：请见 github 截图：

Github 网址：<https://github.com/firewaterr/cfdHW1.git>

到作业提交截止日期后，我会将 GitHub 项目改为“公开”，助教学长可以检查每次更改的结果。

Commits		
main	All users	All time
Commits on Mar 23, 2025		
questions finished	freewater committed 22 minutes ago	f38c2de
most questions finished	freewater committed 45 minutes ago	e853678
answering questions(ver1)	freewater committed 1 hour ago	69f1f7a
more codes	freewater committed 2 hours ago	a8c5cfe
Commits on Mar 16, 2025		
add some new files	freewater committed last week	85a378b
small error in the code	freewater committed last week	6138732
changed function types	freewater committed last week	e018f58
function changed	freewater committed last week	8c1c3b2
Commits on Mar 13, 2025		
README.md updated	freewater committed last week	ac5a7c2
Created the frame of this code. Still need to alt-	freewater committed last week	558d9b7
a little try	freewater committed last week	34e5d56
Initial commit	freewater authored 2 weeks ago	0c8344b

数值验证格式的精度：

此处采用事后验证方法验证格式精度。对于一串网格点序列，分别用一倍步长和 q 倍步长计算该网格点出差分格式的结果，得到 u_h 和 u_{qh} ，设真实值为 u ，则数值格式的格式精度为

$$p = \log_q \frac{\|u - u_{qh}\|}{\|u - u_h\|}$$

其中 $\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$ ，具体求解见代码。运行代码可发现，一阶微分的第一种格式，数值精度为四阶，一阶微分的第二种格式和二阶微分的两种格式，数值精度均为二阶。这些结果和理论计算的结果一致。

结果讨论和物理解释

舍入误差和截断误差的规律：

（1）对于一次、二次方程，四种格式均无截断误差，舍入误差较小，但可以发现，二阶微分的舍入误差比一阶微分的舍入误差大两个数量级，这是因为作二阶微分时，除数和被除数都更小，所以误差增长较大；

（2）到了三次、四次方程，可以看出一阶微分的两种格式精度相差很大，此时截断误差起主要效果；

（3）减小步长，会增大舍入误差；

（4）减小步长，会增大截断误差。

单精度和双精度的影响：

NumPy 默认使用双精度浮点值，为了分析单精度和双精度的影响，'homework-question4.py' 文件中用 'np.float32' 语句将所有双精度浮点运算改为单精度浮点运算。对比两份代码中误差的不同，可以看出：

（1）单精度浮点运算比双精度误差大很多；

（2）双精度占用的内存空间比单精度大很多。