Penurunan Persamaan/Rumus Titik Berat atau Titik Pusat Massa

Firman Qashdus Sabil

September 18, 2024

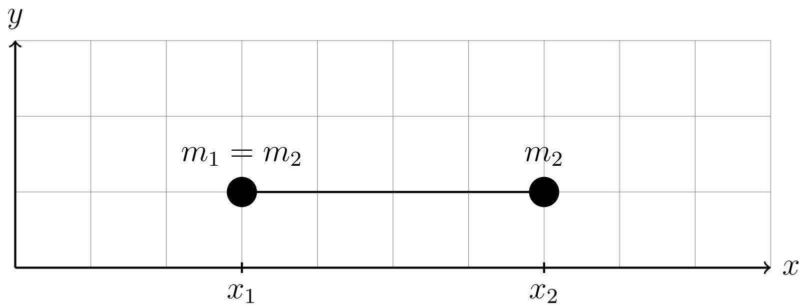
Daftar Isi

Rumus-rumus yang saya bungkus dalam kotak seperti Rumus nomor 6 adalah rumus penting yang harus kalian ingat.

1 Titik Pusat/Tengah Massa dari Partikel atau Benda-Titik

Untuk menyelesaikan suatu permasalahan fisika, selalu mulai dengan kasus yang paling sederhana. Dalam hal ini, kasus benda titik (suatu benda yang dapat kita abaikan bentuknya).

Misalkan, kita memiliki dua buah massa m_1 dan m_2. m_1 berada di posisi x_1 dan m_2 berada di posisi m_2.



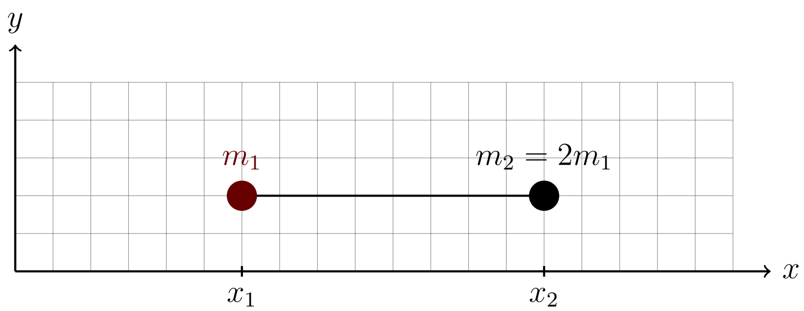
Gambar 1: Dua buah partikel dengan massa ($m_1 = m_2$).

Maka, dengan mudah, kita dapat menghitung titik pusat/tengah dari massanya dengan persamaan "nilai rata-rata" yang sudah kita pelajari.

$$x_{\text{rerata}} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2). \tag{1}$$

Tentunya kalian pasti sudah bisa menebak, bahwa titik pusat massa dari sistem pada Gambar 1 terletak di tengah-tengah keduanya.

Sekarang, pertanyaannya, bagaimana jika massa dari partikel 2 dua kali massa partikel 1 ($m_2 = 2m_1$)?



Gambar 2: Dua buah partikel dengan massa ($m_2 = 2m_1$).

Maka dapat dibayangkan bahwa kita seakan-akan memiliki dua buah m_1 yang diletakkan pada titik yang sama (di x_2). Sehingga, sekarang kita memiliki 3 buah partikel. Satu pertikel di x_1 dan dua partikel bertumpuk di x_2. Oleh karena itu, Persamaan rerata dari ketiga buah partikel ini adalah:

$$x_{\text{rerata}} = \frac{x_1 + x_2 + x_2}{3} = \frac{x_1 + 2x_2}{3}. \tag{2}$$

Persamaan di atas dapat kita tuliskan kembali menjadi

$$x_{\text{rerata}} = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2) = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}r_2. \tag{3}$$

Sekarang bisakah kita men-generalisasi persamaan ini? Bagaimana jika $m_2 = 1,5m_1$, $m_2 = 100.000.000\ m_1$, atau bahkan $m_2 = \alpha m_1$? Perhatikan bahwa 1/3 di dalam Persamaan (3) adalah m_1/m_{total} dan 2/3 adalah m_2/m_{total}. Oleh karena itu sekarang kita dapat merumuskan persamaan titik pusat massa:

$$\begin{aligned} x_{\text{tpm}} &= \frac{m_1}{m_{\text{total}}}x_1 + \frac{m_2}{m_{\text{total}}}x_2 + \cdots = \frac{m_n}{m_{\text{total}}}x_n \\ &= \frac{1}{m_{\text{total}}}\sum_n m_n x_n. \end{aligned} \tag{4}$$

m_{total} adalah penjumlahan massa tiap-tiap partikel ($\sum_n m_n$), maka

$$x_{\text{tpm}} = \frac{\sum\limits_n m_n x_n}{\sum\limits_n m_n}. \tag{5}$$

Rumus/Persamaan (5) dapat kita uraikan menjadi:

$$\boxed{x_{\text{tpm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.} \tag{6}$$

Persamaan (6) adalah persamaan titik pusat massa untuk sistem pertikel/benda titik.

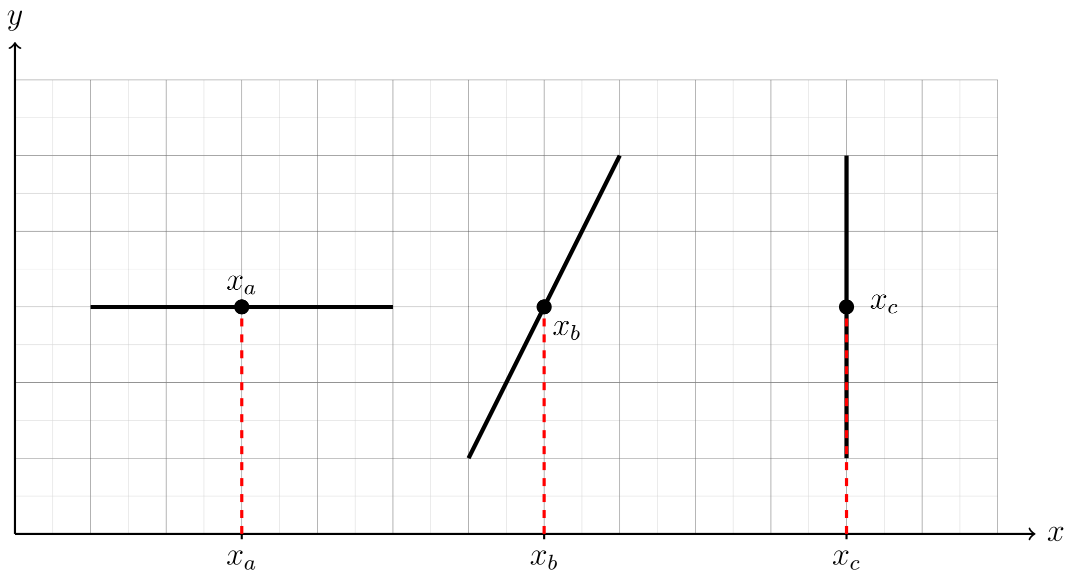
2 Titik Pusat Massa dari benda homogen 1 Dimensi

Benda homogen adalah benda yang massa-nya terdistribusi seragam/merata/sama di setiap titik pada benda tersebut.

Benda 1-dimensi adalah benda yang berupa garis lurus. Sebuah garis lurus dibentuk oleh kumpulan titik-titik/partikel yang saling terhubung. Oleh karena itu, persamaan Titik Pusat Massa dari benda 1-dimensi sama persis dengan benda titik/partikel.

$$x_{\text{tpm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

di mana $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah titik pusat massa dari masing-masing benda homogen 1-dimensi (lihat Gambar 3).



Gambar 3: Titik pusat massa dari masing-masing Benda Homogen 1-Dimensi adalah **titik tengah dari benda tersebut.**

Permasalahannya, di dalam persoalan yang akan kalian dapati nanti (soal-soal di buku, UTS, UAS, atau bahkan SNBT) yang diketahui dari benda homogen 1-dimensi bukanlah massa bendanya tetapi panjang dari bendanya.

Bagiamana cara kita memodifikasi Persamaan (6) agar dapat digunakan pada kasus dimana panjang dari benda yang diketahui? Caranya sederhana saja, tentu kita pernah belajar massa jenis dari benda (ρ). Massa jenis (atau rapat massa) terbagi menjadi 3:

Massa jenis benda 1-Dimensi (massa jenis garis)

$$\rho = \frac{m}{L}, \tag{7}$$

di mana L adalah panjang benda.

Massa jenis benda 2-Dimensi (massa jenis luasan)

$$\rho = \frac{m}{A}, \tag{8}$$

di mana A adalah Luas benda.

Massa jenis benda 3-Dimensi (massa jenis volume) yang biasa kita pelajari.

$$\rho = \frac{m}{V}, \tag{9}$$

di mana V adalah Volume benda.

Pembahasan kita saat ini adalah benda homogen 1-dimensi. Maka berdasarkan Persamaan (7) didapatkan rumus massa benda garis:

$$m = \rho L. \tag{10}$$

Jika kita subtitusi/masukkan Persamaan (10) ke Persamaan (6) maka kita dapatkan:

$$x_{\text{tpm}} = \frac{\rho_1 L_1 x_1 + \rho_2 L_2 x_2 + \cdots + \rho_n L_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}. \tag{11}$$

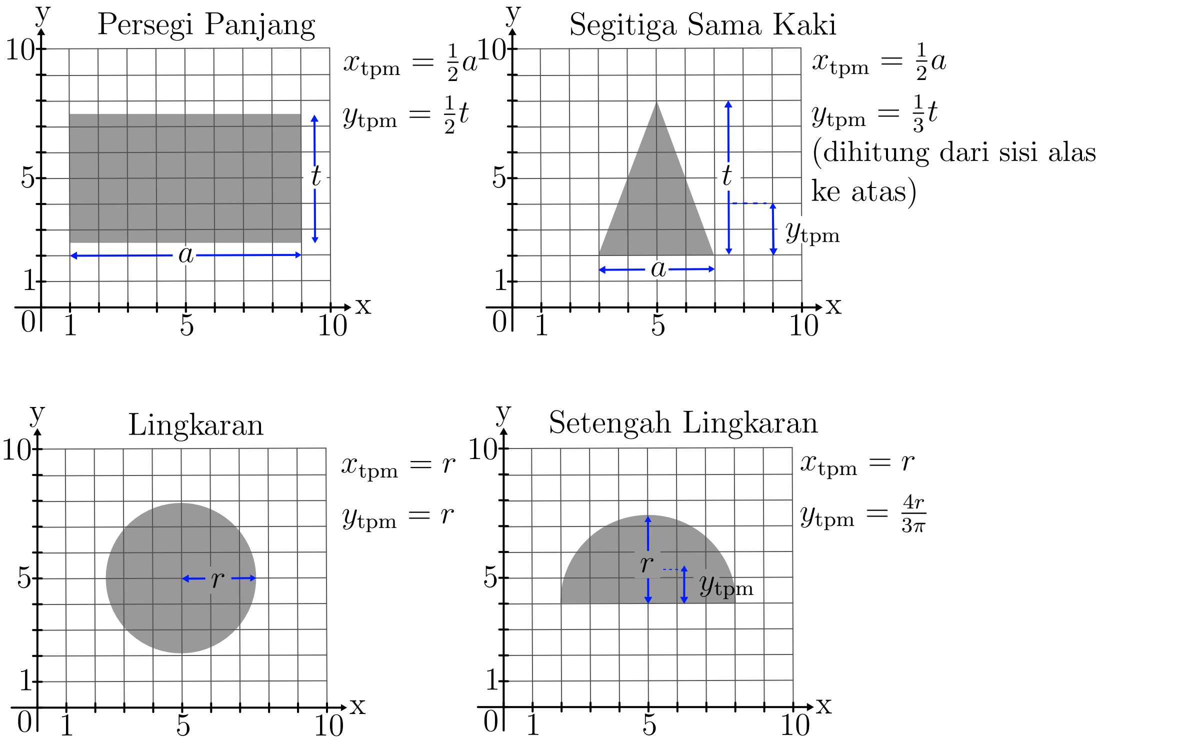
Jika benda-benda 1-Dimensi tersebut homogen atau ρ-nya sama di setiap titik ($\rho_1 = \rho_2 = \rho_n$), maka ρ pada Persamaan (11) dapat kita abaikan. Sehingga Persamaan (11) menjadi:

$$\boxed{x_{\mathrm{tpm}} = \frac{L_1 x_1 + L_2 x_2 + \cdots + L_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.} \tag{12}$$

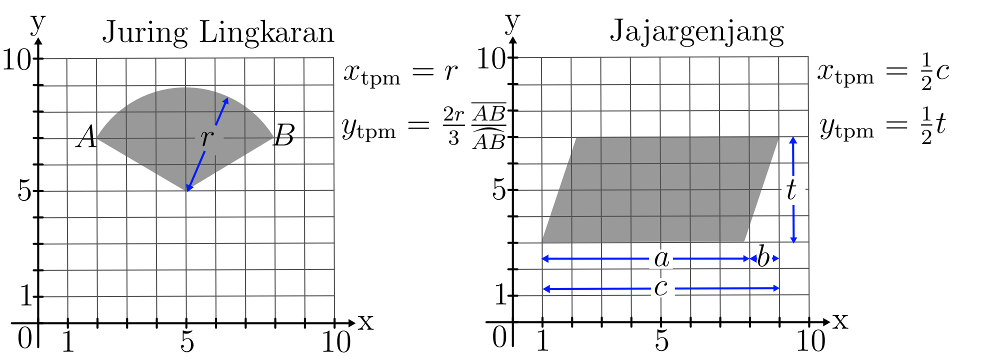
Persamaan di atas adalah persamaan titik pusat massa untuk benda homogen 1-dimensi.

3 Titik Pusat Massa dari benda homogen 2-Dimensi

Pada benda homogen 2-Dimensi, titk pusat massa dari masing-masing benda sedikit kompleks. Tidak semua benda 2-dimensi memiliki titik pusat massa tepat ditengah-tengah bidangnya. Daftar titik pusat massa untuk tiap-tiap bentuk benda homogen 2-dimensi dapat dilihat pada Gambar 4 dan 5 berikut.



Gambar 4: Daftar titik pusat massa dari benda homogen 2-dmensi (bagian 1)



Gambar 5: Daftar titik pusat massa dari benda homogen 2-dmensi (bagian 2)

Untuk siswa SMA, kalian cukup menghafal saja posisi titik massa di sumbu-y dari masing-masing benda homogen 2-dimensi di atas. Namun, di akhir section nanti saya akan tetap menjelaskan dari mana posisi titik pusat massa tersebut berasal. Misalkan, untuk segitiga, posisi titik pusat massa pada sumbu-y adalah $1/3t$. *Kita akan coba mencari asal-usulnya di bagian akhir.*

Bagaimana jika sistem yang kita tinjau terdiri dari beberapa benda homogen 2-dimensi? Sebenarnya suatu benda homogen 2-dimensi adalah kumpulan dari beberapa benda homogen 1-dimensi. Kita sudah tahu sebelumnya, bahwa benda homogen 1-dimensi tersusun oleh sekumpulan benda titik. Oleh karena itu, persamaan yang digunakan adalah sama, yakni:

$$x_{\text{tpm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

di mana $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah titik pusat massa dari masing-masing benda homogen 2-dimensi (lihat Gambar 4 dan 5).

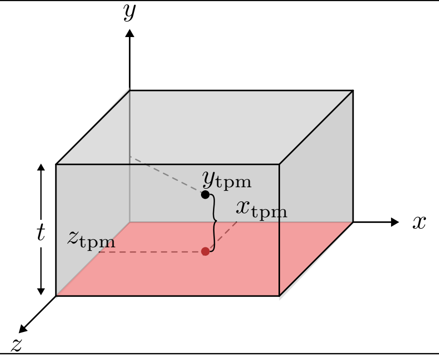
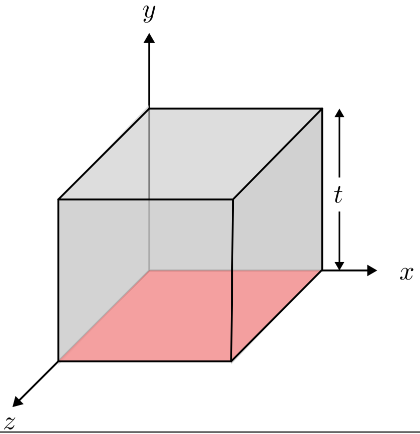
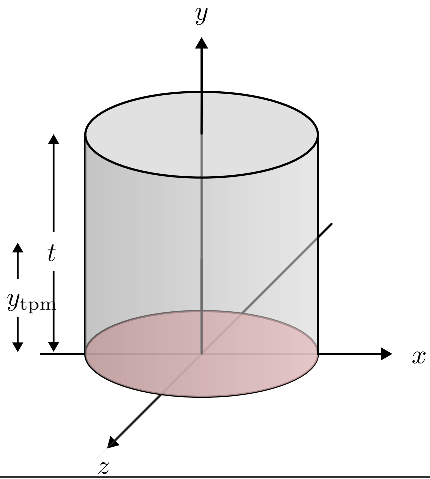
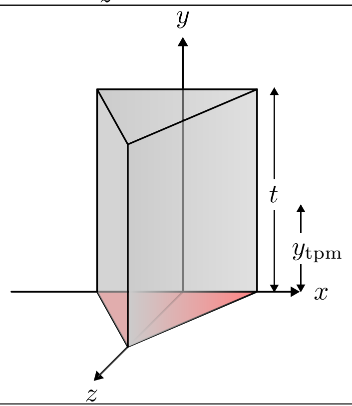
Permasalahannya, di dalam soal, biasanya yang diketahui adalah "Luas" dari benda homogen 2-dimensi tersebut. Maka kita perlu memodifikasi persamaan di atas dengan cara yang sama seperti yang telah kita lakukan pada benda homogen 1-dimensi. Bedanya, sekarang kita menggunakan persamaan massa jenis luasan (Persamaan 8). Dari sini kita akan mendapatkan persamaan:

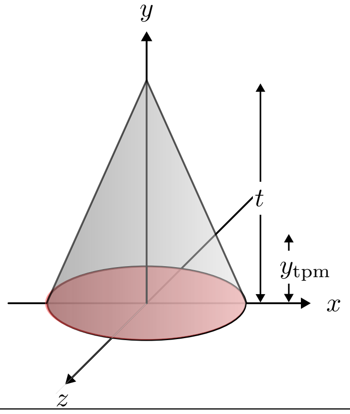
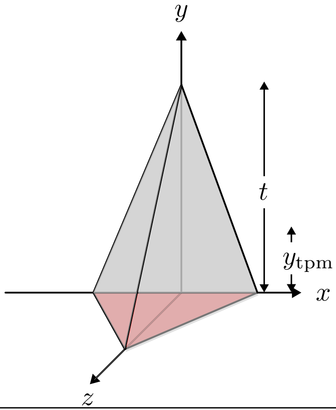
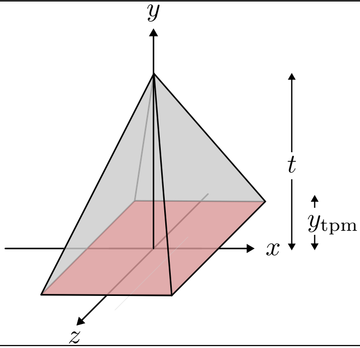
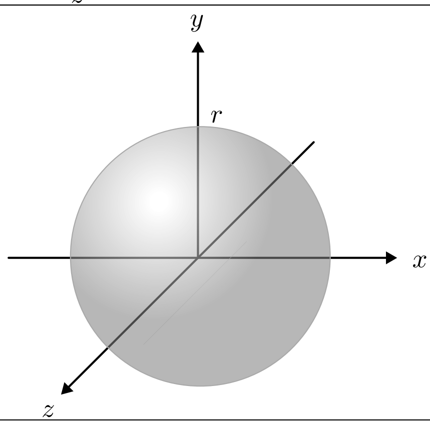
$$\boxed{x_{\text{tpm}} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.}. \tag{13}$$

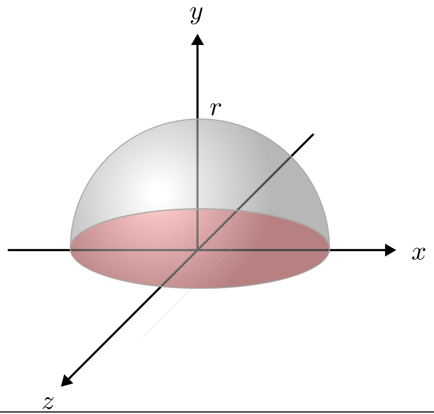
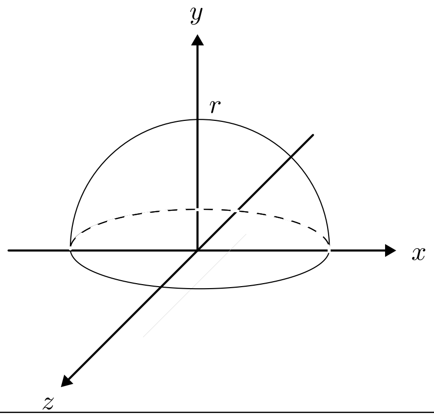
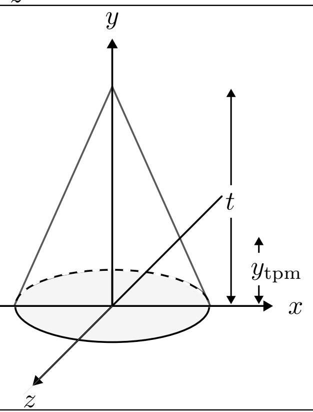
Persamaan di atas adalah persamaan titik pusat massa untuk beberapa benda homogen 2-dimensi.

4 Titik Pusat Massa dari benda homogen 3-Dimensi

Hal yang sama juga berlaku pada benda homogen 3-dimensi. Jadi saya rasa tidak perlu banyak penjelasan di sini. Langsung kita bahas intinya saja. Berikut titik pusat massa untuk masing-masing bentuk dari benda homogen 3-dimensi (bangun ruang).

No.	Nama	Gambar	Titik Pusat Massa
1.	Balok (Pejal)		• Cari titik pusat massa alas. • $y_{\text{tpm}} = \frac{1}{2}t$
2.	Kubus (Pejal)		• Cari titik pusat massa alas. • $y_{\text{tpm}} = \frac{1}{2}t$
3.	Silinder (Pejal)		• Cari titik pusat massa alas. • $y_{\text{tpm}} = \frac{1}{2}t$
4.	Prisma Segitiga (Pejal)		• Cari titik pusat massa alas. • $y_{\text{tpm}} = \frac{1}{2}t$

5.	Kerucut (Pejal)		• Cari titik pusat massa alas. • $y_{\text{tpm}} = \frac{1}{4}t$
6.	Limas Segitiga (Pejal)		• Cari titik pusat massa alas. • $y_{\text{tpm}} = \frac{1}{4}t$
7.	Limas Segiempat (Pejal)		• Cari titik pusat massa alas. • $y_{\text{tpm}} = \frac{1}{4}t$
8.	Bola (Pejal)		• $y_{\text{tpm}} = x_{\text{tpm}} = z_{\text{tpm}} = r$

9.	Setengah Bola (Pejal)		• Cari titik pusat massa alas. • $y_{\text{tpm}} = \frac{3}{8}r$
10.	Kulit Setengah Bola		• Cari titik pusat massa alas. • $y_{\text{tpm}} = \frac{1}{2}r$
11.	Kulit Kerucut		• Cari titik pusat massa alas. • $y_{\text{tpm}} = \frac{1}{3}t$

5 Penurunan Persamaan titik Berat untuk Benda Homogen 2-Dimensi dan 3-Dimensi

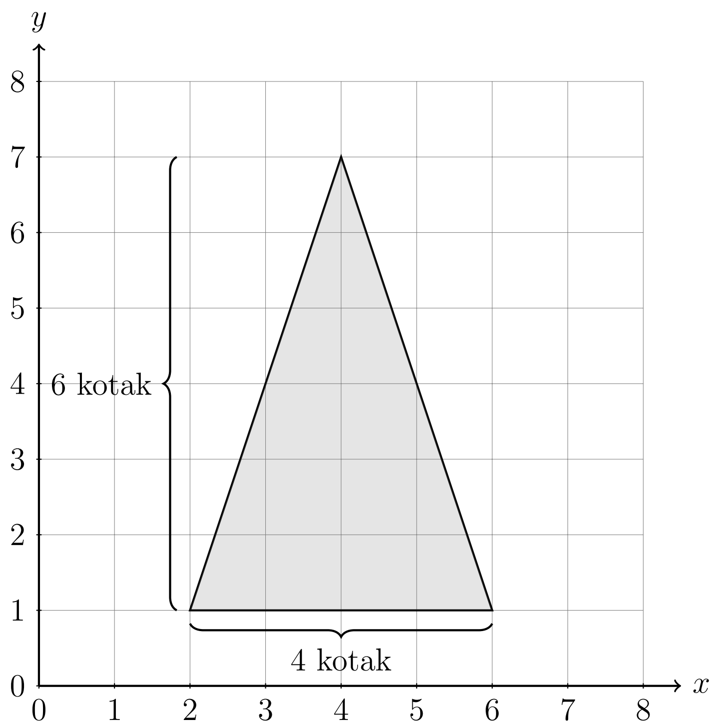
Dalam menurunkan persamaan titik berat untuk Benda Homogen 2-Dimensi dan 3-Dimensi terdapat dua metode yang dapat kita gunakan. Metode pertama adalah dengan analisis sederhana simetri benda. Metode kedua adalah analisis distribusi massa menggunakan kalkulus.

5.1 Metode Analisis Simetri

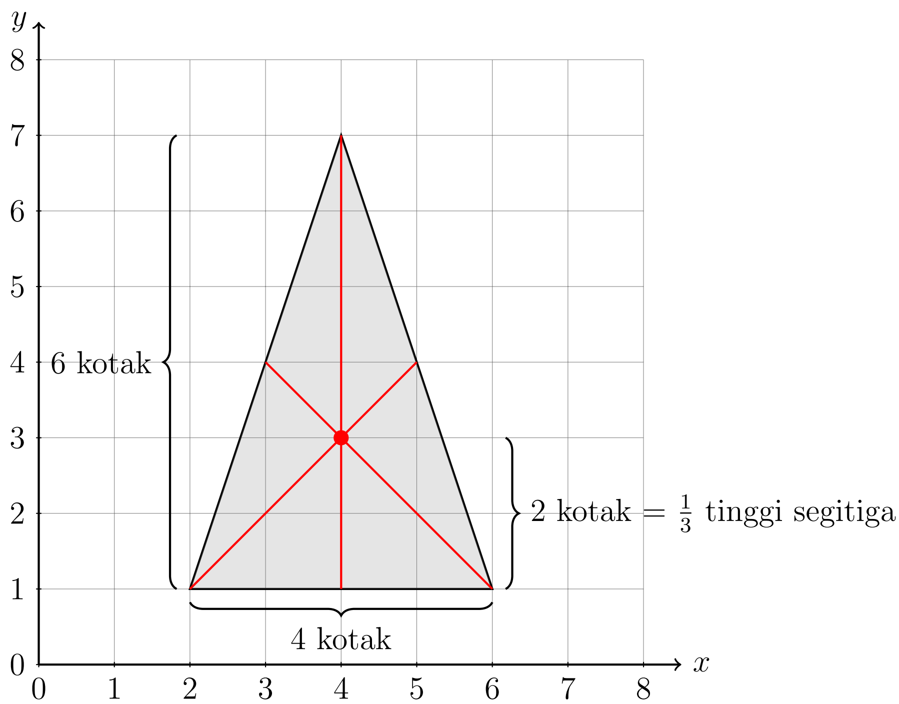
Metode simetri benda jauh lebih mudah dibanding analisis menggunakan kalkulus. Syaratnya, kita memiliki penggaris dan mampu menggambar benda homogen 2-dimensi atau 3-dimensi dengan presisi. Setelah menggambar benda homogen 2-dimensi atau 3-dimensi, kita membuat garis bantu yang ditarik dari titik tengah garis-garis penyusun benda atau dari sudut-sudut benda menuju sudut-sudut benda di posisi yang berlawanan (menggambar diagonal benda).

5.1.1 2-D: Segitiga Sama Kaki

Misalkan kita memiliki segitiga sama kaki dengan tinggi 6 kotak dan panjang alas 4 kotak seperti berikut.



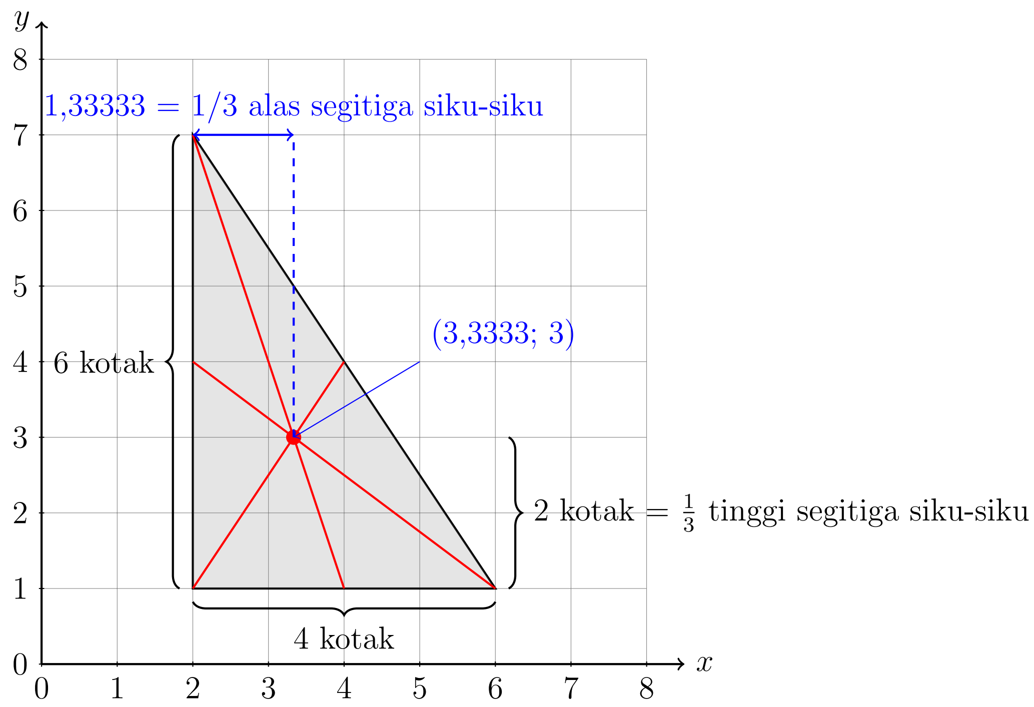
Untuk mencari titik berat benda segitiga homogen menggunakan metode simetri, kita hanya perlu menggambar diagonal segitiga dengan menarik garis dari titik tengah tiap sisi segitiga ke sudut-sudut di posisi yang berseberangan. Perhatikan garis-garis merah pada gambar berikut.



Dari garis-garis merah yang dibuat, didapat sebuah titik perpotongan (titik berwarna merah) pada koordinat (4,3). Faktanya, titik perpotongan ini adalah titik berat dari segitiga tersebut. Jika kitung, jarak dari alas segitiga menuju titik potong ini adalah 2 kotak. Di mana 2 kotak adalah 1/3 dari 6, atau 1/3-tinggi segitiga) sesuai dengan persamaan titik pusat massa yang kita tuliskan pada Gambar 4 dan 5.

Saya rasa contoh untuk segitiga sama kaki sudah lebih dari cukup untuk menjelaskan maksud dari metode simetri benda. Selanjutnya silahkan perhatikan gambar-gambar yang ada secara mandiri. Saya yakin kalian dapat memahaminya dengan mudah.

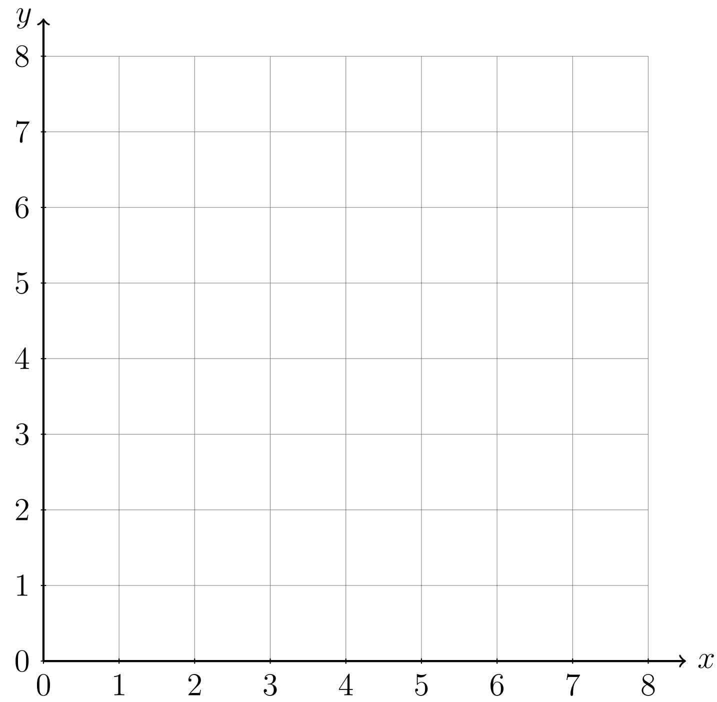
5.1.2 2-D: Segitiga Siku-Siku



Pada segitiga siku-siku:

$$x_{\text{tpm}} = \frac{1}{3}\text{alas.}$$
$$y_{\text{tpm}} = \frac{1}{3}\text{tinggi.}$$

5.1.3 2-D: Jajar Genjang



Bagaimana dengan benda 2-dimensi berbentuk setengah lingkaran dan juring lingkaran? Sayangnya, menggunakan metode simetri benda untuk bentuk-bentuk ini sedikit lebih sulit dan membutuhkan pengetahuan tentang analsis geometri dalam ilmu matematika yang belum pernah kita pelajari. Begitu juga untuk benda 2-dimensi, akan membutuhkan waktu yang lama bagi kita untuk menemukan titik pusat massa menggunakan metode simetri benda. Oleh karena itu, kita akan menggunakan metode kedua, yaitu analisis dengan kalkulus (kalkulus-integral).

A physical law must possess mathematical beauty.
Paul A.M. Dirac

5.2 Metode Analisis Distribusi Massa Benda dengan Kalkulus Integral

5.2.1 3-D: Jajar Genjang

5.2.2 3-D: Segitiga Sama Kaki