Université de Strasbourg
Licence d'informatique, semestre 4

Algèbre Linéaire Appliquée
Feuille de TP

Valeurs propres

Le calcul des valeurs propres intervient dans de nombreuses applications que ce soit pour la simulation de phénomènes physiques nécessitant la résolution d'équations différentielles ou encore dans les algorithmes de *ranking* des pages proposées par les moteurs de recherche. L'objectif est ici de les calculer.

Exercice 1 Calcul des valeurs propres par la décomposition QR

On rappelle qu'une matrice est orthogonale si ses vecteurs colonnes sont orthogonaux (produit scalaire nul) et de norme 1. L'inverse d'une matrice orthogonale Q correspond à sa transposé, ainsi on a $Q^T Q = I$.

Une manière communément utilisée pour le calcul approchée des valeurs propres d'une matrice A de taille $n \times n$ passe par la décomposition QR où $A = QR$ avec Q une matrice orthogonale $n \times n$ et R, également de taille $n \times n$, une matrice triangulaire supérieure.

En appliquant ensuite le schéma :

$A_i = Q_i R_i$

$A_{i+1} = R_i Q_i$

avec $A_0 = A$, les A_i convergent vers une matrice diagonale dont les éléments de la diagonale correspondent aux valeurs propres.

1. Cherchez (sur wikipedia par exemple) l'algorithme de décomposition QR selon la méthode de Householder puis implémentez la avec votre type de matrice réalisé lors des tps précédents.
2. Utilisez cette décomposition pour trouver les valeurs propres d'une matrice. La fonction renverra par adresse le vecteur contenant les valeurs propres et, par valeur, le nombre d'itérations. Essayez votre algorithme sur la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$
dont les valeurs propres sont 1, 2 et 3.

Exercice 2 Affichage des itérations avec gnuplot

Utilisez gnuplot pour réaliser un affichage visuel des itérations et montrer ainsi la convergence de l'algorithme vers une matrice diagonale. Pour cela vous génèrerez des matrices de tailles importantes (50×50 ou 100×100).