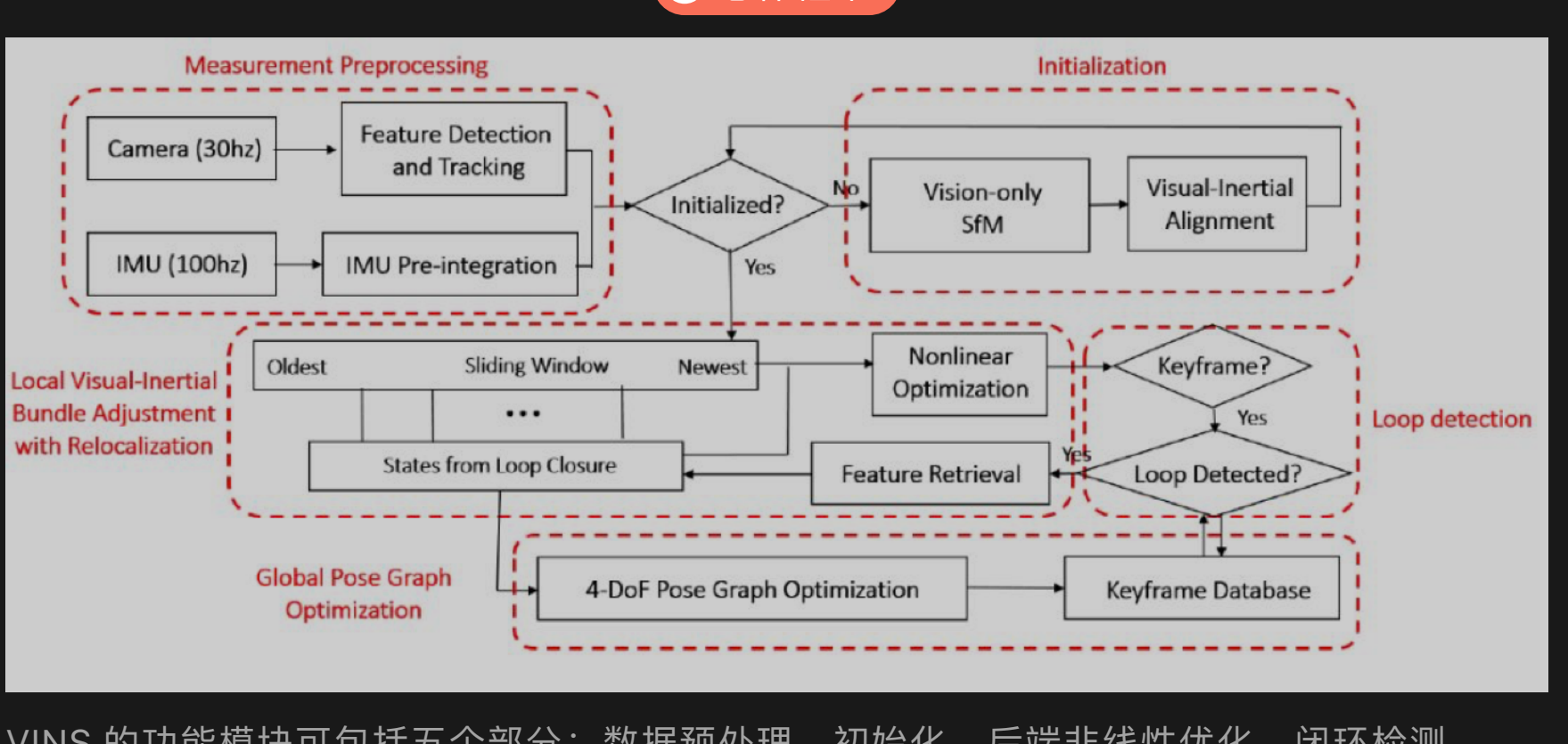
# 【泡泡读者来稿】VINS 论文推导及代码解析（一）

原创 崔华坤 泡泡机器人SLAM 2019-03-03

崔华坤，SLAM算法工程师，主要研究方向是VIO。2011年硕士毕业于北京工业大学，毕业后从事六年的三维显示研发，从最初的裸眼3D显示到现在的AR显示，期间做出一款国内尺寸最大的裸眼3D LED屏。对作者感兴趣的可以加微信:cuihuakun。

## 总体框架



VINS 的功能模块可包括五个部分：数据预处理、初始化、后端非线性优化、闭环检测及闭环优化。代码中主要开启了四个线程，分别是：1）前端图像跟踪 2）后端非线性优化（其中初始化和 IMU 预积分在这个线程中） 3）闭环检测 4）闭环优化。
各个功能模块主要有如下作用。

### 图像和 IMU 预处理

图像：提取图像 Harris 角点，利用金字塔光流跟踪相邻帧，通过 RANSAC 去除异常点，最后将跟踪到的特征点 push 到图像队列中，并通知后端进行处理。

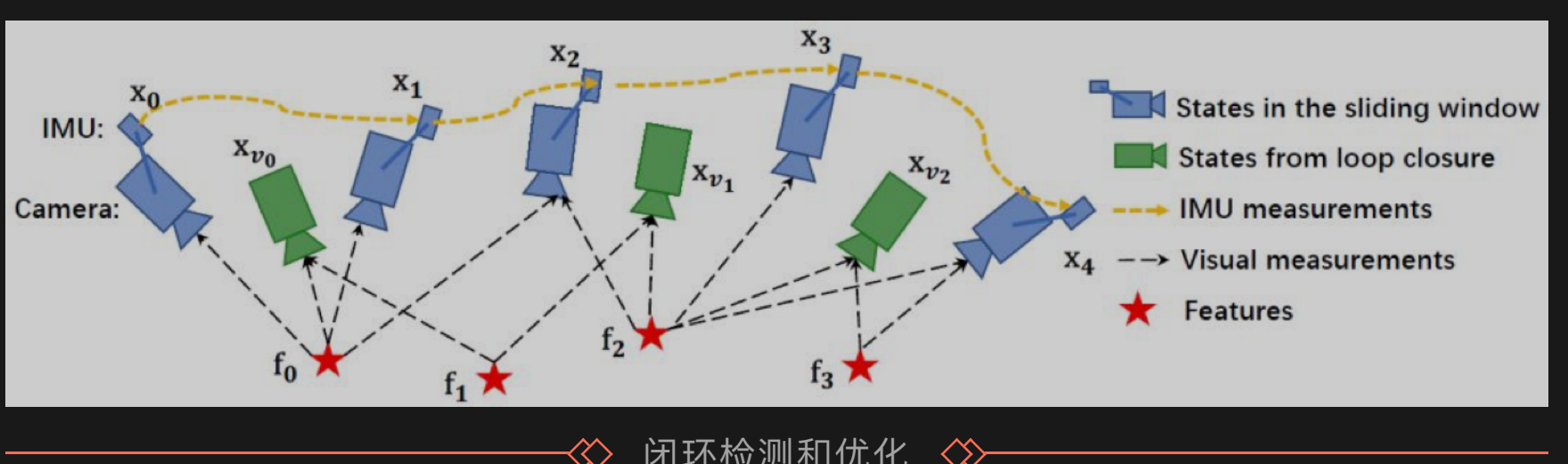
IMU：将 IMU 数据进行积分，得到当前时刻的位置、速度和旋转（PVQ），同时计算在后端优化中将用到的相邻帧的预积分增量，及预积分误差的 Jacobian 矩阵和协方差项。

### 初始化

首先，利用 SFM 进行纯视觉估计滑窗内所有帧的位姿及 3D 点逆深度，最后与 IMU 预积分进行对齐求解初始化参数。

### 后端滑窗优化

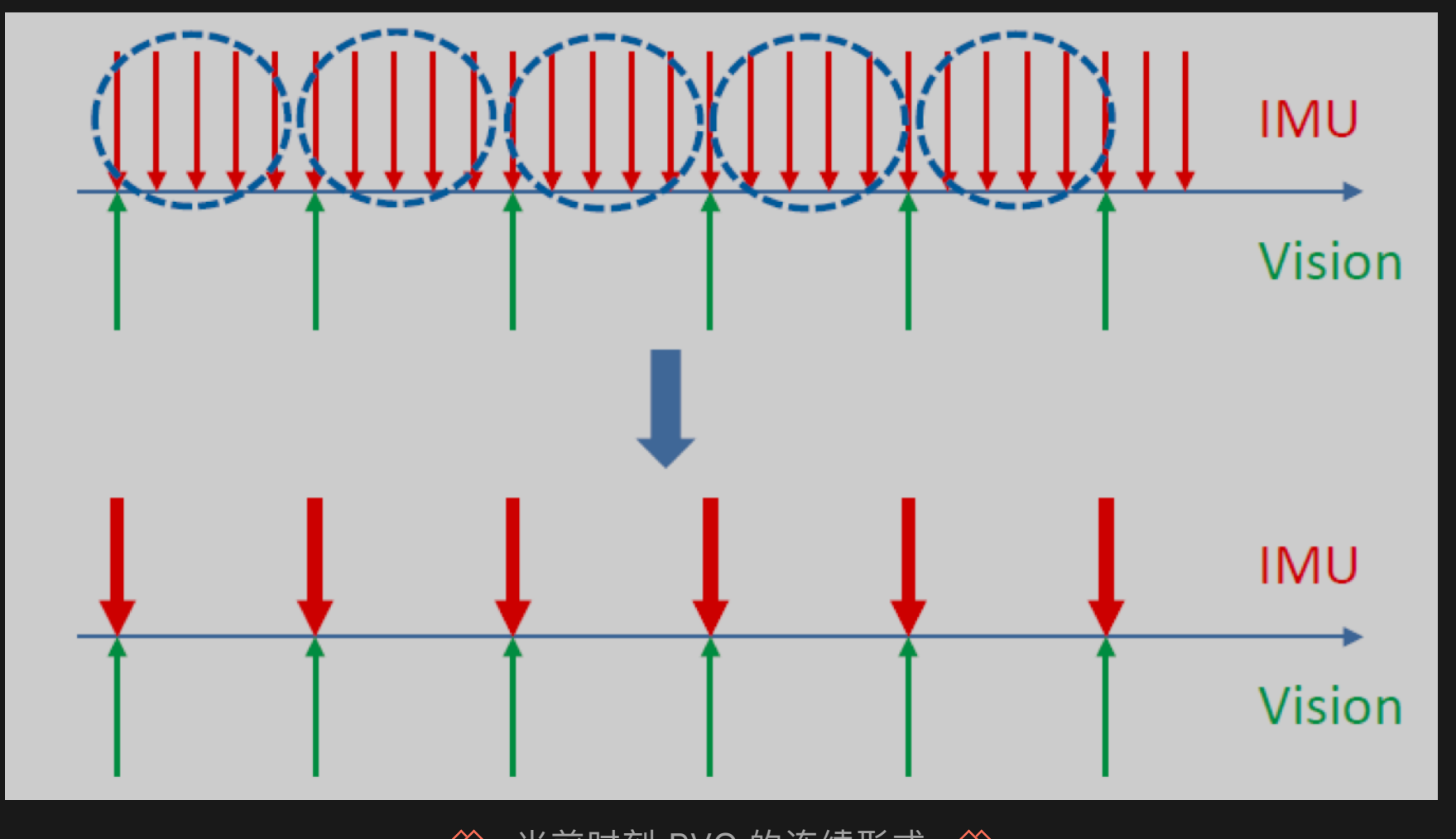
将视觉约束、 IMU 约束和闭环约束放在一个大的目标函数中进行非线性优化，求解滑窗内所有帧的 PVQ、bias 等。



### 闭环检测和优化

利用 DBoW 进行闭环检测，当检测成功后进行重定位，最后对整个相机轨迹进行闭环优化。

## IMU 预积分



### 当前时刻 PVQ 的连续形式

将第 k 帧和第 k+1 帧之间的所有 IMU 进行积分，可得第 k+1 帧的位置、速度和旋转（PVQ），作为视觉估计的初始值，这里的旋转采用的四元数。

$$
\begin{aligned}
p_{b_{k+1}}^{w} &= p_{b_k}^{w} + v_{b_k}^{w}\Delta t_k + \iint_{t\in[k,k+1]}\left[R_t^{w}(\hat{a}_t - b_{a_t}) - g^{w}\right]dt^2 \\
v_{b_{k+1}}^{w} &= v_{b_k}^{w} + \int_{t\in[k,k+1]}\left[R_t^{w}(\hat{a}_t - b_{a_t}) - g^{w}\right]dt \qquad (1) \\
q_{b_{k+1}}^{w} &= q_{b_k}^{w} \otimes \int_{t\in[k,k+1]}\frac{1}{2}\Omega(\hat{\omega}_t - b_{\omega_t})q_t^{b_k}dt
\end{aligned}
$$

其中，hat a_t，hat omega_t 和为IMU测量的加速度和角速度，是在Body自身坐标系，world坐标系是IMU所在的惯导系，上式的旋转公式推导后期会提供参考附录。

### 当前时刻PVQ的连续形式

将第k帧和第k+1帧之间的所有IMU进行积分，可得第k+1帧的位置、速度和旋转（PVQ），作为视觉估计的初始值，这里的旋转采用的四元数。

$$
\begin{aligned}
p_{b_{i+1}}^{w} &= p_{b_i}^{w} + v_{b_i}^{w}\delta t + \frac{1}{2}\bar{\hat{a}}_i\delta t^2 \\
v_{b_{i+1}}^{w} &= v_{b_i}^{w} + \bar{\hat{a}}_i\delta t \qquad (2) \\
q_{b_{i+1}}^{w} &= q_{b_i}^{w} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\bar{\hat{\omega}}_i\delta t \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
\bar{\hat{a}}_i &= \frac{1}{2}\left[q_i(\hat{a}_i - b_{a_i}) - g^{w} + q_{i+1}(\hat{a}_{i+1} - b_{a_i}) - g^{w}\right] \\
\bar{\hat{\omega}}_i &= \frac{1}{2}(\hat{\omega}_i + \hat{\omega}_{i+1}) - b_{\omega_i} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

### 两帧之间PVQ增量的连续形式

通过观察公式(1)可知，IMU的预积分需要依赖与第k帧的v和R，当我们在后端进行非线性优化时，需要迭代更新第k帧的v和R，这将导致我们需要根据每次迭代后值重新进行积分，这将非常耗时。因此，我们考虑将优化变量从第k帧到第k+1帧的IMU预积分项中分离开来，通过对公式（1）左右两侧各乘 R_w^{b_k}，可化简为：

$$
\begin{aligned}
R_w^{b_k}p_{b_{k+1}}^{w} &= R_w^{b_k}\left(p_{b_k}^{w} + v_{b_k}^{w}\Delta t_k - \frac{1}{2}g^{w}\Delta t_k^2\right) + \alpha_{b_{k+1}}^{b_k} \\
R_w^{b_k}v_{b_{k+1}}^{w} &= R_w^{b_k}(v_{b_k}^{w} - g^{w}\Delta t_k) + \beta_{b_{k+1}}^{b_k} \qquad (4) \\
q_w^{b_k} \otimes q_{b_{k+1}}^{w} &= \gamma_{b_{k+1}}^{b_k}
\end{aligned}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
\alpha_{b_{k+1}}^{b_k} &= \iint_{t\in[k,k+1]}\left[R_t^{b_k}(\hat{a}_t - b_{a_t})\right]dt^2 \\
\beta_{b_{k+1}}^{b_k} &= \int_{t\in[k,k+1]}\left[R_t^{b_k}(\hat{a}_t - b_{a_t})\right]dt \qquad (5) \\
\gamma_{b_{k+1}}^{b_k} &= \int_{t\in[k,k+1]}\frac{1}{2}\Omega(\hat{\omega}_t - b_{\omega_t})\gamma_t^{b_k}dt
\end{aligned}
$$

这样我们就得到了连续时刻的IMU预积分公式，可以发现，上式得到的IMU预积分的值只与不同时刻的 hat a_t 和 hat omega_t 相关。
这里我们需要重新讨论下公式(5)的预积分公式，以 hat alpha_{b_{k+1}}^{b_k} 为例，我们发现它是与IMU的bias相关的，而bias也是我们需要优化的变量，这将导致的问题是，当每次迭代时，我们得到一个新的bias，又得根据公式(5)重新对第k帧和第k+1帧之间的IMU预积分，非常耗时。这里假设预积分的变化量与bias是线性关系，可以写成：

$$
\begin{aligned}
\alpha_{b_{k+1}}^{b_k} &\approx \hat{\alpha}_{b_{k+1}}^{b_k} + J_{b_a}^{\alpha}\delta b_a + J_{b_\omega}^{\alpha}\delta b_\omega \\
\beta_{b_{k+1}}^{b_k} &\approx \hat{\beta}_{b_{k+1}}^{b_k} + J_{b_a}^{\beta}\delta b_a + J_{b_\omega}^{\beta}\delta b_\omega \qquad (6) \\
\gamma_{b_{k+1}}^{b_k} &\approx \hat{\gamma}_{b_{k+1}}^{b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}J_{b_\omega}^{\gamma}\delta b_\omega \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

### 两帧之间PVQ增量的欧拉法离散形式

下面给出离散时刻的IMU预积分公式，首先按照论文中采用的欧拉法，给出第i个IMU时刻与第i+1个IMU时刻的变量关系为：

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{i+1}^{b_k} &= \hat{\alpha}_i^{b_k} + \hat{\beta}_i^{b_k}\delta t + \frac{1}{2}R(\hat{\gamma}_i^{b_k})(\hat{a}_i - b_{a_i})\delta t^2 \\
\hat{\beta}_{i+1}^{b_k} &= \hat{\beta}_i^{b_k} + R(\hat{\gamma}_i^{b_k})(\hat{a}_i - b_{a_i})\delta t \qquad (7) \\
\hat{\gamma}_{i+1}^{b_k} &= \hat{\gamma}_i^{b_k} \otimes \hat{\gamma}_{i+1}^{i} = \hat{\gamma}_i^{b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(\hat{\omega}_i - b_{\omega_i})\delta t \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

下面给出代码中采用的基于中值法的IMU预积分公式，这与Estimator::processIMU()函数中的IntegrationBase::push_back()上是一致的。注意这里跟公式(2)是不一样的，这里积分出来的是前后两帧之间的IMU增量信息，而公式(2)给出的当前帧时刻的物理量信息。

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{i+1}^{b_k} &= \hat{\alpha}_i^{b_k} + \hat{\beta}_i^{b_k}\delta t + \frac{1}{2}\bar{\hat{a}}_i'\delta t^2 \\
\hat{\beta}_{i+1}^{b_k} &= \hat{\beta}_i^{b_k} + \bar{\hat{a}}_i'\delta t \qquad (8) \\
\hat{\gamma}_{i+1}^{b_k} &= \hat{\gamma}_i^{b_k} \otimes \hat{\gamma}_{i+1}^{i} = \hat{\gamma}_i^{b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\bar{\hat{\omega}}_i'\delta t \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
\bar{\hat{a}}_i' &= \frac{1}{2}\left[q_i(\hat{a}_i - b_{a_i}) + q_{i+1}(\hat{a}_{i+1} - b_{a_i})\right] \\
\bar{\hat{\omega}}_i' &= \frac{1}{2}(\hat{\omega}_i + \hat{\omega}_{i+1}) - b_{\omega_i} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

### 连续形式下PVQ增量的误差、协方差及Jacobian

IMU在每一个时刻积分出来的值是有误差的，下面我们对误差进行分析。首先我们直接给出在t时刻误差项的导数为：

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \delta\dot{\alpha}_t^{b_k} \\ \delta\dot{\beta}_t^{b_k} \\ \delta\dot{\theta}_t^{b_k} \\ \delta\dot{b}_{a_t} \\ \delta\dot{b}_{w_t} \end{bmatrix}
&= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_t^{b_k}(\hat{a}_t - b_{a_t})^{\wedge} & -R_t^{b_k} & 0 \\ 0 & 0 & -(\hat{\omega}_t - b_{\omega_t})^{\wedge} & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \delta\alpha_t^{b_k} \\ \delta\beta_t^{b_k} \\ \delta\theta_t^{b_k} \\ \delta b_{a_t} \\ \delta b_{w_t} \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_t^{b_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} n_a \\ n_w \\ n_{b_a} \\ n_{b_w} \end{bmatrix} \\
&= F_t\delta z_t^{b_k} + G_t n_t \qquad (10)
\end{aligned}
$$

其中，

$$F_t{}^{15\times15},\ G_t{}^{15\times12},\ \delta z_t^{b_k}{}^{15\times1},\ n_t{}^{12\times1}$$

上式推导可参考附录。下面我们讨论它的作用，将其可以简写为：

$$\delta\dot{z}_t^{b_k} = F_t\delta z_t^{b_k} + G_t n_t$$

根据导数定义可知：

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{z}_t^{b_k} &= \lim_{\delta t\to0}\frac{\delta z_{t+\delta t}^{b_k} - \delta z_t^{b_k}}{\delta t} \\
\delta z_{t+\delta t}^{b_k} &= \delta z_t^{b_k} + \delta\dot{z}_t^{b_k}\delta t = (\mathrm{I} + F_t\delta t)\delta z_t^{b_k} + (G_t\delta t)n_t \\
&= F\delta z_t^{b_k} + Vn_t \qquad (11)
\end{aligned}
$$

为了简化下一节中对离散形式的分析，上式中我们令

$$F = \mathrm{I} + F_t\delta t,\ V = G_t\delta t。$$

这里我们对公式(11)的IMU误差运动方程再说明，将上式和EKF对比可知，上式恰好给出了如EKF一般对非线性系统线性化的过程，这里的意义是表示下一个时刻的IMU测量误差与上一个时刻的成线性关系，这样我们根据当前时刻的值，可以预测出下一个时刻的均值和协方差，而公式(11)给出的是均值预测，协方差预测公式如下：

$$P_{t+\delta t}^{b_k} = (\mathrm{I} + F_t\delta t)P_t^{b_k}(\mathrm{I} + F_t\delta t)^{T} + (G_t\delta t)Q(G_t\delta t)^{T} \qquad (12)$$

上式给出了协方差的迭代公式，初始值 P_{b_k}^{b_k}=0 。其中，Q为表示噪声项的对角协方差矩阵：

$$Q^{12\times12} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{b_a}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{b_w}^2 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

另外根据(11)式可获得误差项的Jacobian的迭代公式：

$$J_{t+\delta t} = (\mathrm{I} + F_t\delta t)J_t \qquad (14)$$

### 离散形式的PVQ增量误差分析

我们首先直接给出PVQ增量误差在离散形式下的矩阵形式，为了与代码一致，我们修改下变量顺序，这和代码中midPointIntegration()函数是一致的。（但不知为何计算的V中与前四个噪声项相关的差个负号？）

$$
\begin{bmatrix} \delta\alpha_{k+1} \\ \delta\theta_{k+1} \\ \delta\beta_{k+1} \\ \delta b_{a_{k+1}} \\ \delta b_{w_{k+1}} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} I & f_{01} & \delta t & f_{03} & f_{04} \\ 0 & f_{11} & 0 & 0 & -\delta t \\ 0 & f_{21} & I & f_{23} & f_{24} \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \delta\alpha_k \\ \delta\theta_k \\ \delta\beta_k \\ \delta b_{a_k} \\ \delta b_{w_k} \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} v_{00} & v_{01} & v_{02} & v_{03} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\delta t}{2} & 0 & \frac{-\delta t}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{R_k\delta t}{2} & v_{21} & -\frac{R_{k+1}\delta t}{2} & v_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta t \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} n_{a_k} \\ n_{w_k} \\ n_{a_{k+1}} \\ n_{w_{k+1}} \\ n_{b_a} \\ n_{b_w} \end{bmatrix} \qquad (15)
$$

其中，推导可参考附录

$$
\begin{aligned}
f_{01} &= \frac{\delta t}{2}f_{21} = -\frac{1}{4}R_k(\hat{a}_k - b_{a_k})^{\wedge}\delta t^2 - \frac{1}{4}R_{k+1}(\hat{a}_{k+1} - b_{a_k})^{\wedge}\left[I - \left(\frac{\hat{\omega}_k + \hat{\omega}_{k+1}}{2} - b_{\omega_k}\right)^{\wedge}\delta t\right]\delta t^2 \\
f_{03} &= -\frac{1}{4}(R_k + R_{k+1})\delta t^2 \\
f_{04} &= \frac{\delta t}{2}f_{24} = \frac{1}{4}R_{k+1}(\hat{a}_{k+1} - b_{a_k})^{\wedge}\delta t^3 \\
f_{11} &= I - \left(\frac{\hat{\omega}_k + \hat{\omega}_{k+1}}{2} - b_{\omega_k}\right)^{\wedge}\delta t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{21} &= -\frac{1}{2}R_k(\hat{a}_k - b_{a_k})^{\wedge}\delta t - \frac{1}{2}R_{k+1}(\hat{a}_{k+1} - b_{a_k})^{\wedge}\left[I - \left(\frac{\hat{\omega}_k + \hat{\omega}_{k+1}}{2} - b_{\omega_k}\right)^{\wedge}\delta t\right]\delta t \\
f_{23} &= -\frac{1}{2}(R_k + R_{k+1})\delta t \\
f_{24} &= \frac{1}{2}R_{k+1}(\hat{a}_{k+1} - b_{a_k})^{\wedge}\delta t^2 \\
v_{00} &= -\frac{1}{4}R_k\delta t^2 \\
v_{01} &= v_{03} = \frac{\delta t}{2}v_{21} = \frac{1}{4}R_{k+1}(\hat{a}_{k+1} - b_{a_k})^{\wedge}\delta t^2\frac{\delta t}{2} \\
v_{02} &= -\frac{1}{4}R_{k+1}\delta t^2 \\
v_{21} &= v_{23} = \frac{1}{4}R_{k+1}(\hat{a}_{k+1} - b_{a_k})^{\wedge}\delta t^2
\end{aligned}
$$

### 离散形式PVQ增量误差的Jacobian和协方差

将公式(15)简写为：

$$\delta z_{k+1}{}^{15\times1} = F^{15\times15}\delta z_k{}^{15\times1} + V^{15\times18}Q^{18\times1}$$

则Jacobian的迭代公式为：

$$J_{k+1}{}^{15\times15} = FJ_k \qquad (16)$$

其中，Jacobian的初始值为 J_k = I 。这里计算出来的只是为了给后面提供对bias的Jacobian。
协方差的迭代公式为：

$$P_{k+1}{}^{15\times15} = FP_kF^{T} + VQV^{T} \qquad (17)$$

其中，初始值 P_k=0 。Q为表示噪声项的对角协方差矩阵：

$$Q^{18\times18} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{b_a}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{b_w}^2 \end{bmatrix} \qquad (18)$$

未完待续～