แบบฝึกหัดบทที่ 3

3. ชาวไร่คนหนึ่งมีที่ 10 ไร่ เพื่อการเพาะปลูกอ้อยและข้าวโพด เขาต้องทำการเพาะปลูกอย่างน้อย 7 ไร่ แต่เขามีเงินทุนที่จะใช้จ่ายอยู่ เพียง 1,200 บาท และการปลูกอ้อยแต่ละไร่ต้องใช้เงิน 200 บาท ส่วนการปลูกข้าวโพดแต่ละไร่ต้องใช้เงิน 100 บาท นอกจากนี้ชาวไร่ยังต้องทำการเพาะปลูกให้เสร็จสิ้นภายใน 12 ชม.

โดยต้องใช้เวลา 1 ชม. ในการปลูกอ้อยแต่ละไร่ และใช้เวลา 2 ชม. ในการปลูกข้าวโพดแต่ละไร่ ถ้าอ้อยมีกำไร 500 บาทต่อไร่ และข้าวโพดมีกำไร 300 บาท ต่อไร่

จากข้อมูลข้างต้น จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. บริษัทฯ จะต้องปลูกอ้อยและข้าวโพดอย่างละเท่าใด จึงจะได้รับกำไรสูงสุด
2. บริษัทฯ จะต้องวางแผนการเพาะปลูกพืชแต่ละชนิดอย่างไร

การสร้างตัวแบบเชิงเส้นตรง ประกอบด้วย 3 ขั้นตอน

1) กำหนดตัวแปร และการสร้างสมการเป้าหมาย

กำหนดตัวแปร:

- จำนวนไร่ที่ปลูกอ้อย = X
- จำนวนไร่ที่ปลูกข้าวโพด = Y

สร้างสมการเป้าหมาย

$$\text{Max } Z = 500X + 300Y \quad (\ ,\ )$$

* ค่าสูงสุด (X, Y)

2) สร้างสมการข้อจำกัด

2.1) ที่ดินทั้งหมด	$1X + 1Y$	$\leq$	10	(10, 10)
2.2) ต้องเพาะปลูก	$1X + 1Y$	$\geq$	7	(7, 7)
2.3) เงินทุน	$200X + 100Y$	$\leq$	1,200	(6, 12)
2.4) เวลาเพาะปลูก	$1X + 2Y$	$\leq$	12	(12, 6)

3) การเขียนเงื่อนไขที่ตัวแปร

$X, Y \geq 0$ เสมอ.

"หาจุดตัดของสมการ"

$$Max\ Z = 500X + 300Y$$

$$500X + 300Y = 500 \times 300$$
$$500X + 300Y = 150{,}000$$

"หาจุดตัด" (หาค่า X แทน Y = 0 , หาค่า Y แทน X = 0)

หาค่า X	หาค่า Y
$500X + 300(0) = 150{,}000$	$500(0) + 300Y = 150{,}000$
$500X + 0 = 150{,}000$	$0 + 300Y = 150{,}000$
$X = \frac{150{,}000}{500}$	$Y = \frac{150{,}000}{300}$
$X = 300$ #	$Y = 500$ #

"หาจุดตัดของสมการข้อจำกัด"

1) ที่ดินทั้งหมด $1X + 1Y = 10$ → สมการ

หาค่า X	หาค่า Y
$X + (0) = 10$	$(0) + Y = 10$
$X = 10$ #	$Y = 10$ #

2) ต้องเพาะปลูก $1X + 1Y = 7$ → สมการ

หาค่า X	หาค่า Y
$X + (0) = 7$	$(0) + Y = 7$
$X = 7$ #	$Y = 7$ #

3) เงินทุน $200X + 100Y = 1{,}200$ → สมการ

หาค่า X	หาค่า Y
$200X + 100(0) = 1{,}200$	$200(0) + 100Y = 1{,}200$
$X = \frac{1200}{200}$	$Y = \frac{1200}{100}$
$X = 6$ #	$Y = 12$ #

4) เวลาเพาะปลูก $1X + 2Y = 12$ → สมการ

หาค่า X	หาค่า Y
$1X + 2(0) = 12$	$1(0) + 2Y = 12$
$X = \frac{12}{1}$	$Y = \frac{12}{2}$
$X = 12$ #	$Y = 6$ #

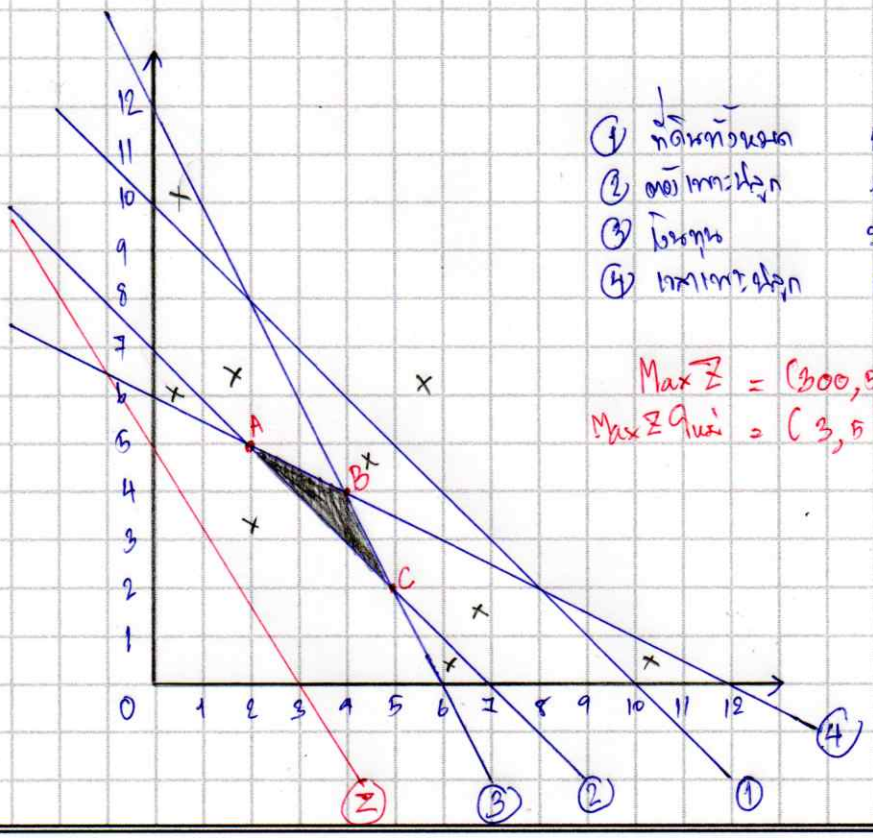
ปริมาณส่วน สมการเป้าหมาย (Scaling) คำนวณกราฟ

เป้าหมาย Max Z คือ (300,500) มีพื้นที่ใหญ่กว่าสเกล หรือจุดตัดของสมการ ซึ่งจำกัดที่อยู่ในช่วง (0-12) โดยการใช้เทคนิค "การทอนสัดส่วน" เพื่อสร้างเส้นกำไรที่เท่ากัน โดยการทอนสัดส่วนทั้ง แกน X และ แกน Y

$X = \frac{300}{100}$ $Y = \frac{500}{100}$

$X = 3$ # $Y = 5$ #

จุดตัดสมการเป้าหมายใหม่ที่ใช้กราฟ = (3,5)



① ที่ดินทั้งหมด	$1X + 1Y$	$\leq$	10	(10,10)
② ต้องเพาะปลูก	$1X + 1Y$	$\geq$	7	(7,7)
③ โรงทุน	$200X + 100Y$	$\leq$	1200	(6,12)
④ เวลาเพาะปลูก	$1X + 2Y$	$\leq$	12	(12,6)

Max Z = (300,500)

Max Z ใหม่ = (3,5)

จากการพิจารณากราฟ พื้นที่ A, B และ C เป็นพื้นที่ที่ดีที่สุด
โดยมีจุด B เป็นจุดที่ดีที่สุด.
เกิดจากเส้นที่ 3 (เงินทุน) และเส้นที่ 4 (กลาเทาะปลูก) ตัดกัน.

เงินทุน	$200x + 100y \leq 1200$
กลาเทาะปลูก	$1x + 2y \leq 12$

หาค่า x, y (วิธี Matrix)

$$\begin{bmatrix} 200 & 100 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1200 \\ 12 \end{bmatrix}$$

หาค่า det จาก Matrix ดังกล่าว

$$\begin{aligned} det &= (200 \times 2) - (100 \times 1) \\ &= 400 - 100 \\ &= 300 \end{aligned}$$

หาค่า x "สร้าง Matrix X"

$$X \begin{bmatrix} 1200 & 100 \\ 12 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{(1200 \times 2) - (100 \times 12)}{300} \\ &= \frac{2400 - 1200}{300} \\ &= \frac{1200}{300} \\ x &= 4 \text{ ไร่} \end{aligned}$$

หาค่า y "สร้าง Matrix Y"

$$Y \begin{bmatrix} 200 & 1200 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{(200 \times 12) - (1200 \times 1)}{300} \\ &= \frac{2400 - 1200}{300} \\ &= \frac{1200}{300} \\ y &= 4 \text{ ไร่} \end{aligned}$$

ตอบคำถาม

(1) บริษัทฯ จะต้องปลูกอ้อยและทำไร่ชาอย่างละเท่าไร จึงจะได้ผลกำไรสูงสุด

Ans: จะต้องปลูก.

- อ้อย (x) จำนวน 4 ไร่
- ชาไทย (y) จำนวน 4 ไร่

จึงจะได้กำไรสูงสุด.

$$\text{Max } Z = 500x + 300y$$
$$= 500(4) + 300(4)$$
$$= 2000 + 1200$$

กำไรสูงสุด $= 3,200$ บาท

(2) บริษัทฯ จะต้องวางแผนการเพาะปลูกพืชแต่ละชนิดอย่างไร

Ans: นำ (4, 4) มาแทนค่าในอสมการทุกข้อ.

1) ที่ดินทั้งหมด $1x + 1y \leq 10$
แทนค่า $1(4) + 1(4) \leq 10$
ใช้จริง $4 + 4 = 8 \leq 10$ ✓ 8 ไร่
* ใช้ที่ดินไป 8 ไร่ ไม่เกิน 10 ไร่ที่กำหนด

2) ต้องเพาะปลูกอย่างน้อย $1x + 1y \geq 7$
แทนค่า $1(4) + 1(4) \geq 7$
ผลิตจริง $4 + 4 = 8 \geq 7$ ✓ 8 ไร่
* ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำ 7 ไร่

3) เงินทุน $200x + 100y \leq 1,200$
แทนค่า $200(4) + 100(4) \leq 1,200$
ใช้จริง $800 + 400 = 1,200 \leq 1,200$ ✓ 1,200 บาท
* ใช้ทุนเต็มประสิทธิภาพพอดี

4) เวลาเพาะปลูก. $1x + 2y \leq 12$
แทนค่า $1(4) + 2(4) \leq 12$
ใช้จริง $4 + 8 = 12 \leq 12$ ✓ 12 ชั่วโมง
* ใช้เวลาเต็มประสิทธิภาพพอดี