ROTAÇÃO | 11

No judô, um lutador menor e mais fraco que souber física pode derrotar um lutador maior e mais forte que não tenha este conhecimento. Este fato é demonstrado pela técnica básica de "deslocamento em torno do quadril", em que um lutador gira seu oponente em torno do seu quadril e — se for bem-sucedido — atira-o ao solo. Sem o uso adequado da física, essa técnica exige força considerável, podendo facilmente falhar. Mas qual a vantagem oferecida pela física?

11-1 O Movimento de uma Patinadora

O gracioso movimento de uma patinadora pode ser usado para ilustrar, de uma forma esteticamente agradável, dois tipos de movimento simples, isto é, sem composição. A Fig. 11-1*a* mostra uma patinadora deslizando retilineamente sobre o gelo com velocidade constante. Seu movimento é uma **translação** pura. A Fig. 11-1*b* mostra-a girando em torno de seu eixo vertical, com velocidade angular constante, efetuando uma **rotação** pura. É este segundo tipo que estudaremos neste capítulo.

Até agora, discutimos exclusivamente o movimento ao longo de uma linha reta, que é um movimento de translação. O movimento de rodas, de engrenagens, de motores, dos ponteiros de um relógio, das turbinas de um jato e das hélices de um helicóptero são movimentos de rotação. Este é o movimento de *spin* (o movimento em torno do próprio eixo) dos átomos, dos furacões, dos planetas, das estrelas e das galáxias. É também o movimento dos acrobatas, dos praticantes de salto ornamental e dos astronautas em órbita. Estamos cercados de exemplos de rotação.

11-2 As Variáveis da Rotação

Vamos estudar, neste capítulo, a rotação dos corpos *rígidos* em torno de um eixo *fixo*. A primeira restrição é de que nos limitaremos a movimentos de rotação que não incluam corpos como o Sol, porque este — uma bola de gás — não é um corpo rígido. A segunda restrição elimina casos como o de uma bola de boliche *rolando* sobre a pista porque, neste caso, há um rolamento, isto é, uma rotação em torno de um eixo *móvel*.

A Fig. 11-2 mostra um corpo rígido de forma arbitrária num movimento simples de *rotação em torno de um eixo fixo*, chamado de **eixo de rotação**. Cada ponto do corpo se move sobre um círculo cujo centro fica no eixo de rotação, e cada ponto tem o mesmo deslocamento angular durante

(a)

(b)

Fig. 11-1 A patinadora Kristi Yamaguchi num movimento de translação pura, em (*a*), e de rotação pura, em (*b*). No primeiro caso, o movimento é ao longo de uma direção fixa. No segundo, é em torno de um eixo fixo.

um determinado intervalo de tempo. Este caso é diferente do de um corpo num *movimento de translação pura em uma determinada direção*, quando cada ponto do corpo se move em linha reta e todos se deslocam da mesma *distância linear*, durante um determinado intervalo de tempo. (A comparação entre movimento angular e movimento linear será uma constante nas seções seguintes.)

Agora, vamos estudar — individualmente — os equivalentes angulares de posição, deslocamento, velocidade e aceleração lineares.

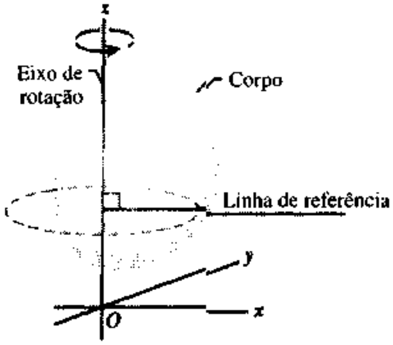


Fig. 11-2 Um corpo rígido, de forma arbitrária, num movimento puro de rotação em torno do eixo *z* de um sistema de coordenadas. A posição da *linha de referência* em relação ao corpo é arbitrária, mas é perpendicular ao eixo de rotação e gira solidária com o corpo.

Posição Angular

A Fig. 11-2 mostra também uma linha de referência, fixada no corpo, perpendicular ao eixo de rotação e girando junto com o corpo. Podemos descrever o movimento de rotação do corpo estabelecendo a **posição angular** dessa linha, isto é, o ângulo da linha em relação ao eixo fixo. Na Fig. 11-3, a posição angular θ é medida em relação ao eixo x, e θ é dado por

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(medido em radianos).} \qquad (11\text{-}1)$$

Aqui, s é o comprimento do arco de uma seção circular qualquer entre o eixo x e a linha de referência, e r é o raio dessa seção circular.

Um ângulo definido dessa forma é medido em **radianos** (rad) ao invés de revoluções (rev) ou graus. O radiano, sendo uma razão entre duas distâncias, é um número adimensional. Como a circunferência de um círculo de raio r é $2\pi r$, um círculo completo tem 2π radianos:

$$1 \text{ rev} = 360° = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad} \qquad (11\text{-}2)$$

ou

$$1 \text{ rad} = 57{,}3° = 0{,}159 \text{ rev}. \qquad (11\text{-}3)$$

O ângulo θ *não* assume o valor zero a cada volta completa da linha de referência em torno do eixo de rotação. Se a linha de referência completar duas revoluções, então $\theta = 4\pi$ rad.

Para um movimento puro de translação de um corpo ao longo do eixo x, saberemos tudo sobre o movimento se conhecermos $x(t)$, que dá sua posição em função do tempo. Da mesma forma, para um movimento puro de rotação de um corpo, podemos saber tudo a respeito desse movimento se conhecermos a posição angular $\theta(t)$ da linha de referência do corpo em função do tempo.

Deslocamento Angular

Se o corpo da Fig. 11-3 girar em torno do eixo de rotação, como na Fig. 11-4, variando a posição angular da linha de referência de θ_1 a θ_2, dizemos que o corpo sofreu um **deslocamento angular** $\Delta\theta$ dado por

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \qquad (11\text{-}4)$$

Essa definição do deslocamento angular é válida não somente para o corpo rígido como um todo, mas para *todas as suas partículas*.

Se um corpo está em movimento de translação ao longo de um eixo x, seu deslocamento Δx pode ser positivo ou negativo, dependendo do sentido do movimento ser na direção positiva ou negativa do eixo. Da mesma forma, o deslocamento angular $\Delta\theta$ de um corpo em rotação pode ser positivo ou negativo, dependendo do corpo estar girando no sentido de θ crescente (anti-horário, como nas Figs. 11-3 e 11-4) ou de θ decrescente (sentido horário).

Velocidade Angular

Suponha (veja Fig. 11-4) que o corpo em rotação está na posição angular θ_1 no instante t_1 e na posição angular θ_2 no instante t_2. Definimos a **velocidade angular média** do corpo por

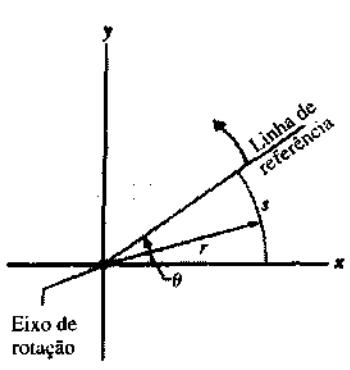


Fig. 11-3 Vista de cima da seção transversal do corpo da Fig. 11-2. O plano da seção transversal é ortogonal ao eixo de rotação. Nessa posição, a linha de referência faz um ângulo θ com o eixo x.

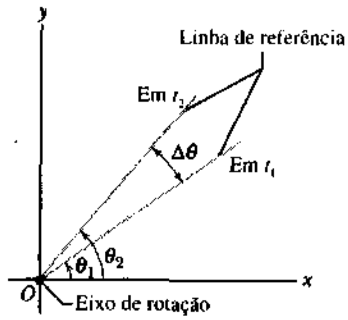


Fig. 11-4 A linha de referência do corpo das Figs. 11-2 e 11-3 está na posição angular θ_1, no instante t_1, e na posição θ_2, no instante t_2 seguinte. A grandeza $\Delta\theta (= \theta_2 - \theta_1)$ é o deslocamento angular no intervalo $\Delta t (= t_2 - t_1)$. O corpo propriamente dito não está mostrado.

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \qquad (11\text{-}5)$$

onde $\Delta\theta$ é o deslocamento angular que ocorre no intervalo de tempo Δt. (O símbolo ω é a letra grega ômega.)

A **velocidade angular (instantânea)** ω é definida como o li-mite da razão na Eq. 11-5, quando Δt tende para zero. Então,

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \qquad (11\text{-}6)$$

Se conhecermos $\theta(t)$, poderemos determinar a velocidade angular ω por derivação. Essa definição de velocidade angular é válida não somente para a rotação do corpo rígido por inteiro como também *para todas as partículas deste corpo*. Geralmente, a unidade de velocidade angular é radianos por segundo (rad/s) ou revoluções por segundo (rev/s).

Se uma partícula estiver em movimento de translação ao longo de um eixo x, sua velocidade linear v poderá ser positiva ou negativa, conforme a partícula esteja se movendo no sentido crescente ou decrescente de x, respectivamente. Igualmente, a velocidade angular ω de um corpo rígido em rotação poderá ser positiva ou negativa, dependendo do sentido de rotação ser na direção de θ crescente (anti-horário) ou de θ decrescente (horário). O módulo da velocidade angular é chamado de **velocidade angular escalar**, também é representada por ω.

Aceleração Angular

Se a velocidade angular de um corpo em rotação não for constante, então o corpo terá uma aceleração angular. Sejam ω_2 e ω_1 as velocidades angulares nos instantes t_2 e t_1, respectivamente. A **aceleração angular média** do corpo em rotação é definida por

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \qquad (11\text{-}7)$$

onde $\Delta\omega$ é a variação da velocidade angular no intervalo de tempo Δt. A **aceleração angular (instantânea)** α é definida como o limite de α quando Δt tende para zero. Então,

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (11\text{-}8)$$

Essa definição de aceleração angular se aplica não apenas à rotação de um corpo rígido como um todo, mas também a *cada partícula deste corpo*. Em geral, a unidade de aceleração angular é radiano por segundo ao quadrado (rad/s^2) ou revoluções por segundo ao quadrado (rev/s^2).

EXEMPLO 11-1 A posição angular da linha de referência de uma roda girando é dada por

$$\theta = t^3 - 27t + 4,$$

onde t está em segundos e θ em radianos.

a. Calcule $\omega(t)$ e $\alpha(t)$.

Solução Para obtermos $\omega(t)$, derivamos $\theta(t)$ em relação a t:

$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt} = 3t^2 - 27. \qquad \text{(Resposta)}$$

Para obtermos $\alpha(t)$, derivamos $\omega(t)$ em relação a t:

$$\alpha = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d(3t^2 - 27)}{dt} = 6t. \qquad \text{(Resposta)}$$

b. Teremos, em algum momento, $\omega = 0$?

Solução Fazendo $\omega(t) = 0$, temos

$$0 = 3t^2 - 27,$$

resolvendo, encontramos

$$t = \pm 3 \text{ s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Isto é, a velocidade angular é nula nos instantes 3 s antes e 3 s depois da leitura zero do nosso relógio.

c. Descreva o movimento da roda para $t \geq 0$.

Solução Vamos examinar as expressões para $\theta(t)$, $\omega(t)$ e $\alpha(t)$.

Em $t = 0$ a linha de referência da roda está em $\theta = 4$ rad e a roda está girando com uma velocidade angular de -27 rad/s (isto é, a velocidade angular *no sentido horário* é de 27 rad/s, em módulo) e uma aceleração angular nula.

Para $0 < t < 3$ s, a roda continua a girar no sentido horário, mas o módulo da velocidade angular diminui, porque agora a aceleração angular é positiva (sentido anti-horário). (Verifique $\omega(t)$ e $\alpha(t)$ para, por exemplo, $t = 2$ s.)

Em $t = 3$ s, a roda pára momentaneamente ($\omega = 0$), tendo girado, no sentido horário, do maior ângulo possível (a linha de referência agora está em $\theta = -50$ rad).

Para $t > 3$ s, a aceleração angular da roda continua a aumentar. Sua velocidade angular, que agora está no sentido anti-horário, aumenta rapidamente porque os sinais de ω e α são idênticos.

EXEMPLO 11-2 Um pião gira no solo com uma aceleração angular

$$\alpha = 5t^3 - 4t,$$

onde os coeficientes estão em unidades compatíveis com radianos e segundos. Em $t = 0$, o pião tem uma velocidade angular de 5 rad/s e a sua linha de referência está na posição angular $\theta = 2$ rad.

a. Determine uma expressão para a velocidade angular $\omega(t)$ do pião.

Solução Da Eq. 11-8 temos

$$d\omega = \alpha\, dt,$$

integrando, obtemos

$$\omega = \int \alpha\, dt = \int (5t^3 - 4t)\, dt$$
$$= \tfrac{5}{4}t^4 - \tfrac{4}{2}t^2 + C.$$

Para calcular a constante de integração C, devemos observar que $\omega = 5$ rad/s em $t = 0$. Substituindo estes valores na expressão obtida para ω, temos

$$5 \text{ rad/s} = 0 - 0 + C,$$

logo, $C = 5$ rad/s. Então,

$$\omega = \tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5. \qquad \text{(Resposta)}$$

b. Determine uma expressão para a posição angular $\theta(t)$ do pião.

Solução Da Eq. 11-6 temos

$$d\theta = \omega\, dt,$$

integrando, temos

$$\theta = \int \omega\, dt = \int (\tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5)\, dt,$$
$$= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + C'$$
$$= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + 2, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde C' é determinada observando que $\theta = 2$ rad em $t = 0$.

11-3 Grandezas Angulares como Vetores: Uma Digressão

Podemos descrever a posição, a velocidade e a aceleração de uma partícula por meio de vetores. Se, todavia, a partícula estiver em uma trajetória retilínea, na verdade poderemos dispensar o tratamento vetorial. Como a partícula tem apenas dois sentidos possíveis, podemos indicá-los pelos sinais mais e menos.

Da mesma forma, um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo pode fazê-lo apenas no sentido horário ou anti-horário, e novamente podemos associá-los aos sinais mais e menos. A pergunta que se faz é: "Podemos tratar o deslocamento angular, a velocidade e a aceleração de um corpo em rotação como vetores?" A resposta (com uma precaução que esclareceremos a seguir) é: "Sim."

Vamos considerar a velocidade angular. A Fig. 11-5*a* mostra um disco girando sobre um eixo central fixo. O disco

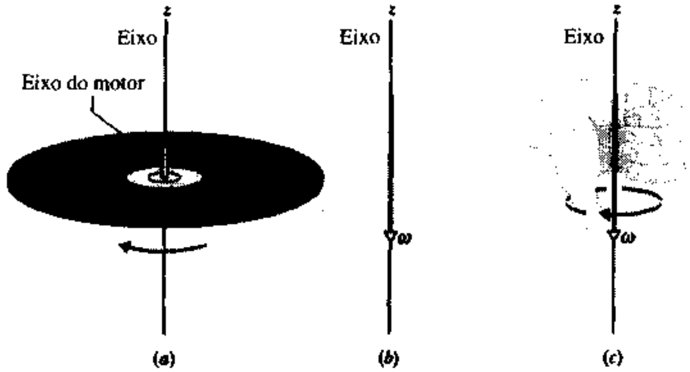


Fig. 11-5 (*a*) Um LP girando em relação a um eixo vertical, coincidente com o eixo do motor. (*b*) A velocidade angular de rotação pode ser representada pelo vetor ω, que está sobre o eixo, apontando para baixo, conforme mostrado. (*c*) O sentido do vetor velocidade angular foi estabelecido para baixo pela regra da mão direita. Os dedos da mão direita envolvem o LP no sentido do movimento deste, e o polegar estendido indica o sentido de ω.

gira a uma taxa de rotação constante ω (= 33 1/3 rev/min) e com um sentido de rotação fixo (no caso, sentido horário). Por convenção, vamos representar a sua velocidade angular como um vetor apontando ao longo do eixo de rotação, como na Fig. 11-5*b*. Escolhemos uma escala apropriada para representar esse vetor, por exemplo, 1 cm igual a 10 rev/min.

Estabelecemos um sentido para o vetor ω pela **regra da mão direita**, como na Fig. 11-5*c*. Posicionamos nossa mão direita aberta com os quatro dedos maiores apontando *no mesmo sentido da rotação do disco*. Então, nosso polegar indicará o sentido do vetor velocidade angular. Se o disco estivesse girando no sentido contrário, o vetor velocidade angular, pela regra da mão direita, estaria apontando na direção oposta.

Esta regra não é fácil de ser usada na representação de grandezas angulares como vetores. Instintivamente, esperamos que alguma coisa esteja se deslocando *no mesmo sentido* do vetor. Não é o que acontece aqui. Ao contrário, algo (o corpo rígido) está girando *em torno* da direção do vetor. No universo da rotação pura, um vetor define um eixo de rotação, não o sentido de um deslocamento. Todavia, o vetor define também o movimento. E mais, ele obedece a todas as regras e propriedades vetoriais discutidas no Cap. 3. A aceleração angular α é outro vetor que também obedece a essas regras.

Agora, vamos fazer o esclarecimento a que nos referimos anteriormente. *Deslocamentos* angulares (a menos que sejam muito pequenos) *não podem* ser tratados como vetores. Por que não? Certamente, podemos ter módulo e sentido, como no caso do vetor velocidade angular na Fig. 11-5. Entretanto (como se diz matematicamente), isto é condição necessária, mas não suficiente. Para a grandeza ser representada por um vetor, *também* deve obedecer às regras da adição vetorial, uma delas diz que a ordem das parcelas não altera a soma. Os deslocamentos angulares, no entanto, não obedecem a essa propriedade.

Para exemplificar, vamos colocar um livro sobre uma superfície plana, como na Fig. 11-6*a*. Agora, vamos lhe aplicar dois deslocamentos angulares sucessivos de 90°, *primeiro* em torno do eixo x (horizontal) e *depois* em torno do y (vertical), usando a regra da mão direita para orientar o sentido positivo da rotação em cada caso.

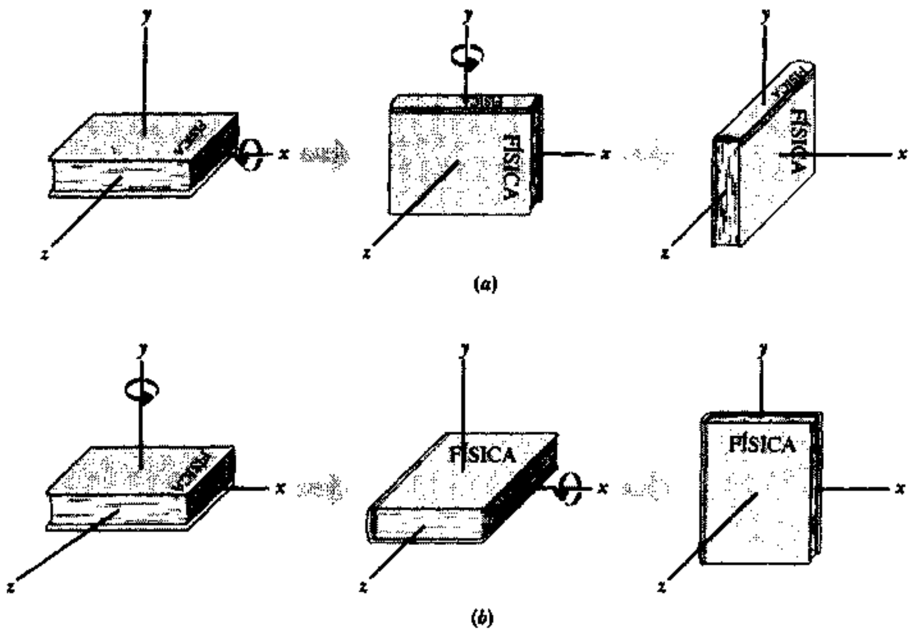


Fig. 11-6 (*a*) São dadas duas rotações sucessivas de 90° na posição inicial do livro à esquerda, primeiro em relação ao eixo x (horizontal) e depois em relação ao eixo y (vertical). (*b*) O livro sofre as mesmas rotações, mas agora na ordem inversa. Se o deslocamento angular fosse de fato uma grandeza vetorial, a ordem dos deslocamentos não importaria. Como isso não se verificou, então, deslocamentos angulares (finitos) não são grandezas vetoriais, embora possamos lhes atribuir módulo e direção.

Tabela 11-1
Equações do Movimento para Aceleração Linear Constante e para Aceleração Angular Constante

Número da Equação	*Fórmula Linear*	*Variável Ausente*		*Fórmula Angular*	*Número da Equação*
(2-9)	$v = v_0 + at$	x	θ	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(11-9)
(2-13)	$x = v_0 t + 1/2at^2$	v	ω	$\theta = \omega_0 t + 1/2\alpha t^2$	(11-10)
(2-14)	$v^2 = v_0^2 + 2ax$	t	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	(11-11)
(2-15)	$x = 1/2(v_0 + v)t$	a	α	$\theta = 1/2(\omega_0 + \omega)t$	(11-12)
(2-16)	$x = vt - 1/2\,at^2$	v_0	ω_0	$\theta = \omega t - 1/2\alpha t^2$	(11-13)

Agora, com o livro na mesma posição inicial (Fig. 11-6*b*), vamos executar os dois deslocamentos angulares na ordem inversa (isto é, *primeiro* em torno do eixo y e *depois* em torno do x). Vemos, pela figura, que a posição final do livro é bastante diferente.

Logo, dependendo da ordem em que são executadas, as mesmas operações produzem diferentes resultados. Então, a adição de deslocamentos angulares não é comutativa e o deslocamento angular não é uma grandeza vetorial. Na prática, podemos mostrar que as posições finais do livro são bem parecidas, se os deslocamentos forem bem menores do que 90°. No caso limite dos deslocamentos angulares infinitesimais (como $d\theta$ na Eq. 11-6), eles *podem* ser tratados como vetores.

11-4 Rotação com Aceleração Angular Constante

Na translação pura, um movimento com *aceleração linear constante* (como um corpo em queda livre, por exemplo) é um caso especial importante. Na Tabela 2-2, apresentamos uma série de equações válidas para esse movimento.

Na rotação pura, o caso da *aceleração angular constante* também é importante e, do mesmo modo, um conjunto análogo de equações permanece válido para este caso. Não vamos deduzi-las aqui, mas simplesmente escrevê-las partindo das equações lineares correspondentes, fazendo a substituição das grandezas lineares pelas grandezas angulares análogas. Na Tabela 11-1 são mostrados os dois conjuntos de equações. Simplificando, façamos $x_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$ nestas equações. Com essas *condições iniciais*, um deslocamento linear $\Delta x\ (= x - x_0)$ é igual a x e um deslocamento angular $\Delta\theta\ (= \theta - \theta_0)$ é igual a θ.

EXEMPLO 11-3 Um esmeril (Fig. 11-7) tem uma aceleração angular constante $\alpha = 0{,}35$ rad/s². Ele parte do repouso (isto é, $\omega_0 = 0$) com uma linha horizontal de referência arbitrária na posição angular $\theta_0 = 0$.

a. Qual o deslocamento angular θ da linha de referência (conseqüentemente do esmeril) em $t = 18$ s?

Solução Usando a Eq. 11-10 da Tabela 11-1, vamos obter

$$\begin{aligned}\theta &= \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ &= (0)(18\ \text{s}) + (\tfrac{1}{2})(0{,}35\ \text{rad/s}^2)(18\ \text{s})^2 \\ &= 56{,}7\ \text{rad} \approx 57\ \text{rad} \approx 3.200° \approx 9{,}0\ \text{rev}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

b. Qual a velocidade angular do esmeril em $t = 18$ s?

Solução Agora, usando a Eq. 11-9 da Tabela 11-1, vamos obter

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \alpha t \\ &= 0 + (0{,}35\ \text{rad/s}^2)(18\ \text{s}) \\ &= 6{,}3\ \text{rad/s} = 360°/\text{s} = 1{,}0\ \text{rev/s}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

EXEMPLO 11-4 Considerando o esmeril do Exemplo 11-3, vamos admitir que a aceleração angular seja a mesma ($\alpha = 0{,}35$ rad/s²), mas agora vamos supor que a velocidade angular inicial ω_0 é $-4{,}6$ rad/s; isto é, inicialmente há uma desaceleração angular atuando sobre o esmeril.

a. Em que instante t o esmeril pára momentaneamente?

Solução Resolvendo a Eq. 11-9 ($\omega = \omega_0 + \alpha t$) para t, obtemos

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - (-4{,}6\ \text{rad/s})}{0{,}35\ \text{rad/s}^2} = 13\ \text{s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

b. Em que instante o esmeril terá realizado um deslocamento angular de cinco revoluções no sentido positivo? (Então, o deslocamento angular da linha de referência será $\theta = 5$ rev.)

Solução Inicialmente, o esmeril está girando no sentido negativo com $\omega_0 = -4{,}6$ rad/s, mas sua aceleração angular α é positiva. Esta oposição de sinais entre a velocidade e a aceleração angulares iniciais significa que o esmeril está diminuindo sua rotação no sentido negativo, pára e, em seguida, reverte a rotação no sentido positivo. Depois que a linha de referência voltar à sua posição inicial, $\omega = 0$, o esmeril deverá realizar mais cinco revoluções para alcançar o deslocamento angular pedido. Isso tudo "é levado em conta" pelo uso da Eq. 11-10:

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

Substituindo os valores conhecidos e fazendo $\theta = 5$ rev $= 10\pi$ rad, temos

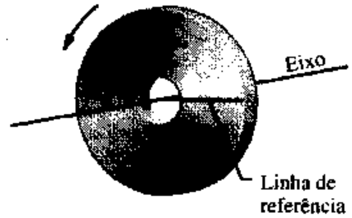


Fig. 11-7 Exemplos 11-3 e 11-4. Um esmeril. No instante $t = 0$, a linha de referência (imaginariamente marcada na pedra) está na horizontal.

$$10\pi \text{ rad} = (-4{,}6 \text{ rad/s})t + (\tfrac{1}{2})(0{,}35 \text{ rad/s}^2)t^2.$$

Observe que as unidades nesta equação são coerentes para t em segundos. Eliminando as unidades (por simplificação) e rearrumando, temos

$$t^2 - 26{,}3t - 180 = 0. \qquad (11.14)$$

Resolvendo esta equação do segundo grau em t e desprezando a raiz negativa, obtemos

$$t = 32 \text{ s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

TÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 1: RESPOSTAS INESPERADAS

Não se apresse em descartar uma das raízes de uma equação quadrática, como se ela nada significasse. Freqüentemente, uma raiz desprezada, como no Exemplo 11-4, tem um significado físico.

As duas respostas para a Eq. 11-14 são $t = 32$ s e $t = -5{,}6$ s. Escolhemos a primeira solução (positiva) e ignoramos a segunda, talvez como irrelevante. Mas e se ela tiver significado? Um tempo negativo nesse problema é simplesmente um instante anterior a $t = 0$, isto é, um instante antes de prestarmos atenção ao que estava acontecendo.

A Fig. 11-8 é um gráfico da posição angular θ, em função do tempo, da linha de referência no esmeril do Exemplo 11-4, tanto para instantes negativos como positivos. É um gráfico da Eq. 11-10 ($\theta = \omega_0 t + \alpha t^2/2$), com $\omega_0 = -4{,}6$ rad/s e $\alpha = +0{,}35$ rad/s². O ponto a, correspondente a $t = 0$, é o instante em que arbitrariamente igualamos a posição angular da linha de referência a zero. O movimento do esmeril, neste instante, é no sentido decrescente de θ, e continua assim até parar no instante $t = 13$ s, ponto b. Aí, reverte o movimento com a linha de referência retornando à sua posição inicial, $\theta = 0$, no ponto c e, após mais cinco revoluções (= 31,4 rad), vai até o ponto d. Este último ponto ($t = 32$ s) é a raiz escolhida como resposta para o problema apresentado.

No entanto, observe que a linha de referência estava nessa mesma posição angular em $t = -5{,}6$ s, antes do início oficial "propriamente dito" do problema. Essa raiz (ponto e) é tão válida quanto aquela do ponto d. O mais importante é, através do questionamento do significado físico dessa raiz negativa, aprender um pouco mais sobre o movimento de rotação do esmeril.

EXEMPLO 11-5 Pela análise do motor de um helicóptero, determinamos que a velocidade do rotor varia de 320 rev/min a 225 rev/min em 1,50 min, enquanto diminui a rotação para parar.

a. Qual é a aceleração angular média das lâminas do rotor durante esse intervalo?

Solução Da Eq. 11-7,

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{225 \text{ rev/min} - 320 \text{ rev/min}}{1{,}50 \text{ min}}$$

$$= -63{,}3 \text{ rev/min}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

O sinal menos significa que as lâminas do rotor estão parando.

b. Quanto tempo as lâminas do rotor levarão para parar, com essa mesma aceleração média, a partir da velocidade angular inicial de 320 rev/min?

Solução Resolvendo a Eq. 11-9 ($\omega = \omega_0 + \alpha t$) para t, temos

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - 320 \text{ rev/min}}{-63{,}3 \text{ rev/min}^2}$$

$$= 5{,}1 \text{ min}. \qquad \text{(Resposta)}$$

c. Quantas revoluções as lâminas do rotor farão, a partir da velocidade angular inicial de 320 rev/min, até parar?

Solução Resolvendo a Eq. 11-11 ($\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$) para θ, temos

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = \frac{0 - (320 \text{ rev/min})^2}{(2)(-63{,}3 \text{ rev/min}^2)}$$

$$= 809 \text{ rev}. \qquad \text{(Resposta)}$$

11-5 As Variáveis Lineares e Angulares

Na Seção 4-7, discutimos o movimento circular uniforme, em que uma partícula se desloca com velocidade linear constante v sobre um círculo, em volta de um eixo de rotação. Quando um corpo rígido, como um carrossel (Fig. 11-9), gira em volta de um eixo de rotação, cada partícula deste corpo se move num círculo em volta desse eixo. Como o

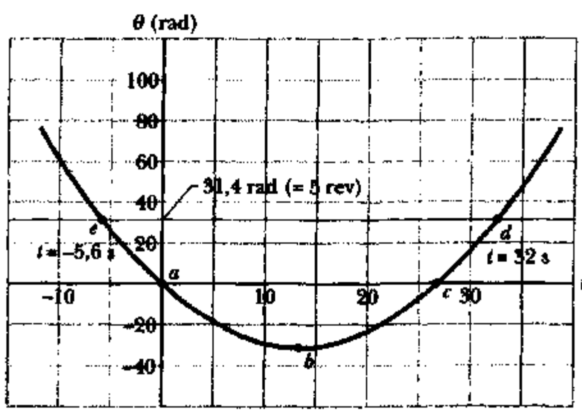


Fig. 11-8 Um gráfico da posição angular em função do tempo do esmeril do Exemplo 11-4. São assinalados instantes negativos (isto é, instantes antes de $t = 0$). Os pontos d e e indicam as duas raízes da Eq. 11-14.

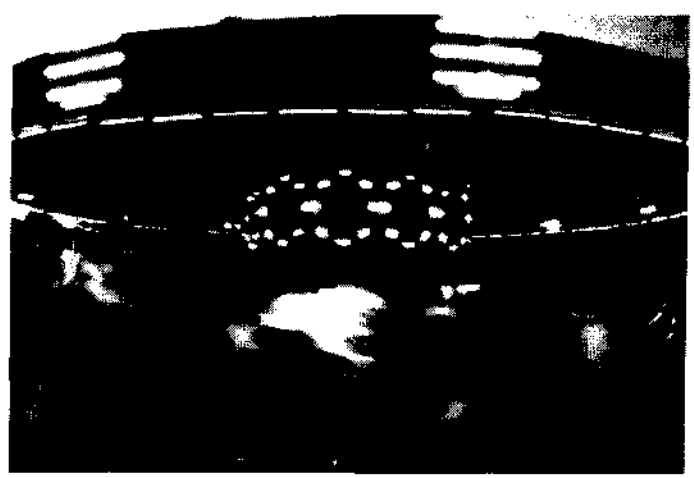


Fig. 11-9 Todos os cavaleiros de um carrossel giram em volta de um eixo central com a mesma velocidade angular ω. Mas os cavaleiros mais afastados do eixo se movem com maior velocidade linear v.

corpo é rígido, todas as partículas completam uma revolução no mesmo intervalo de tempo; isto é, todas têm a mesma velocidade angular ω.

Entretanto, quanto mais afastada uma partícula está do eixo, maior é a circunferência de seu círculo e, portanto, maior deve ser sua velocidade linear. Isto pode ser observado num carrossel. Você gira com a mesma velocidade angular ω, independente de sua distância em relação ao centro, mas sua velocidade linear v aumentará consideravelmente se você se deslocar em direção à borda.

Com freqüência, precisamos relacionar as variáveis lineares s, v e a de um determinado ponto num corpo em rotação com as variáveis angulares θ, ω e α deste corpo. Os dois conjuntos de variáveis são relacionados por r, a *distância perpendicular* do ponto ao eixo de rotação. Esta distância é o raio r do círculo percorrido pelo ponto em volta do eixo de rotação.

A Posição

Se a linha de referência de um corpo rígido girar de um ângulo θ, um ponto no interior deste corpo se deslocará de uma distância s sobre um arco circular dada pela Eq. 11-1:

$$s = \theta r \quad \text{(medidas em radianos)}. \qquad (11\text{-}15)$$

Essa é a primeira das quatro relações linear-angular. O ângulo θ deve ser medido em radianos porque a Eq. 11-15 é, por si própria, a definição da medida angular em radianos.

A Velocidade Escalar

Derivando a Eq. 11-15 em relação ao tempo, mantendo r constante, obtemos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r.$$

Mas ds/dt é a velocidade linear (em módulo) do ponto considerado e $d\theta/dt$ é o módulo da velocidade angular de rotação do corpo, logo

$$v = \omega r \quad \text{(medidas em radianos)}. \qquad (11\text{-}16)$$

Novamente, a velocidade angular ω deve ser expressa em radianos por segundo. Pela Eq. 11-16, vemos que, como todos os pontos de um corpo rígido têm a mesma velocidade angular ω, quanto maior o raio r, maior a velocidade linear v. A Fig. 11-10*a* mostra que a velocidade linear é sempre tangente à trajetória circular do ponto considerado, da mesma forma que no movimento circular uniforme (Seção 4-7).

A Aceleração

Derivando a Eq. 11-16 em relação ao tempo, novamente mantendo r constante, obtemos

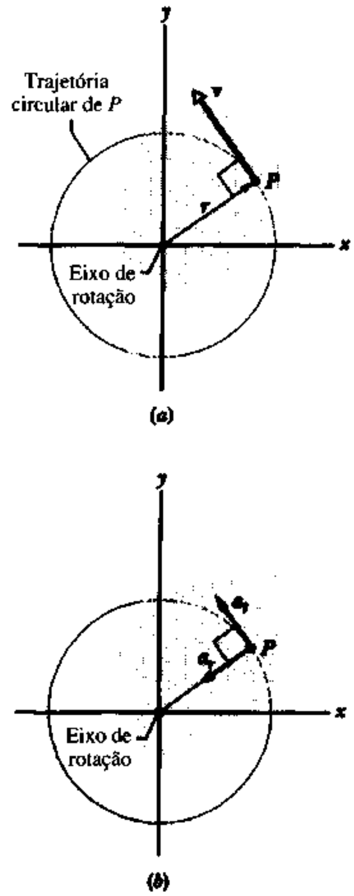


Fig. 11-10 A seção transversal do corpo rígido em rotação da Fig. 11-2. Todos os pontos do corpo (como P) se movem numa trajetória circular em volta do eixo de rotação. (*a*) O vetor velocidade linear **v** de todos os pontos é tangente à trajetória do ponto. (*b*) O vetor aceleração linear **a** do ponto (em geral) tem duas componentes: uma componente tangencial a_t e uma componente radial a_r.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r. \qquad (11\text{-}17)$$

Aqui, nos deparamos com um problema. Na Eq. 11-17, dv/dt representa apenas a parte da aceleração linear responsável pela variação do *módulo* v da velocidade linear **v**. Como **v**, essa parte da aceleração linear é tangente à trajetória do ponto considerado. É a chamada *componente tangencial* a_t da aceleração linear do ponto em questão e é representada por

$$a_t = \alpha r \quad \text{(medidas em radianos)}. \qquad (11\text{-}18)$$

Além disso, pela Eq. 4-22, uma partícula (ou um ponto) se deslocando sobre uma trajetória circular tem uma *componente radial* da aceleração linear, $a_r = v^2/r$, que é responsável pela variação na *direção* da velocidade linear **v**. Substituindo o valor de v, dado pela Eq. 11-16, podemos representar essa componente por

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{(medidas em radianos)}. \qquad (11\text{-}19)$$

Assim, como mostra a Fig. 11-10*b*, a aceleração linear de um ponto de um corpo rígido em rotação tem, em geral, duas componentes. A componente radial a_r (dada pela Eq. 11-19) está sempre presente, desde que a velocidade angular do corpo seja diferente de zero. A componente tangencial a_t (dada pela Eq. 11-18) estará presente sempre que a aceleração angular for diferente de zero.

EXEMPLO 11-6 *A Fig. 11-11 mostra uma centrífuga utilizada para submeter astronautas em treinamento a grandes acelerações. O raio r do círculo percorrido pelo astronauta é 15 m.*

a. Com que velocidade angular constante a centrífuga deve girar para que o astronauta seja submetido a uma aceleração linear 11 vezes maior do que a aceleração de queda livre? Essa é aproximadamente a máxima aceleração que um piloto de caça, altamente treinado, pode suportar, por um curto intervalo de tempo, sem desmaiar.

Solução Sendo a velocidade angular constante, a aceleração angular α ($= d\omega/dt$), é zero e também a componente tangencial da aceleração linear (veja Eq. 11-18). Então, resta apenas a componente radial. Da Eq. 11-19 ($a_r = \omega^2 r$), temos

$$\omega = \sqrt{\frac{a_r}{r}} = \sqrt{\frac{(11)(9{,}8\ \mathrm{m/s^2})}{15\ \mathrm{m}}}$$

$$= 2{,}68\ \mathrm{rad/s} \approx 26\ \mathrm{rev/min}. \qquad \text{(Resposta)}$$

b. Qual a velocidade linear do astronauta, nessas condições?

Solução Da Eq. 11-16,

$$v = \omega r = (2{,}68\ \mathrm{rad/s})(15\ \mathrm{m}) = 40\ \mathrm{m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

c. Qual a aceleração tangencial do astronauta, se a centrífuga acelerar uniformemente a partir do repouso, alcançando a velocidade angular do item (a) em 120 s?

Solução Como a aceleração angular é constante durante o aumento da velocidade da centrífuga, aplicamos a Eq. 11-9:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2{,}68\ \mathrm{rad/s} - 0}{120\ \mathrm{s}} = 0{,}0223\ \mathrm{rad/s^2}.$$

Pela Eq. 11-18, temos

$$a_t = \alpha r = (0{,}0223\ \mathrm{rad/s^2})(15\ \mathrm{m})$$

$$= 0{,}33\ \mathrm{m/s^2}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Embora a aceleração radial final a_r seja grande (e assustadora), a aceleração tangencial, durante o aumento da velocidade, não é.

TÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 2: UNIDADES DAS VARIÁVEIS ANGULARES

Na Eq. 11-1 ($\theta = s/r$), nos comprometemos a usar o radiano como medida para todas as variáveis angulares. Ou seja, devemos expressar deslocamentos angulares em radianos, velocidades angulares em rad/s e rad/min e acelerações angulares em rad/s² e rad/min². As únicas exceções a essa regra são as equações que envolvem *apenas* variáveis angulares, como aquelas listadas na Tabela 11-1. Neste caso, podemos usar a unidade que quisermos para as variáveis angulares. Isto é, podemos usar radianos, graus ou revoluções, contanto que as usemos coerentemente.

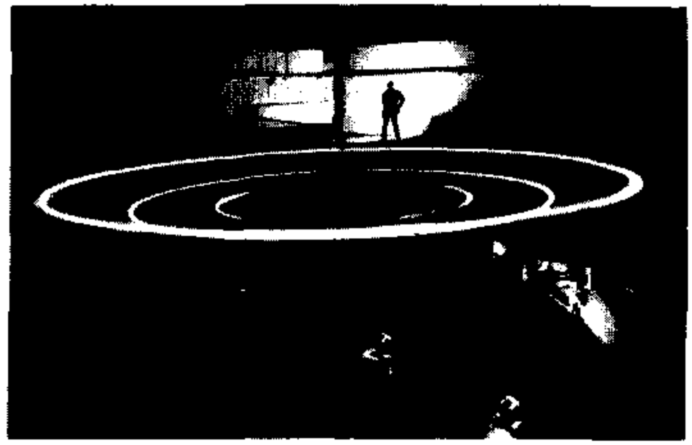


Fig. 11-11 Exemplo 11-6. Uma centrífuga em Cologne, Alemanha, usada para habituar os astronautas à grande aceleração da decolagem.

Nas equações onde o radiano deve ser usado, não precisamos, necessariamente, nos manter atrelados algebricamente à unidade "radiano" (rad), como acontece para outras unidades. Podemos acrescentá-lo ou retirá-lo livremente, de acordo com o contexto. No Exemplo 11-6a a unidade foi acrescentada à resposta, no Exemplo 11-6b e c foi suprimida.

11-6 Energia Cinética de Rotação

A rotação rápida da lâmina de uma serra de bancada tem, com certeza, uma energia cinética. Como podemos expressá-la? Não podemos usar a fórmula conhecida $K = mv^2/2$ diretamente, porque, ela sendo aplicável apenas para partículas, não saberíamos como usar as variáveis de v e m.

Em vez disso, trataremos a serra (ou qualquer corpo rígido em rotação) como um conjunto de partículas — com diferentes velocidades. Então, a soma das energias cinéticas de todas as partículas é a energia cinética total do corpo. Logo, a energia cinética de um corpo em rotação é

$$K = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \tfrac{1}{2}m_3v_3^2 + \cdots$$
$$= \sum \tfrac{1}{2}m_iv_i^2, \qquad (11\text{-}20)$$

onde m_i é a massa da *i*ésima partícula e v_i a sua velocidade. A soma relaciona todas as partículas que compõem o corpo.

O problema com a Eq. 11-20 é que v_i não é a mesma para todas as partículas. Contornamos este problema, substituindo v pela relação apresentada na Eq. 11-16 ($v = \omega r$), obtendo, então

$$K = \sum \tfrac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_ir_i^2\right)\omega^2, \qquad (11\text{-}21)$$

onde ω *é* idêntico para todas as partículas.

A quantidade entre parênteses, no lado direito da Eq. 11-21, nos informa como a massa do corpo em rotação é distribuída em torno deste próprio eixo. Essa grandeza é chamada de **inércia rotacional*** I do corpo em relação a esse eixo. Então,

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad \text{(inércia rotacional)}. \qquad (11\text{-}22)$$

Substituindo essa equação na Eq. 11-21, obtemos a expressão procurada

$$K = \tfrac{1}{2} I\omega^2 \ \text{(medidas em radianos)}. \qquad (11\text{-}23)$$

Tendo usado a relação $v = \omega r$ para obter a Eq. 11-23, ω deve ser expresso em radianos/s. A unidade SI para I é o quilograma-metro quadrado ($kg{\cdot}m^2$).

A Eq. 11-23, que permite calcular a energia cinética de um corpo rígido em rotação pura, é a equivalente angular da fórmula $K = 1/2Mv^2_{cm}$, que é a energia cinética de um corpo rígido em movimento de translação pura. Em qualquer dos casos, o fator 1/2 está presente. A massa M (que pode ser chamada de *inércia translacional*) aparece em uma fórmula, I (a *inércia rotacional*) aparece na outra. Finalmente, cada equação, translacional ou rotacional, contém o quadrado da velocidade apropriada. As energias cinéticas de translação e de rotação não são tipos diferentes de energia. Ambas são energia cinética expressa na forma apropriada ao movimento em questão.

A inércia rotacional de um corpo girando depende não só de sua massa, mas também de como esta massa é distribuída em relação ao eixo de rotação. A *Fig. 11-12* sugere uma maneira prática de desenvolver a percepção física para o momento de inércia. A Fig. 11-12*a* mostra que os dois tubos plásticos parecem idênticos quando vistos do exterior. Ambos têm cerca de 1 m de comprimento. As dimensões e massas dos dois tubos são as mesmas e estão em equilíbrio em relação a seus pontos médios. Se segurarmos cada tubo pelo seu centro e o movimentarmos para trás e para a frente, rapidamente, num movimento translacional, não conseguiremos perceber nenhuma diferença entre eles.

Entretanto, se girarmos os tubos, rapidamente, uma diferença marcante aparecerá. É muito mais fácil girar um tubo que o outro. Como mostrado nas Figs. 11-12*b* e 11-12*c*, o "mais difícil" tem os pesos internos localizados nas suas extremidades, e o "mais fácil" os tem concentrados próximos ao seu centro. Embora os tubos tenham a mesma massa, os momentos de inércia em relação ao eixo central são bem diferentes por causa da distribuição desigual de massas.

11-7 Cálculo do Momento de Inércia

Quando um corpo rígido é composto por partículas discretas, podemos calcular seu momento de inércia ou inércia rotacional pela Eq. 11-22. Se o corpo for contínuo, poderemos substituir o somatório na Eq. 11-22 por uma integral, e a definição de momento de inércia passará a ser

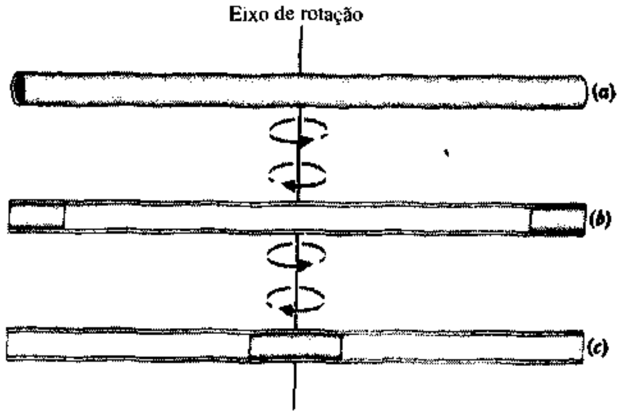


Fig. 11-12 (*a*) Dois tubos plásticos como este parecem idênticos até você tentar girá-los rapidamente, para trás e para frente, em torno do ponto médio. O tubo (*c*) gira com facilidade; o tubo (*b*) não. O segredo está na distribuição interna dos pesos em relação ao eixo de rotação. Embora os bastões tenham a massa igual, o momento de inércia do bastão (*b*), em relação a um eixo que passa pelo seu ponto médio, é consideravelmente maior do que o do bastão (*c*).

$$I = \int r^2\,dm \quad \text{(momento de inércia, distribuição contínua)} \qquad (11\text{-}24)$$

Nos exemplos seguintes desta seção, vamos calcular I para os dois tipos de distribuição. Em geral, a inércia rotacional de qualquer corpo rígido em relação ao seu eixo de rotação depende (1) da forma do corpo, (2) da distância ortogonal do eixo ao centro de massa do corpo e (3) da orientação do corpo em relação ao eixo.

A Tabela 11-2 fornece o momento de inércia em relação a diversos eixos de vários corpos conhecidos. Examine a tabela cuidadosamente para perceber como a distribuição de massa afeta a inércia rotacional.

O Teorema dos Eixos Paralelos

Se conhecermos o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo qualquer que passe pelo seu centro de massa, poderemos determinar o momento de inércia desse corpo em relação a qualquer outro eixo paralelo ao primeiro, pelo **teorema dos eixos paralelos,*** ou seja,

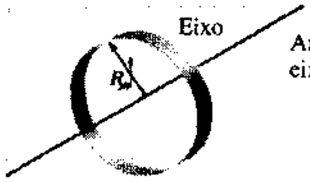
$$I = I_{cm} + Mh^2 \quad \text{(teorema dos eixos paralelos)}. \qquad (11\text{-}25)$$

Onde M é a massa do corpo e h a distância perpendicular entre os dois eixos (paralelos). Esse teorema pode ser enunciado da seguinte forma:

*Freqüentemente chamado de *momento de inércia*.

*Também conhecido como Teorema de Huygens-Steiner. (N. do T.)

Tabela 11-2
Alguns Momentos de Inércia

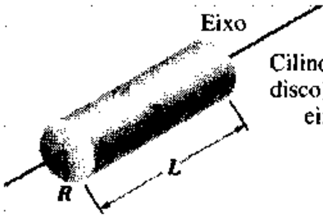


Aro em torno do eixo central

$I = MR^2$ (*a*)

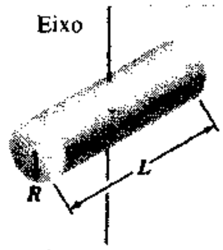
Cilindro anular (ou anel) em torno do eixo central

$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ (*b*)



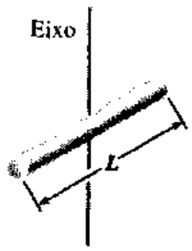
Cilindro sólido (ou disco) em torno do eixo central

$I = \frac{1}{2}MR^2$ (*c*)



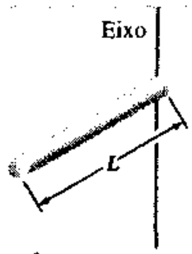
Cilindro sólido (ou disco) em torno do diâmetro central

$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$ (*d*)



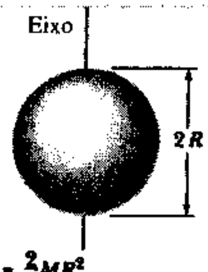
Bastão fino em torno do eixo central perpendicular ao seu comprimento

$I = \frac{1}{12}ML^2$ (*e*)



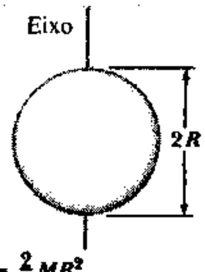
Bastão fino em torno do eixo que passa por uma das extremidades perpendicular ao seu comprimento

$I = \frac{1}{3}ML^2$ (*f*)



Esfera sólida em relação a um diâmetro qualquer

$I = \frac{2}{5}MR^2$ (*g*)

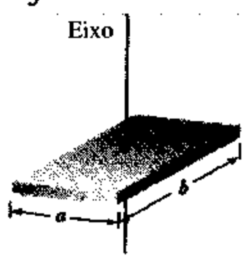


Casca esférica delgada em relação a um diâmetro qualquer

$I = \frac{2}{3}MR^2$ (*h*)

Aro em relação a um diâmetro qualquer

$I = \frac{1}{2}MR^2$ (*i*)



Tábua em relação a um eixo central ortogonal

$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ (*j*)

O momento de inércia de um corpo em relação a um eixo qualquer é igual ao momento de inércia que ele teria em relação a esse eixo ($= Mh^2$), se toda a sua massa estivesse concentrada em seu centro de massa *mais* o seu momento de inércia em relação a um eixo paralelo passando pelo seu centro de massa ($= I_{cm}$).

Demonstração do Teorema dos Eixos Paralelos

Seja O o centro de massa de um corpo de forma arbitrária, cuja seção transversal é vista na Fig. 11-13. Vamos estabelecer em O a origem do sistema de coordenadas. Considere um eixo perpendicular ao plano da figura passando por O, e um outro eixo, paralelo ao primeiro, passando pelo ponto P. Chamemos de a e b as coordenadas de P.

Vamos chamar de dm um elemento de massa com coordenadas x e y. Então, da Eq. 11-24, o momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa por P é

$$I = \int r^2\, dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2]\, dm,$$

rearrumando, temos

$$I = \int (x^2 + y^2)\, dm - 2a \int x\, dm - 2b \int y\, dm + \int (a^2 + b^2)\, dm. \qquad (11\text{-}26)$$

De acordo com a definição de centro de massa (Eq. 9-9), as duas integrais intermediárias na Eq. 11-26 representam as coordenadas do centro de massa (multiplicadas por uma constante), logo, são iguais a zero. Como $x^2 + y^2$ é igual a R^2, onde R é a distância de O a dm, a primeira integral é simplesmente I_{cm}, o momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa. Observando a Fig. 11-13, vemos que o último termo na Eq. 11-26 é Mh^2, onde M é a massa total do corpo. Logo, a Eq. 11-26 se reduz à Eq. 11-25, como queríamos provar.

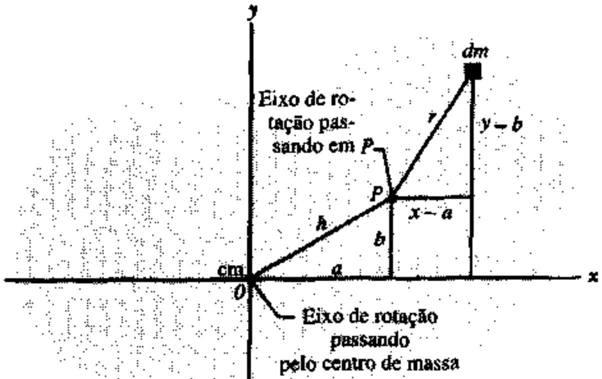


Fig. 11-13 A seção transversal de um corpo rígido com seu centro de massa no ponto O. O teorema dos eixos paralelos (Eq. 11-25) relaciona o momento de inércia do corpo em torno do eixo que passa pelo ponto O com aquele em torno de um eixo paralelo, que passa pelo ponto P a uma distância h do centro de massa. Os dois eixos são ortogonais ao plano da figura.

EXEMPLO 11-7 A Fig. 11-14 mostra um corpo rígido composto de duas partículas de massa m ligadas por uma haste de comprimento L e de massa desprezível.

a. Qual a o momento de inércia desse corpo, em relação a um eixo que passa pelo seu centro e é perpendicular à haste (veja Fig. 11-14*a*)?

Solução Da Eq. 11-22, temos

$$I = \sum m_i r_i^2 = (m)(\tfrac{1}{2}L)^2 + (m)(\tfrac{1}{2}L)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}mL^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

b. Qual o momento de inércia do corpo em relação a um eixo que passa por uma das extremidades da haste e é paralelo ao primeiro, conforme a Fig. 11-14*b*?

Solução Podemos usar o teorema dos eixos paralelos da Eq. 11-25. No item (a), acabamos de calcular I_{cm}, e a distância h entre os eixos paralelos é a metade do comprimento da haste. Logo, da Eq. 11-25,

$$I = I_{cm} + Mh^2 = \tfrac{1}{2}mL^2 + (2m)(\tfrac{1}{2}L)^2$$
$$= mL^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Usando a Eq. 11-22, podemos verificar esse resultado diretamente:

$$I = \sum m_i r_i^2 = (m)(0)^2 + (m)(L)^2$$
$$= mL^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

EXEMPLO 11-8 A Fig. 11-15 mostra um bastão fino, uniforme, de massa M e comprimento L.

a. Qual o momento de inércia em relação a um eixo perpendicular ao bastão, passando pelo seu centro de massa?

Solução Escolhemos uma fatia dx como elemento de massa do bastão. O centro desta fatia está na posição x. A massa por unidade de comprimento do bastão é M/L, logo, a massa dm do elemento dx é

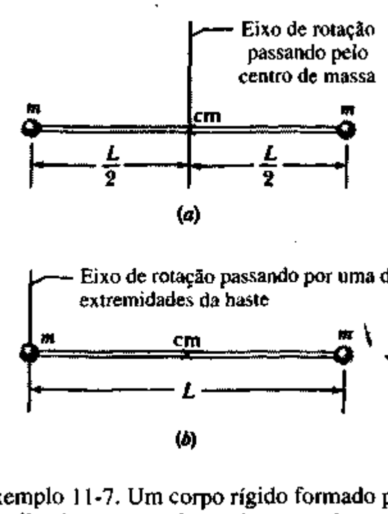


Fig. 11-14 Exemplo 11-7. Um corpo rígido formado por duas partículas de massa m ligadas por uma haste de massa desprezível.

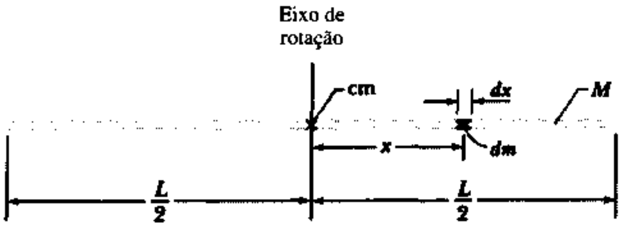


Fig. 11-15 Exemplo 11-8. Um bastão uniforme de comprimento L e de massa M.

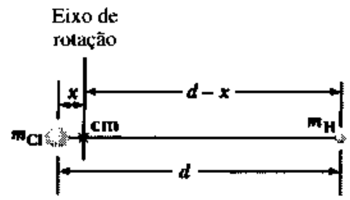


Fig. 11-16 Exemplo 11-9. A representação esquemática de uma molécula de ácido clorídrico. Um eixo de rotação passa pelo seu centro de massa perpendicularmente à linha que une os dois átomos.

$$dm = \left(\frac{M}{L}\right) dx.$$

Da Eq. 11-24, temos

$$I = \int x^2\,dm = \int_{x=-L/2}^{x=+L/2} x^2 \left(\frac{M}{L}\right) dx$$

$$= \frac{M}{3L}\left[x^3\right]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{M}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right]$$

$$= \tfrac{1}{12}ML^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

que concorda com o resultado apresentado na Tabela 11-2(e).

b. Qual o momento de inércia do bastão em relação a um eixo ortogonal a ele, que passa por uma de suas extremidades?

Solução Combinando o resultado do item (a) com o teorema dos eixos paralelos (Eq. 11-25), obtemos

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

$$= \tfrac{1}{12}ML^2 + (M)(\tfrac{1}{2}L)^2 = \tfrac{1}{3}ML^2, \qquad \text{(Resposta)}$$

que está de acordo com o resultado apresentado na Tabela 11-2(f).

EXEMPLO 11-9 Uma molécula de ácido clorídrico é formada por um átomo de hidrogênio, de massa $m_H = 1{,}01$ u, e um átomo de cloro, de massa $m_{Cl} = 35{,}0$ u. Os centros dos dois átomos estão afastados por uma distância $d = 1{,}27 \times 10^{-10}$ m $= 127$ pm (veja Fig. 11-16). Qual o momento de inércia da molécula em relação a um eixo ortogonal à linha de junção dos dois átomos e passando pelo centro de massa da molécula?

Solução Vamos chamar de x a distância entre o centro de massa da molécula e o átomo de cloro. Então, da Fig. 11-16 e da Eq. 9-3, vemos que

$$0 = \frac{-m_{Cl}x + m_H(d-x)}{m_{Cl} + m_H},$$

ou

$$m_{Cl}x = m_H(d-x).$$

que dá

$$x = \frac{m_H}{m_{Cl} + m_H}\,d. \qquad (11\text{-}27)$$

Pela Eq. 11-22, o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa é

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_H(d-x)^2 + m_{Cl}x^2.$$

Substituindo o valor de x dado pela Eq. 11-27 e manipulando algebricamente, temos

$$I = d^2\frac{m_H m_{Cl}}{m_{Cl} + m_H} = (127\text{ pm})^2\frac{(1{,}01\text{ u})(35{,}0\text{ u})}{35{,}0\text{ u} + 1{,}01\text{ u}}$$

$$= 15{,}800\ \text{u}\cdot\text{pm}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Quando se trata de momento de inércia de moléculas, essas unidades são as mais apropriadas. Se utilizarmos o angström como unidade de comprimento (1 Å = 10^{-10} m), a resposta anterior passará a ser $I = 1{,}58$ u·Å^2, uma unidade mais apropriada ainda.

EXEMPLO 11-10 Utilizando a moderna tecnologia, é possível construir um volante que armazene suficiente energia para movimentar um automóvel. Quando o volante é previamente posto em rotação, a energia é armazenada como energia cinética rotacional. Esta energia armazenada é então transferida gradualmente para o automóvel, por meio de um sistema de engrenagens que movimenta o carro. Suponha que esse volante seja um cilindro sólido de massa M igual a 75 kg e raio R de 25 cm. Se o volante girar a 85.000 rev/min, que quantidade de energia cinética poderá armazenar?

Solução Da Tabela 11-2(c), vemos que o momento de inércia de um cilindro sólido é:

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2 = (\tfrac{1}{2})(75\text{ kg})(0{,}25\text{ m})^2 = 2{,}34\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

A velocidade angular do volante é

$$\omega = (85.000\text{ rev/min})(2\pi\text{ rad/rev})(1\text{ min}/60\text{ s})$$

$$= 8.900\text{ rad/s}.$$

Então, pela Eq. 11-23, a energia cinética de rotação é

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = (\tfrac{1}{2})(2{,}34\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(8.900\text{ rad/s})^2$$

$$= 9{,}3 \times 10^7\text{ J} = 26\text{ kW}\cdot\text{h}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Essa quantidade de energia, se usada de forma eficiente, pode deslocar um pequeno carro por cerca de 320 km.

11-8 Torque

Há uma razão para que a maçaneta da porta fique o mais afastada possível das dobradiças. Se quisermos abrir uma porta muito pesada, com certeza temos de aplicar uma força; no entanto, só isso não é suficiente. O local de aplicação e o sentido dessa força também são importantes. Se aplicarmos a força mais próximo das dobradiças que da

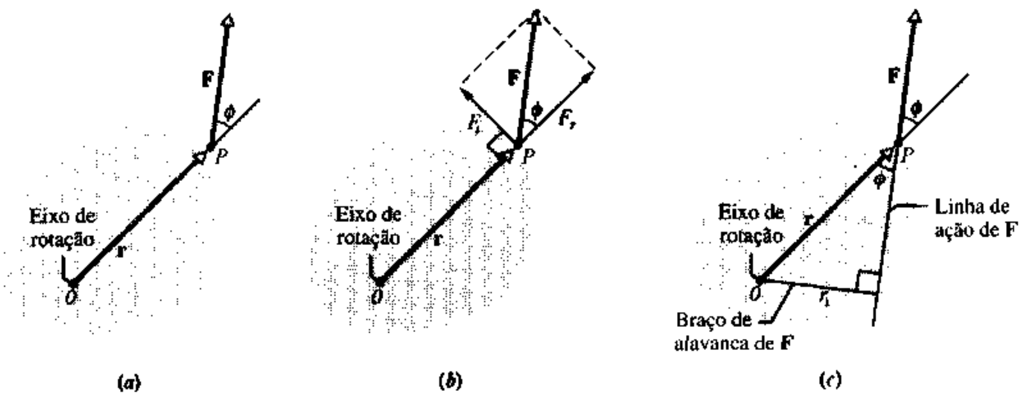


Fig. 11-17 (*a*) A seção transversal de um corpo rígido que gira livremente em torno de um eixo ortogonal ao plano da figura passando pelo ponto O. Uma força **F**, aplicada ao ponto P, produz um torque igual a F_t sen ϕ. (*b*) O torque pode ser representado por $F_t r$, onde F_t é a componente tangencial de **F**. (*c*) O torque também pode ser representado por $Fr_\perp$, onde $r_\perp$ é o braço de alavanca de **F**.

maçaneta ou se a direção da força fizer um ângulo diferente de 90° com o plano da porta, teremos de usar muito mais força para mover a porta que se a aplicássemos perpendicularmente à porta, na altura da maçaneta.

A Fig 11-17*a* mostra a seção reta de um corpo que gira livremente em torno de um eixo que passa pelo ponto O, ortogonalmente à seção reta. Uma força **F** é aplicada ao ponto P, cuja posição em relação a O é definida pelo vetor **r**. Os vetores **F** e **r** fazem um ângulo ϕ entre si. (Simplificando, consideraremos apenas as forças que não tenham componentes paralelas ao eixo de rotação.)

Para determinarmos a eficiência da força **F** em girar um corpo em torno de seu eixo de rotação, vamos decompô-la em duas componentes (veja Fig. 11-17*b*). Uma delas, chamada de *componente radial* F_r, aponta na direção de **r** e não produz rotação porque atua na direção da linha que passa por O. (Se puxarmos uma porta paralelamente ao seu plano, não conseguiremos girá-la.) A outra, chamada de *componente tangencial* F_t, é perpendicular à **r** e tem módulo $F_t = F$ sen ϕ. Esta componente *produz* uma rotação. (Se puxarmos uma porta perpendicularmente ao seu plano, vamos girá-la.)

A possibilidade de F_t girar a porta não depende apenas do seu módulo, mas também do quanto afastada de O ela, e conseqüentemente a força **F**, está aplicada. Para introduzir esses fatores, vamos definir uma grandeza chamada **torque** τ como o produto desses dois fatores e defini-la como

$$\tau = (r)(F \operatorname{sen} \phi). \tag{11-28}$$

Duas maneiras equivalentes de calcular o torque são

$$\tau = (r)(F \operatorname{sen} \phi) = rF_t \tag{11-29}$$

e

$$\tau = (r \operatorname{sen} \phi)(F) = r_\perp F, \tag{11-30}$$

onde $r_\perp$ é a distância perpendicular entre o eixo de rotação em O e a linha de extensão da força **F** (Fig. 11-17*c*). Essa linha de extensão é chamada de **linha de ação** de **F**, e $r_\perp$ é chamada de **braço de alavanca** de **F**. Na Fig. 11-17*b*, podemos dizer que r, o módulo de **r**, é o braço de alavanca da componente F_t.

Torque, que significa "torcer" em latim, pode ser facilmente identificado pela ação da força **F** de torcer ou virar. Quando aplicamos uma força a um objeto — como uma chave de fenda ou uma chave de boca — com a finalidade de torcê-lo, estamos aplicando um torque. A unidade de torque no SI é o newton-metro (N.m).* O torque τ é dito positivo se tender a girar o corpo no sentido anti-horário, na direção crescente de θ, como na Fig. 11-17. No sentido horário ele é negativo.

A definição de torque dada pela Eq. 11-28 pode ser representada pelo *produto vetorial*:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{11-31}$$

Logo, torque τ é um vetor ortogonal ao plano que contém **r** e **F**. O módulo de τ é dado pelas Eqs. 11-28, 11-29 e 11-30, e seu sentido é dado pela regra da mão direita. No Cap. 12, retornaremos à Eq. 11-31.

11-9 A Segunda Lei de Newton para a Rotação

A Fig. 11-18 mostra um caso simples de rotação em torno de um eixo fixo. A rotação de um corpo rígido é representada por uma partícula de massa m presa a uma das extremidades de uma haste de comprimento r e massa desprezível. Uma força **F** aplicada, conforme mostrado na figura, faz a partícula se mover em círculo. A componente tangencial a_t da aceleração da partícula obedece à segunda lei de Newton:

$$F_t = ma_t.$$

*O newton-metro é também uma unidade de trabalho. Entretanto, torque e trabalho são grandezas bem diferentes e não devem ser confundidas. Em geral, trabalho é expresso em joules (1 J = 1 N·m), mas torque nunca.

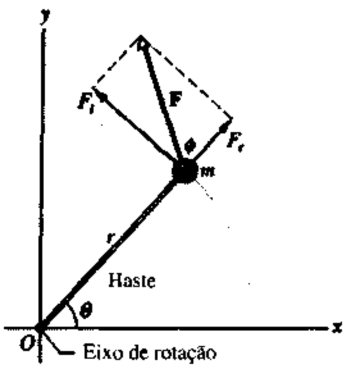


Fig. 11-18 Um corpo rígido simples, que gira livremente em torno de um eixo que passa por O, é composto por uma partícula de massa m presa à extremidade de uma haste de comprimento r e massa desprezível. O corpo gira pela aplicação da força **F**.

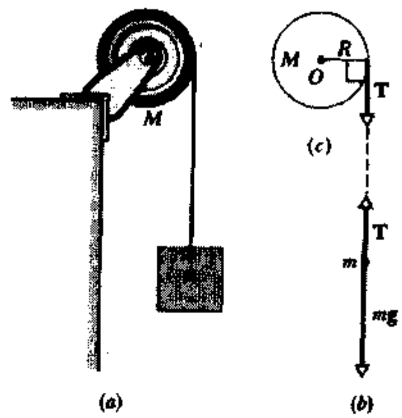


Fig. 11-19 Exemplos 11-11 e 11-13. (*a*) A queda do bloco produz uma rotação na polia. (*b*) Um diagrama das forças atuantes no bloco. (*c*) Um diagrama de forças atuantes na polia.

Pela Eq. 11-29, o torque que atua na partícula é

$$\tau = F_t r = m a_t r.$$

Da Eq. 11-18 ($a_t = \alpha r$), podemos escrever isso como

$$\tau = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha. \qquad (11\text{-}32)$$

A grandeza entre parênteses no lado direito da Eq. 11-32 é o momento de inércia da partícula em relação ao eixo de rotação (veja Eq. 11-22). Assim, a Eq. 11-32 se reduz a

$$\tau = I\alpha \quad \text{(medidas em radianos).} \qquad (11\text{-}33)$$

Quando mais de uma força é aplicada à partícula, podemos ampliar a Eq. 11-33 para

$$\sum \tau = I\alpha \quad \text{(medidas em radianos).} \qquad (11\text{-}34)$$

onde $\sum \tau$ é o torque resultante que atua sobre a partícula. A Eq. 11-34 é a forma angular (ou rotacional) da segunda lei de Newton.

Embora tenhamos deduzido a Eq. 11-33 para o caso especial de uma única partícula girando em torno de um eixo fixo, ela é válida para qualquer corpo rígido na mesma condição, considerando que esse corpo pode ser representado por um conjunto dessas partículas.

EXEMPLO 11-11 A Fig. 11-19*a* mostra uma polia uniforme de massa $M = 2{,}5$ kg e raio $R = 20$ cm fixada por um eixo horizontal. Um bloco de massa $m = 1{,}2$ kg está suspenso por uma corda, de massa desprezível, enrolada em volta da polia. Determine a aceleração de queda do bloco (supondo que ele cai), a aceleração angular da polia e a tensão na corda. A corda não desliza e não há atrito no eixo da polia.

Solução A Fig. 11-19*b* mostra o diagrama de forças do bloco. O bloco acelera para baixo, logo, seu peso (= mg) deve ser maior do que a tensão T na corda.

Da segunda lei de Newton, temos

$$T - mg = ma. \qquad (11\text{-}35)$$

A Fig. 11-19*c* mostra o diagrama de forças da polia. O torque que atua na polia é $-TR$, negativo porque a polia gira no sentido horário. Pela Tabela 11-2(*c*), sabemos que o momento de inércia I de um disco é $MR^2/2$. (Duas outras forças atuam na polia: seu peso Mg e a força normal N exercida pelo suporte sobre a polia. Estas duas forças atuam sobre o eixo da polia, logo, não exercem qualquer torque sobre a polia.) Aplicando à polia a segunda lei de Newton na forma angular, $\tau = I\alpha$, e a Eq. 11-18, obtemos

$$-TR = \tfrac{1}{2}MR^2\left(\frac{a}{R}\right).$$

Que é simplificado para

$$T = -\tfrac{1}{2}Ma. \qquad (11\text{-}36)$$

Como a corda não desliza, supomos que a aceleração linear do bloco seja igual à aceleração linear (tangencial) da borda, e podemos substituir α por a/R.

Combinando as Eqs. 11-35 e 11-36, fica

$$a = -g\frac{2m}{M + 2m} = -(9{,}8\ \text{m/s}^2)\frac{(2)(1{,}2\ \text{kg})}{2{,}5\ \text{kg} + (2)(1{,}2\ \text{kg})}$$
$$= -4{,}8\ \text{m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Então, usamos a Eq. 11-36 para determinar T:

$$T = -\tfrac{1}{2}Ma = -\tfrac{1}{2}(2{,}5\ \text{kg})(-4{,}8\ \text{m/s}^2)$$
$$= 6{,}0\ \text{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como era de se esperar, a aceleração do bloco em queda é menor do que g, e a tensão na corda (= 6,0 N) é menor do que o peso do bloco (= mg = 11,8N). Vemos também que a aceleração do bloco e a tensão dependem da massa da polia e não do raio. Como verificação, podemos observar que, se a massa da polia for desprezível ($M = 0$) $a = -g$ e $T = 0$, nas fórmulas que acabamos de deduzir. O que era de se esperar: o bloco simplesmente cai em queda livre, arrastando a corda atrás dele.

A aceleração angular da polia é dada pela Eq. 11-18:

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{-4{,}8\ \text{m/s}^2}{0{,}20\ \text{m}} = -24\ \text{rad/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

EXEMPLO 11-12 Para atirar ao solo um adversário de 80 kg, você utiliza o deslocamento em torno do quadril, um golpe básico do judô em que você tenta puxá-lo pelo uniforme com uma força **F**, que tem um braço de alavanca $d_1 = 0{,}30$ m em relação ao ponto de apoio (eixo de rotação) no seu quadril direito, sobre o qual deseja girá-lo com uma aceleração angular de -12 rad/s², ou seja, uma aceleração no sentido horário (veja Fig. 11-20). Suponha que o momento de inércia I em relação ao ponto de rotação seja 15 kg·m².

a. Qual deve ser o módulo de **F** se, inicialmente, você incliná-lo para a frente, para fazer com que o centro de massa dele coincida com o seu quadril (veja Fig 11-20*a*)?

Solução Se o centro de massa dele estiver sobre o eixo de rotação, o vetor peso não produzirá torque em relação àquele eixo. Então, o único torque sobre ele é devido ao seu puxão **F**. Das Eqs. 11-29 e 11-33, temos, para o torque no sentido horário,

$$\tau = -d_1F = I\alpha,$$

que resulta em

$$F = \frac{-I\alpha}{d_1} = \frac{-(15\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(-12\ \text{rad/s}^2)}{0{,}30\ \text{m}}$$

$$= 600\ \text{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

b. Qual será o módulo de **F** se o adversário permanecer ereto e o vetor peso dele tiver um braço de alavanca $d_2 = 0{,}12$ m em relação ao eixo de rotação (Fig. 11-20*b*)?

Solução Nessa situação, o peso do seu adversário produz um torque positivo (anti-horário) que é oposto ao torque aplicado por você. Das Eqs. 11-29 e 11-34, temos

$$\sum \tau = -d_1F + d_2mg = I\alpha,$$

que resulta em

$$F = -\frac{I\alpha}{d_1} + \frac{d_2mg}{d_1}.$$

Sabemos, do item (a), que o primeiro termo no lado direito é 600 N. Fazendo essa substituição e aplicando os dados do problema, temos

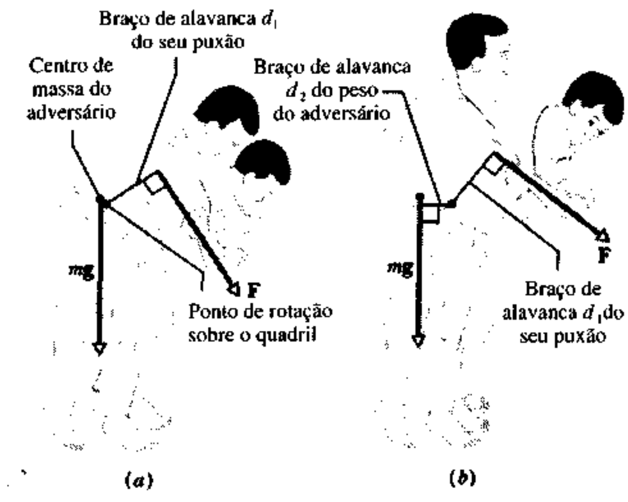


Fig. 11-20 Exemplo 11-12. (*a*) Movimento de rotação sobre o quadril, técnica do judô, executado corretamente e (*b*) de forma incorreta.

$$F = 600\ \text{N} + \frac{(0{,}12\ \text{m})(80\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{0{,}30\ \text{m}}$$

$$= 913{,}6\ \text{N} \approx 910\ \text{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Esse resultado indica que você terá de puxá-lo com 50% a mais de força do que se incliná-lo inicialmente, para trazer o centro de massa dele para o seu quadril. Um bom judoca conhece esta lição da física. (Para uma análise sobre judô e aikido veja "The Amateur Scientist", *Scientific American*, julho de 1980.)

11-10 Trabalho, Potência e o Teorema do Trabalho-Energia Cinética

Imaginemos que o corpo rígido na Fig. 11-18 (constituído por uma única partícula de massa m presa à extremidade de um bastão de massa desprezível) gira de um ângulo $d\theta$. O trabalho realizado pela força **F** é

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = (F_t)(r\,d\theta),$$

onde ds ($= r\,d\theta$) é a distância (comprimento do arco) percorrida pela partícula. Da Eq. 11-29, vemos que $F_t r$ é o torque τ, assim,

$$dW = \tau\,d\theta. \qquad (11\text{-}37)$$

Então, o trabalho realizado durante um deslocamento angular finito de θ_i a θ_f é

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\,d\theta. \qquad (11\text{-}38)$$

A Eq. 11-38, que é válida para a rotação de qualquer corpo rígido em torno de um eixo fixo, é o equivalente rotacional da Eq. 7-10, ou seja,

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx.$$

Podemos determinar a potência P para o movimento rotacional descrito pela Eq. 11-37:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega. \qquad (11\text{-}39)$$

Esse é o análogo rotacional da Eq. 7-32, $P = Fv$, que determina a taxa pela qual a força F realiza trabalho sobre uma partícula que se desloca com velocidade v, numa direção fixa.

Para determinar o equivalente angular do teorema do trabalho-energia cinética, vamos começar substituindo $I\alpha$ pelo torque τ, na Eq. 11-38. Logo,

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I\alpha\,d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I\left(\frac{d\omega}{dt}\right)d\theta$$

$$= \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)d\omega = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega\,d\omega.$$

Tabela 11-3
Algumas Relações Correspondentes para Movimentos de Rotação e Translação

Translação Pura (Direção Fixa)		*Rotação Pura (Eixo Fixo)*	
Posição	x	Posição angular	θ
Velocidade	$v = dx/dt$	Velocidade angular	$\omega = d\theta/dt$
Aceleração	$a = dv/dt$	Aceleração angular	$\alpha = d\omega/dt$
Massa (inércia de translação)	m	Momento de inércia (inércia de rotação)	I
Segunda lei de Newton	$F = ma$	Segunda lei de Newton	$\tau = I\alpha$
Trabalho	$W = \int F\,dx$	Trabalho	$W = \int \tau\,d\theta$
Energia cinética	$K = 1/2\,mv^2$	Energia cinética	$K = 1/2\,I\omega^2$
Potência	$P = Fv$	Potência	$P = \tau\omega$
Teorema trabalho-energia cinética	$W = \Delta K$	Teorema trabalho-energia cinética	$W = \Delta K$

Resolvendo a integral e aplicando a Eq. 11-23 ($K = I\omega^2/2$), temos

$$W = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = K_f - K_i = \Delta K. \qquad (11\text{-}40)$$

Esse *teorema do trabalho-energia cinética* nos diz que o trabalho realizado pelo torque resultante sobre um corpo rígido em rotação é igual à variação da energia cinética desse corpo. Esse é o equivalente angular do teorema do trabalho-energia cinética para o movimento translacional (Eq. 7-21), que podemos redefinir como: o trabalho realizado sobre um corpo rígido (ou uma partícula) pela força resultante que atua sobre ele é igual à variação da energia cinética de translação desse corpo.

A Tabela 11-3 resume as equações aplicadas à rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo e as relações equivalentes para o movimento de translação.

EXEMPLO 11-13 a. No dispositivo da Fig. 11-19, após 2,5 s, de qual ângulo a polia girou? Suponha que o sistema parta do repouso.

Solução Da Eq. 11-10, fazendo $\omega_0 = 0$ e usando o valor de α calculado no Exemplo 11-11, temos

$$\begin{aligned}\theta &= \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2\\ &= 0 + (\tfrac{1}{2})(-24\ \text{rad/s}^2)(2{,}5\ \text{s})^2\\ &= -75\ \text{rad}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

b. Qual a velocidade angular da polia em $t = 2{,}5$ s?

Solução Vamos determiná-la utilizando a Eq. 11-9, fazendo $\omega_0 = 0$ e usando o valor de α calculado no Exemplo 11-11, obtemos

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \alpha t\\ &= 0 + (-24\ \text{rad/s}^2)(2{,}5\ \text{s})\\ &= -60\ \text{rad/s}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

c. Qual a energia cinética da polia em $t = 2{,}5$ s?

Solução Pela Eq. 11-23, a energia cinética da polia é $I\omega^2/2$, onde $I = MR^2/2$. Então, usando o valor de ω calculado em (b),

$$\begin{aligned}K &= \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}MR^2)\omega^2\\ &= (\tfrac{1}{4})(2{,}5\ \text{kg})(0{,}20\ \text{m})^2(-60\ \text{rad/s})^2\\ &= 90\ \text{J}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

Uma outra forma de abordar esse problema é calcular a variação da energia cinética rotacional pelo teorema do trabalho-energia cinética. Para fazer isso, temos que calcular o trabalho realizado pelo torque sobre a polia. Este torque, exercido pela tensão T na corda, é constante, de forma que, pela Eq. 11-38,

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\,d\theta = \tau \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \tau(\theta_f - \theta_i).$$

Vamos usar $-TR$ para o torque τ, onde T é a tensão na corda (= 6,0 N; veja Exemplo 11-11) e R (= 0,20 m) é o raio da polia. A grandeza $\theta_f - \theta_i$ é exatamente o deslocamento angular calculado no item (a). Assim,

$$\begin{aligned}W &= \tau(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i)\\ &= -(6{,}0\ \text{N})(0{,}20\ \text{m})(-75\ \text{rad})\\ &= 90\ \text{J}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

Como K_i é zero (o sistema parte do repouso), pela Eq. 11-40, essa resposta é igual a K.

EXEMPLO 11-14 Uma escultura rígida, formada por um aro fino de metal (de massa m e raio $R = 0{,}15$ m) e duas hastes delgadas (de massa m e comprimento $L = 2{,}0\,R$), está montada conforme mostra a Fig. 11-21. A escultura pode girar em torno de um eixo horizontal, no plano do aro, passando pelo seu centro.

a. Qual o momento de inércia I da escultura, em relação ao eixo de rotação, em função de m e R?

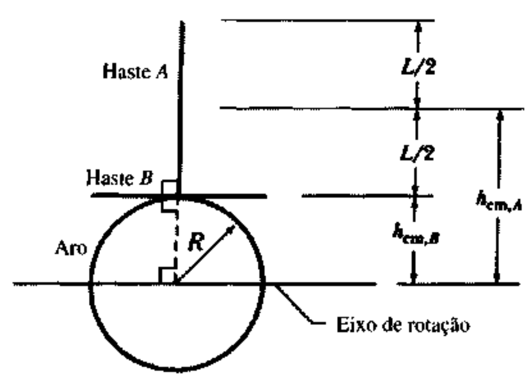


Fig. 11-21 Exemplo 11-14. Uma escultura, formada por um aro e duas hastes, gira em torno de um eixo.

Solução O momento de inércia do aro de metal fornecido pela Tabela 11-2(i) é igual a $mR^2/2$, em relação ao seu diâmetro. Ainda da Tabela 11-2(e), a haste A tem um momento de inércia igual a $mL^2/12$ em relação a um eixo, paralelo ao de rotação, que passa pelo seu centro de massa. Determinamos o momento de inércia total I_A da haste A, em relação ao seu eixo de rotação, usando o teorema dos eixos paralelos dado pela Eq. 11-25:

$$I_A = I_{cm,A} + mh^2_{cm,A} = \frac{mL^2}{12} + m\left(R + \frac{L}{2}\right)^2$$
$$= 4{,}33mR^2,$$

onde $L = 2{,}0R$ e $h_{cm,A}$ (= R + 1/2 L) é a distância perpendicular entre o eixo de rotação e o centro da haste A.

Para a haste B, usamos tratamento idêntico: o momento de inércia $I_{cm,B}$ em relação a um eixo na extensão do seu comprimento é nulo, e o momento de inércia I_B em relação ao eixo de rotação é

$$I_B = I_{cm,B} + mh^2_{cm,B} = 0 + mR^2 = mR^2.$$

Onde $h_{cm,B}$ (= R) é a distância perpendicular entre a haste B e o eixo de rotação. Logo, o momento de inércia I da escultura, em relação ao eixo de rotação, é

$$I = I_{aro} + I_A + I_B = \tfrac{1}{2}mR^2 + 4{,}33mR^2 + mR^2$$
$$= 5{,}83mR^2 \approx 5{,}8mR^2. \quad \text{(Resposta)}$$

b. Partindo do repouso, a escultura gira em torno do eixo de rotação, partindo da posição inicial da Fig. 11-21. Qual a sua velocidade angular ω em volta do eixo quando é invertida?

Solução Antes de a escultura se movimentar, seu centro de massa está a uma distância y_{cm} acima do eixo de rotação, com y_{cm} dado pela Eq. 9-5:

$$y_{cm} = \frac{m(0) + mR + m(R + L/2)}{3m} = R,$$

onde $3m$ é a massa da escultura. Enquanto a escultura gira, seu centro de massa se desloca da mesma distância *abaixo* do eixo de rotação. Então, o centro de massa é submetido a um deslocamento vertical de $\Delta y_{cm} = -2R$. Durante a descida, a energia potencial gravitacional U da escultura é transferida para a energia cinética K da rotação. A variação da energia potencial ΔU é o produto do peso da escultura ($3mg$) pelo deslocamento vertical Δy_{cm}. Logo,

$$\Delta U = 3mg\,\Delta y_{cm} = 3mg(-2R) = -6mgR.$$

Pela Eq. 11-23, a variação correspondente na energia cinética é

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 - 0 = \tfrac{1}{2}I\omega^2.$$

Assim, pela conservação da energia,

$$\Delta K + \Delta U = 0,$$

e

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 - 6mgR = 0.$$

Fazendo $I = 5{,}83mR^2$ e resolvendo para ω, obtemos

$$\omega = \sqrt{\frac{12g}{5{,}83R}} = \sqrt{\frac{(12)(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{(5{,}83)(0{,}15\ \text{m})}}$$
$$= 12\ \text{rad/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

RESUMO

Posição Angular

Para descrever a rotação de um corpo rígido em relação a um eixo fixo, chamado **eixo de rotação**, supomos uma **linha de referência** fixada ao corpo, perpendicular a esse eixo e girando solidária com o corpo. Medimos a **posição angular** θ dessa linha em relação ao eixo fixo. Onde θ é medido em **radianos**,

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(medidas em radianos)}, \qquad (11\text{-}1)$$

e s é o comprimento de arco de um círculo de raio r descrito por θ. A medida em radianos é relacionada ao ângulo medido em revoluções e graus por

$$1\ \text{rev} = 360° = 2\pi\ \text{rad}. \qquad (11\text{-}2)$$

Deslocamento Angular

Um corpo girando em volta de um eixo de rotação varia sua posição angular de θ_1 para θ_2, sofrendo **um deslocamento angular**

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1, \qquad (11\text{-}4)$$

onde $\Delta\theta$ é positivo para rotações anti-horário e negativo para o sentido inverso.

Velocidade Angular

Se um corpo sofre um deslocamento angular $\Delta\theta$ num intervalo de tempo Δt, sua **velocidade angular média** $\overline{\omega}$ é

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \qquad (11\text{-}5)$$

A **velocidade angular (instantânea)** ω do corpo é

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \qquad (11\text{-}6)$$

Tanto $\overline{\omega}$ como ω são vetores, com direção e sentido dados pela **regra da mão direita**, conforme a Fig. 11-5. São positivos na rotação anti-horário e negativos no sentido inverso. O módulo da **velocidade angular** é chamado de velocidade angular escalar.

Aceleração Angular

Se a velocidade angular de um corpo variar de ω_1 até ω_2, num intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, a **aceleração angular média** $\overline{\alpha}$ do corpo será

$$\overline{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \qquad (11\text{-}7)$$

A **aceleração angular (instantânea)** α do corpo é dada por

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (11\text{-}8)$$

Tanto $\overline{\alpha}$ como α são vetores.

As Equações Cinemáticas para a Aceleração Angular Constante
A *aceleração angular constante* (α = constante) é um caso especial importante do movimento rotacional. As equações cinemáticas apropriadas, dadas na Tabela 11-1, são

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \qquad (11\text{-}9) \qquad \theta = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t, \qquad (11\text{-}12)$$

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2, \qquad (11\text{-}10) \qquad \theta = \omega t - \tfrac{1}{2}\alpha t^2. \qquad (11\text{-}13)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta, \qquad (11\text{-}11)$$

Variáveis Angulares e Lineares
Um ponto num corpo rígido, a uma *distância r perpendicular* ao eixo de rotação, se move num círculo de raio r. Se o corpo girar de um ângulo θ, o ponto se moverá sobre um arco de comprimento s, dado por

$$s = \theta r \text{ (ângulos medidos em radianos)}, \qquad (11\text{-}15)$$

onde θ está em radianos.

A velocidade linear **v** do ponto é tangente ao círculo; a velocidade escalar v do ponto (o módulo da velocidade linear) é dada por

$$v = \omega r \quad \text{(ângulos medidos em radianos)}, \qquad (11\text{-}16)$$

onde ω é a velocidade angular escalar do corpo (em radianos por segundo).

A aceleração linear **a** tem componentes *tangencial* e *radial*. A componente tangencial é

$$a_t = \alpha r \text{ (ângulos medidos em radianos)}, \qquad (11\text{-}18)$$

onde α é o módulo da aceleração angular do corpo (em radianos por segundo ao quadrado). A componente radial de **a** é

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \text{ (ângulos medidos em radianos)}. \qquad (11\text{-}19)$$

Energia Cinética Rotacional e Inércia Rotacional
A energia cinética K de um corpo rígido, girando em torno de um eixo fixo, é dada por

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad \text{(ângulos medidos em radianos)}, \qquad (11\text{-}23)$$

onde I é o **momento de inércia** do corpo, definida como

$$I = \sum m_i r_i^2 \qquad (11\text{-}22)$$

para um sistema constituído de partículas discretas, e como

$$I = \int r^2\, dm \qquad (11\text{-}24)$$

para um corpo com distribuição contínua de massa. Os termos r e r_i, nessas expressões, representam as distâncias perpendiculares de cada elemento de massa do corpo ao eixo de rotação.

O Teorema dos Eixos Paralelos (Teorema Huygens-Steiner)
O *teorema dos eixos paralelos* define o momento de inércia de um corpo relativo a qualquer eixo deste corpo paralelo ao eixo que passa pelo centro de massa:

$$I = I_{cm} + Mh^2. \qquad (11\text{-}25)$$

Onde h é a distância perpendicular entre os dois eixos.

Torque
Uma força **F**, ao girar ou torcer um corpo em relação a um eixo de rotação, produz um *torque*. Se a força **F** for aplicada a um ponto determinado pelo vetor posição **r** em relação a esse eixo, então, o torque τ (uma grandeza vetorial) será

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \qquad (11\text{-}31)$$

O módulo do torque é

$$\tau = rF_t = r_\perp F = rF \operatorname{sen} \phi, \qquad (11\text{-}28, 11\text{-}29, 11\text{-}30)$$

onde F_t é a componente de **F** perpendicular a **r**, e ϕ é o ângulo entre **r** e **F**. A quantidade $r_\perp$ é a distância perpendicular entre o eixo de rotação e o prolongamento da linha suporte do vetor **F**. Esta linha é chamada de **linha de ação de F**, e $r_\perp$ de **braço de alavanca** de **F**. Da mesma forma, r é o braço de alavanca de F_t.

A unidade SI para o torque é o newton-metro (N·m). Um torque τ é positivo se produzir uma rotação anti-horário no corpo, e negativo no sentido contrário.

A Segunda Lei de Newton na Forma Angular
O análogo da segunda lei de Newton para a rotação é

$$\sum \tau = I\alpha, \qquad (11\text{-}34)$$

onde $\sum \tau$ é o torque resultante sobre uma partícula ou um corpo rígido, I é o momento de inércia da partícula ou do corpo em relação ao eixo de rotação, e α é a aceleração angular resultante em relação a esse eixo.

Trabalho e Energia Rotacionais
As equações utilizadas para calcular o trabalho e a potência no movimento de rotação são análogas às correspondentes para o movimento de translação, e são

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta \qquad (11\text{-}38)$$

e

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega. \qquad (11\text{-}39)$$

A forma do teorema do trabalho-energia cinética usada para corpos em movimento de rotação é

$$W = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = K_f - K_i = \Delta K. \qquad (11\text{-}40)$$

QUESTIONÁRIO

1. As grandezas angulares θ, ω e α podem ser expressas em graus, em vez de radianos, nas equações rotacionais da Tabela 11-1? Explique.

2. Qual a razão para radiano ser uma medida "natural" de ângulo e grau ser uma medida "arbitrária" desta mesma grandeza? (Leve em conta as definições das duas medidas.)

3. O vetor que representa a velocidade angular de rotação de uma roda em torno de um eixo fixo tem de estar necessariamente sobre este eixo?

4. Experimente girar um livro conforme mostra a Fig. 11-6, mas desta vez realizando deslocamentos de 180°, em vez de 90°. Qual a sua conclusão em relação à posição final do livro? Isto muda sua opinião acerca da possibilidade de deslocamentos angulares (finitos) serem tratados como vetores?

5. Estique seu braço direito para baixo, com a palma da mão voltada para a sua coxa. Mantendo seu pulso rígido, (1) levante o braço até que ele fique na horizontal e aponte para a frente, (2) mova-o horizontalmente até que ele aponte para a sua direita e (3) abaixe-o novamente por este mesmo lado. A palma de sua mão está voltada para a frente. Se você repetir o exercício, mas agora na seqüência inversa, por que a palma de sua mão *não* fica voltada para a frente?

6. Enquanto uma moeda é mantida fixa sobre a superfície de uma mesa, uma segunda, idêntica à primeira, gira em volta dela sem deslizamento (veja Fig. 11-22). Quando a segunda moeda retornar à sua posição original, de quanto ela girou?

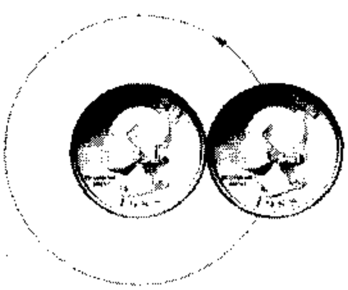


Fig. 11-22 Questão 6.

7. A rotação do Sol pode ser acompanhada pelo rastreamento das *manchas solares*, tempestades magnéticas em partes da superfície do Sol que parecem escuras em relação às outras partes. A Fig. 11-23*a* retrata a posição inicial de cinco dessas manchas e a Fig. 11-23*b*, a posição das mesmas manchas depois de realizada uma rotação. O que podemos concluir, dessas duas observações, acerca da estrutura do Sol?

(*a*) (*b*)

Fig. 11-23 Questão 7.

8. Por que é conveniente expressar α em revoluções por segundo ao quadrado na expressão $\theta = \omega_0 t + 1/2\alpha t^2$ e não na expressão $a_t = \alpha r$?

9. Um corpo rígido pode girar livremente em torno de um eixo fixo. É possível que a aceleração angular deste corpo seja diferente de zero, mesmo que a sua velocidade angular seja nula (talvez, instantaneamente)? Qual o equivalente linear dessa situação? Ilustre ambas as situações com exemplos.

10. Um jogador de golfe gira um taco efetuando um arremesso a longa distância. Todos os pontos do taco terão a mesma velocidade angular ω em qualquer instante, enquanto o taco estiver em movimento?

11. Quando dizemos que a velocidade angular de um ponto do equador é 2π rad/dia, que referencial estamos considerando?

12. Levando em consideração o movimento orbital e a rotação da Terra (que têm o mesmo sentido), explique se uma árvore se move mais rápido durante o dia ou durante a noite. Que referencial foi considerado na sua resposta?

13. Imagine uma roda girando sobre seu eixo e considere um ponto em sua borda. O ponto tem aceleração radial, quando a roda gira com velocidade angular constante? Tem aceleração tangencial? Quando ela gira com aceleração angular constante, o ponto tem aceleração radial? Tem aceleração tangencial? Os módulos dessas acelerações variam com o tempo?

14. Suponha que fosse pedido para você determinar a distância percorrida por uma agulha num toca-discos. De que informações precisaria? Discuta a situação do ponto de vista de referenciais (a) fixo na sala, (b) fixo no prato do toca-discos e (c) fixo no braço do toca-discos.

15. Qual a relação entre as velocidades angulares de um par de engrenagens acopladas, de raios diferentes?

16. Podemos considerar que a massa de um corpo está concentrada no seu centro de massa, para efeito de cálculo do momento de inércia do corpo? Em caso afirmativo, explique por quê. Se não, justifique com um exemplo.

17. Quando você fica ereto, em relação a que eixo o momento de inércia do seu corpo é (a) menor, (b) maior? (c) De que forma pode mudar o valor do momento de inércia do seu corpo em (a) e em (b)?

18. Se dois discos circulares, de mesmo peso e mesma espessura, forem feitos de metal com densidades diferentes, que disco, se for o caso, terá o maior momento de inércia em relação ao seu eixo central?

19. Sugira uma forma de medir experimentalmente o momento de inércia de um corpo, de forma não-definida, em relação a um determinado eixo desse corpo.

20. A Fig. 11-24 mostra as seções transversais de cinco sólidos com massas idênticas. Todas as seções têm a mesma altura e a mesma largura máxima. Qual deles tem maior momento de inércia em relação a um eixo ortogonal à sua seção reta, passando pelo seu centro de massa? Qual tem o menor?

Fig. 11-24 Questão 20.

21. A Fig. 11-25*a* mostra uma barra de 1 m, sendo metade de madeira e metade de metal, fixada por um eixo no ponto *O* da extremidade de madeira. Uma força **F** é aplicada ao ponto *a* da extremidade de metal. Na Fig. 11-25*b*, a barra é fixada por um eixo em *O'* na extremidade de metal e a mesma força é aplicada ao ponto *a'* da extremidade de madeira. A aceleração angular é a mesma para os dois casos? Se não, em que caso ela é maior?

22. Comente cada uma destas situações em relação ao esqui. (a) Numa competição de descida de montanha são necessários esquis que não virem com facilidade. (b) Numa pista especial com obstáculos, são necessários esquis que virem com facilidade. (c) Então, o momento de inércia na descida livre deve ser maior do que na descida com obstáculos. (d) Considerando o pouco atrito entre os esquis e a neve e que o centro de massa dos esquiadores está bem acima do centro dos esquis, como os esquiadores conseguem aplicar torques para fazer ou desfazer os desvios? (De "The Physics of Ski Turns", de J. I. Shonie e D. L. Mordick, *The Physics Teacher*, Dezembro 1972.)

23. Considere um bastão reto apoiado (sem atrito) sobre a extremidade de um pedaço de gelo. Se ele cair, qual será a trajetória do seu centro de massa?

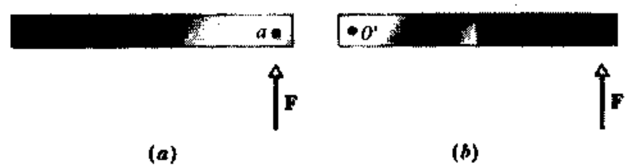


Fig. 11-25 Questão 21.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

Seção 11-2 As Variáveis da Rotação

1E. (a) Que ângulo, em radianos, é formado por um arco de 1,80 m de comprimento num círculo de 1,20 m de raio? (b) Expresse esse ângulo em graus. (c) O ângulo entre dois raios de um círculo é 0,620 rad. Se o raio for 2,40 m, qual a extensão do arco subentendido?

2E. Durante um intervalo de tempo t, a turbina de um gerador gira de um ângulo $\theta = at + bt^3 - ct^4$, onde a, b e c são constantes. Determine as expressões (a) de sua velocidade angular e (b) de sua aceleração angular.

3E. O Sol está a $2{,}3 \times 10^4$ anos-luz do centro da Via Láctea e se move numa trajetória circular em relação a esse centro, com uma velocidade de 250 km/s. (a) Em quanto tempo ele completa uma revolução em torno do centro da galáxia? (b) Quantas revoluções o Sol já completou, desde que foi formado há cerca de $4{,}5 \times 10^9$ anos?

4E. A posição angular de um ponto sobre a borda de uma roda em rotação é dada por $\theta = 4{,}0t - 3{,}0t^2 + t^3$, com θ em radianos e t em segundos. (a) Qual a velocidade angular em $t = 2{,}0$ s e em $t = 4{,}0$ s? (b) Qual a aceleração angular média entre $t = 2{,}0$ s e $t = 4{,}0$ s? (c) Qual a aceleração angular instantânea nesse mesmo intervalo?

5E. A posição angular de um ponto sobre uma roda em rotação é dada por $\theta = 2 + 4t^2 + 2t^3$, com θ em radianos e t em segundos. Em $t = 0$, quais são (a) a posição angular e (b) a velocidade angular? (c) Qual a velocidade angular em $t = 4{,}0$ s? (d) Calcule a aceleração angular em $t = 2{,}0$ s. (e) A aceleração angular é constante?

6P. Uma roda gira com uma aceleração angular α dada por $\alpha = 4at^3 - 3bt^2$, onde t é o tempo e a e b são constantes. Se ω_0 é a velocidade angular inicial da roda, deduza as equações para (a) a velocidade angular e (b) o deslocamento angular em função do tempo.

7P. Qual a velocidade angular (a) do ponteiro dos segundos, (b) do ponteiro dos minutos e (c) do ponteiro das horas de um relógio?

8P. Um bom jogador de beisebol pode arremessar uma bola em direção ao rebatedor a 136 km/h, com uma rotação de 1.800 rev/min. Quantas revoluções a bola faz durante a sua trajetória? Para simplificar, suponha uma trajetória retilínea de 18 m.

9P. Um atleta de salto ornamental completa 2,5 revoluções, ao pular de uma plataforma a 10 m de altura sobre a superfície da água. Calcule a velocidade angular média durante o salto, supondo nula a velocidade vertical inicial.

10P. Uma roda tem oito raios de 30 cm. Está montada sobre um eixo fixo e gira a 2,5 rev/s. Você pretende atirar uma flecha de 20 cm de comprimento através da roda, paralelamente ao eixo, sem que a flecha colida com qualquer raio. Suponha que tanto a flecha quanto os raios sejam muito finos; veja Fig. 11-26. (a) Qual a velocidade mínima que a flecha deve ter? (b) A localização do ponto que você mira, entre o eixo e a borda da roda, tem importância? Em caso afirmativo, qual a melhor localização?

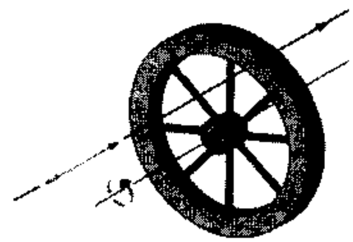


Fig. 11-26 Problema 10.

Seção 11-4 Rotação com Aceleração Angular Constante

11E. Um disco, rodando inicialmente a 120 rad/s, diminui a rotação com uma aceleração angular constante de módulo igual a 4,0 rad/s². (a) Quanto tempo decorre antes dele parar? (b) De quanto o disco gira até parar?

12E. O prato de um toca-discos, rodando a 33 1/3 rev/min, diminui e pára 30 s após o motor ser desligado. (a) Determine a sua aceleração angular (uniforme) em unidades de rev/min². (b) Quantas revoluções ele fez nesse intervalo?

13E. A velocidade angular do motor de um automóvel aumenta de 1.200 rev/min para 3.000 rev/min em 12 s. (a) Qual a sua aceleração angular, suposta uniforme, em rev/min²? (b) Quantas revoluções o motor realiza nesse intervalo?

14E. Um pesado rotor girando sobre seu eixo está parando por causa do atrito em seus mancais. Ao final do primeiro minuto, sua velocidade angular é 0,90 da velocidade inicial de 250 rev/min. Supondo que as forças de atrito sejam constantes, determine sua velocidade angular ao final do segundo minuto.

15E. O volante de um motor está girando a 25,0 rad/s. Quando o motor é desligado, o volante desacelera a uma taxa constante até parar em 20,0 s. Calcule (a) a aceleração angular do volante (em rad/s²), (b) o ângulo percorrido (em rad) até parar e (c) o número de revoluções completadas pelo volante até parar.

16E. Um disco gira sobre seu eixo com aceleração angular constante, partindo do repouso. Após 5,0 s, ele girou 25 rad. (a) Qual foi a aceleração angular nesse intervalo? (b) Qual a velocidade angular média? (c) Qual a velocidade angular instantânea após os 5,0 s? (d) Supondo que a aceleração seja constante, qual o deslocamento angular que o disco sofrerá nos próximos 5,0 s?

17E. Uma polia com 8,0 cm de diâmetro tem uma corda de 5,6 m de comprimento enrolada à sua volta. A polia é submetida a uma aceleração angular constante de 1,5 rad/s², a partir do repouso. (a) De quanto deve girar para desenrolar a corda? (b) Em quanto tempo isso é feito?

18P. Uma roda realiza 90 rev em 15 s, sua velocidade angular após esse tempo sendo 10 rev/s. (a) Qual a sua velocidade angular no início desse intervalo, admitindo que a aceleração angular é constante? (b) Quanto tempo decorreu entre o repouso e o início do intervalo de 15 s?

19P. Uma roda tem uma aceleração angular constante de 3,0 rad/s^2. Num intervalo de 4,0 s, ela gira 120 rad. Supondo que a roda partiu do repouso, quanto tempo permaneceu em movimento até o início do intervalo de 4,0 s?

20P. Uma roda, partindo do repouso, gira com aceleração angular constante de 2,00 rad/s^2. Durante um determinado intervalo de 3,00 s, gira 90,0 rad. (a) Quanto tempo permaneceu em movimento antes de iniciar o intervalo de 3,00 s? (b) Qual era a sua velocidade angular no início desse intervalo?

21P. Um rotor realiza 40 rev, enquanto freia desde uma velocidade angular de 1,5 rad/s até parar completamente. (a) Supondo que a aceleração seja uniforme, em quanto tempo ele pára? (b) Qual a sua aceleração angular? (c) Em quanto tempo completa as primeiras 20 rev?

22P. Em $t = 0$, uma turbina tem uma velocidade angular de 4,7 rad/s, uma aceleração angular de $-0,25$ rad/s^2 e uma linha de referência em $\theta_0 = 0$. (a) Qual o ângulo máximo $\theta_{máx}$ de deslocamento, no sentido positivo, da linha de referência? Em que instante t essa linha estará (b) em $\theta = 1/2\theta_{máx}$ e (c) em $\theta = -10,5$ rad (considere tanto valores positivos como negativos de t)? (d) Trace o gráfico de θ em função de t, assinalando as respostas dos itens anteriores.

23P. Um disco gira em torno de um eixo fixo, partindo do repouso com aceleração angular constante até alcançar a rotação de 10 rev/s. Depois de completar 60 revoluções, sua velocidade angular é 15 rev/s. Calcule (a) a aceleração angular, (b) o tempo necessário para completar as 60 revoluções, (c) o tempo necessário para alcançar a velocidade angular de 10 rev/s e (d) o número de revoluções desde o repouso até a velocidade de 10 rev/s.

24P. Uma roda está sob aceleração angular constante, a partir do repouso em $t = 0$. Em $t = 2,0$ s, a velocidade angular é 5,0 rad/s. Ela continua acelerada e, em $t = 20$ s, a aceleração é interrompida abruptamente. De quanto a roda gira no intervalo de $t = 0$ até $t = 40$ s?

25P. Um pulsar é uma estrela de nêutrons em rápida rotação que emite um pulso de rádio, de forma sincronizada, a cada rotação. O tempo de uma rotação é o *período T*, determinado pela medida do tempo entre os pulsos. Atualmente, o pulsar na região central da nebulosa de Câncer (veja Fig. 11-27) tem um período de rotação $T = 0,033$ s, que cresce à razão de $1,26 \times 10^{-5}$ s/ano. (a) Mostre que a velocidade angular ω da estrela está relacionada ao período por $\omega = 2\pi/T$. (b) Qual a aceleração angular em rad/s^2? (c) Se a aceleração angular for constante, daqui a quantos anos o pulsar vai cessar suas revoluções? (d) O pulsar, que se originou pela explosão de uma supernova, foi visto no ano de 1054. Qual o período T do pulsar quando ele se originou? (Suponha que desde então a aceleração angular seja constante.)

Seção 11-5 As Variáveis Lineares e Angulares

26E. Qual a aceleração de um ponto na borda de um disco de 30 cm (= 12 pol) de diâmetro, girando a 33 1/3 rev/min?

27E. Um disco, num toca-discos, roda a 33 1/3 rev/min. (a) Qual a velocidade angular em rad/s? Qual a velocidade linear de um ponto sob a agulha (b) no início e (c) no fim do disco? As distâncias da agulha ao eixo central, relativas a essas duas posições, são 15 cm e 7,3 cm, respectivamente.

28E. Qual a velocidade angular de um carro a 50 km/h, numa curva circular de 110 m de raio?

29E. Uma turbina com 1,20 m de diâmetro está girando a 200 rev/min. (a) Qual a velocidade angular da turbina em rad/s? (b) Qual a velocidade linear de um ponto na sua borda? (c) Que aceleração angular constante (rev/min^2) aumentará a sua velocidade para 1.000 rev/min em 60 s? (d) Quantas revoluções completará durante esse intervalo de 60 s?

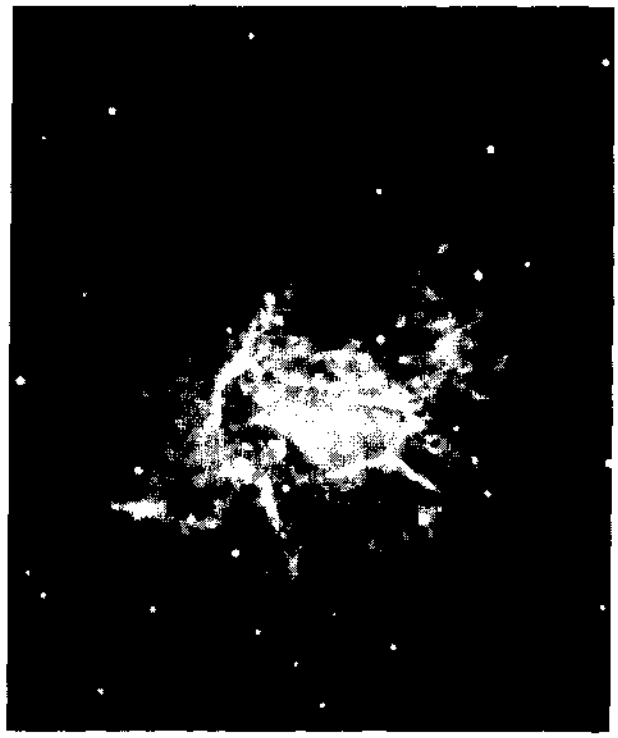


Fig. 11-27 Problema 25. A nebulosa de Câncer, resultado da explosão de uma estrela que foi avistada em 1054. Além do material gasoso visto aqui, a explosão criou uma estrela de nêutrons girante, que ocupa o centro da nebulosa.

30E. Um ponto na borda de um esmeril de 0,75 m de diâmetro varia uniformemente sua velocidade de 12 m/s a 25 m/s em 6,2 s. Qual a aceleração angular média do esmeril nesse intervalo?

31E. A órbita da Terra em volta do Sol é aproximadamente circular. Determine (a) a velocidade angular, (b) a velocidade linear e (c) a aceleração da Terra, todas em relação ao Sol.

32E. Um astronauta está sendo treinado numa centrífuga. A centrífuga tem um raio de 10 m e começa a girar de acordo com a equação $\theta = 0,30t^2$, onde t é dado em segundos e θ em radianos. Em $t = 5,0$ s, quais são (a) a velocidade angular, (b) a velocidade linear, (c) a aceleração tangencial (módulo) e (d) a aceleração radial (módulo) do astronauta?

33E. Quais são (a) a velocidade angular, (b) a aceleração radial e (c) a aceleração tangencial de uma espaçonave realizando uma curva circular de 3.220 km de raio, com uma velocidade constante de 29.000 km/h?

34E. Uma certa moeda de massa M é colocada a uma distância R do centro do prato de um toca-discos. O coeficiente de atrito estático é μ_e. A velocidade angular do toca-discos vai aumentando lentamente até ω_0, quando, neste instante, a moeda escorrega para fora do prato. (a) Determine ω_0 em função das grandezas M, R, g e μ_e. (b) Faça um esboço mostrando a trajetória aproximada da moeda, quando é projetada para fora do toca-discos.

35P. (a) Qual a velocidade angular de um ponto na latitude 40° N da superfície da Terra em relação ao eixo polar? (b) Qual a velocidade linear? (c) Calcule essas mesmas grandezas para um ponto no equador.

36P. A turbina de um motor a vapor gira com uma velocidade angular constante de 150 rev/min. Quando o vapor é desligado, o atrito nos mancais e a resistência do ar param a turbina em 2,2 h. (a) Qual a aceleração angular constante da turbina, em rev/min², durante a parada? (b) Quantas revoluções realiza antes de parar? (c) Qual a componente tangencial da aceleração linear de uma partícula situada a 50 cm do eixo de rotação, quando a turbina está girando a 75 rev/min? (d) Em relação à partícula do item (c), qual o módulo da aceleração linear resultante?

37P. O volante de um giroscópio, de 2,83 cm de raio, é acelerado a 14,2 rad/s², a partir do repouso, até sua velocidade angular alcançar 2.760 rev/min. (a) Qual a aceleração tangencial de um ponto na borda do volante? (b) Qual a aceleração radial desse ponto quando o volante está girando a plena velocidade? (c) Qual a distância percorrida por um ponto na borda durante a aceleração?

38P. Se a turbina de um avião, de 1,5 m de raio, gira a 2.000 rev/min, enquanto ele voa com a velocidade de 480 km/h em relação ao solo, qual a velocidade de um ponto na extremidade da turbina quando visto (a) pelo piloto e (b) por um observador no solo? Considere que o vetor velocidade do avião é paralelo ao eixo de rotação da turbina.

39P. Um dos primeiros métodos para se medir a velocidade da luz utilizava a rotação de uma roda dentada. Um feixe de luz passava através de um dente na borda externa da roda, conforme mostra a Fig. 11-28, atingindo um espelho distante, que o refletia de volta de forma a passar exatamente pelo próximo dente. Essa roda tem 5,0 cm de raio e possui 500 dentes em sua borda. Medidas realizadas com o espelho, colocado a uma distância $l = 500$ m da roda, indicaram o valor de $3{,}0 \times 10^5$ km/s para a velocidade da luz. (a) Qual a velocidade angular (constante) da roda? (b) Qual a velocidade linear de um ponto em sua borda?

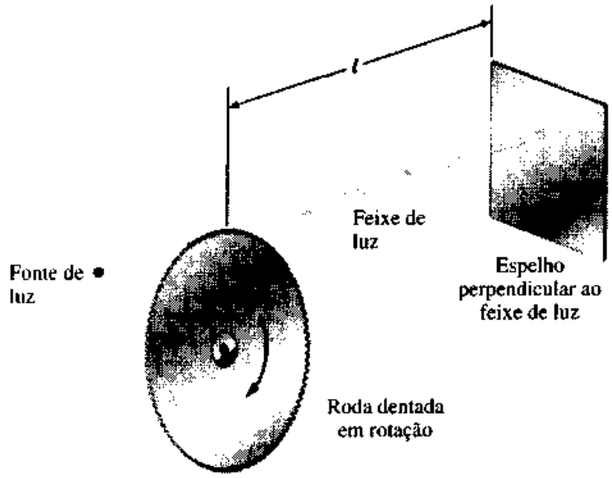


Fig. 11-28 Problema 39.

40P. Um carro parte do repouso e percorre uma trajetória circular de 30,0 m de raio. Sua velocidade aumenta na razão constante de 0,500 m/s². (a) Qual o módulo da sua aceleração linear *resultante*, depois de 15,0 s? (b) Que ângulo o vetor aceleração resultante faz com o vetor velocidade do carro nesse instante?

41P. A polia A de raio $r_A = 10$ cm está acoplada à C de raio $r_C = 25$ cm pela correia B, conforme mostra a Fig. 11-29. A polia A parte do repouso e aumenta uniformemente sua velocidade angular à razão de 1,6 rad/s². Supondo que a correia não deslize, determine o tempo necessário para a polia C alcançar a velocidade de rotação de 100 rev/min. (*Sugestão*: Se a correia não deslizar, a velocidade linear das bordas das duas polias deverá ser igual.)

42P. Quatro polias estão conectadas por duas correias conforme mostrado na Fig. 11-30. A polia A (15 cm de raio) é a polia motriz e gira a 10 rad/s. A B (10 cm de raio) está conectada à A pela correia 1. A B' (5 cm de raio) é concêntrica à B e está rigidamente ligada a ela. A polia C

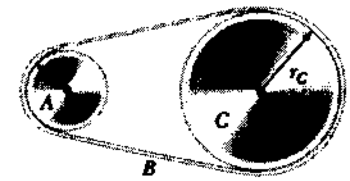


Fig. 11-29 Problema 41.

(25 cm de raio) está conectada à B' pela correia 2. Calcule (a) a velocidade linear de um ponto na correia 1, (b) a velocidade angular da polia B, (c) a velocidade angular da polia B', (d) a velocidade linear de um ponto na correia 2 e (e) a velocidade angular da polia C. (Veja a sugestão do problema anterior.)

43P. O prato de um toca-discos gira numa rotação de 33 1/3 rev/min. Um pequeno objeto está sobre o prato a 6,0 cm do eixo de rotação. (a) Calcule a aceleração do objeto, supondo que ele não deslize. (b) Qual o coeficiente de atrito estático mínimo entre o objeto e o prato? (c) Suponha que o prato partiu do repouso e foi submetido a uma aceleração angular constante durante 0,25 s até alcançar sua velocidade angular. Calcule o coeficiente de atrito estático mínimo necessário para o objeto não deslizar durante o intervalo de aceleração.

44P. Um CD tem um raio interno de 2,50 cm e um raio externo de 5,80 cm em relação à superfície gravada. Ao tocar, o disco é varrido a uma velocidade linear constante de 130 cm/s, partindo de dentro para fora da superfície gravada. Qual a velocidade angular da varredura (a) no raio interno e (b) no raio externo? (c) A aceleração angular é constante? (d) A espiral de varredura tem um passo de 1,60 μm; qual a sua extensão total? (e) Qual o tempo de reprodução da gravação?

Seção 11-6 Energia Cinética de Rotação

45E. Calcule o momento de inércia de uma roda que tem 24.400 J de energia cinética ao girar a 602 rev/min.

46P. A molécula de oxigênio, O_2, tem massa total de $5{,}30 \times 10^{-26}$ kg e um momento de inércia de $1{,}94 \times 10^{-46}$ kg·m², em relação ao eixo que atravessa perpendicularmente a linha de junção dos dois átomos. Suponha que essa molécula tenha em um gás à velocidade de 500 m/s e que sua energia cinética de rotação seja dois terços da energia cinética de translação. Determine sua velocidade angular.

Seção 11-7 Cálculo do Momento de Inércia

47E. Calcule as energias cinéticas de dois cilindros sólidos uniformes, que giram individualmente em torno de seu eixo central com a mesma velocidade angular de 235 rad/s. Ambos têm 1,25 kg de massa, mas o raio do primeiro é de 0,25 m e o do segundo, 0,75 m.

48E. Uma molécula tem um momento de inércia de 14.000 u·pm² e está girando com uma velocidade angular de $4{,}3 \times 10^{12}$ rad/s. (a) Expresse o

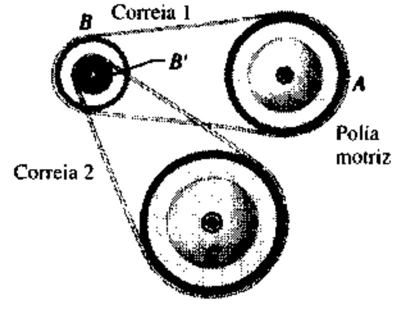


Fig. 11-30 Problema 42.

momento de inércia em kg·m². (b) Calcule a energia cinética rotacional em elétrons-volt.

49E. As massas e as coordenadas de quatro partículas são as seguintes: 50 g, $x = 2{,}0$ cm, $y = 2{,}0$ cm; 25 g, $x = 0$, $y = 4{,}0$ cm; 25 g, $x = -3{,}0$ cm, $y = -3{,}0$ cm; 30 g, $x = -2{,}0$ cm, $y = 4{,}0$ cm. Qual o momento de inércia do conjunto em relação (a) ao eixo x, (b) ao eixo y e (c) ao eixo z? (d) Se as respostas para (a) e (b) forem, respectivamente, A e B, então qual a resposta para (c) em função de A e B?

50E. Um satélite de comunicações é um cilindro sólido de 1.210 kg de massa, 1,21 m de diâmetro e 1,75 m de comprimento. Antes de ser lançado do compartimento de carga de um ônibus espacial, é colocado em rotação a uma velocidade de 1,52 rev/s em torno de seu eixo (veja Fig. 11-31). Calcule (a) o momento de inércia em torno do eixo de rotação e (b) a energia cinética rotacional do satélite.

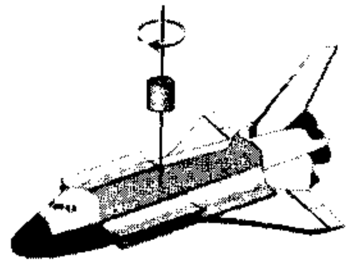


Fig. 11-31 Exercício 50.

51E. Duas partículas, de massa m cada uma, estão ligadas entre si e a um eixo de rotação em O por dois bastões delgados de comprimento l e massa M cada um, conforme mostrado na Fig. 11-32. O conjunto gira em torno do eixo de rotação com velocidade angular ω. Determine, algebricamente, as expressões (a) para o momento de inércia do conjunto em relação a O e (b) para a energia cinética de rotação em relação a O.

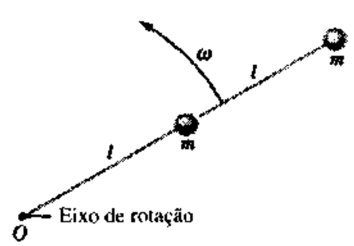


Fig. 11-32 Exercício 51.

52E. Cada uma das três lâminas da hélice de um helicóptero tem 5,20 m de comprimento e 240 kg de massa, conforme mostrado na Fig. 11-33. O rotor gira a 350 rev/min. (a) Qual o momento de inércia do conjunto em relação ao eixo de rotação? (Cada lâmina pode ser considerada um bastão delgado; por quê?) (b) Qual a energia cinética de rotação?

53E. Suponha que a Terra seja uma esfera de densidade uniforme. Calcule (a) seu momento de inércia e (b) sua energia cinética rotacional. (c) Suponha que essa energia pudesse ser utilizada por nós. Por quanto tempo a Terra poderia fornecer a potência de 1,0 kW a cada um dos 4,2 × 10⁹ habitantes do planeta? (Calcule todas as quantidades em relação ao eixo da Terra.)

54E. Calcule o momento de inércia de uma régua de 0,56 kg de massa em relação a um eixo que passa pela marca de 20 cm, perpendicular a ela. (Considere a régua como um bastão delgado.)

55P. Mostre que o menor momento de inércia de um determinado corpo rígido é aguda em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa.

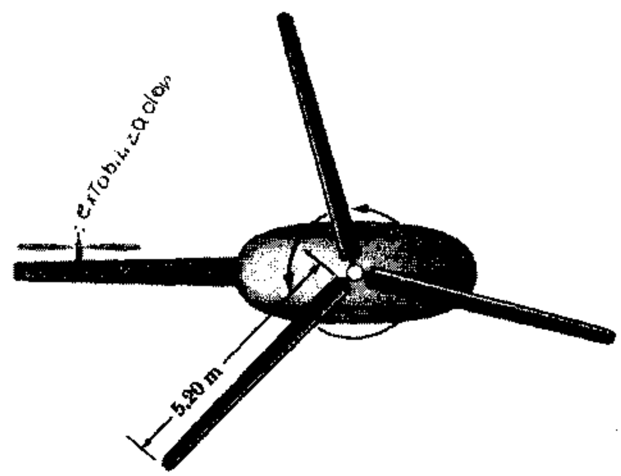


Fig. 11-33 Exercício 52.

56P. Deduza a expressão para o momento de inércia de um aro de massa M e raio R em relação a seu eixo central; veja a Tabela 11-2(a).

57P. Um bloco sólido, uniforme, de massa M e dimensões a, b e c é mostrado na Fig. 11-34. Calcule seu momento de inércia em relação a um eixo que passa por uma das arestas e é ortogonal ao plano da face maior.

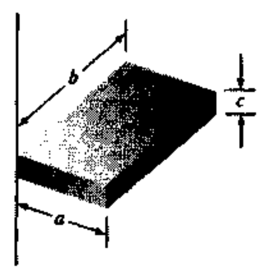


Fig. 11-34 Problema 57.

58P. (a) Mostre que o momento de inércia de um cilindro sólido, de massa M e raio R, em relação a seu eixo central é igual ao momento de inércia de um aro fino de massa M e raio $R/\sqrt{2}$ em relação a seu eixo central. (b) Mostre que o momento de inércia I de um corpo qualquer de massa M em relação a qualquer eixo é igual ao momento de inércia de um *aro equivalente* em relação a esse eixo, se o aro tiver a mesma massa M e raio k dado por

$$K=\frac{\sqrt{I}}{M}.$$

O raio k do aro equivalente é chamado de *raio de giração* do corpo.

59P. Na Europa, alguns veículos de transporte se movimentam pelo uso da energia armazenada numa espécie de turbina. Os veículos utilizam um motor elétrico que carrega a turbina, fazendo-a girar a uma velocidade máxima de 200π rad/s. A turbina é um cilindro sólido, homogêneo, de 500 kg de massa e 1,0 m de raio. (a) Qual a energia cinética da turbina depois de carregada? (b) Se a potência média necessária para o veículo funcionar for 8,0 kW, quantos minutos ele conseguirá operar, antes de necessitar uma nova carga?

Seção 11-8 Torque

60E. Uma pequena bola de 0,75 kg está presa a uma das extremidades de uma haste de 1,25 m de extensão e de massa desprezível, a outra extremidade está presa a um eixo, formando um pêndulo. Quando o pêndulo é desviado 30° da vertical, qual o módulo do torque sobre o eixo?

61E. Um ciclista de 70 kg de massa coloca todo o seu peso em cada um dos pedais, para movê-los para baixo, quando está subindo uma ladeira. Considerando que a roda da corrente, onde o pedal está preso, tem 0,40 m de diâmetro, determine o módulo do torque máximo exercido nesse processo.

62E. O comprimento da haste do pedal de uma bicicleta é 0,512 m, e o pé aplica uma força, para baixo, de 111 N. Qual o módulo do torque sobre o eixo do pedal, quando a haste faz um ângulo de (a) 30°, (b) 90° e (c) 180° com a vertical?

63P. Conforme mostra a Fig. 11-35, duas forças são aplicadas a um corpo que está fixado a um eixo no ponto O. (a) Deduza uma expressão para o módulo do torque resultante sobre o corpo em relação a esse eixo. (b) Sendo $r_1 = 1{,}30$ m, $r_2 = 2{,}15$ m, $F_1 = 4{,}20$ N, $F_2 = 4{,}90$ N, $\theta_1 = 75{,}0°$ e $\theta_2 = 60{,}0°$, qual o torque resultante em relação ao eixo?

Fig. 11-35 Problema 63.

64P. Na Fig. 11-36, o corpo está fixado a um eixo no ponto O. Três forças são aplicadas nas direções mostradas na figura: no ponto A, a 8,0 m de O, $F_A = 10$ N; no ponto B, a 4,0 m de O, $F_B = 16$ N; no ponto C, a 3,0 m de O, $F_C = 19$ N. Qual o torque resultante em relação a O?

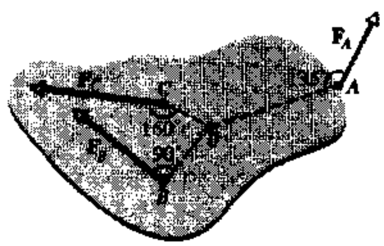


Fig. 11-36 Problema 64.

Seção 11-9 A Segunda Lei de Newton para a Rotação

65E. Uma determinada roda adquire uma aceleração angular de 25,0 rad/s², quando um torque de 32,0 N é aplicado sobre ela. Qual o momento de inércia da roda?

66E. Um atleta, ao saltar de um trampolim, variou sua velocidade angular de zero a 6,20 rad/s em 220 ms. Seu momento de inércia é de 12,0 kg·m². (a) Durante o salto, qual foi a sua aceleração angular? (b) Qual o torque externo sobre ele durante o salto?

67E. Um cilindro, que tem uma massa de 2,0 kg, pode girar em torno de um eixo que passa pelo seu centro O. Nele são aplicadas quatro forças, conforme a Fig. 11-37: $F_1 = 6{,}0$ N, $F_2 = 4{,}0$ N, $F_3 = 2{,}0$ N e $F_4 = 5{,}0$ N. Sabendo que $R_1 = 5{,}0$ cm e $R_2 = 12$ cm, determine o módulo e o sentido da aceleração angular do cilindro. Suponha que durante a rotação as forças mantenham as mesmas orientações em relação ao cilindro.

68E. Um pequeno objeto de 1,30 kg de massa está montado em uma das extremidades de uma haste de 0,780 m e de massa desprezível. O sistema gira a 5.010 rev/min, descrevendo um círculo horizontal em relação à outra extremidade da haste. (a) Calcule o momento de inércia do sistema relativo ao eixo de rotação. (b) A resistência do ar exerce

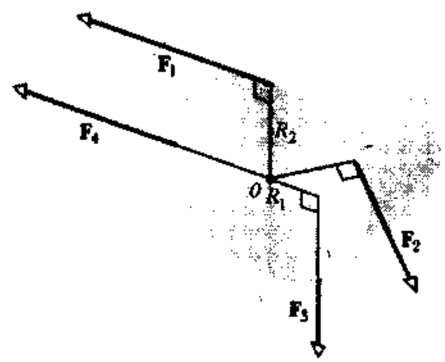


Fig. 11-37 Exercício 67.

uma força de $2{,}30 \times 10^{-2}$ N sobre o objeto, em oposição ao movimento. Que torque deve ser aplicado ao sistema para que seja mantido em rotação com velocidade constante?

69E. Uma casca esférica fina tem um raio de 1,90 m. Um torque de 960 N·m aplicado a ela implica uma aceleração angular de 6,20 rad/s² em torno de um eixo que passa pelo seu centro. (a) Qual o momento de inércia da casca em relação a esse eixo de rotação? (b) Calcule a massa da casca.

70P. Uma força é aplicada tangencialmente à borda de uma polia que tem 10 cm de raio e momento de inércia de $1{,}0 \times 10^{-3}$ kg·m² em relação a seu eixo. A força tem módulo variável com o tempo, segundo a relação $F = 0{,}50t + 0{,}30t^2$, com F em newtons e t em segundos. A polia está inicialmente em repouso. Em $t = 3{,}0$ s, quais são (a) sua aceleração angular e (b) sua velocidade angular?

71P. A Fig. 11-38 mostra uma porta blindada, maciça, para testes de nêutrons no Laboratório Lawrence Livermore; esta é a porta articulada mais pesada do mundo. Ela tem massa de 44.000 kg, um momento de inércia de $8{,}7 \times 10^4$ kg·m², em torno do eixo das dobradiças, e 2,4 m de largura. Desprezando o atrito, que força, mantida constante, deve ser aplicada perpendicularmente ao plano da porta na sua lateral externa para movê-la de 90°, a partir do repouso, em 30 s? Admita que não haja atrito também nas dobradiças.

72P. Duas esferas sólidas, uniformes, têm a mesma massa de 1,65 kg, mas uma delas tem 0,226 m de raio, enquanto a outra tem 0,854 m. (a) Calcule, para cada esfera, o torque necessário para levá-la a uma velo-

Fig. 11-38 Problema 71.

cidade angular de 317 rad/s, em 15,5 s, a partir do repouso. Cada esfera gira em torno de um eixo que passa pelo seu centro. (b) Que força, aplicada tangencialmente e individualmente na altura do equador das esferas, produzirá o torque necessário?

73P. Numa máquina de Atwood (veja Fig. 5-28), um bloco tem massa de 500 g e o outro de 460 g. A polia, que está montada sobre um suporte horizontal sem atrito, tem um raio de 5,00 cm. Quando ela é solta, o bloco mais pesado cai 75,0 cm em 5,00 s (a corda não desliza na polia). (a) Qual a aceleração de cada bloco? Qual a tensão na corda que suporta (b) o bloco mais pesado e (c) o bloco mais leve? (d) Qual a aceleração angular da polia? (e) Qual o seu momento de inércia ?

74P. A Fig. 11-39 mostra dois blocos de massa m suspensos nas extremidades de uma haste rígida, sem peso, de comprimento $l_1 + l_2$, com l_1 = 20 cm e l_2 = 80 cm. A haste é mantida na posição horizontal mostrada na figura e, então, solta. Calcule as acelerações dos dois blocos quando eles começam a se mover.

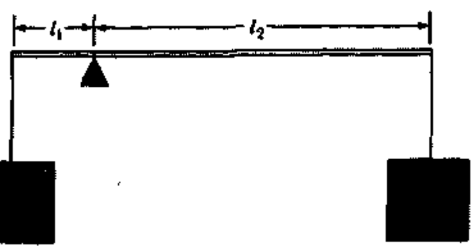


Fig. 11-39 Problema 74.

75P. Dois blocos idênticos, de massa M cada um, estão ligados por uma corda de massa desprezível, que passa por uma polia de raio R e de momento de inércia I (veja Fig. 11-40). A corda não desliza sobre a polia; desconhece-se existir ou não atrito entre o bloco e a mesa; não há atrito no eixo da polia. Quando esse sistema é liberado, a polia gira de um ângulo θ, num tempo t, e a aceleração dos blocos é constante. (a) Qual a aceleração angular da polia? (b) Qual a aceleração dos dois blocos? (c) Quais as tensões na parte superior e inferior da corda? Todas essas respostas devem ser expressas em função de M, I, R, θ, g e t.

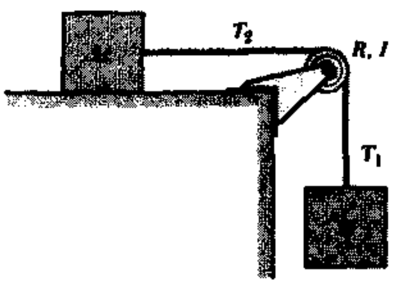


Fig. 11-40 Problema 75.

76P. A duração de um dia cresce à razão de 1 ms/século. Isso a princípio é devido ao atrito gerado pelo movimento das marés, por influência do Sol e da Lua. (a) Com que taxa a Terra perde energia cinética rotacional? (b) Qual a sua aceleração angular? (c) Qual a força tangencial aplicada pelos oceanos próximo à costa (em média) nas latitudes 60° N e 60° S?

77P. Uma chaminé alta, de forma cilíndrica, cai se houver uma ruptura na sua base. Tratando a chaminé como um bastão fino, de altura h, expresse (a) a componente radial da aceleração linear do topo da chaminé, em função do ângulo θ que ela faz com a vertical, e (b) a componente tangencial dessa mesma aceleração. (c) Em que ângulo θ a aceleração linear é igual a g?

Seção 11-10 Trabalho, Potência e Teorema do Trabalho-Energia Cinética

78E. Considere a Fig. 11-19. (a) Se R = 12 cm, M = 400 g e m = 50g, calcule a velocidade escalar de m após descer 50 cm a partir do repouso. Resolva o problema usando o princípio de conservação de energia. (b) Refaça o item (a) com R = 5,0 cm.

79E. Um motor de automóvel desenvolve 100 hp (= 74,6 kW), quando gira a uma velocidade de 1.800 rev/min. Qual o seu torque?

80E. Um aro fino de 32,0 kg tem 1,20 m de raio e está girando a 280 rev/min. Ele é parado em 15,0 s. (a) Qual o trabalho realizado para pará-lo? (b) Qual a potência necessária?

81E. Um bastão fino de comprimento l e massa m está suspenso livremente por uma de suas extremidades. É puxado lateralmente para oscilar como um pêndulo, passando pela posição mais baixa com uma velocidade angular ω. (a) Calcule sua energia cinética ao passar por essa posição. (b) A partir deste ponto, qual a altura alcançada pelo seu centro de massa? Despreze o atrito e a resistência do ar.

82P. Uma régua, apoiada no chão verticalmente por uma das extremidades, cai. Determine a velocidade da outra extremidade quando bate no chão, supondo que o extremo apoiado não deslize. (*Sugestão:* Considere a régua como um bastão fino e use o princípio de conservação de energia.)

83P. Um corpo rígido é composto por três hastes finas, idênticas, de igual comprimento l, soldadas em forma de H (veja Fig. 11-41). O corpo gira livremente em volta de um eixo horizontal que passa ao longo de uma das pernas do H. Quando o plano de H é horizontal, o corpo cai, a partir do repouso. Qual a velocidade angular do corpo quando o plano de H passa pela posição vertical?

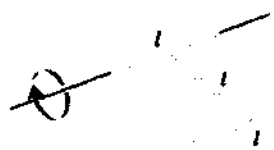


Fig. 11-41 Problema 83.

84P. Calcule (a) o torque, (b) a energia e (c) a potência média necessárias para acelerar a Terra, do repouso até a sua velocidade angular atual em volta do seu eixo, em um dia.

85P. Uma lâmina uniforme do rotor de um helicóptero (veja Fig. 11-33) tem 7,80 m de comprimento e 110 kg de massa. (a) Qual a força exercida sobre o parafuso que prende a lâmina ao eixo do rotor, quando este gira a 320 rev/min? (*Sugestão*: Para esse cálculo, podemos considerar que toda a massa da lâmina está concentrada no seu centro de massa. Por quê?) (b) Calcule o torque que deve ser aplicado ao rotor para que ele alcance a velocidade angular mencionada em (a) em 6,7 s, a partir do repouso. Despreze a resistência do ar. (Para esse cálculo não podemos considerar a massa da lâmina concentrada no centro de massa. Por quê? Suponha uma distribuição de massa uniforme, como em um bastão fino.) (c) Para a lâmina alcançar a velocidade de 320 rev/min, qual o trabalho realizado pelo torque?

86P. Uma casca esférica uniforme, de massa M e raio R, gira sobre um eixo vertical, sem atrito (veja Fig. 11-42). Uma corda, de massa desprezível, passa em volta do equador da esfera e prende um pequeno corpo de massa m, que pode cair livremente sob a ação da gravidade. A corda prende o corpo através de uma polia de momento de inércia I e raio r. O atrito da polia em relação ao eixo é nulo e a corda não desliza na polia. Qual a velocidade do corpo, depois de cair de uma altura h, partindo do repouso? Use o teorema do trabalho-energia.

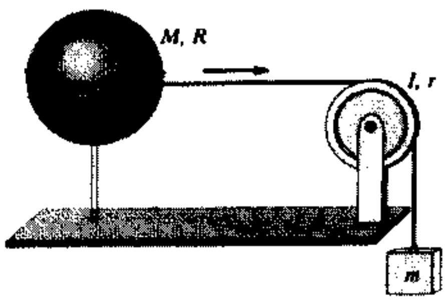


Fig. 11-42 Problema 86.

87P. Duas pequenas bolas de 1,06 kg de massa estão presas às extremidades de um bastão fino de aço, de 1,20 m de comprimento e 6,40 kg de massa. O bastão é mantido em rotação num plano horizontal, em volta de um eixo vertical que passa pelo seu ponto médio. Num determinado instante ele está girando com uma velocidade angular de 39,0 rev/s. Após 32,0 s, pára devido ao atrito. Calcule, supondo constante o torque devido ao atrito, (a) a aceleração angular, (b) o torque exercido pelo atrito, (c) o trabalho resultante realizado pelo atrito e (d) o número de revoluções durante os 32,0 s. (e) Agora, suponha que o torque relativo ao atrito não seja constante. Quais das grandezas, em (a), (b), (c) ou (d), se for o caso, podem ser calculadas sem informações adicionais? Se existir, qual o seu valor?

88P*. O volante-motor de um carro é um dispositivo compensador de energia, que está acoplado a um eixo de transmissão e gira a 240 rev/s quando o carro está a 80 km/h. A massa total do carro é de 800 kg; o volante-motor, um disco uniforme de 1,1 m de diâmetro, pesa 200 N. O carro, partindo do repouso, desce um plano de 1.500 m de extensão e inclinação de 5°, engrenado e com o motor desligado. Sem considerar o atrito e o momento de inércia das rodas, determine (a) a velocidade do carro no final da inclinação, (b) a aceleração angular do volante-motor no final da inclinação e (c) a taxa com que a energia é armazenada no volante-motor em rotação, no final do plano inclinado.

PROBLEMAS ADICIONAIS

89. Quatro partículas idênticas, cada uma de 0,50 kg de massa, estão colocadas nos vértices de um quadrado de 2,0 m × 2,0 m, formado por quatro hastes de massa desprezível. Qual o momento de inércia desse corpo rígido em relação a um eixo (a) coplanar ao quadrado passando pelos pontos médios dos lados opostos, (b) ortogonal ao quadrado que passa pelo ponto médio de um dos lados, (c) coplanar ao quadrado passando por duas partículas diagonalmente opostas?

90. Um objeto que gira em torno de um eixo fixo tem uma linha de referência definida por $\theta = 0{,}40e^{2t}$, onde θ está em radianos e t em segundos. Considere um ponto sobre o objeto a 4,0 cm do eixo de rotação. No instante $t = 0$, qual o módulo (a) da componente tangencial e (b) da componente radial da aceleração do ponto?

91. Uma polia de 0,20 m de raio está montada sobre um eixo horizontal sem atrito. Uma corda, de massa desprezível, está enrolada em volta da polia e presa a um corpo de 2,0 kg, que desliza sem atrito sobre uma superfície inclinada de 20° com a horizontal, conforme mostrado na Fig. 11-43. O corpo desce com uma aceleração de 2,0 m/s². Qual o momento de inércia da polia em torno do eixo de rotação?

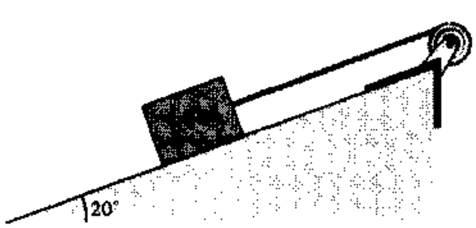


Fig. 11-43 Problema 91.

92. O prato de um toca-discos está a uma velocidade angular de 8,0 rad/s quando é desligado. Três segundos depois, a velocidade do toca-discos é 2,6 rad/s. De quantos radianos o toca-discos gira, desde o instante em que foi desligado até parar? (Considere a aceleração angular constante.)

93. Dois discos delgados, cada um de 4,0 kg de massa e raio de 0,40 m, são ligados conforme mostrado na Fig. 11-44 para formar um corpo rígido. Qual o momento de inércia desse corpo em volta de um eixo A, ortogonal ao plano dos discos e passando pelo centro de um deles?

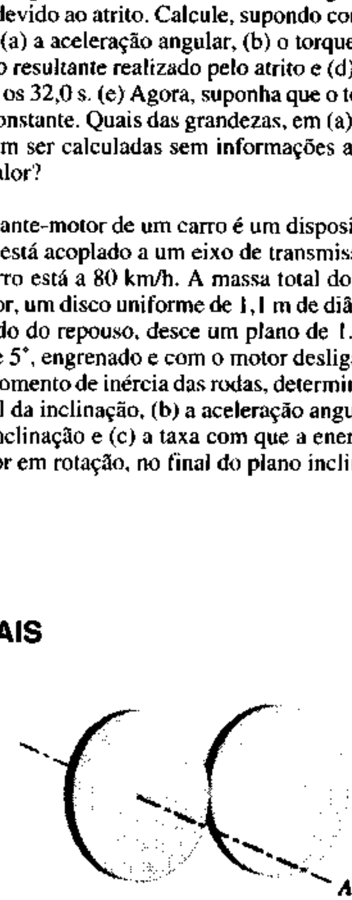


Fig. 11-44 Problema 93.

94. O corpo rígido apresentado na Fig. 11-45 é formado por três partículas interligadas por três hastes de massa desprezível. O corpo gira em torno de um eixo que passa pelo ponto P e é ortogonal ao seu plano. Sendo $M = 0{,}40$ kg, $a = 30$ cm e $b = 50$ cm, qual o trabalho necessário para levar o corpo do repouso a uma velocidade angular de 5,0 rad/s?

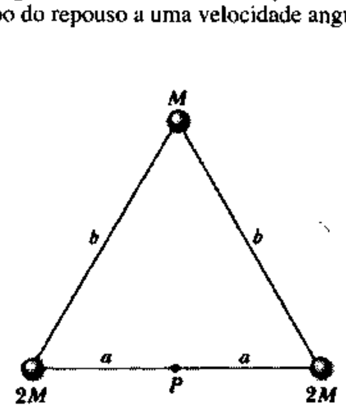


Fig. 11-45 Problema 94.

95. Um bastão uniforme tem 1,5 kg de massa e 2,0 m de comprimento (veja Fig. 11-46). O bastão pode girar, sem atrito, em torno de um pino horizontal preso em uma de suas extremidades. Ele está em repouso, fazendo um ângulo de 40° com a horizontal, quando inicia o movimento. (a) Qual a aceleração angular do bastão nesse instante? (O seu momento de inércia em relação ao pino é de 2,0 kg·m².) (b) Use o princípio de conservação da energia para determinar a velocidade angular do bastão quando ele passa pela posição horizontal.

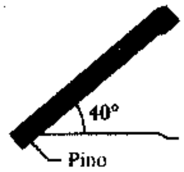


Fig. 11-46 Problema 95.

96. Um cilindro uniforme de 10 cm de raio e 20 kg de massa está montado de forma a girar livremente em torno de um eixo horizontal paralelo ao seu eixo longitudinal e distando 5,0 cm deste. (a) Qual o momento de inércia do cilindro em torno do eixo de rotação? (b) Se o cilindro partir do repouso, com seu eixo alinhado na mesma altura do eixo de rotação, qual a sua velocidade angular ao passar pelo ponto mais baixo da trajetória? (*Sugestão:* Use o princípio de conservação da energia.)