MOVIMENTO EM DUAS E EM TRÊS DIMENSÕES

4

Quando uma "bala humana" é lançada de um canhão, a fumaça e o ruído são apenas para impressionar, porque a propulsão é realizada por mola ou por ar comprimido, e não por uma explosão. Apesar disso, esse número é perigoso para o artista por duas razões. A primeira é que a rápida propulsão na boca do canhão, em geral, causa um desmaio momentâneo, do qual ele deve despertar, antes de cair na rede, para não quebrar o pescoço. A outra é que a rede pode não estar no lugar certo, com relação ao ângulo e à velocidade do lançamento.

4-1 Movimento em Duas ou Três Dimensões

Neste capítulo, estendemos as considerações apresentadas nos dois anteriores, para os casos bi e tridimensionais. Muitos dos conceitos utilizados no Cap. 2, como posição, velocidade e aceleração, também aparecem neste capítulo de uma forma mais complexa. Vamos usar a álgebra vetorial apresentada no Cap. 3, que nos permitirá trabalhar com uma notação formalmente idêntica à do caso unidimensional. Dessa forma, se necessário, poderemos recorrer àqueles capítulos anteriores.

Um exemplo de movimento em duas dimensões é o vôo de um homem-bala. A versão moderna deste perigoso evento remonta ao ano de 1922, quando os Zacchinis, uma famosa família circense, pela primeira vez atiraram um de seus membros de um canhão para uma rede montada numa arena. A família foi, gradualmente, aumentando a altura e a duração do vôo, para tornar o espetáculo mais emocionante. Por volta de 1939 ou 1940, foi alcançado o limite de segurança razoável, quando Emanuel Zacchini voou sobre três rodas-gigantes, atravessando uma distância horizontal de 68 metros.

Como Zacchini poderia saber onde colocar a rede? E como poderia ter certeza de que conseguiria transpor as rodas-gigantes? Esteja certo de que ele não gostaria de responder a essas perguntas, através de tentativas e erros.

4-2 Posição e Deslocamento

De maneira geral, a localização de uma partícula é dada através do **vetor posição r**, um vetor que vai de um ponto de referência (geralmente a origem de um sistema de coordenadas), até a partícula. Usando a notação de vetores unitários da Seção 3-4, podemos escrever **r** como

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad (4\text{-}1)$$

onde $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$ e $z\mathbf{k}$ são as componentes vetoriais de $\mathbf{r}$, e os coeficientes x, y e z são suas componentes escalares. (Esta notação é ligeiramente diferente daquela usada no Cap. 3. Perca um minuto e convença-se de que as duas são comparáveis.)

Os coeficientes x, y e z dão a localização da partícula relativa aos eixos e referente à origem. Por exemplo, a Fig. 4-1 mostra um objeto P, cujo vetor posição, naquele instante, é

$$\mathbf{r} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}. \qquad (4\text{-}2)$$

Ao longo do eixo x, P está a 3 unidades da origem, no sentido $-\mathbf{i}$. Ao longo do eixo y, está a 2 unidades da origem, no sentido $+\mathbf{j}$. E, ao longo do eixo z, está a 5 unidades da origem, no sentido $+\mathbf{k}$.

Quando um objeto está em movimento, seu vetor posição varia, ligando sempre a origem ao objeto. Se o vetor posição do objeto no instante t_1 é $\mathbf{r}_1$ e o vetor posição no instante $t_1 + \Delta t$ seguinte é $\mathbf{r}_2$, então seu *deslocamento* $\Delta\mathbf{r}$ durante o intervalo Δt é

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \qquad (4\text{-}3)$$

EXEMPLO 4-1 Inicialmente, o vetor posição de uma partícula é

$$\mathbf{r}_1 = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

e logo depois é

$$\mathbf{r}_2 = 9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

(veja a Fig. 4-2). Qual é o deslocamento de $\mathbf{r}_1$ para $\mathbf{r}_2$?

Solução Relembrando do Cap. 3 que a subtração de dois vetores, utilizando notação de vetores unitários, é feita subtraindo cada componente, eixo a eixo, temos, usando a Eq. 4-3,

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{r} &= (9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) - (-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \\ &= 12\mathbf{i} + 3\mathbf{k}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

Este vetor deslocamento é paralelo ao plano xz, porque sua componente y é nula; um fato mais facilmente visto pelo resultado numérico que pela Fig. 4-2.

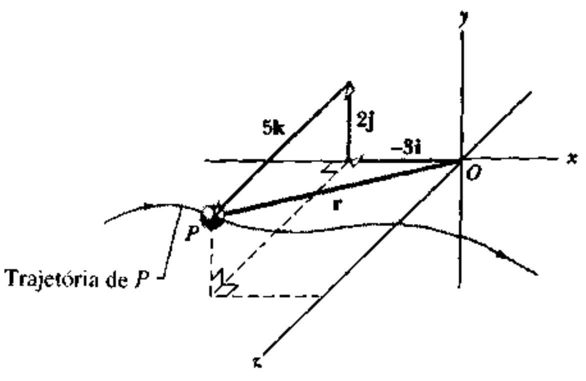


Fig. 4-1 O vetor posição $\mathbf{r}$ do objeto P é a soma das componentes vetoriais paralelas aos eixos coordenados.

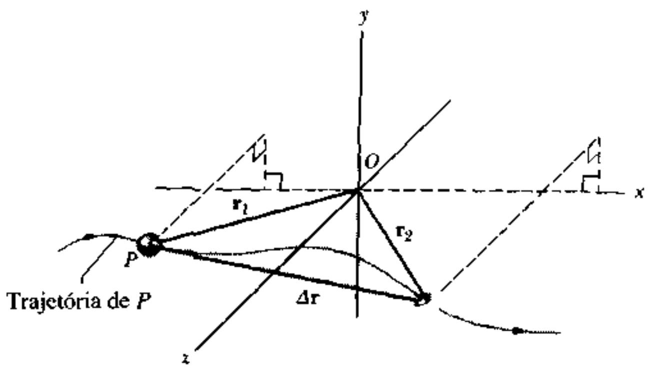


Fig. 4-2 O deslocamento $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ vai da extremidade final de $\mathbf{r}_1$ para a de $\mathbf{r}_2$.

4-3 Velocidade e Velocidade Média

Se uma partícula sofre um deslocamento $\Delta\mathbf{r}$, durante um intervalo de tempo Δt, então, sua *velocidade média* é

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}, \qquad (4\text{-}4)$$

que pode ser escrita por extenso como

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}} &= \frac{\Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}}{\Delta t} \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\mathbf{k}. \qquad (4\text{-}5)\end{aligned}$$

A *velocidade* (instantânea) $\mathbf{v}$ é o limite de $\bar{\mathbf{v}}$, quando Δt tende para zero. No cálculo diferencial, lembramos que este limite é a derivada de $\mathbf{r}$ em relação a t, ou seja,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad (4\text{-}6)$$

Substituindo $\mathbf{r}$ pela sua expressão dada pela Eq. 4-1, vem

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}. \qquad (4\text{-}7)$$

Os coeficientes são as componentes escalares de $\mathbf{v}$:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{e} \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (4\text{-}8)$$

A Fig. 4-3 mostra a trajetória da partícula P no plano xy. À medida que a partícula se desloca para a direita sobre a curva, seu vetor posição também se desloca para a direita. No instante t_1, o vetor posição é $\mathbf{r}_1$, e num instante posterior qualquer $t_1 + \Delta t$, o vetor posição é $\mathbf{r}_2$. O deslocamento da partícula, no intervalo Δt, é $\Delta\mathbf{r}$. Da Eq. 4-4, a velocida-

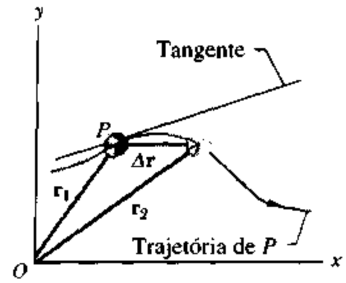


Fig. 4-3 A posição da partícula P, na sua trajetória, é mostrada no instante t_1 e no instante $t_1 + \Delta t$ seguinte. O vetor $\Delta\mathbf{r}$ é o deslocamento da partícula, no intervalo Δt. É mostrada a tangente à trajetória no instante t_1.

de média $\bar{\mathbf{v}}$ da partícula, no intervalo Δt, tem o mesmo sentido de $\Delta\mathbf{r}$.

Três coisas acontecem, quando fazemos o intervalo Δt tender a zero: (1) o vetor $\mathbf{r}_2$, na Fig. 4-3, se move em direção a $\mathbf{r}_1$, fazendo $\Delta\mathbf{r}$ tender a zero; (2) a direção de $\Delta\mathbf{r}$ (logo, a direção de $\bar{\mathbf{v}}$) se aproxima da direção da tangente, na Fig. 4-3 e (3) a velocidade média $\bar{\mathbf{v}}$ tende à velocidade instantânea $\mathbf{v}$.

No limite, quando Δt tende a 0, $\bar{\mathbf{v}}$ tende a $\mathbf{v}$ e, o que é mais importante, $\bar{\mathbf{v}}$ tem a direção da tangente. Logo, $\mathbf{v}$ também tem a mesma direção. Isto é, a velocidade instantânea $\mathbf{v}$ é sempre tangente à trajetória da partícula. Isto é mostrado na Fig. 4-4, onde $\mathbf{v}$ e suas componentes escalares estão representadas. Para o caso tridimensional, o resultado é idêntico: $\mathbf{v}$ é sempre tangente à trajetória da partícula.

A Fig. 4-5 representa um disco de borracha, usado nas partidas de hóquei sobre o gelo, preso a uma extremidade de uma corda, cuja outra extremidade está fixa ao ponto O, obrigando assim o disco a descrever uma trajetória circular com centro em O. O vetor posição $\mathbf{r}$ do disco varia apenas sua direção; seu módulo (igual ao comprimento da corda) permanece constante. Novamente, o vetor velocidade é tangente à trajetória, em qualquer instante. Se a corda se rompesse, o disco continuaria se movendo, em linha reta, na mesma direção que $\mathbf{v}$ possuía no instante em que ela se rompeu. (O disco nunca poderia descrever uma trajetória em espiral, como se tivesse memorizado a sua trajetória circular anterior.)

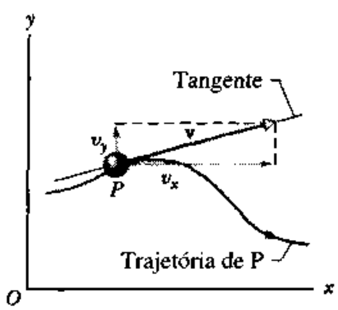


Fig. 4-4 O vetor velocidade $\mathbf{v}$ da partícula P juntamente com suas componentes escalares. Observe que $\mathbf{v}$ é tangente à trajetória no ponto considerado.

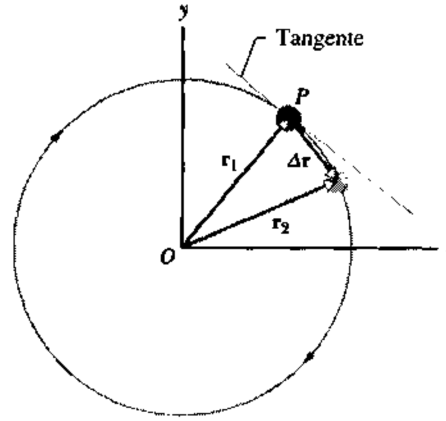


Fig. 4-5 A partícula P está se movendo numa trajetória circular em torno do ponto O. Quando Δt tende a zero, a direção do vetor $\Delta\mathbf{r}$ coincide com a da tangente no ponto. Logo, $\mathbf{v}$ é tangente à trajetória.

4-4 Aceleração e Aceleração Média

Quando a velocidade de uma partícula varia de $\mathbf{v}_1$ para $\mathbf{v}_2$, no intervalo de tempo Δt, sua aceleração média $\bar{\mathbf{a}}$, durante este intervalo de tempo, é

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}. \tag{4-9}$$

A *aceleração* (instantânea) $\mathbf{a}$ é o limite de $\bar{\mathbf{a}}$, quando fazemos Δt tender a zero, ou seja,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{4-10}$$

Se a velocidade varia em módulo *ou* direção (ou ambos), então existe uma aceleração.

Substituindo $\mathbf{v}$, da Eq. 4-7 na Eq. 4-10, temos

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k})$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k}$$

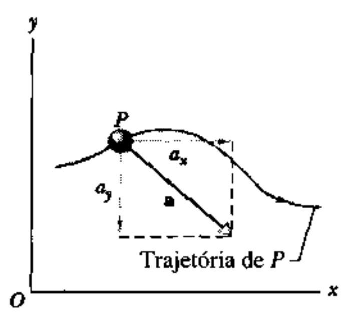


Fig. 4-6 A aceleração $\mathbf{a}$ da partícula P juntamente com suas componentes escalares.

ou

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \qquad (4\text{-}11)$$

onde as três componentes escalares do vetor aceleração são

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \text{e} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \qquad (4\text{-}12)$$

A Fig. 4-6 mostra o vetor aceleração **a** e suas componentes escalares, para o movimento bidimensional da partícula P.

EXEMPLO 4-2 Uma lebre atravessa correndo um estacionamento de veículos onde, por estranho que possa parecer, um par de eixos cartesianos foi desenhado. A trajetória percorrida pela lebre é tal que as componentes do seu vetor posição com relação à origem das coordenadas são funções do tempo dadas por

$$x = -0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28$$

e

$$y = 0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30.$$

As unidades dos coeficientes numéricos nessas equações são tais que, se substituirmos t em segundos, obteremos x e y em metros.

a. Calcule o vetor posição **r** da lebre (módulo e direção) em t = 15 s.

Solução Em t = 15 s, as componentes de **r** são

$$x = (-0{,}31)(15)^2 + (7{,}2)(15) + 28 = 66 \text{ m}$$

e

$$y = (0.22)(15)^2 - (9.1)(15) + 30 = -57 \text{ m}.$$

O vetor **r** e suas componentes são mostrados na Fig. 4-7a.

O módulo de **r** é dado por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66 \text{ m})^2 + (-57 \text{ m})^2}$$
$$= 87 \text{ m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

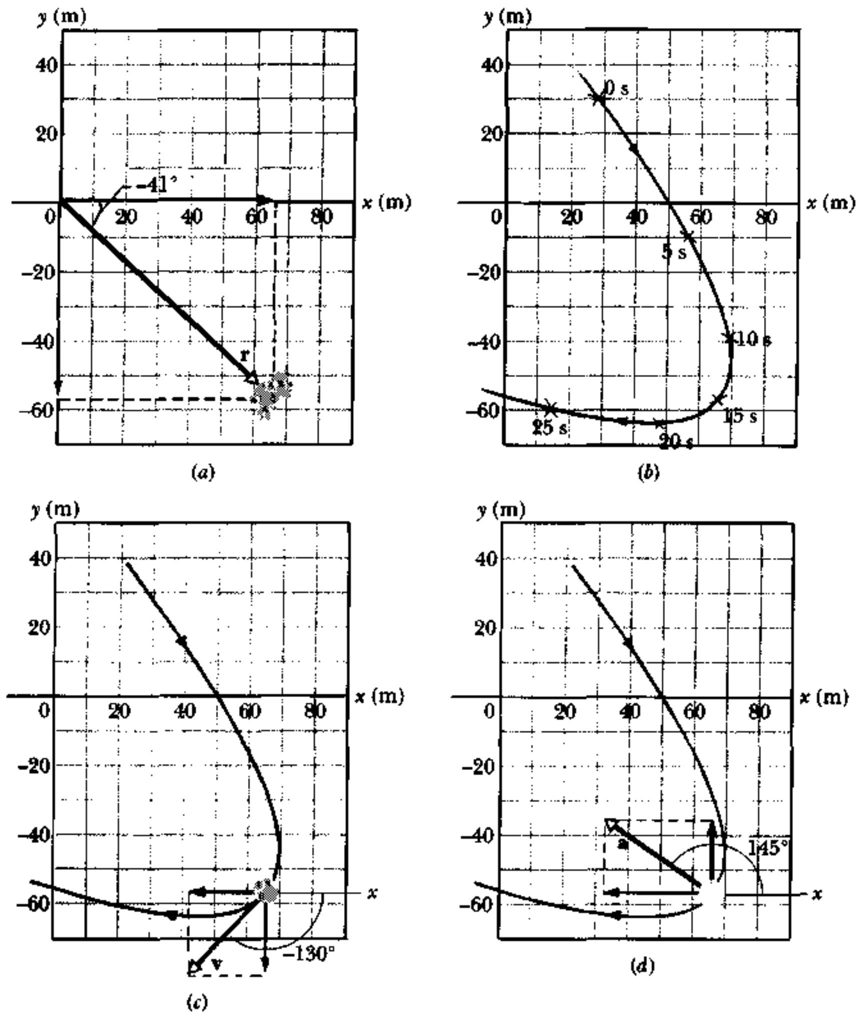


Fig. 4-7 Exemplos 4-2, 4-3 e 4-4. (a) O vetor **r** e suas componentes, em t = 15 s. O módulo de **r** é 87 m. (b) A trajetória de uma lebre através de um estacionamento, mostrando a sua posição em cada instante. (c) A velocidade **v** da lebre em t = 15 s. Observe que **v** é tangente à trajetória, no instante considerado. (d) A aceleração **a** da lebre em t = 15 s. Quando isso acontece, ela tem a mesma aceleração em todos os pontos da trajetória.

O ângulo θ que **r** faz com o semi-eixo positivo x é

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{-57\text{ m}}{66\text{ m}}\right) = -41°. \qquad \text{(Resposta)}$$

(Embora a tangente de $\theta = 139°$ seja igual à de $\theta = -41°$, excluímos o ângulo de 139°, por ser incompatível com os sinais das componentes de **r**.)

b. Calcule também a posição da lebre em t = 0, 5, 10, 20 e 25 s, e esboce a sua trajetória.

Solução Como em (a), obtemos os seguintes valores para r e θ.

t (s)	x (m)	y (m)	r (m)	θ
0	28	30	41	+47°
5	56	−10	57	−10°
10	69	−39	79	−29°
15	66	−57	87	−41°
20	48	−64	80	−53°
25	14	−60	62	−77°

A Fig. 4-7b mostra o gráfico da trajetória da lebre.

EXEMPLO 4-3 Calcule, no Exemplo 4-2, o módulo e a direção do vetor velocidade da lebre em t = 15 s.

Solução A componente da velocidade na direção x é (veja a Eq. 4-8)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28) = -0{,}62t + 7{,}2$$

Em t = 15 s, obtemos

$$v_x = (-0{,}62)(15) + 7{,}2 = -2{,}1\text{ m/s}$$

Do mesmo modo,

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30) = 0{,}44t - 9{,}1.$$

Em t = 15 s, obtemos

$$v_y = (0{,}44)(15) - 9{,}1 = -2{,}5\text{ m/s}$$

O vetor **v** e suas componentes são mostrados na Fig. 4-7c.

O módulo e a direção de **v** são dados por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2{,}1\text{ m/s})^2 + (-2{,}5\text{ m/s})^2}$$
$$= 3{,}3\text{ m/s} \qquad \text{(Resposta)}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}5\text{ m/s}}{-2{,}1\text{ m/s}}\right)$$
$$= \tan^{-1} 1{,}19 = -130°. \qquad \text{(Resposta)}$$

(Embora o ângulo de 50° tenha a mesma tangente, os sinais das componentes da velocidade indicam que o ângulo procurado está no terceiro quadrante, ou seja, 50° − 180° = −130°.) O vetor velocidade na Fig. 4-7c é tangente à trajetória da lebre e aponta na direção em que ela está correndo, em t = 15 s.

EXEMPLO 4-4 Determine, no Exemplo 4-2, o módulo e a direção do vetor aceleração **a** da lebre em t = 15 s.

Solução As componentes da aceleração (veja Eq. 4-12) são dadas por

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}62t + 7{,}2) = -0{,}62\text{ m/s}^2$$

e

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}44t - 9{,}1) = 0{,}44\text{ m/s}^2.$$

Observamos que a aceleração não varia com o tempo; é constante. Quando calculamos a derivada segunda, a variável t desaparece! A decomposição de **a** em suas componentes x e y está mostrada na Fig. 4-7d.

O módulo e a direção de **a** são dados por

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0{,}62\text{ m/s}^2)^2 + (0{,}44\text{ m/s}^2)^2}$$
$$= 0{,}76\text{ m/s}^2 \qquad \text{(Resposta)}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_y}{a_x} = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}44\text{ m/s}^2}{-0{,}62\text{ m/s}^2}\right)$$
$$= 145°. \qquad \text{(Resposta)}$$

O vetor aceleração tem módulo e direção constantes em toda a trajetória da lebre. Talvez um forte vento sudeste estivesse soprando no local.

EXEMPLO 4-5 Uma partícula com velocidade $\mathbf{v}_0 = -2{,}0\mathbf{i} + 4{,}0\mathbf{j}$ (em m/s), em $t = 0$ está sob uma aceleração constante **a**, de módulo igual a 3,0 m/s², fazendo um ângulo $\theta = 130°$ com o semi-eixo positivo x. Qual a velocidade **v** da partícula em t = 2,0 s, na notação de vetores unitários, assim como seu módulo e direção (em relação ao semi-eixo positivo x)?

Solução Como **a** é constante, a Eq. 2-9 é aplicável; entretanto, deverá ser usada separadamente para calcular v_x e v_y (as componentes x e y do vetor velocidade **v**), pois as componentes variam de maneira independente uma da outra. Encontramos então

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

e

$$v_y = v_{0y} + a_y t.$$

Onde v_{0x} (= −2,0 m/s) e v_{0y} (= 4,0 m/s) são as componentes x e y de $\mathbf{v}_0$, e a_x e a_y são as componentes x e y de **a**. Para determinar a_x e a_y, decompomos **a** com o auxílio da Eq. 3-5:

$$a_x = a\cos\theta = (3{,}0\text{ m/s}^2)(\cos 130°) = -1{,}93\text{ m/s}^2,$$
$$a_y = a\,\text{sen}\,\theta = (3{,}0\text{ m/s}^2)(\text{sen}\,130°) = +2{,}30\text{ m/s}^2.$$

Substituindo esses valores em v_x e v_y, temos

$$v_x = -2{,}0\text{ m/s} + (-1{,}93\text{ m/s}^2)(2{,}0\text{ s}) = -5{,}9\text{ m/s},$$
$$v_y = 4{,}0\text{ m/s} + (2{,}30\text{ m/s}^2)(2{,}0\text{ s}) = 8{,}6\text{ m/s}.$$

Então, em t = 2,0 s, temos

$$\mathbf{v} = (-5{,}9\text{ m/s})\mathbf{i} + (8{,}6\text{ m/s})\mathbf{j}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O módulo de **v** é

$$v = \sqrt{(-5{,}9\ \text{m/s})^2 + (8{,}6\ \text{m/s})^2}$$
$$= 10\ \text{m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O ângulo de **v** é

$$\theta = \tan^{-1}\frac{8{,}6\ \text{m/s}}{-5{,}9\ \text{m/s}} = 124° \approx 120°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Verifique a última resposta com sua calculadora. O resultado mostrado é 124° ou −55,5°? Agora, desenhe o vetor **v** e suas componentes, para ver qual dos ângulos é mais compatível com as condições do problema. Para entender por que a calculadora apresenta uma resposta matematicamente correta, porém fisicamente inadequada no caso, releia a Tática 3, no Cap. 3.

TÁTICAS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 1: TRAÇAR UM GRÁFICO

A Fig. 4-7 ilustra vários elementos que devem ser considerados no traçado de um gráfico. No Exemplo 4-2b, as grandezas a serem colocadas no gráfico são as variáveis x e y, que expressam a posição em metros. Nesse problema, a escolha da mesma escala para os dois eixos é razoável. Experimente qual a escala mais adequada e de fácil leitura para o espaço disponível. O problema pede para calcular seis pontos. Se achar necessário mais pontos para o traçado da curva, calcule-os a partir das fórmulas dadas na proposição do problema. Se um dos pontos calculados não se ajustar à curva, é provável que haja erro no cálculo ou no traçado do gráfico.

Os pontos assinalados na Fig 4-7*b* mostram os instantes t em que a lebre ocupou cada posição. Podemos assim mostrar uma terceira variável no nosso gráfico.

TÁTICA 2: FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E ÂNGULOS

No Exemplo 4-3, foi dado que $\theta = \tan^{-1} 1{,}19$ e foi pedido para determinar θ. Utilizando a calculadora, obtivemos $\theta = 50°$. Entretanto, a Fig. 3-12*c* mostra que para $\theta = 230°$ $(= 50° + 180°)$ a tangente é a mesma. Observando os sinais das componentes v_x e v_y da velocidade na Fig. 4-7*c*, vemos que esse último ângulo é o correto.

Há ainda outra decisão a tomar. Podemos trabalhar com o ângulo de 230° ou com o de −130°. São exatamente o mesmo, como mostrado na Tática 1 do Cap. 3. Escolhemos $\theta = -130°$ simplesmente por questão de preferência.

TÁTICA 3: TRAÇANDO VETORES — DIREÇÃO

Os vetores na Fig. 4-7 foram orientados da seguinte maneira: (1) Escolhemos um ponto como origem do vetor. (2) Deste ponto, traçamos uma linha no sentido positivo do eixo x. (3) Usando um transferidor, construímos, a partir do eixo x, o ângulo θ apropriado, no sentido anti-horário (se θ for positivo) ou no sentido horário (se θ for negativo).

TÁTICA 4: TRAÇANDO VETORES — DIMENSÃO

O vetor **r** na Fig. 4-7*a* deve ser desenhado usando-se a mesma escala nos dois eixos, porque ele tem dimensão de comprimento. O vetor velocidade **v**, na Fig. 4-7*c*, e o vetor aceleração **a**, na Fig. 4-7*d*, no entanto, não estão em escala naquele problema, e podemos fazê-los tão grandes ou pequenos o quanto quisermos.

Não faz sentido perguntar se, por exemplo, um vetor velocidade deverá ser maior ou menor do que um vetor deslocamento. Representam grandezas físicas diferentes expressas em unidades desiguais e, portanto, não podem ser comparados.

4-5 Movimento de Projéteis

Agora vamos considerar uma partícula — ou seja, **um projétil** — que executa um movimento bidimensional com aceleração **g** de queda livre para baixo. O projétil pode ser uma bola de golfe (como na Fig. 4-8), de beisebol ou qualquer outro objeto. Na análise que se segue do movimento de projéteis, vamos desprezar os efeitos da resistência do ar.

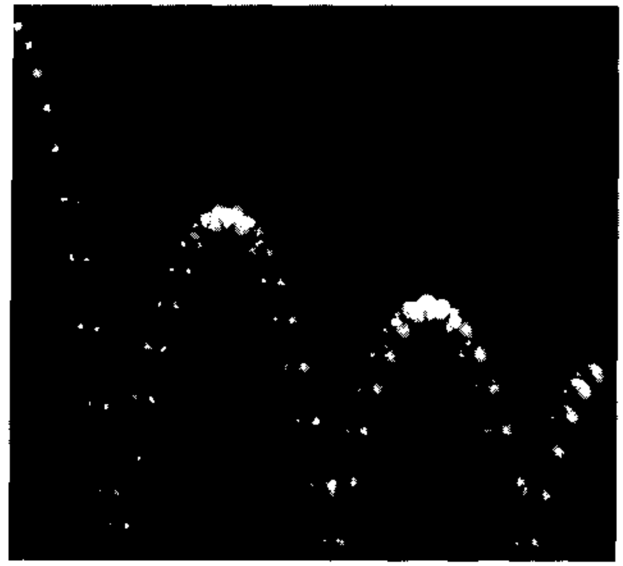


Fig. 4-8 Uma foto estroboscópica de uma bola de golfe, quicando numa superfície rígida. Entre os impactos, a trajetória da bola é idêntica à do movimento de um projétil.

A Fig. 4-9, analisada na próxima seção, mostra a trajetória de um projétil em condições ideais.

O projétil é lançado com uma certa velocidade inicial $\mathbf{v}_0$, que pode ser escrita como

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j}. \qquad (4\text{-}13)$$

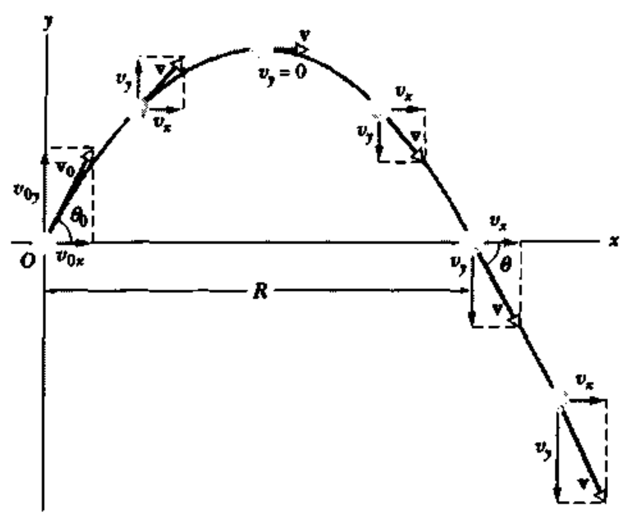


Fig. 4-9 A trajetória de um projétil lançado em $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ com velocidade inicial $\mathbf{v}_0$. São mostradas a velocidade inicial e as velocidades, juntamente com suas componentes escalares, em vários pontos da trajetória. Observe que a componente horizontal da velocidade permanece constante, enquanto a componente vertical varia continuamente. O *alcance R* é a distância horizontal do ponto de lançamento, até o ponto em que o projétil volta à mesma altura do lançamento.

Podemos calcular as componentes v_{0x} e v_{0y} se conhecermos o ângulo θ_0 entre $\mathbf{v}_0$ e o semi-eixo positivo x:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0. \tag{4-14}$$

Durante seu movimento bidimensional, o projétil acelera para baixo e seu vetor posição **r**, bem como o vetor velocidade **v**, variam continuamente. Por outro lado, tanto o movimento horizontal quanto o vertical são independentes um do outro, fato que nos permite separar um problema bidimensional em dois unidimensionais mais fáceis, um para o movimento horizontal e outro para o vertical. A seguir, veremos duas experiências que demostram esta independência entre o movimento vertical e o horizontal.

As Duas Bolas de Golfe

A Fig. 4-10 é uma fotografia estroboscópica de duas bolas de golfe, uma largada do repouso e a outra atirada por um disparador acionado por mola. Elas têm o mesmo movimento vertical, cada bola percorrendo, na queda, a mesma distância, no mesmo intervalo de tempo. *O fato de uma bola se mover na horizontal enquanto está caindo não tem efeito sobre o seu movimento vertical.* Considerando um caso extremo, podemos afirmar que, se atirássemos com um rifle horizontalmente e, ao mesmo tempo, deixássemos cair uma bala, desprezando a resistência do ar, as duas alcançariam o solo ao mesmo tempo.

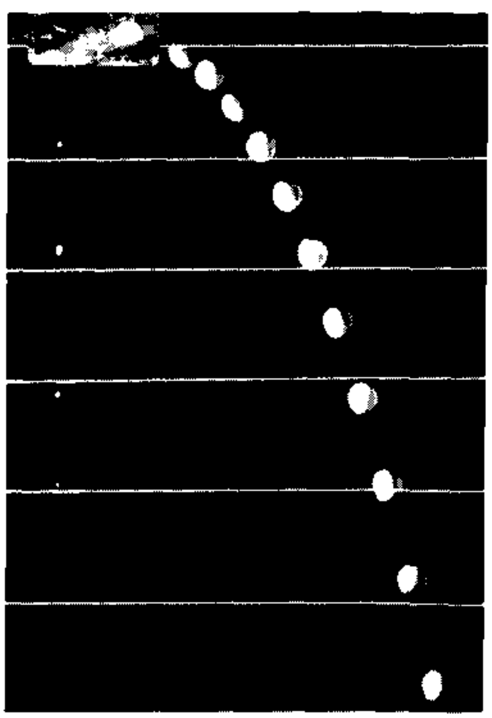


Fig. 4-10 Uma bola em repouso é largada no mesmo instante em que outra é lançada horizontalmente para a direita. Seus movimentos verticais são idênticos.

Uma Experiência Interessante

Na Fig. 4-11, vemos uma demonstração que tem animado muitos em aulas de física. Trata-se de um tubo G que dispara uma bola, através do sopro, como se fosse um projétil. O alvo é uma pequena lata C, suspensa por um ímã M, e o tubo está apontado na direção da lata. A experiência é preparada de forma que o ímã solte a lata, exatamente quando a bola é disparada do tubo.

Se g (a aceleração em queda livre) fosse zero, a bola seguiria a linha reta mostrada na Fig. 4-11 e a lata ficaria suspensa no ar, mesmo depois de liberada pelo ímã. Com certeza, a bola atingiria a lata.

No entanto, g *não* é zero. *Ainda assim*, a bola atinge a lata! A Fig. 4-11 mostra que, durante o tempo de percurso da bola, tanto ela quanto a lata se deslocam, em queda, da mesma distância h, com relação àquele ponto que estariam se g fosse zero. Quanto mais forte for o sopro, maior a velocidade inicial da bola, menor o tempo de deslocamento e menor o valor de h.

4-6 Análise do Movimento de Projéteis

Agora estamos prontos para analisar detalhadamente o movimento de um projétil.

O Movimento Horizontal

Como *não* existe aceleração na direção horizontal, a componente horizontal da velocidade permanece constante durante o movimento, como demonstrado na Fig. 4-12. O deslocamento horizontal $x - x_0$ a partir de uma posição inicial x_0 é dado pela Eq. 2-13, fazendo $a = 0$ e substituindo v_{0x} $(= v_0 \cos\theta_0)$ por v_0. Então,

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t. \tag{4-15}$$

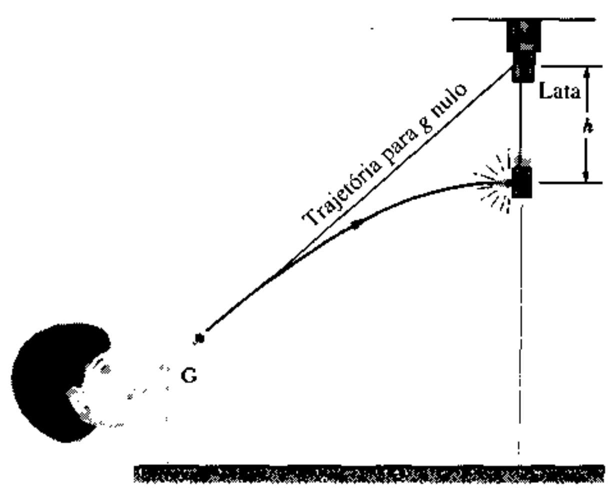


Fig. 4-11 A bola sempre atinge a lata que está caindo. Ambas caem de uma distância h em relação ao ponto em que estariam, se não houvesse aceleração da gravidade.

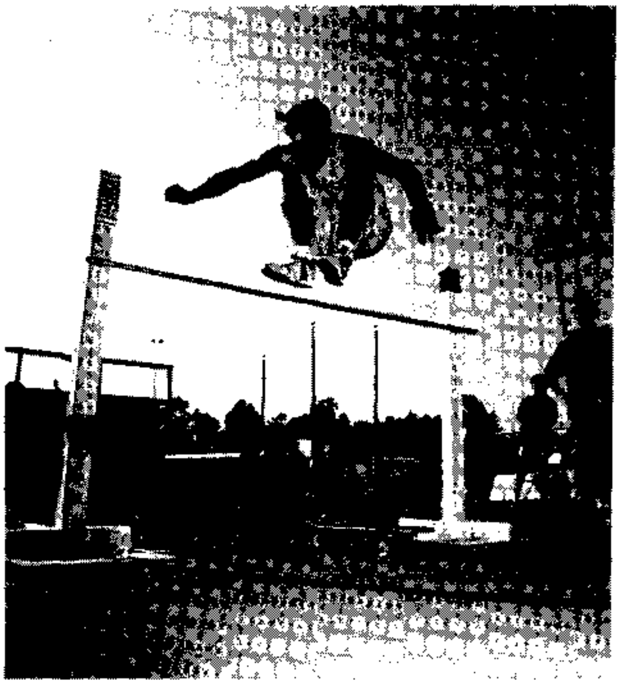


Fig. 4-12 A componente vertical da velocidade deste *skate-boarder* está variando, mas a componente horizontal não, e coincide com a velocidade do *skate*. Como resultado, este permanece sob o jovem, permitindo que ele caia exatamente sobre o *skate*.

O Movimento Vertical

A análise do movimento vertical é a mesma feita na Seção 2-8, para uma partícula em queda livre. Logo, as Eqs. 2-19 a 2-23 são aplicáveis. A Eq. 2-20, por exemplo, torna-se

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (4\text{-}16)$$

onde v_0 foi substituído pela componente vertical da velocidade $v_0 \operatorname{sen} \theta_0$. De acordo com a Fig. 4-9, a componente vertical da velocidade se comporta exatamente como se fosse a de uma bola atirada para cima. Inicialmente, está dirigida para cima e seu módulo diminui constantemente até zero, no ponto correspondente à altura máxima alcançada por ela. A partir deste ponto, o sentido da componente vertical se inverte e seu módulo volta a crescer no decorrer do tempo.

As Eqs. 2-19 e 2-21 também são úteis na análise do movimento de projéteis. Após adaptá-las para o caso em estudo, temos

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt \qquad (4\text{-}17)$$

e

$$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \qquad (4\text{-}18)$$

A Equação da Trajetória

Podemos determinar a equação do caminho percorrido (a **trajetória**) pelo projétil, eliminando t nas Eqs. 4-15 e 4-16. Resolvendo a Eq. 4-15 para t e substituindo na Eq. 4-16, temos, depois de um pequeno arranjo,

$$y = (\tan \theta_0)x - \left(\frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}\right)x^2 \quad \text{(trajetória).} \qquad (4\text{-}19)$$

Essa é a equação da trajetória mostrada na Fig. 4-9. Para simplificar, fazemos $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ nas Eqs. 4-15 e 4-16, respectivamente. Como g, θ_0 e v_0 são constantes, a Eq. 4-19 tem a forma $y = ax + bx^2$, onde a e b são constantes, que é a equação de uma parábola.

A Fig. 4-13 mostra uma versão moderna de uma experiência realizada por Galileu em 1608, onde foi mostrado, pela primeira vez, que um projétil descreve uma trajetória parabólica. Ele fez uma bola rolar para baixo, em uma calha inclinada, repetindo a experiência para diferentes alturas e medindo as posições correspondentes em que a bola atingia o solo.

O Alcance Horizontal

O *alcance horizontal* R do projétil, como mostra a Fig. 4-9, é a distância *horizontal* percorrida pelo projétil, desde o ponto inicial (lançamento) até retornar a esta mesma altura. Este ponto é determinado, fazendo $x - x_0 = R$ na Eq. 4-15 e $y - y_0 = 0$ na Eq. 4-16, obtendo

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t = R$$

e

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0.$$

Eliminando t nessas duas equações, temos

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \operatorname{sen}\theta_0 \cos \theta_0.$$

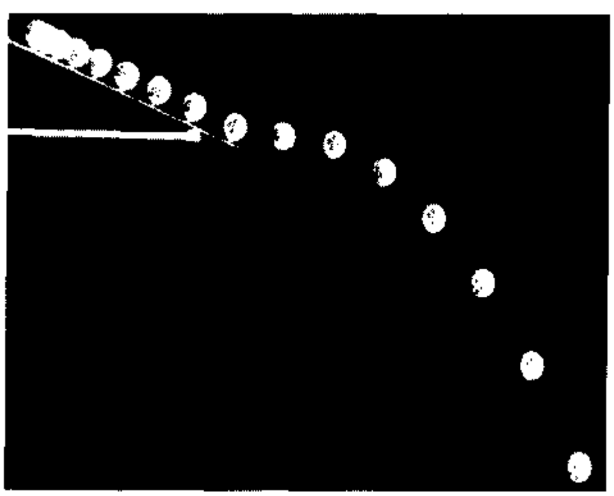


Fig. 4-13 Uma foto estroboscópica de uma bola descendo, sobre um plano inclinado, e caindo segundo uma trajetória parabólica, após ser projetada horizontalmente do plano.

Usando a identidade sen $2\theta_0 = 2$ sen $\theta_0 \cos \theta_0$ (veja o Apêndice G), obtemos

$$R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0. \tag{4-20}$$

Observe que R atinge seu valor máximo, quando sen $2\theta_0 = 1$, que corresponde a $2\theta_0 = 90°$ ou $\theta_0 = 45°$.

Os Efeitos do Ar

Supomos que o efeito do ar é desprezível no movimento de projéteis, o que é *razoável para pequenas velocidades.* Entretanto, para grandes velocidades, a discrepância entre os cálculos e a realidade, no movimento de projéteis, pode *ser bem grande, devido à resistência (ou oposição) do ar* ao movimento. A Fig. 4-14, por exemplo, mostra duas trajetórias para uma bola lançada pela batida de um taco num jogo de beisebol, com um ângulo de 60° com a horizontal, e velocidade inicial de 160 km/h. (Veja "The Trajectory of a Fly Ball", de Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, January 1985.) A trajetória I (do lançamento no jogo de beisebol) é a calculada para as condições normais do jogo, onde a influência do ar é importante. A trajetória II (a bola do problema de física) é aquela que a bola seguiria no vácuo. A Tabela 4-1 apresenta alguns dados para os dois casos. Quando admitimos que a resistência do ar pode ser desprezada, isto não se aplica, logicamente, a experiências realizadas ao ar livre, como no Shea Stadium e no Candlestick Park. No Cap. 6, vamos discutir os efeitos da resistência do ar sobre o movimento.

Na verdade, *nenhum* problema de física tem uma resposta *exata*, não importa quantos algarismos significativos sejam obtidos no cálculo: será sempre necessário fazer aproximações. O físico P. A. M. Dirac* disse que o truque é dividir o problema em duas partes, uma simples e a outra que consideramos como uma pequena perturbação insignificante. Então, resolvemos com exatidão a parte simples, e fazemos o melhor possível com a insignificante. Às vezes, a parte "insignificante" é tão pequena que podemos desprezá-la completamente, como no caso da resistência do ar para pequenas velocidades.

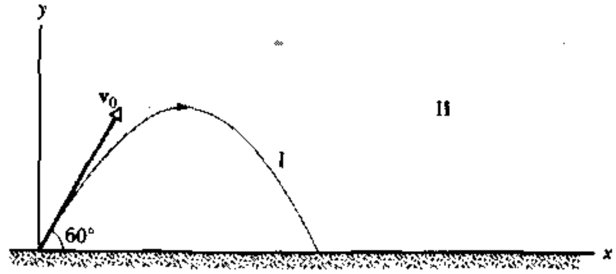


Fig. 4-14 (I) A trajetória do lançamento de uma bola, levando em conta a resistência do ar (calculada por computador). (II) A trajetória que a bola teria no vácuo, calculada pelos métodos deste capítulo. Veja também a Tabela 4-1.

Tabela 4-1
A Trajetória das Duas Bolas[a]

	Trajetória I (Ar)	*Trajetória II (Vácuo)*
Alcance	97 m	175 m
Altura máxima	52 m	75 m
Tempo de percurso	6,6 s	7,9 s

[a]Veja a Fig. 4-14. O ângulo de lançamento é de 60° e a velocidade de lançamento é de 160 km/h.

EXEMPLO 4-6 Um avião de salvamento está voando a uma altitude constante de 1.200 m, à velocidade de 430 km/h, numa trajetória diretamente sobre o ponto em que uma pessoa está se debatendo na água (veja Fig. 4-15). Em que ângulo ϕ de mira o piloto deve lançar a cápsula de salvamento, para que esta caia bem próximo à pessoa?

Solução A velocidade inicial da cápsula é a mesma do avião. Isto é, a velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ é horizontal e vale 430 km/h. Da Eq. 4-16, podemos calcular o tempo de vôo da cápsula,

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Fazendo $y - y_0 = -1.200$ m (o sinal menos significa que a pessoa está abaixo da origem) e $\theta_0 = 0$, obtemos

$$-1.200 \text{ m} = 0 - \tfrac{1}{2}(9{,}8 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Resolvendo para t, achamos*

$$t = \sqrt{\frac{(2)(1.200 \text{ m})}{9{,}8 \text{ m/s}^2}} = 15{,}65 \text{ s}.$$

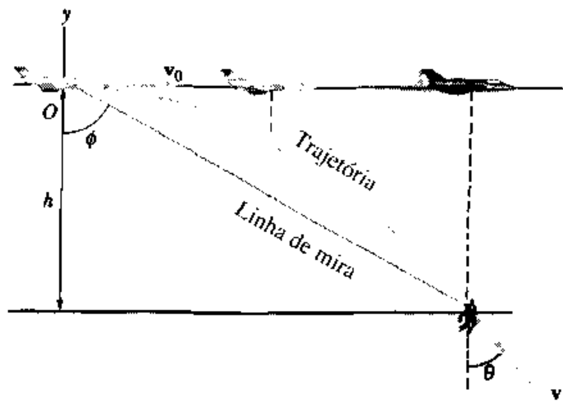


Fig. 4-15 Exemplo 4-6. Um avião lança uma cápsula de salvamento e *continua a sua trajetória. Enquanto a cápsula está caindo, a componente* horizontal da sua velocidade é igual à velocidade do avião. A cápsula cai na água com velocidade $\mathbf{v}$, fazendo um ângulo θ com a vertical.

*Prêmio Nobel de Física e um dos criadores da Mecânica Quântica. (N. do R.)

*Na Tática 5, explicamos por que, no caso de algumas grandezas, trabalhamos (temporariamente) com mais algarismos significativos que os justificados pelos dados do problema.

Da Eq. 4-15 obtemos a distância horizontal percorrida pela cápsula (e pelo avião) durante esse tempo:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= (v_0 \cos \theta_0)t \\ &= (450 \text{ km/h})(\cos 0°)(15{,}65 \text{ s})(1 \text{ h}/3.600 \text{ s}) \\ &= 1{,}869 \text{ km} = 1.869 \text{ m}. \end{aligned}$$

Se $x_0 = 0$, então $x = 1.869$ m. O ângulo de mira então é (veja a Fig. 4-15)

$$\phi = \tan^{-1}\frac{x}{h} = \tan^{-1}\frac{1.869 \text{ m}}{1.200 \text{ m}} = 57°. \quad \text{(Resposta)}$$

Como o avião e a cápsula têm a mesma velocidade horizontal, o avião permanece verticalmente sempre sobre a cápsula, enquanto ela estiver voando.

EXEMPLO 4-7 *Num filme publicitário, um ator corre pelo telhado de* um prédio e salta, na horizontal, para o telhado de outro prédio mais abaixo, conforme mostrado na Fig. 4-16. Antes de tentar o salto, sabiamente quer avaliar se isto é possível. Ele pode realizar o salto se sua velocidade máxima sobre o telhado for de 4,5 m/s?

Solução Ele levará um tempo t para cair 4,8 m, o que pode ser determinado pela Eq. 4-16. Fazendo $y - y_0 = -4{,}8$ m (observe o sinal) e $\theta_0 = 0$, e utilizando a Eq. 4-16, obtemos

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{-\frac{2(y-y_0)}{g}} = \sqrt{-\frac{(2)(-4{,}8 \text{ m})}{9{,}8 \text{ m/s}^2}} \\ &= 0{,}990 \text{ s}. \end{aligned}$$

Agora, perguntamos: "Que distância ele alcançaria horizontalmente nesse tempo?" Da Eq. 4-15, temos

$$\begin{aligned} x - x_0 &= (v_0 \cos \theta_0)t \\ &= (4{,}5 \text{ m/s})(\cos 0°)(0{,}990 \text{ s}) = 4{,}5 \text{ m}. \end{aligned}$$

Para alcançar o outro prédio, o homem teria de se deslocar 6,2 m na horizontal. Logo, o conselho que damos ao ator é: "Não salte."

EXEMPLO 4-8 A Fig. 4-17 mostra um navio pirata ancorado a 560 m de um forte, que defende a entrada de um porto, em uma ilha. O canhão de defesa está localizado ao nível do mar e tem uma velocidade de tiro de 82 m/s.

a. Qual o ângulo de elevação do canhão, para atingir o navio pirata?

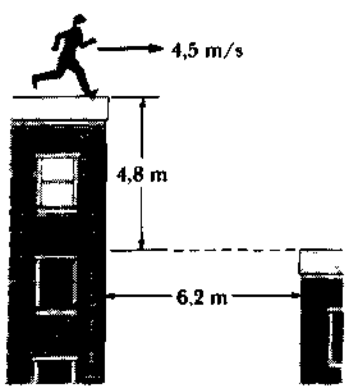


Fig. 4-16 Exemplo 4-7. O homem deve saltar?

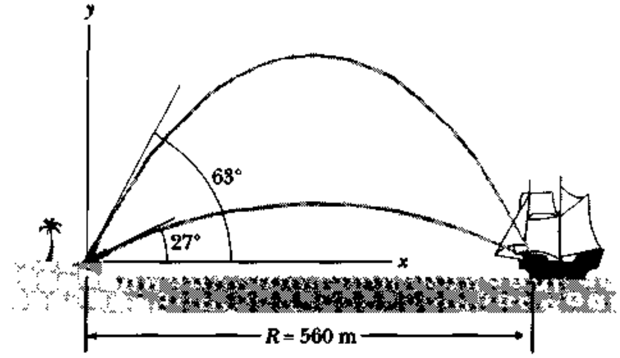


Fig. 4-17 Exemplo 4-8. Nesta distância, o canhão de defesa do porto pode atingir o navio pirata estando em dois ângulos de elevação diferentes.

Solução Resolvendo a Eq. 4-20 para $2\theta_0$, obtemos

$$\begin{aligned} 2\theta_0 &= \text{sen}^{-1}\frac{gR}{v_0^2} = \text{sen}^{-1}\frac{(9{,}8 \text{ m/s}^2)(560 \text{ m})}{(82 \text{ m/s})^2} \\ &= \text{sen}^{-1}\, 0{,}816. \end{aligned}$$

Há dois ângulos cujo seno é 0,816, ou seja, 54,7° e 125,3°. Logo, achamos

$$\theta_0 = \tfrac{1}{2}(54{,}7°) \approx 27° \quad \text{(Resposta)}$$

e

$$\theta_0 = \tfrac{1}{2}(125{,}3°) \approx 63°. \quad \text{(Resposta)}$$

O comandante do forte pode ordenar qualquer uma dessas duas elevações para o canhão atingir o navio pirata (se não houver influência do ar!).

b. Qual o tempo de percurso do projétil, até alcançar o navio, para cada um dos ângulos de elevação calculados anteriormente?

Solução Calculando t na Eq. 4-15 para $\theta_0 = 27°$, temos

$$\begin{aligned} t &= \frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta_0} = \frac{560 \text{ m}}{(82 \text{ m/s})(\cos 27°)} \\ &= 7{,}7 \text{ s}. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

Repetindo o cálculo para $\theta_0 = 63°$, obtemos $t = 15$ s. O que é razoável, pois o tempo de percurso para maiores ângulos de elevação deve ser, também, maior.

c. A que distância do forte deve ficar o navio pirata, para se manter fora do alcance do canhão?

Solução Vimos que o alcance máximo corresponde a um ângulo de elevação θ_0 de 45°. Então, fazendo $\theta_0 = 45°$ na Eq. 4-20, temos

$$\begin{aligned} R &= \frac{v_0^2}{g}\,\text{sen}2\theta_0 = \frac{(82 \text{ m/s})^2}{9{,}8 \text{ m/s}^2}\,\text{sen}(2 \times 45°) \\ &= 690 \text{ m}. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

À medida que o navio pirata se afasta, os dois ângulos de elevação com que o navio pode ser atingido se aproximam, tendendo para $\theta_0 = 45°$ quando o navio está a 690 m de distância. Além desse ponto, o navio está a salvo.

EXEMPLO 4-9 A Fig. 4-18 ilustra o vôo de Emanuel Zacchini sobre três rodas-gigantes, cada uma com 18 m de altura e dispostas conforme mostrado na figura. Ele é lançado de uma altura de 3,0 m acima do solo, com velocidade $v_0 = 26,5$ m/s, fazendo um ângulo $\theta_0 = 53°$ com a horizontal. A rede onde deverá cair está à mesma altura do lançamento.

a. Conseguirá o artista transpor a primeira roda-gigante? Em caso afirmativo, a que distância horizontal do seu topo?

Solução Admitamos que a boca do canhão é a origem, então $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Para determinar a altura y em que ele estaria em $x = 23$ m, vamos usar a Eq. 4-19:

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2}$$

$$= (\tan 53°)(23\text{ m}) - \frac{(9{,}8\text{ m/s}^2)(23\text{ m})^2}{2(26{,}5\text{ m/s})^2(\cos 53°)^2}$$

$$= 20{,}3\text{ m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como ele é lançado de 3,0 m acima do solo, passará a 5,3 m acima do topo da primeira roda-gigante.

b. Se a altura máxima do vôo é alcançada sobre a roda-gigante do meio, a que altura ele passa sobre ela?

Solução Na altura máxima, $v_y = 0$ e a Eq. 4-18 pode ser escrita como

$$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)^2 - 2gy = 0.$$

Resolvendo para y, temos

$$y = \frac{(v_0\operatorname{sen}\theta_0)^2}{2g} = \frac{(26{,}5\text{ m/s})^2(\operatorname{sen}53°)^2}{(2)(9{,}8\text{ m/s}^2)} = 22{,}9\text{ m},$$

o que significa que ele passará a 7,9 m acima daquela roda-gigante.

c. Qual o seu tempo de vôo t?

Solução Como podemos determinar t de várias maneiras, vamos usar a Eq. 4-16 e o fato de que $y = 0$ quando ele cai na rede. Então, temos

$$y = (v_0\operatorname{sen}\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0,$$

ou

$$t = \frac{2v_0\operatorname{sen}\theta_0}{g} = \frac{(2)(26{,}5\text{ m/s})(\operatorname{sen}53°)}{9{,}8\text{ m/s}^2}$$

$$= 4{,}3\text{ s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

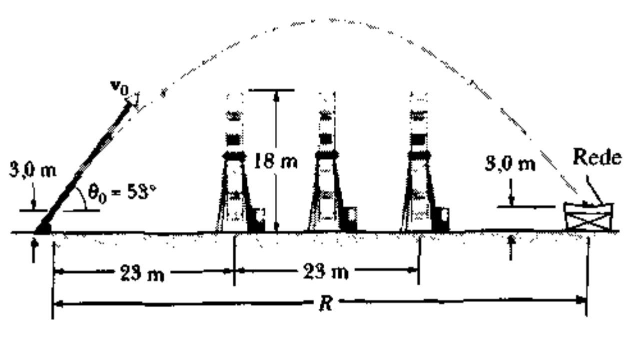


Fig. 4-18 Exemplo 4-9. O vôo de um homem-bala, sobre três rodas-gigantes, e a rede colocada no local esperado da queda.

d. A que distância do canhão deve estar posicionado o centro da rede?

Solução Uma forma de responder é usar a Eq. 4-15, fazendo $x_0 = 0$:

$$x = (v_0\cos\theta_0)t$$

$$= (26{,}5\text{ m/s})(\cos 53°)(4{,}3\text{ s})$$

$$= 69\text{ m}, \qquad \text{(Resposta)}$$

que é o alcance R do vôo. Naturalmente, Zacchini usaria uma rede retangular de grandes dimensões e iria posicioná-la com o lado maior apontando para o canhão, pois a resistência do ar diminuiria sua velocidade e ele não alcançaria a distância desejada, como calculamos.

Resolução de Problemas

Tática 5: Algarismos Significativos

Em alguns problemas, calculamos o valor numérico em uma etapa e, depois, usamos este resultado na etapa seguinte. Nestes casos, é conveniente, apenas para efeito de cálculo, manter mais algarismos significativos que o necessário no resultado final.

No Exemplo 4-6, calculamos o tempo de vôo da cápsula e encontramos $t = 15{,}65$ s. Se fosse perguntado qual o tempo de vôo, poderíamos arredondar a resposta para 16 s. Todavia, é mais conveniente usar $t = 15{,}65$ s nos demais cálculos, *fazendo* o arredondamento no resultado final. Se a cada etapa arredondarmos o resultado, a precisão de nossa resposta será reduzida.

Tática 6: Números *Versus* Álgebra

Uma maneira de evitar erros pelo arredondamento numérico, é resolver *os problemas pela álgebra, substituindo os valores numéricos apenas* na etapa final. É fácil fazer isso nos exemplos apresentados nesta seção, e é uma forma utilizada por pessoas experientes. Nos capítulos anteriores, entretanto, preferimos resolver alguns problemas em etapas, para que você tivesse uma percepção quantitativa do que estava fazendo. No entanto, à medida que avançarmos no texto, vamos nos fixar cada vez mais na álgebra, apontando as vantagens desse procedimento.

4-7 Movimento Circular Uniforme

Uma partícula está em **movimento circular uniforme** se percorre um círculo ou um arco circular com velocidade constante. Embora o módulo da velocidade não varie, *a partícula está acelerada*. Este fato pode causar surpresa, porque normalmente associamos a aceleração a um aumento no módulo da velocidade. Mas, na verdade, **v** é um vetor, não um escalar. Se **v** varia, mesmo que seja somente em direção, há uma aceleração, e este é o caso do movimento circular uniforme.

Vamos usar a Fig. 4-19 para determinar o módulo e a direção da aceleração. Esta figura representa o movimento circular uniforme de uma partícula com velocidade v, num círculo de raio r. Os vetores velocidade estão representados para os pontos p e q, que são simétricos em relação ao eixo y. Esses vetores, $\mathbf{v}_p$ e $\mathbf{v}_q$, têm o mesmo módulo v, mas — como apontam em diferentes direções — são diferentes. Suas componentes x e y são

$$v_{px} = +v\cos\theta, \qquad v_{py} = +v\operatorname{sen}\theta$$

e

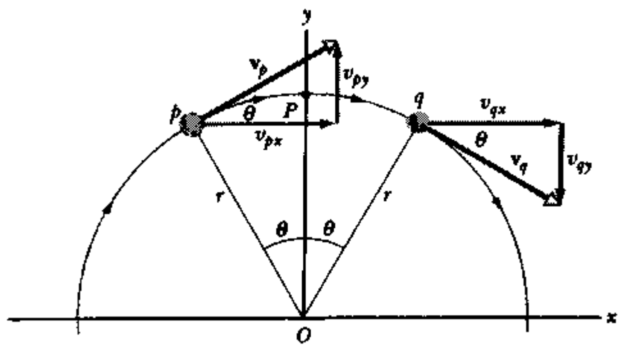


Fig. 4-19 Uma partícula se desloca em movimento circular uniforme, com velocidade constante v, num círculo de raio r. Suas velocidades nos pontos p e q, eqüidistantes do eixo y, são $\mathbf{v}_p$ e $\mathbf{v}_q$, dadas por suas componentes horizontal e vertical, naqueles pontos, conforme mostra a figura. A aceleração instantânea da partícula, em qualquer ponto, tem módulo v^2/r e aponta para o centro do círculo.

$$v_{qx} = +v\cos\theta, \qquad v_{qy} = -v\,\text{sen}\,\theta.$$

O tempo necessário para a partícula se mover de p até q, com velocidade constante v é

$$\Delta t = \frac{\text{arc}(pq)}{v} = \frac{r(2\theta)}{v}, \tag{4-21}$$

onde arc(pq) é o comprimento do arco de p até q.

Agora, temos informações suficientes para calcular as componentes da aceleração média $\bar{\mathbf{a}}$, da partícula, enquanto se move de p até q na Fig. 4-19. Para a componente x, temos

$$\bar{a}_x = \frac{v_{qx} - v_{px}}{\Delta t} = \frac{v\cos\theta - v\cos\theta}{\Delta t} = 0.$$

Esse resultado não causa surpresa, porque fica claro, pela simetria da Fig. 4-19, que a componente x da velocidade tem o mesmo valor em p e em q.

Usando a Eq. 4-21, temos, para a componente y da aceleração média,

$$\bar{a}_y = \frac{v_{qy} - v_{py}}{\Delta t} = \frac{-v\,\text{sen}\,\theta - v\,\text{sen}\,\theta}{\Delta t}$$
$$= -\frac{2v\,\text{sen}\,\theta}{2r\theta/v} = -\left(\frac{v^2}{r}\right)\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}\right).$$

O sinal negativo significa que essa componente da aceleração aponta verticalmente para baixo, na Fig. 4-19.

Agora, vamos admitir que o ângulo θ, na Fig. 4-19, diminua, tendendo a zero. Para isso, é necessário que os pontos p e q tendam para o ponto médio P, no alto do círculo. A aceleração média $\bar{\mathbf{a}}$, cujas componentes já determinamos, tende, então, para a aceleração instantânea $\mathbf{a}$, no ponto P.

A *direção* desse vetor aceleração instantâneo, no ponto P da Fig. 4-19, aponta para baixo, em direção ao centro O do círculo, pois a direção da aceleração média não varia enquanto θ diminui. Para determinar o *módulo a* do vetor aceleração instantâneo, necessitamos somente da regra matemática que diz: quanto mais o ângulo θ diminui, mais

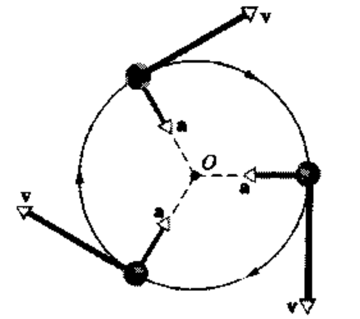


Fig. 4-20 Os vetores velocidade e aceleração para uma partícula em movimento circular uniforme. Os módulos são constantes, mas as direções variam continuamente.

a razão (sen θ) $/\theta$ tende para a unidade. Na relação dada anteriormente para $\bar{a}_y$, temos

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{(aceleração centrípeta).} \tag{4-22}$$

Concluímos que, quando uma partícula se move em um círculo de raio r (ou em um arco circular) com velocidade constante v, podemos afirmar que tem uma aceleração de módulo v^2/r dirigida para o centro do círculo.

A Fig. 4-20 mostra a relação entre os vetores velocidade e aceleração, nos vários estágios de um movimento circular uniforme. Ambos os vetores têm módulo constante durante o movimento, mas suas direções variam continuamente. A velocidade é sempre tangente ao círculo, na direção do movimento; a aceleração está sempre dirigida radialmente para o centro do círculo. Por isso, a aceleração associada ao movimento circular uniforme é chamada de **aceleração centrípeta** (que significa "à procura do centro"), designação criada por Isaac Newton.

A aceleração resultante da variação da direção da velocidade é tão real quanto aquela que resulta da variação do módulo da velocidade. Na Fig. 2-8, por exemplo, mostramos o Coronel John P. Stapp, enquanto seu veículo, provido de foguete, era freado até parar. Sua velocidade tinha direção constante, mas com o módulo variando rapidamente. Por outro lado, um astronauta girando numa centrífuga no Centro de Veículos Tripulados, da NASA, em Houston, se movimenta com uma velocidade de módulo constante, mas com a direção variando rapidamente. As acelerações sentidas por essas duas pessoas são indistinguíveis.

Não há uma relação fixa entre a direção do vetor velocidade e a direção do vetor aceleração de uma partícula em movimento. A Fig. 4-21 mostra exemplos em que o ângulo entre esses dois vetores varia de 0° a 180°. Em apenas um caso os dois vetores apontam na mesma direção.

EXEMPLO 4-10 Um satélite está em órbita circular em torno da Terra, a uma altitude h = 200 km, acima da superfície. Nessa altitude, a

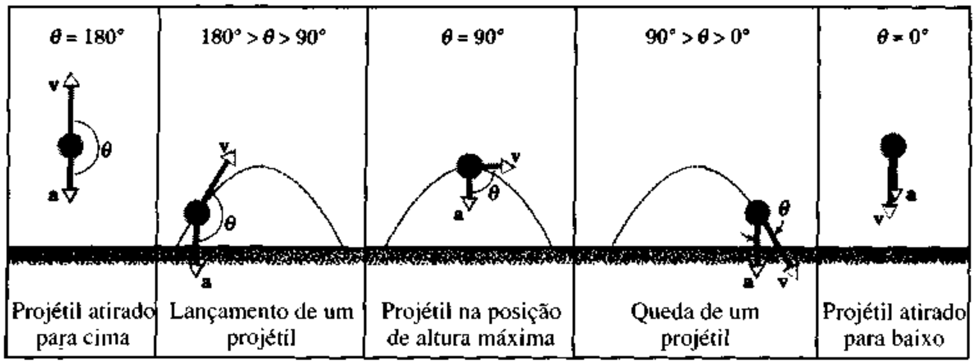


Fig. 4-21 Os vetores velocidade e aceleração de um projétil, para diferentes movimentos. Observe que os vetores aceleração e velocidade não têm relação direcional fixa entre si.

aceleração de queda livre g é 9,20 m/s². Qual é a velocidade orbital v do satélite?

Solução Temos um movimento circular uniforme em torno da Terra. Podemos encontrar v usando a Eq. 4-22, fazendo $a = g$ e $r = R_T + h$, onde R_T é o raio da Terra (veja o Apêndice C):

$$g = \frac{v^2}{R_T + h}.$$

Resolvendo para v, temos

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{g(R_T + h)} \\ &= \sqrt{(9{,}20\ \mathrm{m/s^2})(6{,}37 \times 10^6\ \mathrm{m} + 200 \times 10^3\ \mathrm{m})} \\ &= 7.770\ \mathrm{m/s} = 7{,}77\ \mathrm{km/s}. \end{aligned}$$

Podemos mostrar que isso é equivalente a 17.400 mi/h e que o satélite levará 1,47 h para completar uma revolução orbital.

Você pode ficar intrigado com o fato de que, caso o satélite fosse tripulado, embora g = 9,20 m/s² na posição orbital do satélite, um astronauta experimentaria o que chamamos de "ausência de peso", como se o peso não existisse. A explicação é que tanto o astronauta *quanto o satélite* têm a aceleração de 9,20 m/s² dirigida para o centro da Terra. Ambos estão em queda livre, da mesma forma que um passageiro dentro de um elevador, caindo livremente. Então, o astronauta (como o passageiro do elevador) parece flutuar, como se não tivesse peso. Veja a Leitura Complementar 3, no final do Cap. 15 (Vol. 2).

4-8 Movimento Relativo em uma Dimensão

Suponha que um pato voe para o norte a, digamos, 32 km/h. Para um outro pato voando ao lado do primeiro, ele está parado. Em outras palavras, a velocidade de uma partícula depende do **referencial** que o observador usa para realizar a medida. No nosso estudo, um referencial é um sistema físico de referência, um objeto a que relacionamos o nosso sistema de coordenadas.

O sistema de referência que nos parece mais familiar, em nossos vaivéns diários, é o chão sob os nossos pés.* Quando um guarda rodoviário nos diz que estamos dirigindo a 110 km/h, embora não seja dito, sempre relacionamos isso "a um sistema de coordenadas em relação ao solo".

Quando estamos viajando num avião ou num veículo espacial, nem sempre a Terra é o melhor sistema de referência. Podemos escolher qualquer outro que desejarmos. Entretanto, uma vez feito isso, devemos cuidar para que todas as medidas sejam feitas em relação ao referencial escolhido.

Suponha que Alex (referencial A) está parado no acostamento de uma rodovia, observando o carro P (a "partícula") que se movimenta em relação a ele. Bárbara (referencial B), que está dirigindo na rodovia com velocidade constante, também observa o carro P. Suponhamos que, conforme a Fig. 4-22, ambos determinem a posição do carro em um certo instante. De acordo com a figura, observamos que

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}. \tag{4-23}$$

Os termos na Eq. 4-23 são escalares e podem ter qualquer sinal. A equação é lida como: "A posição de P medida com relação a A *é igual* à posição de P medida em relação a B *mais* a posição de B medida com relação a A." Observe que esta interpretação está de acordo com a seqüência de subscritos da Eq. 4-23.

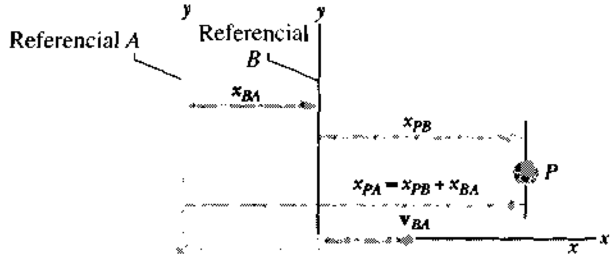


Fig. 4-22 Alex (referencial A) e Bárbara (referencial B) observam o carro P. O movimento é realizado no eixo x, comum aos dois referenciais. O vetor $\mathbf{v}_{BA}$ mostra a velocidade de afastamento relativa dos referenciais A e B. As três posições mostradas são referentes ao mesmo instante.

*Até Shakespeare parecia pensar assim. Ele fez Hamlet dizer: "Esse agradável referencial, a Terra..."

Derivando a Eq. 4-23 em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d}{dt}(x_{PA}) = \frac{d}{dt}(x_{PB}) + \frac{d}{dt}(x_{BA}),$$

ou (como $v = dx/dt$)

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}. \quad (4\text{-}24)$$

Esta equação escalar é a relação entre as velocidades do mesmo móvel (carro P), medido em relação aos dois referenciais;* essas medidas de velocidade fornecem resultados diferentes. Isto é, a Eq. 4-24 diz: "A velocidade de P medida em relação a A *é igual à* velocidade de P medida em relação a B *mais* a velocidade de B medida em relação a A." O termo v_{BA} é a velocidade de afastamento do referencial B em relação ao A; veja Fig. 4-22.

Consideramos apenas referenciais que se movem, *um em relação ao outro*, com velocidade constante; chamados de **referenciais inerciais**. No exemplo apresentado, significa que Bárbara (referencial B) dirigirá sempre com velocidade constante em relação a Alex (referencial A). O carro P (a partícula móvel), no entanto, pode aumentar ou diminuir a velocidade, pode parar ou até mudar o sentido do movimento.

Derivando a Eq. 4-24, em relação ao tempo, obtemos a relação entre as acelerações,

$$a_{PA} = a_{PB}. \quad (4\text{-}25)$$

Observe que, como v_{BA} é constante, sua derivada em relação ao tempo é zero. A Eq. 4-25 mostra que *observadores em referenciais inerciais diferentes (sua velocidade de separação constante é constante) medem a mesma aceleração para o movimento da partícula.*

EXEMPLO 4-11 Alex, estacionado ao lado de uma rodovia na direção leste-oeste, observa um carro P que se move para oeste. Bárbara, dirigindo no sentido leste a uma velocidade v_{BA} = 52 km/h, observa o mesmo carro. Considere o sentido leste como positivo.

a. Se Alex mede uma velocidade de 78 km/h para o carro P, que velocidade Bárbara medirá?

Solução Rearrumando a Eq. 4-24, temos

$$v_{PB} = v_{PA} - v_{BA}.$$

Sabemos que v_{PA} = − 78 km/h, o sinal menos indica que o carro P está se movendo para oeste, isto é, no sentido negativo. Sabemos, também, que v_{BA} = 52 km/h, logo,

$$v_{PB} = (-78\text{ km/h}) - (52\text{ km/h})$$
$$= -130\text{ km/h}. \quad \text{(Resposta)}$$

*É importante observar que os dois subscritos interiores, no termo da direita dessa equação (B, B), são os mesmos; os outros dois (P, A) são os mesmos que aparecem no termo da esquerda, na mesma seqüência.

Se o carro P estivesse amarrado ao de Bárbara, por uma corda enrolada num cilindro, ela se desenrolaria a essa velocidade, enquanto os dois carros se separariam.

b. Se Alex vê o carro P frear, parando em 10 s, que aceleração (considerando-a constante) mediria?

Solução Da Eq. 2-9 ($v = v_0 + at$), temos

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - (-78\text{ km/h})}{10\text{ s}}$$
$$= \left(\frac{78\text{ km/h}}{10\text{ s}}\right)\left(\frac{1\text{ m/s}}{3{,}6\text{ km/h}}\right)$$
$$= 2{,}2\text{ m/s}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

c. Que aceleração Bárbara mediria para o carro freando?

Solução Para Bárbara, a velocidade inicial do carro é −130 km/h, conforme calculado no item (a), anteriormente. Embora o carro tenha sido freado até parar, está parado somente em relação ao referencial de Alex. Para Bárbara, o carro P não está de modo algum parado e, sim, parece se afastar a 52 km/h, pois a sua velocidade final, em relação ao seu referencial, é −52 km/h. Logo, da relação $v = v_0 + at$, temos

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{(-52\text{ km/h}) - (-130\text{ km/h})}{10\text{ s}}$$
$$= 2{,}2\text{ m/s}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

Esta é exatamente a mesma aceleração medida por Alex, o que sem dúvida não poderia ser diferente.

4-9 Movimento Relativo em Duas Dimensões

Agora vamos passar do mundo escalar do movimento relativo em uma dimensão para o mundo vetorial do movimento relativo em duas dimensões (e, por extensão, em três). A Fig. 4-23 mostra os referenciais A e B, agora bidimensionais. Nossos dois observadores estão novamente analisando o movimento de uma partícula P. Vamos admitir mais uma vez que os dois referenciais se afastam a

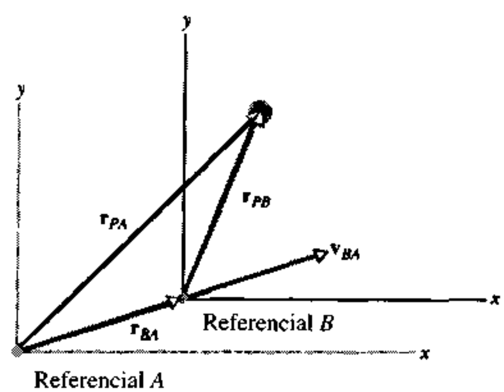


Fig. 4-23 Referenciais em duas dimensões. Os vetores $\mathbf{r}_{PA}$ e $\mathbf{r}_{PB}$ mostram a posição da partícula P nos referenciais A e B, respectivamente. O vetor $\mathbf{r}_{BA}$ mostra a posição do referencial B, em relação ao referencial A. O vetor $\mathbf{v}_{BA}$ mostra a velocidade de afastamento (constante) dos dois referenciais.

uma velocidade constante $\mathbf{v}_{BA}$ (os referenciais são inerciais) e além disso, simplificando, admitamos que seus eixos x e y se mantêm paralelos entre si.

Os observadores nos referenciais A e B medem, cada um, a posição da partícula P em um determinado instante. Do triângulo de vetores na Fig. 4-23, obtemos a equação vetorial

$$\mathbf{r}_{PA} = \mathbf{r}_{PB} + \mathbf{r}_{BA}. \tag{4-26}$$

Esta relação é o equivalente vetorial da Eq. escalar 4-23.

Se derivarmos a Eq. 4-26 com referência ao tempo, acharemos a relação entre as velocidades (vetoriais) da partícula, conforme medida pelos dois observadores; isto é,

$$\mathbf{v}_{PA} = \mathbf{v}_{PB} + \mathbf{v}_{BA}. \tag{4-27}$$

Esta relação é o equivalente vetorial da Eq. escalar 4-24. Observe que a ordem dos subscritos é a mesma daquela equação, e $\mathbf{v}_{BA}$ é novamente a velocidade relativa constante do referencial B, medida pelo observador no referencial A.

Derivando a Eq. 4-27 com referência ao tempo, teremos a relação entre as duas acelerações medidas, ou seja,

$$\mathbf{a}_{PA} = \mathbf{a}_{PB}. \tag{4-28}$$

Que permanece válida no movimento tridimensional, pois todos os observadores, em cada referencial inercial, medirão a mesma aceleração para o movimento da partícula.

EXEMPLO 4-12 Um morcego detecta um inseto (seu alimento) enquanto os dois estão voando, respectivamente, com velocidades $\mathbf{v}_{MS}$ e $\mathbf{v}_{IS}$, em relação ao solo. Veja a Fig. 4-24*a*. Qual a velocidade $\mathbf{v}_{IM}$ do inseto com relação ao morcego, em notação de vetores unitários?

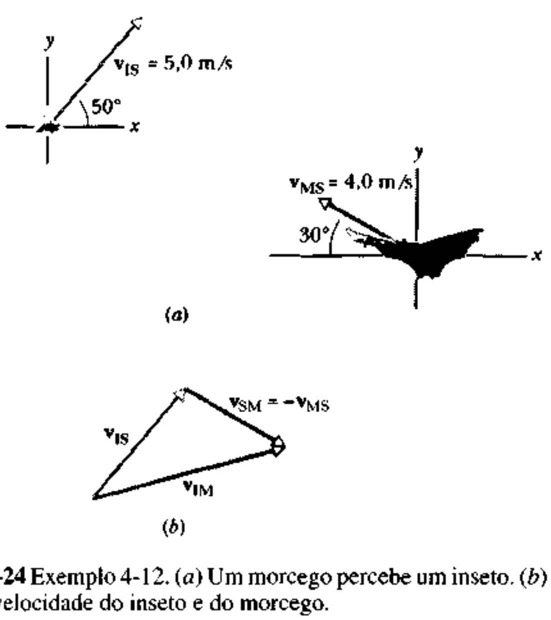


Fig. 4-24 Exemplo 4-12. (*a*) Um morcego percebe um inseto. (*b*) Os vetores velocidade do inseto e do morcego.

Solução Da Fig. 4-24*a*, as velocidades do inseto e do morcego, em relação ao solo, são dadas por

$$\mathbf{v}_{IS} = (5{,}0\ \text{m/s})(\cos 50°)\mathbf{i} + (5{,}0\ \text{m/s})(\text{sen}\, 50°)\mathbf{j}$$

e

$$\mathbf{v}_{MS} = (4{,}0\ \text{m/s})(\cos 150°)\mathbf{i} + (4{,}0\ \text{m/s})(\text{sen}\, 150°)\mathbf{j},$$

onde o ângulo, em cada termo, é em relação ao sentido positivo do eixo x. A velocidade $\mathbf{v}_{IM}$ *do inseto em relação ao morcego* é dada pela soma vetorial da velocidade $\mathbf{v}_{IS}$ do *inseto em relação ao solo* e a velocidade $\mathbf{v}_{SM}$ do *solo em relação ao morcego*; isto é,

$$\mathbf{v}_{IM} = \mathbf{v}_{IS} + \mathbf{v}_{SM},$$

conforme mostrado na Fig. 4-24*b*. O vetor $\mathbf{v}_{SM}$ tem sentido oposto ao vetor $\mathbf{v}_{MS}$. Logo, $\mathbf{v}_{SM} = -\mathbf{v}_{MS}$, então,

$$\mathbf{v}_{IM} = \mathbf{v}_{IS} + (-\mathbf{v}_{MS}).$$

Substituindo as expressões vetores unitários para $\mathbf{v}_{IS}$ e $\mathbf{v}_{MS}$ nessa expressão, encontramos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{IM} &= (5{,}0\ \text{m/s})(\cos 50°)\mathbf{i} + (5{,}0\ \text{m/s})(\text{sen}\, 50°)\mathbf{j} \\ &\quad - (4{,}0\ \text{m/s})(\cos 150°)\mathbf{i} - (4{,}0\ \text{m/s})(\text{sen}\, 150°)\mathbf{j} \\ &= 3{,}21\mathbf{i} + 3{,}83\mathbf{j} + 3{,}46\mathbf{i} - 2{,}0\mathbf{j} \\ &\approx (6{,}7\ \text{m/s})\mathbf{i} + (1{,}8\ \text{m/s})\mathbf{j}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

EXEMPLO 4-13 A bússola de um avião indica que ele está alinhado na direção leste; o medidor de velocidade do ar indica 215 km/h. (A velocidade do ar é a do avião com relação ao ar.) Um vento constante de 65,0 km/h está soprando na direção norte.

a. *Qual a velocidade do avião com relação ao solo?*

Solução A "partícula" em movimento, neste problema, é o avião P. Há dois referenciais, o solo (S) e a massa de ar (M). Podemos reescrever a Eq. 4-27, fazendo uma simples modificação na notação,

$$\mathbf{v}_{PS} = \mathbf{v}_{PM} + \mathbf{v}_{MS} \tag{4-29}$$

A Fig. 4-25*a* mostra que esses vetores formam um triângulo retângulo. Os termos na Eq. 4-29 são, na ordem, a velocidade do avião em relação ao solo, a velocidade do avião em relação ao ar e a velocidade do ar em relação ao solo (isto é, a velocidade do vento). Observe a orientação do avião que, de acordo com a leitura da sua bússola, está direcionado para leste. Na verdade, embora o avião esteja apontado para leste, pode não estar se movendo naquela direção.

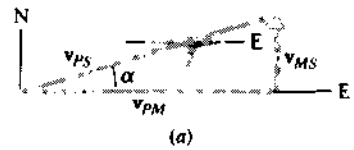
O módulo da velocidade do avião com relação ao solo é obtido de

$$\begin{aligned}v_{PS} &= \sqrt{v_{PM}^2 + v_{MS}^2} \\ &= \sqrt{(215\ \text{km/h})^2 + (65{,}0\ \text{km/h})^2} \\ &= 225\ \text{km/h}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

O ângulo α na Fig. 4-25*a* é determinado através de

$$\begin{aligned}\alpha &= \tan^{-1}\frac{v_{MS}}{v_{PM}} = \tan^{-1}\frac{65{,}0\ \text{km/h}}{215\ \text{km/h}} \\ &= 16{,}8°. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

Logo, o avião está voando a 225 km/h com relação ao solo, na direção 16,8° nordeste. Observe que sua velocidade com relação ao solo (a "velocidade do solo") é maior do que aquela com relação ao ar.



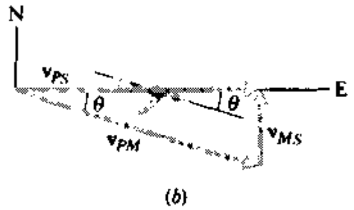


Fig. 4-25 Exemplo 4-13. (*a*) Um avião apontando para leste é desviado para o norte. (*b*) Para viajar na direção leste, o avião deve dirigir-se para o sentido oposto ao do vento.

b. Se o piloto desejar voar para leste, qual deverá ser a sua orientação? Isto é, qual deve ser a leitura da bússola?

Solução Neste caso, o piloto deve direcionar a aeronave contra o vento, para que a velocidade do avião, em relação ao solo, aponte para leste. A velocidade do vento é constante e o diagrama vetorial que representa a nova situação está mostrado na Fig. 4-25*b*. Observe que os três vetores ainda formam um triângulo retângulo, como na Fig. 4-25*a*, e a Eq. 4-29 ainda continua válida.

A velocidade do piloto, em relação ao solo, agora é

$$\begin{aligned} v_{PS} &= \sqrt{v_{PM}^2 - v_{MS}^2} \\ &= \sqrt{(215\ \text{km/h})^2 - (65{,}0\ \text{km/h})^2} = 205\ \text{km/h}. \end{aligned}$$

Conforme a orientação na Fig. 4-25*b*, o piloto deve alinhar o avião contra o vento, segundo um ângulo θ dado por

$$\theta = \text{sen}^{-1}\frac{v_{MS}}{v_{PM}} = \text{sen}^{-1}\frac{65{,}0\ \text{km/h}}{215\ \text{km/h}} = 17{,}6°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Observe que, para essa orientação, a velocidade em relação ao solo é menor do que a em relação ao ar.

4-10 Movimento Relativo para Altas Velocidades (Opcional)

Um satélite está em órbita a uma velocidade de 27.200 km/h. Antes que você chame isto de uma alta velocidade, deve responder a esta pergunta: "Alta, comparada a quê?" A natureza nos deu um padrão: a velocidade c da luz, que é (no vácuo)

$$c = 299.792.458\ \text{m/s} \quad \text{(velocidade da luz)} \qquad (4\text{-}30)$$

Como veremos mais adiante, nenhuma entidade — seja uma partícula ou uma onda — pode mover-se com velocidade superior à da luz, não importa que referencial seja usado para a observação. Com esse padrão, quaisquer objetos de grandes dimensões — não importa quão grandes suas velocidades possam ser com relação a um padrão ordinário — são sempre muito mais lentos. A velocidade do satélite em órbita, por exemplo, é apenas 0,0025% da velocidade da luz. Entretanto, partículas subatômicas, como os elétrons ou os prótons, podem alcançar velocidades bem próximas à da luz (mas nunca igual ou maior). Nas experiências, por exemplo, observamos que um elétron, acelerado através de 10 milhões de volts, alcança uma velocidade de $0{,}9988c$; se dobrarmos o valor da diferença de potencial, sua velocidade aumentará para, apenas, $0{,}9997c$. A velocidade da luz é um limite do qual os objetos podem se aproximar, mas nunca alcançar. (Infelizmente, a velocidade supraluminal, utilizada na ficção científica, como a "dobra espacial", em *Jornada nas Estrelas*, quando a velocidade é $c2^n$, onde n é o número de dobra, é apenas uma ficção.)

Agora, perguntamos: "Como podemos afirmar que a cinemática, que examinamos há muito tempo, estudando objetos muito lentos, também é válida para objetos muito rápidos, como os elétrons ou os prótons, altamente energéticos?" A resposta, conseguida apenas de modo experimental, é que a cinemática para pequenas velocidades *não* permanece válida para as que se aproximam da velocidade da luz. A **teoria especial da relatividade**, de Einstein, no entanto, tem concordado com as experiências em *todas* as velocidades. Daremos, aqui, uma visão resumida dessa teoria, que será apresentada com mais detalhes no Cap. 42 (Vol. 4).

Em "baixas" velocidades — as velocidades que podem ser alcançadas por objetos comuns mensuráveis —, as equações da cinemática da teoria de Einstein se reduzem àquelas que estudamos. A falha da "cinemática mais lenta" é gradativa, suas previsões, quando a velocidade aumenta, vão ficando cada vez menos de acordo com os fatos experimentais. Vamos dar um exemplo: A Eq. 4-24,

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} \qquad \text{(baixas velocidades),} \qquad (4\text{-}31)$$

dá a relação da velocidade da partícula P, vista por um observador no referencial B, em relação a um outro no referencial A. Na teoria de Einstein, a equação correspondente é

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2} \qquad \text{(qualquer velocidade).} \qquad (4\text{-}32)$$

Se $v_{PB} \ll c$ e $v_{BA} \ll c$ (que é sempre o caso para objetos que encontramos em nosso cotidiano), então o denominador na Eq. 4-32 tende para a unidade e a Eq. 4-32 se reduz à Eq. 4-31, como era de se esperar.

A velocidade c da luz é a constante central da teoria de Einstein, e aparece em todas as equações relativísticas. Uma forma de testar essas equações é tornar c infinitamente grande. Nesta condição, *todas* as velocidades seriam "pequenas", e a "cinemática lenta" nunca falharia. Fazendo $c \rightarrow \infty$ na Eq. 4-32, esta equação, realmente, se reduz à Eq. 4-31.

EXEMPLO 4-14 (Pequenas velocidades) Para o caso de $v_{PB} = v_{BA} = 0{,}0001c$ (= 107.200 km/h!), que valor fornecem as Eqs. 4-31 e 4-32 para v_{PA}?

Solução Da Eq. 4-31,

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$$
$$= 0{,}0001c + 0{,}0001c$$
$$= 0{,}0002c. \quad \text{(Resposta)}$$

Da Eq. 4-32,

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2}$$
$$= \frac{0{,}0001c + 0{,}0001c}{1 + (0{,}0001c)^2/c^2} = \frac{0{,}0002c}{1{,}00000001}$$
$$\approx 0{,}0002c. \quad \text{(Resposta)}$$

Conclusão: Para qualquer velocidade alcançada por objetos comuns, as Eqs. 4-31 e 4-32 fornecem, essencialmente, a mesma resposta. Podemos usar a Eq. 4-31 ("cinemática lenta"), sem pensar duas vezes.

EXEMPLO 4-15 (Grandes velocidades) Para o caso de $v_{PB} = v_{BA} = 0{,}65c$, que valor fornecem as Eqs. 4-31 e 4-32 para v_{PA}?

Solução Da Eq. 4-31,

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$$
$$= 0{,}65c + 0{,}65c = 1{,}30c. \quad \text{(Resposta)}$$

Da Eq. 4-32,

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2}$$
$$= \frac{0{,}65c + 0{,}65c}{1 + (0{,}65c)(0{,}65c)/c^2}$$
$$= \frac{1{,}30c}{1{,}423} = 0{,}91c. \quad \text{(Resposta)}$$

Conclusão: Para grandes velocidades (próximas a c), a "cinemática lenta" e a relatividade especial levam a resultados bem diferentes. A "cinemática lenta" não determina limite superior para a velocidade, o que facilmente leva (como neste caso) a velocidades maiores do que a da luz. A relatividade especial, por outro lado, *nunca* admite uma velocidade maior do que c, não importando quão altas sejam as velocidades que se combinam. As experiências, até hoje, têm concordado sempre com a relatividade especial.

RESUMO

Vetor Posição

A localização de uma partícula, em relação à origem de um sistema de coordenadas, é dada pelo *vetor posição* **r** que, na notação de vetores unitários, se escreve

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \tag{4-1}$$

onde $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$ e $z\mathbf{k}$ são as *componentes vetoriais* e x, y e z são as *componentes escalares* do vetor posição **r**. Um vetor posição também pode ser determinado pelo seu módulo e um ou mais ângulos para orientação.

Deslocamento

Se o movimento de uma partícula é representado pela variação do seu vetor posição de $\mathbf{r}_1$ para $\mathbf{r}_2$, então, seu *deslocamento* $\Delta\mathbf{r}$ é

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \tag{4-3}$$

O Exemplo 4-1 é um problema sobre deslocamento.

Velocidade Média

Se uma partícula se desloca durante um intervalo de tempo Δt, sua *velocidade média* $\bar{\mathbf{v}}$ é

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{4-4}$$

Velocidade

Quando Δt, na Eq. 4-4, tende para 0, o limite de $\bar{\mathbf{v}}$ é chamado de *velocidade instantânea*:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \tag{4-6}$$

que pode ser representada na notação de vetores unitários como

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \tag{4-7}$$

onde $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ e $v_z = dz/dt$. Uma demonstração bidimensional de **v** é mostrada no Exemplo 4-3.

Quando a posição de uma partícula em movimento é representada num sistema de coordenadas, **v** é sempre tangente à curva que representa a trajetória da partícula.

Aceleração Média

Se a velocidade de uma partícula varia de $\mathbf{v}_1$ para $\mathbf{v}_2$, no intervalo de tempo Δt, sua *aceleração média*, neste intervalo de tempo, é

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}. \tag{4-9}$$

Aceleração

Na Eq. 4-9, quando Δt tende para 0, o limite de 0 $\bar{\mathbf{a}}$ é chamado de *aceleração instantânea*,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{4-10}$$

Na notação de vetores unitários,

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \tag{4-11}$$

onde $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$ e $a_z = dv_z/dt$. O Exemplo 4-4 mostra como a Eq. 4-10 pode ser usada.

Quando **a** é constante, as componentes de **a**, **v** e **r**, na direção de qualquer eixo, podem ser tratadas como no movimento unidimensional, apresentado no Cap. 2. Veja Exemplo 4-5.

Movimento de Projéteis

O *movimento de projéteis* é o movimento de uma partícula lançada com velocidade inicial $\mathbf{v}_0$, sob a influência apenas da aceleração da gravidade g. Se $\mathbf{v}_0$ é definido por um módulo (a velocidade v_0) e uma orientação (ângulo θ_0), as equações do movimento nos eixos x e y, horizontal e vertical, são, respectivamente,

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t, \tag{4-15}$$

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \tag{4-16}$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt, \tag{4-17}$$

e

$$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4-18}$$

No movimento de projéteis, a trajetória da partícula é parabólica e dada por

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}, \tag{4-19}$$

onde a origem é escolhida de maneira que x_0 e y_0 sejam zero. O **alcance** R, é a distância horizontal do ponto de lançamento, até o ponto em que a partícula retorna à mesma altura da qual foi lançada, ou seja,

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g}. \tag{4-20}$$

Os Exemplos 4-6 a 4-9 tratam do movimento de projéteis.

Movimento Circular Uniforme
Se uma partícula se desloca sobre um círculo ou um arco circular, com raio r e velocidade constante v, está em **movimento circular uniforme** com uma aceleração **a** de módulo

$$a = \frac{v^2}{r}. \tag{4-22}$$

A direção de **a** aponta para o centro do círculo ou do arco circular. A aceleração **a** é chamada de **centrípeta**. O Exemplo 4-10 ilustra o uso da Eq. 4-22.

Movimento Relativo
Quando dois sistemas de referência, A e B, estão se movendo um em relação ao outro com velocidade constante, são chamados de **sistemas de referência inerciais**. A velocidade de uma partícula em movimento, medida por um observador no referencial A, em geral difere daquela medida por um observador no referencial B. Estas velocidades estão relacionadas por

$$\mathbf{v}_{PA} = \mathbf{v}_{PB} + \mathbf{v}_{BA}, \tag{4-27}$$

onde $\mathbf{v}_{BA}$ é a velocidade de B em relação a A. Ambos os observadores medem a mesma aceleração para a partícula, ou seja,

$$\mathbf{a}_{PA} = \mathbf{a}_{PB}. \tag{4-28}$$

O Exemplo 4-11 ilustra o uso dessas equações para o movimento unidimensional; os Exemplos 4-12 e 4-13 tratam do movimento bidimensional.

Se as velocidades consideradas estão próximas à velocidade da luz, a Eq. 4-24 deve ser substituída pela equação usada na **teoria da relatividade especial**. Para o movimento unidimensional, o resultado correto é

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2}, \tag{4-32}$$

que se torna idêntica à Eq. 4-24, se todas as velocidades envolvidas forem desprezíveis em relação à velocidade c da luz. Os Exemplos 4-14 e 4-15 ilustram o uso dessa equação.

QUESTIONÁRIO

1. A aceleração de um corpo pode mudar de direção (a) sem que o deslocamento mude repentinamente de direção, e (b) sem que a velocidade também mude, de imediato, sua direção? Se afirmativo, dê um exemplo.

2. Num salto à distância, algumas vezes chamado de salto em comprimento, que fatores determinam o alcance do salto?

3. Em que ponto da trajetória de um projétil a velocidade é mínima? E máxima?

4. A Fig. 4-26 mostra a trajetória de um Learjet da NASA num percurso destinado a simular as condições de pouca gravidade, por um curto período. Demonstre que os passageiros experimentarão uma ausência de peso, se o avião seguir uma determinada trajetória parabólica.

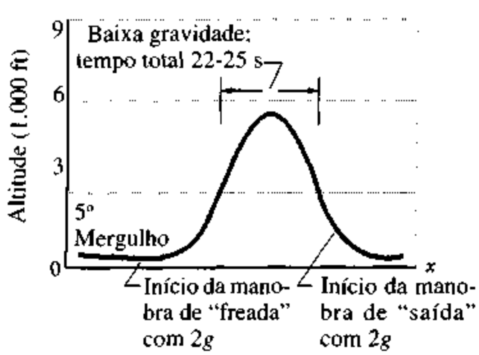


Fig. 4-26 Questão 4.

5. Um lançamento (arremesso) é feito por cima do ombro de um jogador. O ângulo de lançamento, que permite o maior alcance, é menor do que 45°; ou seja, uma trajetória mais alongada tem um maior alcance. Explique por quê.

6. Você está dirigindo um carro logo atrás de um caminhão, com a mesma velocidade dele. Um engradado cai da carroceria na estrada. Se você não se desviar, nem frear, poderá seu carro colidir com o engradado, antes que este toque no chão? Explique sua resposta.

7. Na Fig. 4-27, são mostradas trajetórias para três quiques de uma bola de futebol. Desprezando o efeito do ar sobre a bola, ordene as trajetórias de acordo com (a) o tempo de permanência no ar, (b) a componente vertical da velocidade inicial, (c) a componente horizontal da velocidade inicial e (d) a velocidade inicial. Ordene, do maior para o menor, indicando qualquer resultado igual.

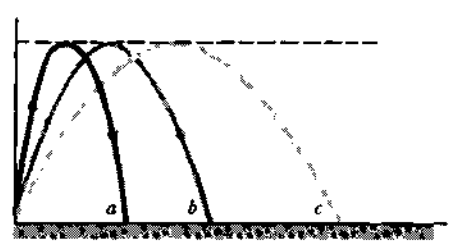


Fig. 4-27 Questão 7.

8. Um atirador mantém o centro de um alvo exatamente na sua linha de mira. Nestas condições, será necessário dar uma certa inclinação ao rifle usado pelo atirador, para que a bala descreva a trajetória parabólica correta e acerte o centro do alvo. (Se o rifle for mantido na horizontal, a bala acertará o alvo *abaixo* do centro. Por quê?) Agora, se em vez de o atirador e o alvo estarem no mesmo nível horizontal, o alvo estiver acima ou abaixo do nível do atirador, a uma distância deste igual à do caso anterior, prove que, se o atirador inclinar a arma em relação à linha de mira, com o mesmo ângulo, ela acertará o alvo *acima* do centro, nos dois casos. (Veja o artigo "Puzzle in Elementary Ballistics", de Ole Anton Haugland, *The Physics Teacher*, April 1983, pág. 246.)

9. Quando os alemães bombardearam Paris, a 112 km de distância, com uma peça de artilharia de longo alcance apelidada de "Grande Bertha", os bombardeios foram feitos num ângulo maior do que 45°; os alemães descobriram que, para ângulos maiores, o alcance era maior, talvez até o dobro do de um ângulo de 45°. Considerando que a densidade do ar diminui com a altura, explique tal descoberta.

10. No movimento de projéteis, quando a resistência do ar é desprezada, é necessário considerar o movimento como tridimensional, em vez de bidimensional?

11. É possível estar acelerado, se você se move com velocidade constante em módulo? É possível fazer uma curva com aceleração zero? E com aceleração constante?

12. Mostre que, levando em conta a rotação e a translação da Terra, um livro parado sobre sua mesa se move mais rápido à noite do que durante o dia. Em qual sistema de referência esta declaração é verdadeira?

13. Um aviador, saindo de um mergulho, descreve um arco de circunferência e diz que "experimentou uma aceleração de $3g$", durante o mergulho. Explique o significado desta afirmação.

14. Um rapaz, sentado em um trem que se move com velocidade constante, atira uma bola verticalmente para cima. A bola cairá atrás dele? Na frente? Em suas mãos? O que acontece se o trem acelerar ou fizer uma curva, enquanto a bola estiver no ar?

15. Uma mulher, no vagão de um trem que se move com velocidade constante, deixa cair uma moeda, ao inclinar-se num gradil. Descreva a trajetória da moeda vista (a) pela mulher no trem, (b) por uma pessoa parada junto aos trilhos e (c) por uma pessoa num outro trem, se movendo em sentido contrário, num trilho paralelo.

16. Se a aceleração de um corpo é constante, em relação a um determinado referencial, será também constante, quando medida de qualquer outro referencial?

17. A Eq. 4-31 é tão familiar em nosso cotidiano, que muitas vezes é considerada "obviamente correta, não necessitando ser comprovada". Muitas das chamadas contestações da teoria da relatividade se baseariam nessa afirmação. Como você contestaria alguém que fizesse tal consideração?

18. Um elevador está descendo com velocidade constante. Um passageiro deixa cair uma moeda no chão. Que aceleração seria observada na queda da moeda (a) pelo passageiro e (b) por uma pessoa parada, em relação à cabine do elevador?

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

Seção 4-2 Posição e Deslocamento

1E. Certa melancia tem as seguintes coordenadas: $x = -5{,}0$ m, $y = 8{,}0$ m e $z = 0$ m. Ache seu vetor posição (a) em notação de vetores unitários e (b) em função do seu módulo e da sua direção. (c) Represente o vetor num sistema de coordenadas dextrogiro.

2E. O vetor posição para um elétron é $\mathbf{r} = 5{,}0\mathbf{i} - 3{,}0\mathbf{j} + 2{,}0\mathbf{k}$, onde a unidade não mencionada é o metro. (a) Determine o módulo de $\mathbf{r}$. (b) Desenhe o vetor num sistema de coordenadas dextrogiro.

3E. Inicialmente, o vetor posição para um próton é $\mathbf{r} = 5{,}0\mathbf{i} - 6{,}0\mathbf{j} + 2{,}0\mathbf{k}$ e, logo depois, é $\mathbf{r} = -2{,}0\mathbf{i} + 6{,}0\mathbf{j} + 2{,}0\mathbf{k}$, onde a unidade não mencionada é o metro. (a) Qual é o vetor deslocamento do próton e (b) a que plano ele está paralelo?

4E. Um pósitron sofre um deslocamento $\Delta\mathbf{r} = 2{,}0\mathbf{i} - 3{,}0\mathbf{j} + 6{,}0\mathbf{k}$, o vetor posição final é $\mathbf{r} = 3{,}0\mathbf{j} - 4{,}0\mathbf{k}$. (A unidade não mencionada é o metro.) Qual era o vetor posição inicial do pósitron?

Seção 4-3 Velocidade e Velocidade Média

5E. Um avião voa 480 km da cidade A para a cidade B na direção leste em 45,0 min e, depois, voa 960 km da B para a C na direção sul em 1,50 h. (a) Qual o vetor deslocamento que representa a viagem total? Quais são o vetor velocidade média e (c) a velocidade escalar média nesta viagem?

6E. Um trem se move para leste com uma velocidade constante de 60,0 km/h, durante 40,0 min, depois, na direção 50,0° nordeste, durante 20,0 min e, finalmente, na direção oeste, durante 50,0 min. Qual a velocidade média do trem durante esse percurso?

7E. Um balão, em 3,50 h, se desvia 21,5 km ao norte, 9,70 km a leste e 2,88 km acima do seu ponto de decolagem no solo. Determine (a) o módulo da sua velocidade média e (b) o ângulo que a sua velocidade média faz com a horizontal.

8E. Inicialmente, o vetor posição de um íon é $\mathbf{r} = 5{,}0\mathbf{i} - 6{,}0\mathbf{j} + 2{,}0\mathbf{k}$ e, 10 s depois, é $\mathbf{r} = -2{,}0\mathbf{i} + 8{,}0\mathbf{j} - 2{,}0\mathbf{k}$. (A unidade não mencionada é o metro.) Qual foi a sua velocidade média durante os 10 s?

9E. A posição de um elétron é dada por $\mathbf{r} = 3{,}0t\mathbf{i} - 4{,}0t^2\mathbf{j} + 2{,}0\mathbf{k}$ (onde t está em segundos e as unidades dos coeficientes são tais que $\mathbf{r}$ está em metros). (a) Qual é $\mathbf{v}(t)$ para o elétron? (b) Na notação de vetores unitários, qual é $\mathbf{v}$ em $t = 2{,}0$ s? (c) Quais são o módulo e a direção de $\mathbf{v}$, logo depois?

Seção 4-4 Aceleração e Aceleração Média

10E. Um próton tem inicialmente $\mathbf{v} = 4{,}0\mathbf{i} - 2{,}0\mathbf{j} + 3{,}0\mathbf{k}$ e, 4,0 s depois, tem $\mathbf{v} = -2{,}0\mathbf{i} - 2{,}0\mathbf{j} + 5{,}0\mathbf{k}$ (a unidade omitida é o m/s). (a) Qual a aceleração média $\bar{\mathbf{a}}$ em 4,0 s? (b) Quais são o módulo e a direção de $\bar{\mathbf{a}}$?

11E. Uma partícula se move de forma que sua posição, em função do tempo, é $\mathbf{r} = \mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, em unidades SI. Deduza expressões para (a) sua velocidade e (b) sua aceleração, em função do tempo.

12E. A posição $\mathbf{r}$ de uma partícula em movimento, num plano xy é dada por $\mathbf{r} = (2{,}00t^3 - 5{,}00t)\mathbf{i} + (6{,}00 - 7{,}00t^4)\mathbf{j}$. Com $\mathbf{r}$ em metros e t em segundos. Calcule (a) $\mathbf{r}$, (b) $\mathbf{v}$ e (c) $\mathbf{a}$ quando $t = 2{,}00$ s. (d) Qual a direção da tangente à trajetória da partícula em $t = 2{,}00$ s?

13E. Um barco à vela desliza na superfície congelada de um lago, com aceleração constante produzida pelo vento. Em um determinado instante, sua velocidade é $6{,}30\mathbf{i} - 8{,}42\mathbf{j}$, em metros por segundo. Três segundos depois, devido à mudança do vento, o barco pára de imediato. Qual a sua aceleração média, durante este intervalo de 3 s?

14P. Uma partícula A se move ao longo da reta $y = 30$ m com velocidade constante $\mathbf{v}$ ($v = 3{,}0$ m/s), paralela ao semi-eixo positivo x (Fig. 4-28). Uma segunda partícula B parte da origem com velocidade zero e aceleração constante $\mathbf{a}$ ($a = 0{,}40$ m/s^2), no mesmo instante em que a partícula A cruza o eixo y. Que ângulo θ, entre $\mathbf{a}$ e o semi-eixo positivo y, resultaria em uma colisão entre essas duas partículas? (Se seus cálculos resultarem numa equação de quarto grau, substitua o termo t^4 por $u = t^2$ e resolva a equação quadrática em u.)

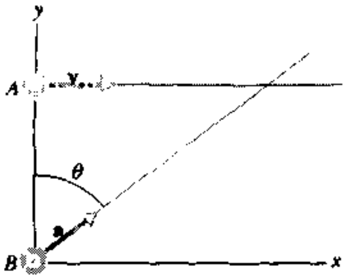


Fig. 4-28 Problema 14.

15P. Uma partícula parte da origem com uma velocidade inicial $\mathbf{v} = 3{,}00\mathbf{i}$, em metros por segundo, sob a ação de uma aceleração constante $\mathbf{a} = -1{,}00\mathbf{i} - 0{,}500\mathbf{j}$, em metros por segundo ao quadrado. (a) Qual é a velocidade da partícula, quando alcança sua coordenada x máxima? (b) Onde a partícula está, nesse instante?

16P. A velocidade $\mathbf{v}$ de uma partícula se movendo no plano xy é dada por $\mathbf{v} = (6{,}0t - 4{,}0t^2)\mathbf{i} + 8{,}0\mathbf{j}$. Com $\mathbf{v}$ em metros por segundo e t (> que 0) em segundos. (a) Qual é a aceleração em $t = 3{,}0$ s? (b) Quando (se for o caso) sua aceleração é zero? (c) Quando (se for o caso) sua velocidade é zero? Quando (se for o caso) sua velocidade escalar é igual a 10 m/s?

Seção 4-6 Análise do Movimento de Projéteis

> *Em alguns destes problemas, não é desejável desprezar os efeitos do ar, mas ajuda a simplificar os cálculos.*

17E. Um dardo é atirado horizontalmente em direção à mosca, ponto P no centro do alvo da Fig. 4-29, com uma velocidade inicial de 10 m/s. Ele atinge o ponto Q, embaixo de P, na borda do alvo, após 0,19 s. (a) Qual a distância PQ? (b) A que distância do alvo está o arremessador dos dardos?

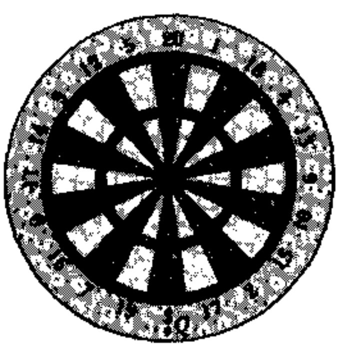


Fig. 4-29 Exercício 17.

18E. Um rifle está apontado horizontalmente para um alvo a 300 m de distância. A bala atinge o alvo 2,25 m abaixo do ponto visado. (a) Qual o tempo de percurso da bala? (b) Qual a velocidade da bala ao sair do rifle?

19E. Elétrons, como qualquer outro objeto material, podem cair em queda livre. (a) Se um elétron é projetado, horizontalmente, com uma velocidade de $3{,}0 \times 10^6$ m/s, quanto ele cairá, em relação à horizontal, após percorrer 1,0 m? (b) Se a velocidade inicial for aumentada, a resposta do item (a) aumenta ou diminui?

20E. Um feixe de elétrons é projetado, na horizontal, com uma velocidade de $1{,}0 \times 10^9$ cm/s, na região entre duas placas horizontais de 2,0 cm^2, no interior de uma válvula. Um campo elétrico entre as placas causa uma desaceleração constante dos elétrons, de módulo igual a $1{,}0 \times 10^{17}$ cm/s^2. Determine (a) o tempo necessário para os elétrons passarem entre as placas, (b) o deslocamento vertical do feixe entre as placas (ele não penetra nas placas) e (c) a velocidade do feixe, assim que sai da região entre as placas.

21E. Uma bola se movimenta horizontalmente para fora da superfície de uma mesa a 12,0 m de altura. Atinge o solo a 15,0 m da borda da mesa, na horizontal. (a) Quanto tempo a bola ficou no ar? Qual era sua velocidade no instante em que deixou a mesa?

22E. Um projétil é atirado horizontalmente de uma arma que está 45,0 m acima de um solo plano. A velocidade na saída do cano é 250 m/s. (a) Por quanto tempo o projétil permanece no ar? (b) A que distância da arma, na horizontal, ele cai ao solo? (c) Qual o módulo do componente vertical da velocidade, no instante em que atinge o solo?

23E. Uma bola de beisebol é lançada a uma velocidade de 160 km/h, horizontalmente. O rebatedor está a uma distância de 18 m. (a) Quanto tempo a bola leva para percorrer os primeiros 9 m, na horizontal? E os 9 m restantes? (b) De quanto a bola cai, sob a ação da gravidade, durante os primeiros 9 m, em relação à trajetória horizontal? (c) E durante os 9 m restantes? (d) Por que os resultados de (b) e (c) são diferentes? (Despreze a resistência do ar.)

24E. Um projétil é lançado com uma velocidade inicial de 30 m/s, num ângulo de 60° acima da horizontal. Calcule o módulo e a direção da velocidade (a) 2,0 s e (b) 5,0 s, depois do lançamento.

25E. Uma pedra é catapultada para a direita com uma velocidade inicial de 20,0 m/s, num ângulo de 40,0° acima do solo. Calcule seus deslocamentos horizontal e vertical (a) 1,10 s, (b) 1,80 s e (c) 5,00 s depois do lançamento.

26E. Você atira uma bola do alto de um penhasco com uma velocidade inicial de 15,0 m/s, fazendo um ângulo de 20,0°, abaixo da horizontal. Calcule (a) o deslocamento horizontal da bola e (b) o vertical 2,30 s depois.

27E. Você atira uma bola com uma velocidade de 25,0 m/s, num ângulo de 40,0° acima da horizontal, diretamente contra uma parede, conforme mostrado na Fig. 4-30. A parede está a 22,0 m do ponto de lançamento. (a) Quanto tempo a bola fica no ar antes de bater na parede? (b) A que distância acima do ponto de lançamento a bola bate na parede? (c) Quais são as componentes horizontal e vertical da velocidade quando ela bate na parede? (d) Ela ultrapassa o ponto mais alto de sua trajetória antes de bater na parede?

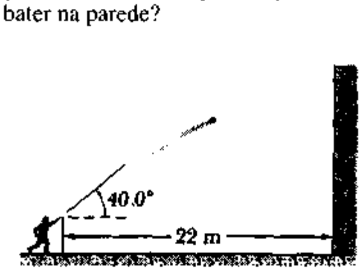


Fig. 4-30 Exercício 27.

28E. (a) Prove que a razão da altura máxima H pelo alcance R, para um projétil atirado do nível do solo com um ângulo θ_0 acima da horizontal, é dada por $H/R = (\tan \theta_0)/4$. Veja Fig. 4-31. (b) Para que ângulo θ_0 temos $H = R$?

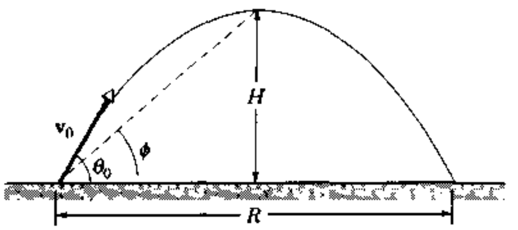


Fig. 4-31 Exercícios 28 e 29.

29E. Um projétil é atirado do nível do solo com um ângulo θ_0, acima da horizontal. (a) Mostre que o ângulo de elevação ϕ do ponto mais alto, visto do local de lançamento, está relacionado com θ_0, o ângulo de elevação do lançamento, por $\tan \phi = (\tan \theta_0)/2$. Veja Fig. 4-31 e Exercício 28. (b) Calcule ϕ para $\theta_0 = 45°$.

30E. Uma pedra é lançada para o alto de um penhasco, de altura h, com uma velocidade inicial de 42,0 m/s com um ângulo de 60,0°, acima da horizontal, conforme mostrado na Fig. 4-32. A pedra cai em A 5,50 s após o lançamento. Calcule (a) a altura h do penhasco; (b) a velocidade da pedra imediatamente antes do impacto em A; e (c) a altura máxima H, acima do nível do solo.

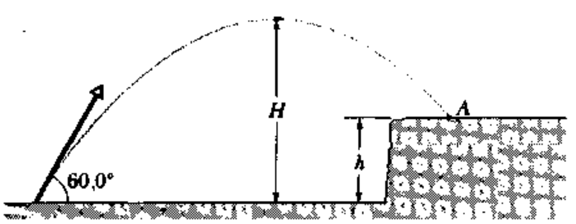


Fig. 4-32 Exercício 30.

31P. No Exemplo 4-6, calcule (a) a velocidade da cápsula, quando ela cai na água e (b) o ângulo de impacto θ mostrado na Fig. 4-15.

32P. Nos Jogos Olímpicos de 1968, na Cidade do México, Bob Beamon quebrou o recorde com um salto à distância de 8,90 m. (Veja a Fig. 4-33.) Suponha que a sua velocidade na impulsão foi de 9,5 m/s, parecida com a de um velocista. O quanto esse atleta chegou perto do alcance máximo possível na ausência da resistência do ar? O valor de g, na Cidade do México, é 9,78 m/s².

33P. Um rifle com uma velocidade de tiro de 500 m/s atira num alvo, a 50 m de distância. A que altura, acima do alvo, deve ser apontado o cano do rifle, para que a bala atinja o alvo?

34P. Mostre que a altura máxima alcançada por um projétil é $y_{máx} = (v_0 \text{ sen } \theta_0)^2/2g$.

35P. Numa história policial, um corpo é encontrado a 4,5 m da base de um prédio e sob uma janela aberta a 24 m acima. Você conseguiria dizer se a morte foi ou não acidental? Explique sua resposta.

36P. Em *Duas Novas Ciências*, de Galileu, ele afirma que "para elevações [ângulos de projeção] que estejam deslocados, acima ou abaixo de 45°, pelo mesmo intervalo, os alcances são iguais...". Prove tal afirmação. (Veja a Fig. 4-34.)

37P. Uma bola é jogada do solo para o ar. A uma altura de 9,1 m, a velocidade é $\mathbf{v} = 7,6\mathbf{i} + 6,1\mathbf{j}$ em metros por segundo ($\mathbf{i}$ horizontal, $\mathbf{j}$ vertical). (a) Qual a altura máxima alcançada pela bola? (b) Qual será a distância horizontal alcançada pela bola? (c) Qual a velocidade da bola (módulo e direção), no instante em que bate no solo?

Fig. 4-33 Problema 32. O salto de Bob Beamon.

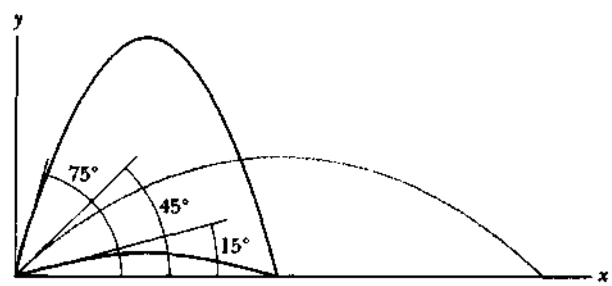


Fig. 4-34 Problema 36.

38P. O alcance de um projétil não depende apenas de v_0 e θ_0, mas também do valor da aceleração g, que varia de um lugar para o outro. Em 1936, Jesse Owens estabeleceu o recorde mundial de salto à distância com a marca de 8,09 m, nos Jogos Olímpicos de Berlim ($g = 9,8128$ m/s²). Suponda os mesmos valores para v_0 e θ_0, de quanto seu recorde teria diferido se ele tivesse competido em Melbourne ($g = 9,7999$ m/s²) em 1956?

39P. Num jogo de beisebol, o jogador da terceira base quer fazer um lançamento para a primeira, a 38,1 m de distância. Sua melhor velocidade de lançamento é 136 km/h. (a) Se ele lança a bola horizontalmente, 1,0 m acima do solo, a que distância da primeira base ela alcançará o solo? (b) Com que ângulo de elevação o jogador da terceira base deverá lançar a bola, para o da primeira agarrá-la a 1,0 m, acima do solo? (c) Qual o tempo de percurso da bola nesse caso?

40P. Durante uma erupção vulcânica, lascas de rocha sólida podem ser lançadas de um vulcão; tais projéteis são chamados de *bombas vulcânicas*. A Fig. 4-35 mostra a seção transversal do Monte Fuji, no Japão. (a) Com que velocidade inicial uma dessas bombas deve ser lançada do ponto A, boca da cratera, fazendo um ângulo de 35° com a horizontal, de forma a alcançar o ponto B, na base do vulcão? Despreze os efeitos do ar.

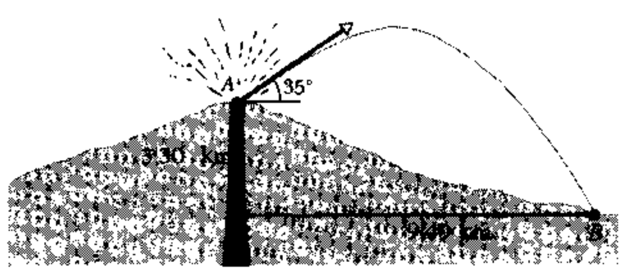


Fig. 4-35 Problema 40.

durante o trajeto da bomba. (b) Qual será o tempo de percurso da bomba? (c) O efeito do ar irá aumentar ou diminuir o valor calculado em (a)?

41P. Com que velocidade inicial um jogador de basquete deve lançar a bola, num ângulo de 55° acima da horizontal, para fazer a cesta, conforme mostra a Fig. 4-36?

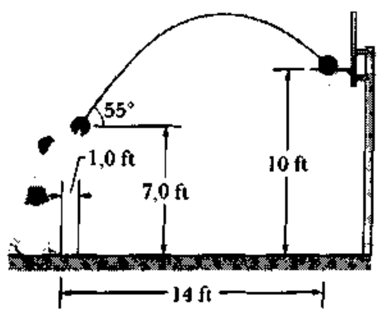


Fig. 4-36 Problema 41.

42P. Um goleiro levanta a bola com as mãos, para chutá-la a uma distância de 45,5 m, alcançada em 4,5 s. Se a bola deixa os pés do jogador a 1,5 m acima do solo, qual deve ser a velocidade inicial dela (módulo e direção)?

43P. O B-52 mostrado na Fig. 4-37 tem 49 m de comprimento e, no instante do bombardeio, está voando a uma velocidade de 820 km/h. Qual a distância entre as crateras das bombas? Faça as medidas que sejam necessárias, diretamente da figura. Suponha que não há vento e despreze a resistência do ar. Como a resistência do ar afetaria a sua resposta?

Fig. 4-37 Problema 43.

44P. Um projétil é atirado com uma velocidade inicial v_0 = 30,0 m/s, do nível do solo, para um alvo a uma distância R = 20,0 m, no mesmo nível (Fig. 4-38). Determine os dois ângulos de projeção.

45P. Qual a altura máxima, na vertical, que um jogador de beisebol pode lançar uma bola, se seu *alcance* máximo de lançamento é 60 m?

46P. Uma bola de futebol é chutada com uma velocidade inicial de 19,2 m/s, num ângulo de 45°, em direção ao gol. Um goleiro, que está a 54,6

Fig. 4-38 Problema 44.

m de distância, na linha do gol, começa a correr para interceptá-la. Qual deve ser a sua velocidade média, para agarrar a bola no exato instante em que ela bate no solo? Despreze a resistência do ar.

47P. Uma bola rola, horizontalmente, do alto de uma escadaria com velocidade inicial de 1,5 m/s. Os degraus têm 20,32 cm de altura por 20,32 cm de largura. Em qual degrau a bola bate primeiro?

48P. Um determinado avião está voando a 333,35 km/h e mergulha num ângulo de 30,0° abaixo da horizontal, no instante em que lança um foguete anti-radar. (Veja a Fig. 4-39.) A distância horizontal, entre o ponto de lançamento e o ponto em que o foguete atinge o solo, é 690 m. (a) A que altura estava o avião, quando lançou o foguete? (b) Quanto tempo o foguete voou, antes de cair?

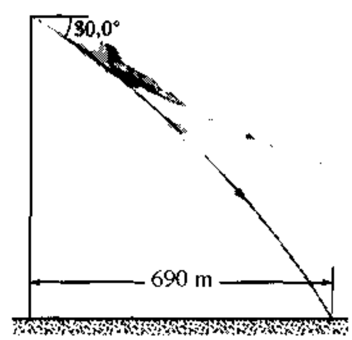


Fig. 4-39 Problema 48.

49P. Um avião mergulhando num ângulo de 53,0° com a vertical a uma altitude de 730 m lança um projétil, que bate no solo 5,00 s depois de ser lançado. (a) Qual a velocidade do avião? (b) Que distância o projétil percorreu, horizontalmente, durante seu vôo? (c) Quais eram as componentes horizontal e vertical de sua velocidade no instante em que caiu no solo?

50P. Uma bola é atirada na horizontal de uma altura de 20 m, batendo no chão com o triplo de sua velocidade inicial. Qual a sua velocidade inicial?

51P. A velocidade de lançamento de um determinado projétil é o quíntuplo de sua velocidade na altura máxima. Calcule o ângulo de elevação no lançamento.

52P. (a) Durante uma partida de tênis, um jogador saca com uma velocidade de 23,6 m/s (conforme registrado por um radar); a bola deixa a raquete, horizontalmente, 2,37 m acima da quadra. A que altura a bola passa sobre a rede, que está a 12 m de distância e tem 0,90 m de altura? (b) Suponha que o jogador saque a bola como antes, exceto que ela deixa a raquete sob um ângulo de 5,00° abaixo da horizontal. Agora, a bola consegue ultrapassar a rede?

53P. No Exemplo 4-8, suponha que um segundo canhão de defesa, idêntico ao primeiro, é posicionado 30 m acima do nível do mar, de forma diferente do primeiro. Se o ângulo de elevação de tiro é 45°, de quanto difere o alcance horizontal do segundo canhão, em relação ao primeiro, que era 690 m?

54P. Um rebatedor bate uma bola arremessada, cujo centro está 1,2 m acima do solo, de forma que o ângulo de projeção seja 45° e o *alcance* seja 105 m. A bola alcançará a base do corredor, se ultrapassar um obstáculo de 7,2 m de altura, que está a 96 m da base principal. Ela ultrapassará o obstáculo? Em caso afirmativo, passará a que altura do obstáculo?

55P*. Um jogador de futebol pode chutar a bola com uma velocidade inicial de 25 m/s. Em que ângulos de elevação deve chutá-la, para fazer o gol, se está a 50 m em frente à baliza, que tem 3,44 m de altura? (Você pode usar a relação $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$ para obter uma relação entre $\tan^2\theta$ e $1/\cos^2\theta$, e então resolver a equação do segundo grau resultante.)

56P*. Um canhão antitanque está localizado na borda de um platô, 60 m acima de um solo plano (Fig. 4-40). Seu artilheiro avista um tanque inimigo parado no solo plano, a 2,2 km de distância. Ao mesmo tempo, a equipe do tanque vê o canhão e começa a afastar-se com uma aceleração de 0,90 m/s². Se o canhão antitanque dispara com uma velocidade de 240 m/s e com 10° de elevação, em relação à horizontal, quanto tempo o artilheiro deve esperar, antes de atirar, para que o projétil alcance o tanque?

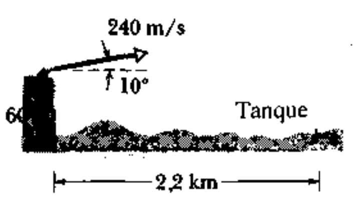


Fig. 4-40 Problema 56.

57P*. Um foguete é lançado num ângulo de 70,0° com a horizontal a partir do repouso e se move em linha reta com uma aceleração de 46,0 m/s². Após 30,0 s de vôo retilíneo propulsado, o motor pára e o foguete volta à Terra fazendo uma trajetória parabólica (veja a Fig. 4-41). Suponha que a aceleração em queda livre é 9,8 m/s², durante todo o tempo, e despreze a resistência do ar. (a) Calcule o tempo de vôo, desde o lançamento até o impacto no solo. (b) Qual a altura máxima alcançada? (c) A que distância o ponto de impacto está da rampa de lançamento?

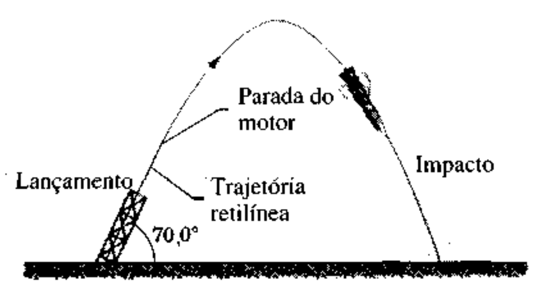


Fig. 4-41 Problema 57.

Seção 4-7 Movimento Circular Uniforme

58E. No modelo de Bohr do átomo de hidrogênio, um elétron orbita em torno de um próton, num círculo de raio $5{,}28 \times 10^{-11}$ m com uma velocidade de $2{,}18 \times 10^6$ m/s. Qual a aceleração do elétron nesse modelo?

59E. (a) Qual é a aceleração de um velocista, ao fazer uma curva de 25 m de raio com a velocidade de 10 m/s? (b) Para onde aponta o vetor aceleração **a**?

60E. Uma partícula carregada se move numa trajetória circular, sob o efeito de um campo magnético. Suponha que um elétron, sob a ação de um determinado campo magnético, experimente uma aceleração radial de $3{,}0 \times 10^{14}$ m/s². Qual a velocidade do elétron, se o raio de sua trajetória circular for 15 cm?

61E. Um velocista corre em volta de uma pista circular com a velocidade de 9,2 m/s e com aceleração centrípeta de 3,8 m/s². (a) Qual o raio da pista? (b) Quanto tempo ele leva para dar uma volta completa na pista a essa velocidade?

62E. Um satélite se move em volta da Terra, numa órbita circular, a 640 km de altura. O tempo de uma revolução é 98,0 min. (a) Qual a velocidade do satélite? (b) Qual a aceleração em queda livre na órbita?

63E. Se uma sonda espacial operada por controle remoto pode resistir ao esforço causado por uma aceleração de 20 *g*, (a) qual o raio mínimo da trajetória desse veículo espacial, quando está se movendo com um décimo da velocidade da luz? (b) Quanto tempo levaria para descrever um arco de 90°, a essa velocidade?

64E. Um ventilador completa 1.200 rotações a cada minuto. Considere um ponto na borda da hélice, que tem um raio de 0,15 m. (a) Qual a distância percorrida pelo ponto em uma rotação? (b) Qual a velocidade do ponto? (c) Qual a aceleração?

65E. Um trem de grande velocidade, conhecido como TGV (do francês *train à grande vitesse*), que trafega de Paris para o sul da França, tem uma velocidade média programada de 216 km/h. (a) Se o trem fizer uma curva a tal velocidade, qual o menor raio possível para a ferrovia, de forma que os passageiros não experimentem uma aceleração superior a 0,050*g*? (b) Para fazer uma curva com 1,00 km de raio, para que valor o trem deve ter sua velocidade reduzida, de forma a manter a aceleração abaixo deste limite?

66E. Quando uma grande estrela se transforma numa *supernova*, seu núcleo é tão fortemente comprimido que ela se torna uma *estrela de nêutrons*, com um raio de cerca de 20 km (aproximadamente o tamanho da cidade de San Francisco!). Se uma estrela de nêutrons efetua uma rotação por segundo, (a) qual a velocidade de uma partícula no equador da estrela e (b) qual a aceleração centrípeta da partícula em m/s² e em unidades *g* (onde *g* é igual a 9,8 m/s²)? (c) Se a estrela de nêutrons girar ainda mais rápido, o que acontecerá com as respostas de (a) e (b)?

67E. Um astronauta está girando numa centrífuga de 5,0 m de raio. (a) Qual a velocidade do astronauta, se a sua aceleração é 7,0*g*? (b) Quantas rotações por minuto são necessárias para produzir essa aceleração?

68P. Uma roda-gigante tem 15 m de raio e completa cinco voltas em torno de seu eixo horizontal a cada minuto. (a) Qual a aceleração de um passageiro no ponto mais alto? (b) E no mais baixo?

69P. (a) Qual é a aceleração centrípeta de um objeto no equador terrestre, devido à rotação da Terra? (b) Qual deveria ser o período de rotação da Terra, de maneira que a aceleração centrípeta de um objeto no equador terrestre fosse igual a 9,8 m/s²?

70P. Calcule a aceleração de uma pessoa na latitude 40°, em função da rotação da Terra. (Veja a Fig. 4-42.)

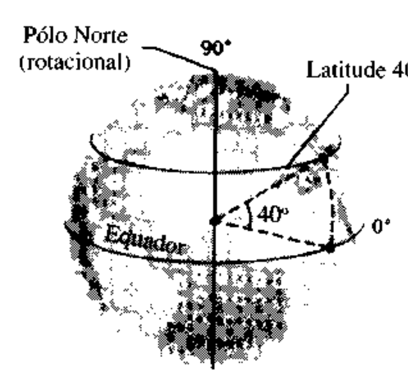


Fig. 4-42 Problema 70.

71P. Uma partícula P se desloca com velocidade constante, num círculo de 3,00 m de raio (Fig. 4-43) e completa uma revolução em 20,0 s. A partícula passa pelo ponto O, no instante $t = 0$. Calcule o módulo e a direção de cada um dos seguintes vetores: (a) Em relação ao ponto O, determine o vetor posição da partícula nos instantes t = 5,00 s; 7,50 s e 10,0 s. Para o intervalo de 5,00 segundos, entre o final do quinto e o final do décimo segundo, calcule (b) o deslocamento e (c) a velocidade média da partícula. Calcule suas (d) velocidade e (e) aceleração, no início e no fim desse intervalo de 5,00 s.

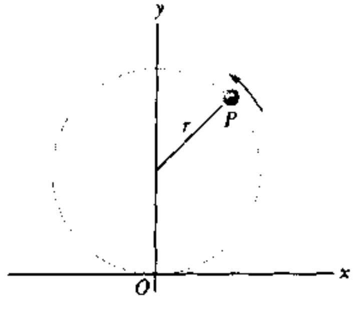


Fig. 4-43 Problema 71.

72P. Uma pedra, presa a um cordão de 1,5 m de comprimento, é girada por um menino, fazendo um círculo horizontal a 2,0 m acima do solo. Quando o cordão arrebenta, a pedra é lançada horizontalmente, caindo ao solo 10 m adiante. Qual era a aceleração centrípeta da pedra, enquanto estava em movimento circular?

Seção 4-8 Movimento Relativo em Uma Dimensão

73E. Um barco está navegando rio acima, a 14 km/h em relação à água do rio. A velocidade da água, em relação ao solo, é 9 km/h. (a) Qual a velocidade do barco em relação ao solo? (b) Uma criança no barco caminha da proa para a popa a 6 km/h, em relação ao barco. Qual a velocidade da criança com relação ao solo?

74E. Uma pessoa caminha até uma escada rolante de 15 m de comprimento, que está parada, em 90 s. Ao ficar em pé na escada, esta começa a se mover, transportando a pessoa para cima em 60 s. Quanto tempo a pessoa levaria, se continuasse a subir na escada em movimento? A resposta depende do comprimento da escada?

75E. Um vôo transcontinental de 5.000 km é programado para durar mais 50 min na direção oeste do que na leste. A velocidade do avião é 1.100 km/h e as correntes de ar se movem tanto para leste quanto para oeste. Que considerações acerca da velocidade dessas correntes devem ser levadas em conta na preparação do plano de vôo?

76E. Um cinegrafista, viajando na direção oeste numa camioneta a 60 km/h, filma um guepardo que se desloca na mesma direção, 50 km/h mais rápido que o veículo. De repente, o guepardo pára e volta, correndo a 90 km/h na direção leste, conforme registrado por um dos membros da equipe, de pé, nervoso, ao lado da trajetória do guepardo. A variação da velocidade do animal levou 2,0 s. Qual sua aceleração, do ponto de vista do cinegrafista? E do ponto de vista do membro da equipe, que registrou tudo nervosamente?

77P. O terminal do aeroporto de Genebra, na Suíça, tem uma "passarela rolante" para agilizar o deslocamento dos passageiros através de um longo corredor. Peter, que caminhava pelo corredor, porém sem usar a passarela, levou 150 s para cruzar toda a sua extensão. Paul, de pé sobre a passarela rolante, cobriu a mesma distância em 70 s. Mary, apesar de usar a passarela, caminhou sobre ela. Em quanto tempo Mary cruzou o corredor? Suponha que Peter e Mary caminhassem com a mesma velocidade.

Seção 4-9 Movimento Relativo em Duas Dimensões

78E. Num jogo de *rugby* (Fig. 4-44), um jogador pode passar a bola legalmente para o seu companheiro de equipe, contanto que o passe não seja "para a frente" (não pode existir componente do vetor velocidade da bola, paralelo à lateral do campo, no sentido do gol adversário). Suponha que um jogador corra paralelo à lateral do campo com uma velocidade de 4,0 m/s, quando passa a bola com uma velocidade de 6,0 m/s, em relação a si próprio. Qual o menor ângulo possível com a direção do gol adversário, para que o lançamento seja considerado legal?

Fig. 4-44 Problema 78.

79E. Duas rodovias se cruzam, como mostrado na Fig. 4-45. No instante mostrado na figura, um carro de polícia P está a 800 m do cruzamento e movendo-se a 80 km/h. O carro M está a 600 m do cruzamento com a velocidade de 60 km/h. (a) Qual a velocidade do carro M em relação ao carro de polícia, em notação de vetores unitários? (b) Para o instante considerado na figura, qual a direção da velocidade calculada em (a), em relação à linha de mira entre os dois carros? (c) Se as velocidades dos carros se mantiverem constantes, as respostas dos itens (a) e (b) mudam, enquanto os carros se aproximam mais do cruzamento?

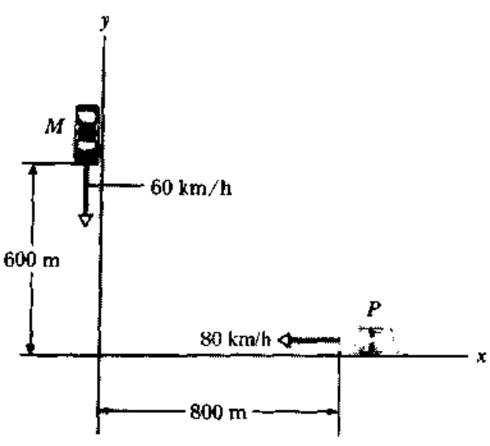


Fig. 4-45 Exercício 79.

80E. A neve cai, verticalmente, com a velocidade constante de 8,0 m/s. O motorista de um carro, viajando em linha reta numa estrada com a velocidade de 50 km/h, vê os flocos de neve caírem formando um ângulo com a vertical. Qual é este ângulo?

81E. Numa grande loja de departamentos, um comprador está subindo numa escada rolante que faz um ângulo de 40° com a horizontal e se move com uma velocidade de 0,75 m/s. Ele passa por sua filha, descendo numa outra escada rolante idêntica, ao lado da sua (veja Fig. 4-46). Calcule a velocidade do comprador, em relação à sua filha, em notação de vetores unitários.

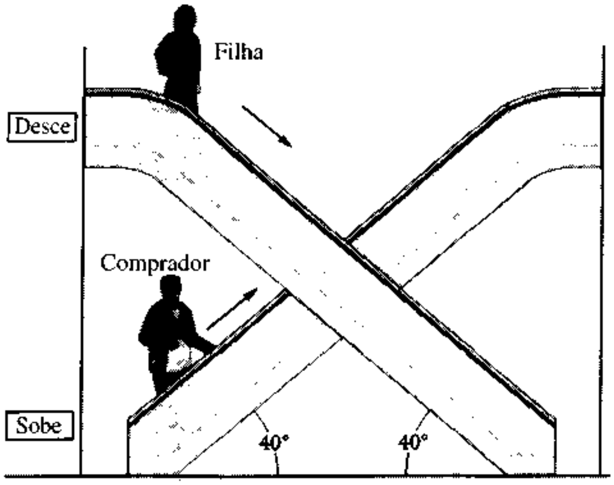


Fig. 4-46 Exercício 81.

82P. Um helicóptero está voando sobre um campo, em trajetória retilínea, com velocidade constante de 6,2 m/s, a uma altitude de 9,5 m. Um pacote é lançado, horizontalmente, do helicóptero com velocidade inicial de 12 m/s, em relação ao aparelho e no sentido oposto ao movimento deste. (a) Calcule a velocidade inicial do pacote, em relação ao solo. (b) Qual a distância horizontal, entre o helicóptero e o pacote, no instante em que este bate no solo? (c) Qual o ângulo, visto do solo, que o vetor velocidade do pacote faz com o chão, no instante anterior ao impacto?

83P. Um trem viaja em direção ao sul a 30 m/s (em relação ao solo), sob uma chuva que está caindo, também em direção ao sul, sob a ação do vento. A trajetória das gotas de chuva formam um ângulo de 22° com a vertical, conforme registrado por um observador parado no solo. Entretanto, um observador no trem vê as gotas caírem exatamente na vertical. Determine a velocidade da chuva em relação ao solo.

84P. Dois navios, *A* e *B*, deixam o porto ao mesmo tempo. O navio *A* viaja para noroeste com a velocidade de 24 nós, e o *B* com a de 28 nós a 40° sudoeste. (1 nó = 1 milha náutica por hora; veja Apêndice F.) (a) Qual o módulo e a direção do vetor velocidade do navio *A* em relação ao *B*? (b) Depois de quanto tempo estarão a 160 milhas náuticas um do outro? (c) Qual será o rumo de *B* em relação a *A*, nesse instante?

85P. Um avião leve alcança uma velocidade de 500 km/h. O piloto se dirige a um destino 800 km para o norte, mas descobre que o avião deve ser alinhado 20° para nordeste, para que o destino seja alcançado. O avião chega em 2,00 h. Qual o vetor velocidade do vento?

86P. A polícia americana usa um aeroplano para fazer respeitar o limite de velocidade numa rodovia estadual. Suponha que um de seus aeroplanos tenha uma velocidade de vôo de 250 km/h. Ele está voando em direção ao norte, de forma que fique todo o tempo sobre a rodovia norte-sul. Um observador, no solo, informa ao piloto que o vento está soprando a 130,0 km/h, mas se esquece de informar a direção. O piloto observa que, apesar do vento, o avião pode voar 250 km ao longo da rodovia, durante 1,00 h. Em outras palavras, a velocidade em relação ao solo é constante, havendo ou não vento. (a) Qual a direção do vento? (b) Qual a direção do avião, isto é, o ângulo entre seu eixo longitudinal e a rodovia?

87P. Um vagão fechado, de madeira, se move ao longo de uma ferrovia retilínea com a velocidade v_1. Um atirador, escondido, dispara um projétil (com velocidade inicial v_2) de um rifle de alta potência. O projétil passa por ambas as paredes do vagão e seus orifícios de entrada e saída são exatamente opostos, quando vistos do interior do vagão. De qual direção, em relação aos trilhos, o tiro partiu? Suponha que o projétil não foi desviado, ao atingir o vagão, mas sua velocidade diminuiu cerca de 20%. Considere $v_1 = 85$ km/h e $v_2 = 650$ m/s. (Por que a largura do vagão não precisa ser conhecida?)

88P. Uma certa mulher pode remar um bote a 7,5 km/h, em água parada. (a) Se ela atravessar um rio com uma correnteza de 3,7 km/h, em que direção deve aprumar o bote, para alcançar o local diretamente oposto ao seu ponto de partida? (b) Se o rio tiver 7,5 km de largura, quanto tempo levará para atravessá-lo? (c) Suponha que, em vez de atravessar o rio, ela reme 3,7 km rio *abaixo* e, depois, volte ao ponto de partida. Qual o tempo gasto neste percurso? (d) Quanto tempo levaria, se tivesse remado 3,7 km rio *acima* e, depois, voltasse ao ponto de partida? (e) Em que direção deveria aprumar o bote, se quisesse atravessar o rio no mais curto espaço de tempo possível, e qual seria este tempo?

89P*. Um navio de guerra se dirige para leste a 24 km/h. Um submarino, a 4,0 km de distância, dispara um torpedo que tem uma velocidade de 50 km/h; veja Fig. 4-47. Se o navio, visto do submarino, está rumando a 20° nordeste, (a) em que direção o torpedo deve ser disparado, para atingir o navio e (b) em quanto tempo o torpedo alcançará o navio?

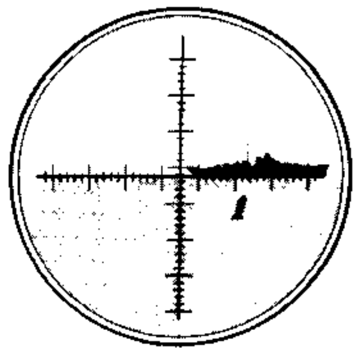


Fig. 4-47 Problema 89.

90P*. Um homem quer atravessar um rio de 500 m de largura. Sua velocidade de remada (em relação à água) é 3.000 m/h. A velocidade da correnteza do rio é de 2.000 m/h. A velocidade do homem, caminhando em terra, é de 5.000 m/h. (a) Determine a sua trajetória (combinando os movimentos na água e na terra), para que alcance o ponto diretamente oposto ao local de partida, no mais curto espaço de tempo. (b) Quanto tempo levaria para fazê-lo?

Seção 4-10 Movimento Relativo para Altas Velocidades

91E. Um elétron se move com a velocidade de $0{,}42c$, em relação a um observador *B*, que se move a uma velocidade de $0{,}63c$, em relação ao observador *A*, no mesmo sentido do elétron. Qual a velocidade do elétron, medida pelo observador *A*?

92P. Segundo observações, a galáxia Alfa está se afastando da nossa com a velocidade de $0{,}35c$. A galáxia Beta, localizada na direção exatamente oposta, também está se afastando de nós com a mesma velocidade. Para um observador na galáxia Alfa, determine a velocidade de afastamento (a) da nossa galáxia e (b) da Beta?

PROBLEMAS ADICIONAIS

93. Uma bola de beisebol é atirada a partir do solo. A altura máxima é alcançada 3,0 s após o lançamento. Então, 2,5 s após alcançar a altura máxima, a bola mal consegue ultrapassar uma cerca que está a 97,5 m do ponto de lançamento, ao nível do solo. (a) Qual a altura máxima alcançada pela bola? (b) Qual a altura da cerca? (c) A que distância da cerca a bola caiu?

94. A posição **r** de uma partícula se movendo no plano xy é dada por $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + [2\ \mathrm{sen}(\pi/4)(\mathrm{rad/s})t]\mathbf{j}$, onde **r** está em metros e t está em segundos. (a) Calcule as componentes x e y da posição da partícula em $t = 0$; 1,0; 2,0; 3,0 e 4,0 s e desenhe a trajetória da partícula no plano xy, para o intervalo $0 \leq t \leq 4{,}0$ s. (b) Calcule as componentes da velocidade da partícula em $t = 1{,}0$; 2,0 e 3,0 s. Desenhando o vetor velocidade, no gráfico da trajetória da partícula calculado em (a), mostre que a velocidade é tangente à trajetória e tem a mesma direção do movimento, a cada instante considerado. (c) Calcule as componentes da aceleração da partícula em $t = 1{,}0$; 2,0 e 3,0 s.

95. Um rio, de 200 m de largura, corre para leste com a velocidade uniforme de 2,0 m/s. Um bote com a velocidade de 8,0 m/s, em relação à água, deixa a margem sul, rumando na direção 30° noroeste. (a) Qual a velocidade do bote com relação à margem? (b) Em quanto tempo o bote atravessa o rio?

96. Dois segundos depois de ter sido lançado do solo, um projétil está a 40 m na horizontal e 53 m na vertical do seu ponto de lançamento. (a) Quais são as componentes horizontal e vertical da velocidade inicial do projétil? (b) No instante em que o projétil alcança a sua altura máxima, a que distância horizontal está do seu ponto de lançamento?

97. Uma partícula salta de sua origem em $t = 0$ com a velocidade de $8{,}0\mathbf{j}$ m/s e se move no plano xy com aceleração constante de $(4{,}0\mathbf{i} + 2{,}0\mathbf{j})$ m/s^2. (a) Em determinado instante, a coordenada x da partícula é 29 m; qual é a coordenada y? (b) Qual é a velocidade da partícula nesse instante?

98. Um carro se move, num círculo, com a velocidade constante de 12 m/s. Em determinado instante, o carro tem uma aceleração de 3 m/s^2 na direção leste. Qual a sua distância do centro do círculo e a sua posição angular naquele instante se ele está se deslocando (a) no sentido horário e (b) no sentido anti-horário?

99. Um jogador de golfe dá uma tacada numa bola, no alto de uma elevação, imprimindo a ela uma velocidade inicial de 43 m/s, com um ângulo de 30°, acima da horizontal. A bola cai sobre a grama a 180 m, horizontalmente, do ponto de lançamento. Suponha que o gramado é horizontal. (a) Qual a altura da elevação? (b) Qual a velocidade da bola, ao atingir o gramado?

100. O piloto de um avião, depois de voar 15 min sob um vento de 42 km/h, num ângulo de 20° sudeste, se encontra sobre uma cidade, a 55 km ao norte do seu ponto de partida. Qual a velocidade do avião com relação ao ar?