# VETORES | 3

*Duante duas décadas, grupos de espeleólogos vinham explorando os 200 km do sistema de cavernas de Mammoth Cave e Flint Ridge em busca de uma ligação. A fotografia mostra Richard Zopf atravessando o Tubo Estreito, nas profundezas do sistema de Flint Ridge. Depois de 12 horas de exploração, seguindo um caminho tortuoso, Zopf e seis companheiros atravessaram um regato de águas gélidas e chegaram a Mammoth Cave, provando assim que o sistema Mammoth-Flint é a caverna mais comprida do mundo. Como é possível relacionar o seu ponto de chegada ao ponto de partida de uma forma que não seja considerado o caminho percorrido?*

## 3-1 Vetores e Escalares

Uma partícula confinada a uma linha reta pode se mover apenas em uma direção. Podemos considerar o movimento positivo em um sentido e negativo no outro. Para uma partícula que esteja em movimento no espaço, porém, um sinal positivo ou negativo não é suficiente para indicar a direção e o sentido do movimento. Em vez disso, precisamos de uma seta para mostrar a direção e o sentido, chamada de **vetor**.

Um vetor tem um módulo, uma direção e um sentido e obedece a certas regras de combinação, que discutiremos mais adiante. Uma **grandeza vetorial** é uma grandeza que pode ser representada por um vetor, isto é, uma grandeza que pode ser caracterizada por um módulo, uma direção e um sentido. Entre as grandezas físicas que podem ser representadas por vetores estão o deslocamento, a velocidade, a aceleração, a força e o campo magnético.

Nem todas as grandezas físicas envolvem uma direção. Não podemos, por exemplo, associar uma direção no espaço as grandezas como a temperatura, a pressão, a energia, a massa e o tempo. Essas grandezas são chamadas de **escalares** e nós as combinamos através das leis da álgebra comum.

Os mais simples de todos os vetores é o **vetor deslocamento**, usado para indicar uma mudança de posição. Se uma partícula muda de posição deslocando-se de $A$ para $B$ na Fig. 3-1$a$, dizemos que sofreu um deslocamento de $A$ para $B$, o qual representamos por uma seta, que é o símbolo de um vetor, apontando de $A$ para $B$. Para distinguir os vetores de outros tipos de setas, usamos um triângulo vazado como ponta do vetor.

As setas de $A$ para $B$, de $A'$ para $B'$ e de $A''$ para $B''$ na Fig. 3-1$a$ representam a mesma *mudança de posição* da partícula e não fazemos distinção entre elas. Todas as três setas têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mes-

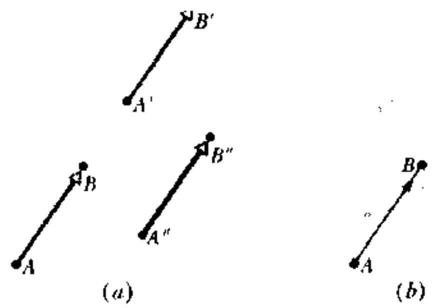



**Fig. 3-1** (*a*) Todas as três setas representam o mesmo deslocamento. (*b*) Todas as três trajetórias que ligam os dois pontos correspondem ao mesmo vetor deslocamento.

mo sentido e, portanto, são vetores deslocamento idênticos.

Os vetores deslocamento não fornecem qualquer indicação a respeito da trajetória real seguida pela partícula. Na Fig. 3-1*b*, por exemplo, todas as três trajetórias que ligam os pontos *A* e *B* correspondem ao mesmo vetor deslocamento, o que aparece na Fig. 3-1*a*. Os vetores deslocamento representam apenas o efeito global do movimento e não o movimento em si.

**EXEMPLO 3-1** O grupo que descobriu em 1972, a ligação Mammoth-Flint, viajou da Entrada de Austin, no sistema de Flint Ridge, até o Rio do Eco, no sistema de Mammoth Cave (veja a Fig. 3-2*a*), deslocando-se de 2,6 km para oeste, 3,9 km para o sul e 25 m para cima. Qual o vetor deslocamento correspondente?

**Solução** Primeiro observamos a situação de cima (Fig. 3-2*b*) para determinar o deslocamento horizontal $d_h$. O módulo de $d_h$ pode ser calculado com o auxílio do teorema de Pitágoras:

$$d_h = \sqrt{(2{,}6\text{ km})^2 + (3{,}9\text{ km})^2} = 4{,}69\text{ km}.$$

O ângulo $\theta$ em relação ao oeste é dado por

$$\tan\theta = \frac{3{,}9\text{ km}}{2{,}6\text{ km}} = 1{,}5,$$

ou

$$\theta = \tan^{-1} 1{,}5 = 56°.$$

Em seguida, observamos a situação de lado (Fig. 3.2*c*) para determinar o deslocamento total *d*.

$$d = \sqrt{(4{,}69\text{ km})^2 + (0{,}025\text{ km})^2} = 4{,}69\text{ km} \approx 4{,}7\text{ km},$$

e o ângulo $\phi$,

$$\phi = \tan^{-1}\frac{0{,}025\text{ km}}{4{,}69\text{ km}} = 0{,}3°.$$

Assim, o grupo se deslocou 4,7 km em uma direção 56° ao sul da direção oeste e 0,3° para cima em relação à horizontal. Naturalmente, o deslocamento vertical foi insignificante em comparação com o movimento horizontal, mas o fato não facilitou o trabalho do grupo, que teve que realizar inúmeras e difíceis subidas e descidas. O caminho realmente tomado foi bem diferente do indicado pelo vetor deslocamento, que apenas aponta do ponto inicial para o ponto final.

## 3-2 Soma de Vetores: Método Gráfico

Suponhamos que, como na Fig. 3-3a, a partícula se desloque de *A* para *B* e depois de *B* para *C*. Podemos representar o deslocamento global (qualquer que seja a trajetória seguida pela partícula) como a soma de dois vetores deslocamento sucessivos, *AB* e *BC*. O efeito resultante dos dois deslocamentos corresponde a um deslocamento de *A* para *C*. Dizemos que *AC* é a **soma vetorial** dos vetores *AB* e *BC*. Esta soma não é uma soma algébrica comum; precisamos de mais do que simples números para especificá-la.

Na Fig. 3-3*b*, desenhamos de novo os vetores da Fig. 3.3*a* e os rotulamos da forma que usaremos daqui em diante, isto é, com letras em negrito como **a**, **b** e s. Se você

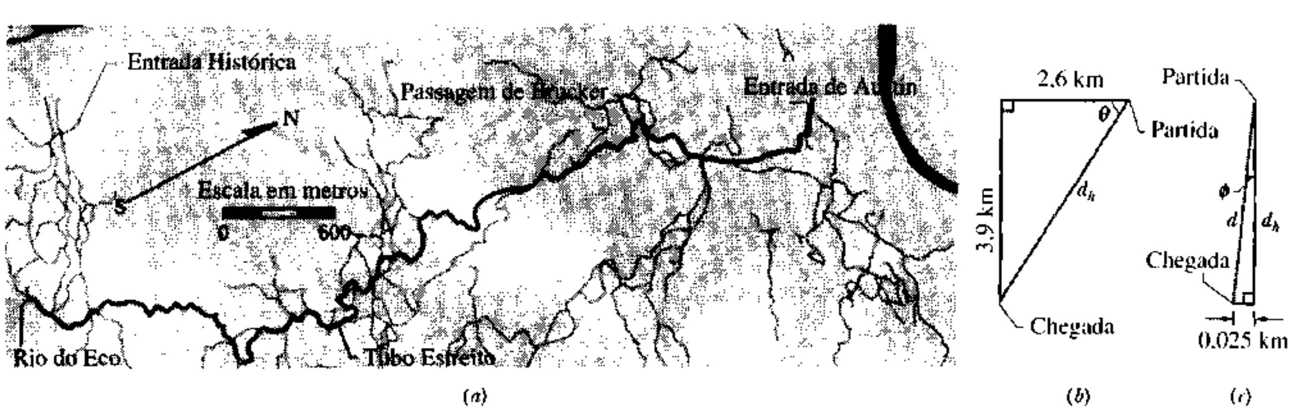



**Fig. 3-2** Exemplo 3-1. (*a*) Parte do sistema de cavernas Mammoth-Flint, mostrando o caminho seguido pelos espeleólogos desde a Entrada de Austin até o Rio do Eco. (*b*) Deslocamento do grupo, visto de cima. (*c*) Deslocamento do grupo, visto de lado. (Adaptado de um mapa da Cave Research Foundation.)

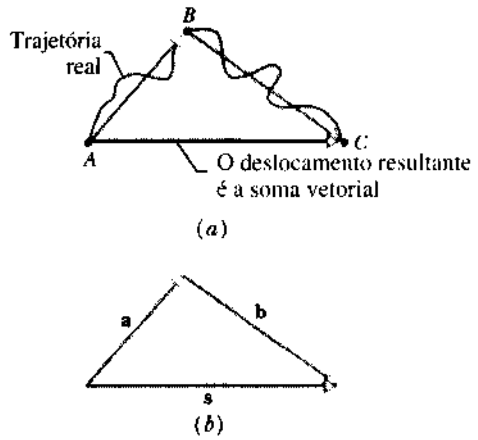



Fig. 3-3 (*a*) *AC* é a soma vetorial dos vetores *AB* e *BC*. (*b*) Outra forma de rotular os mesmos vetores.

estiver escrevendo à mão, desenhe uma seta acima do símbolo, como em $\vec{a}$. Quando quisermos nos referir apenas ao módulo do vetor (um número que é sempre positivo), usaremos um símbolo em itálico, como *a*, *b* ou *s*. (Se você estiver escrevendo à mão, use apenas o símbolo.) Um símbolo em negrito indica que a grandeza correspondente tem as três propriedades de um vetor: módulo, direção e sentido.

Podemos representar a relação entre os três vetores da Fig. 3-3*b* por meio da equação

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \qquad (3\text{-}1)$$

em que dizemos que o vetor **s** é a **soma vetorial** dos vetores **a** e **b**. O processo para somar vetores desta forma (isto é, graficamente) é o seguinte: (1) Em uma folha de papel, desenhe o vetor **a** numa escala conveniente e com a inclinação correta. (2) Desenho o vetor **b** na mesma escala, começando na extremidade do vetor **a** e novamente com a inclinação correta. (3) Construa o vetor soma **s** desenhando um terceiro vetor que começa no início de **a** e termina na extremidade de **b**. É fácil generalizar este processo para somar mais de dois vetores.

Já que os vetores são novas entidades, devemos esperar que possuam novas propriedades matemáticas. O símbolo "+" na Eq. 3-1 e as palavras "adicionar" e "somar" não têm o mesmo significado que na aritmética ou na álgebra comum. Eles nos dizem para executar uma operação muito diferente, que considera tanto os módulos dos vetores quanto as suas *direções* e *sentidos*.

A soma vetorial, definida dessa forma, apresenta duas propriedades importantes. Em primeiro lugar, a ordem em que a adição é efetuada é irrelevante, isto é,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad \text{(propriedade comutativa).} \qquad (3\text{-}2)$$

A Fig. 3-4 ilustra tal fato.

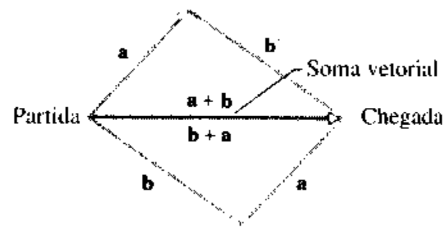



Fig. 3-4 Os dois vetores **a** e **b** podem ser somados em qualquer ordem; veja a Eq. 3-2.

Em segundo lugar, quando a soma envolve mais de dois vetores, não importa como agrupamos os vetores para somá-los. Assim, se queremos somar os vetores **a**, **b** e **c**, podemos somar primeiro **a** e **b** e depois somar o vetor resultante a **c**. Por outro lado, podemos primeiro somar **b** e **c** e depois somar o vetor resultante ao **a**. O resultado obtido será exatamente o mesmo, isto é,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad \text{(propriedade associativa).} \qquad (3\text{-}3)$$

Observando a Fig. 3-5 com atenção, você se convencerá de que a Eq. 3-3 está correta.

O vetor $-\mathbf{b}$ é um vetor com o mesmo módulo e a mesma direção que **b**, mas com o sentido oposto (veja a Fig. 3-6). Se você tentar somar os dois vetores da Fig. 3-6, verá que

$$\mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = 0.$$

Somar $-\mathbf{b}$ é a mesma coisa que subtrair **b**! Usamos esta propriedade para definir a diferença entre dois vetores. Seja $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Então.

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \quad \text{(subtração).} \qquad (3\text{-}4)$$

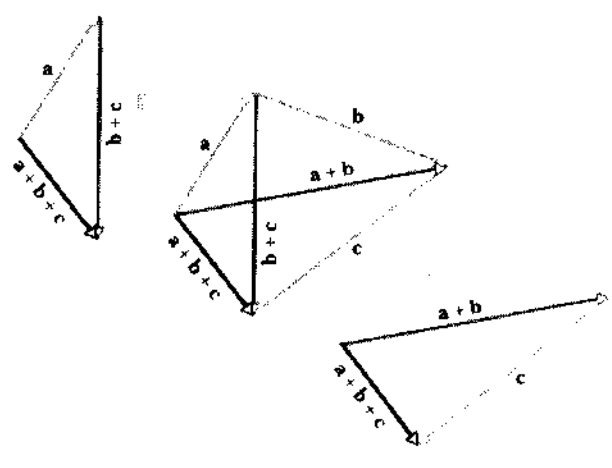



Fig. 3-5 Os vetores *a*, *b*, e *c* podem ser agrupados de qualquer maneira para serem somados; veja a Eq. 3-3.


**Fig. 3-6** Os vetores **b** e −**b**.

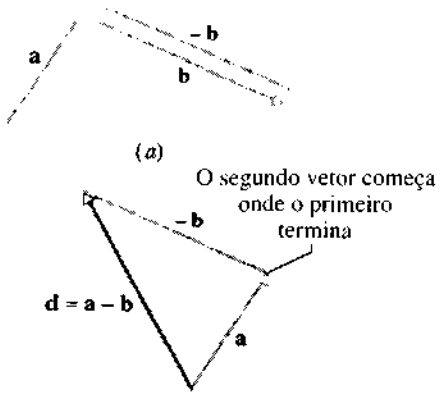



**Fig. 3-7** (*a*) Vetores **a**, **b** e −**b**. (*b*) Para subtrair o vetor **b** do vetor **a**, somamos o vetor −**b** ao vetor **a**.

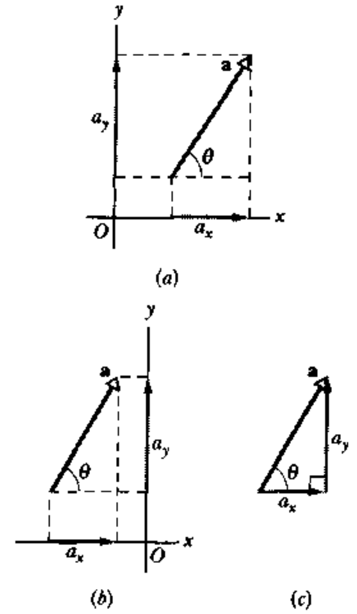



**Fig. 3-8** (*a*) As componentes do vetor a. (*b*) As componentes não mudam quando o vetor é deslocado, contanto que o módulo, a direção e o sentido sejam mantidos. (*c*) As componentes formam os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o módulo do vetor.

Assim, calculamos o vetor diferença **d** somando o vetor −**b** ao vetor **a**. Este processo está ilustrado na Fig. 3-7.

É importante observar que, embora tenhamos usado os vetores deslocamento como exemplo, as regras de adição e subtração são válidas para qualquer tipo de vetor, quer ele represente força, velocidade ou qualquer outra grandeza física vetorial. Entretanto, como na aritmética comum, só podemos somar quantidades (vetores, no nosso caso) do mesmo tipo. Podemos somar dois deslocamentos, por exemplo, ou duas velocidades, mas não faz sentido somar um deslocamento a uma velocidade. No mundo dos escalares, seria como tentar somar 21 s a 12 m.

## 3-3 Vetores e suas Componentes

Somar vetores graficamente pode ser tedioso. Uma técnica mais simples e elegante utiliza a álgebra mas exige que os vetores sejam colocados num sistema de coordenadas retangulares. Os eixos dos $x$ e dos $y$ são geralmente desenhados no plano da página, como na Fig. 3-8*a*. O eixo dos $z$, que vamos ignorar, por enquanto, é perpendicular ao plano da página; apontando para fora.

O vetor **a** da Fig. 3-8 está no plano $xy$. Quando traçamos perpendiculares aos eixos coordenados a partir das extremidades de **a**, as grandezas $ax$ e $ay$ assim definidas são chamadas de **componentes** do vetor **a** em relação aos eixos dos $x$ e dos $y$. O processo de obter as componentes é chamado de **decomposição do vetor**. Em geral, um vetor possui três componentes embora no caso da Fig. 3-8*a*, a componente em relação ao eixo $z$ seja nula. Como se pode ver na Fig. 3-8*b*, se deslocarmos um vetor de modo que ele permaneça sempre paralelo à sua direção original, os valores das suas componentes permanecerão os mesmos. Os sentidos das componentes são coerentes com o sentido do vetor.

Podemos calcular facilmente as componentes de **a** na Fig. 3-9*a* a partir do triângulo retângulo que aparece na figura:

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{e} \quad a_y = a\,\text{sen}\,\theta, \tag{3-5}$$

em que $\theta$ é o ângulo que o vetor **a** faz com o sentido crescente dos $x$. A Fig. 3-8*c* mostra que o vetor e suas componentes $x$ e $y$ formam um triângulo retângulo. Dependendo do valor de $\theta$, as componentes de um vetor podem ser positivos, negativos, ou nulas. Na figura, usamos triângulos cheios, menores que os dos vetores, para indicar os sinais das componentes, de acordo com a convenção usual: positivos no sentido em que os valores das coordenadas aumentam e negativos no sentido oposto. A Fig. 3-9 mostra um vetor **b** para o qual $b_y$ é negativo e $b_x$ é positiva.

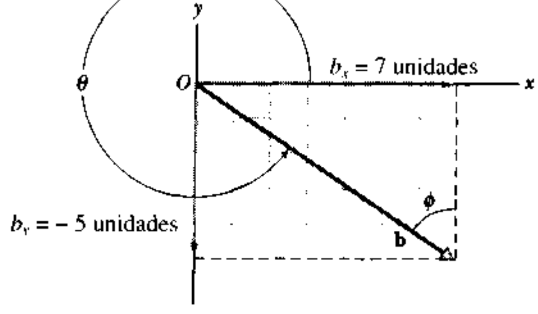



**Fig. 3-9** A componente **b** em relação ao eixo dos $x$ é positivo e a componente em relação ao eixo dos $y$ é negativa.

Depois que um vetor é decomposto em suas componentes, essas componentes podem ser usadas em lugar do vetor. Ao invés de especificar o vetor por seu módulo $a$ e ângulo $\theta$, podemos fazê-lo através das componentes $a_x$ e $a_y$. Os dois pares de números contêm exatamente a mesma informação e podem ser convertidos com facilidade um no outro. Para calcular $a$ e $\theta$ a partir de $a_x$ e $a_y$, basta observarmos (veja a Fig. 3-8$a$) que

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \qquad (3\text{-}6)$$

Na solução de um problema específico, podemos usar a notação $a_x$, $a_y$ ou a notação $a$, $\theta$.

**EXEMPLO 3-2** Um pequeno avião deixa um aeroporto num dia nublado e mais tarde é avistado a 215 km de distância, voando numa direção que faz um ângulo de 22° com o norte para o lado leste. A que distância a leste e ao norte do aeroporto se encontra o avião no momento em que é avistado?

**Solução** Em um sistema de coordenadas $xy$, a situação é a representada na Fig. 3-10, onde, por conveniência, a origem do sistema foi colocada no aeroporto. O vetor deslocamento do avião, **d**, vai da origem até o ponto em que o avião foi avistado.

Para resolver o problema, é preciso calcular as componentes de **d**. Usando a Eq. 3-5 com $a$ = 215 km e $\theta$ = 68° (90 − 22°), temos:

$$dx = d\cos\theta = (215 \text{ km})(\cos 68°) = 81 \text{ km} \qquad \text{(Resposta)}$$

e

$$dy = d\,\text{sen}\,\theta = (215 \text{ km})(\text{sen } 68°) = 199 \text{ km}. \qquad \textit{(Resposta)}$$

O avião foi avistado, portanto, 199 km ao norte e 81 km a leste do aeroporto.

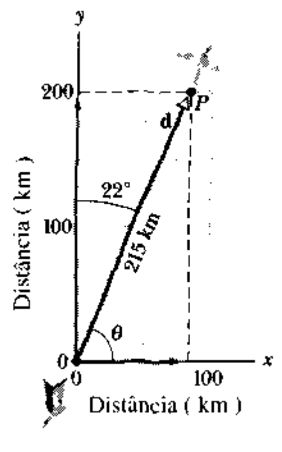



**Fig. 3-10** Exemplo 3-2. Um avião decola de um aeroporto localizado na origem e mais tarde é avistado no ponto $P$.

## Resolução de Problemas

### Tática 1: Ângulos — Graus e Radianos

Os ângulos medidos em relação ao sentido crescente dos $x$ são positivos quando medidos no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio* e negativos quando medidos no sentido dos ponteiros do relógio.† Assim, por exemplo, 210° e −150° são duas formas diferentes de especificar o mesmo ângulo. A maioria das calculadoras (experimente na sua) aceita os ângulos em qualquer das duas formas para calcular funções trigonométricas.

Os ângulos podem ser medidos em graus ou em radianos (rad). Para relacionar as duas medidas, basta lembrar que uma circunferência completa corresponde a 360° e a $2\pi$ rad. Assim, para converter, digamos, 40° em radianos, escreveríamos

$$40° \frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = 0{,}70 \text{ rad}.$$

A resposta é razoável? Observe que 40° correspondem a 1/9 de circunferência; como uma circunferência completa equivale a $2\pi$ rad ou 6,3 rad, aproximadamente, o ângulo em radianos deve corresponder a 1/9 de 6,3 ou 0,7. Outra forma de verificar o resultado é lembrar que 1 rad $\approx$ 57°.

Quase todas as calculadoras entram no modo grau ao serem ligadas, de modo que os ângulos devem ser digitados em graus. Na maioria dos casos, porém, é possível passar para o modo radiano. Para descobrir como fazê-lo, consulte o manual da sua calculadora.

### Tática 2: Funções Trigonométricas

É importante que você conheça as definições das funções trigonométricas mais comuns (seno, cosseno e tangente) porque são muito usadas na ciência e na engenharia. Essas definições são apresentadas na Fig. 3-11 numa forma que não depende da maneira como o triângulo é rotulado.

Você deve conhecer o modo como as funções trigonométricas variam com o ângulo (veja a Fig. 3-12) para poder verificar se o resultado fornecido por uma calculadora é razoável. Também é importante que conheça os sinais das funções nos vários quadrantes.

### Tática 3: Funções Trigonométricas Inversas

As funções trigonométricas inversas mais importantes são $\text{sen}^{-1}$, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$. Ao determinar os valores dessas funções com o auxílio de uma calculadora, é importante verificar se a resposta é razoável, porque em geral existem duas soluções possíveis e a calculadora fornece apenas uma delas. Os valores fornecidos pelas calculadoras estão indicados pelas linhas mais escuras na Fig. 3-12. Assim, por exemplo, $\text{sen}^{-1}(0{,}5)$ tem dois valores: 30° (que é o valor fornecido pela calculadora) e 150°. Para observar os dois valores, trace uma reta horizontal passando por 0,5 na Fig. 3-12$a$ e determine os pontos onde a reta intercepta a curva do seno.

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta}$$

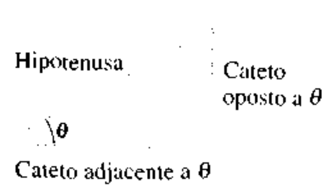



**Fig. 3-11** Triângulo usado para definir as funções trigonométricas. Veja o Apêndice G.

*Também chamado de sentido anti-horário. (N. do R.)
†Também chamado de sentido horário. (N. do R.)

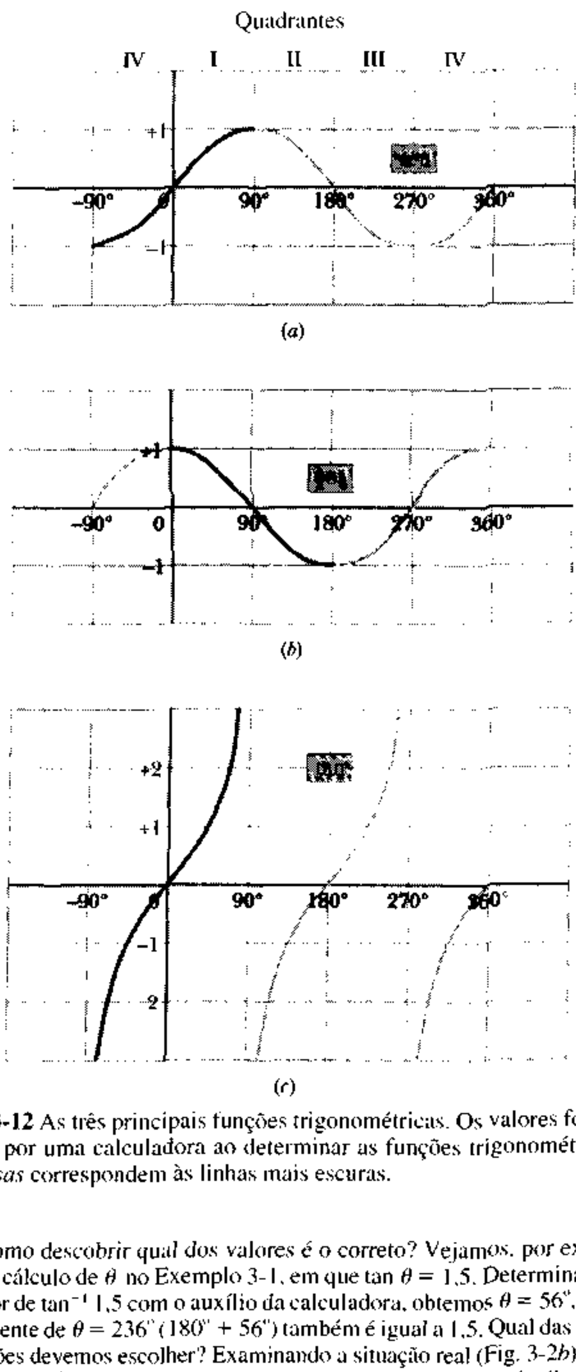



**Fig. 3-12** As três principais funções trigonométricas. Os valores fornecidos por uma calculadora ao determinar as funções trigonométricas *inversas* correspondem às linhas mais escuras.

Como descobrir qual dos valores é o correto? Vejamos, por exemplo, o cálculo de $\theta$ no Exemplo 3-1, em que $\tan\theta = 1{,}5$. Determinando o valor de $\tan^{-1} 1{,}5$ com o auxílio da calculadora, obtemos $\theta = 56°$, mas a tangente de $\theta = 236°$ ($180° + 56°$) também é igual a 1,5. Qual das duas soluções devemos escolher? Examinando a situação real (Fig. 3-2*b*), vemos que 56° é um valor razoável, mas o mesmo não se pode dizer de 236°. Escolhemos, portanto, a primeira solução.

TÁTICA 4: MEDIDA DOS ÂNGULOS DE UM VETOR

A Eq. 3-5 e a segunda parte da Eq. 3-6 são válidas apenas se o ângulo for medido em relação ao sentido positivo dos $x$. Se o ângulo for medido em relação a alguma outra direção, talvez seja necessário mudar as funções trigonométricas da Eq. 3-5 e inverter a relação da Eq. 3-6. É mais seguro converter o ângulo dado num ângulo medido em relação ao sentido positivo dos $x$, como fizemos no Exemplo 3-2.

## 3-4 Vetores Unitários

Chamamos de **vetor unitário** um vetor que possui módulo exatamente igual a 1 e aponta numa determinada direção. Os vetores unitários não apresentam dimensões nem unidades; sua única função é especificar certas direções no espaço. Os vetores unitários que apontam no sentido positivo dos eixos dos $x$, $y$ e $z$ são chamados de **i**, **j** e **k** (veja a Fig. 3-13).* Sistemas de eixos como o da Fig. 3-13, são chamados de **sistemas de coordenadas destrógiro**. Todos os sistemas de coordenadas usados neste livro são deste tipo.†

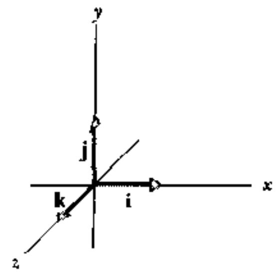



**Fig. 3-13** Os vetores unitários **i**, **j** e **k** definem um sistema de coordenadas retangulares destrógiro. O sistema permanecerá destrógiro direita se o fizermos girar como um todo para uma nova orientação.

Qualquer vetor pode ser expresso em função dos vetores unitários; assim, por exemplo, podemos especificar **a** e **b** das Figs. 3-8 e 3-9 na forma

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} \qquad (3\text{-}7)$$

e

$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}. \qquad (3\text{-}8)$$

Esses vetores aparecem novamente na Fig. 3-14. As grandezas $a_x\mathbf{i}$ e $a_y\mathbf{j}$ são chamadas de **componentes vetoriais** de **a** para distingui-las de $a_x$ e $a_y$, que são as **componentes escalares** ou simplesmente **componentes** do vetor.

Examine o vetor deslocamento do Exemplo 3-1. Se você colocar o sistema de coordenadas da Fig. 3-13 na Entrada de Austin da Fig. 3-2*a*, com **i** para o leste, **j** para o norte e **k** para cima, o vetor deslocamento **d** até o Rio do Eco poderá ser expresso na forma

$$\mathbf{d} = -(2{,}6\ \text{km})\mathbf{i} - (3{,}9\ \text{km})\mathbf{j} + (0{,}025\ \text{km})\mathbf{k}.$$

## 3-5 Somando Vetores através das Componentes

Somar vetores usando lápis, régua e transferidor é um método cansativo, de precisão limitada e difícil de usar em

*Se você estiver escrevendo à mão, coloque um acento circunflexo acima de um vetor para indicar que ele é unitário: $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$.

†Para identificar se um sistema de coordenadas é destrógiro, proceda da seguinte forma: usando sua *mão direita*, coloque o dedo polegar no sentido positivo do eixo $x$ e o dedo indicador no sentido positivo do eixo $y$. Se, nessa situação, você conseguir colocar o dedo médio no sentido positivo do eixo $z$, trata-se de um sistema destrógiro. Caso o seu dedo médio só possa apontar no sentido *negativo* do eixo $z$, diz-se que o sistema é levógiro. (N. do R.)

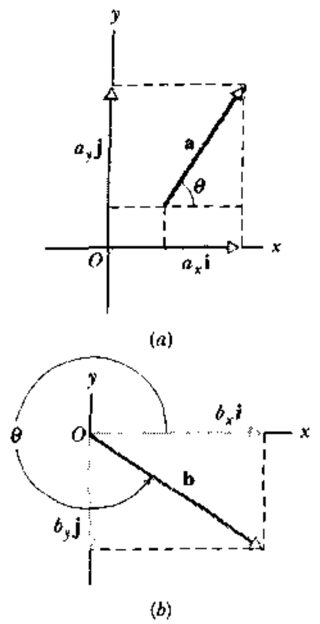



**Fig. 3-14** (*a*) Componentes vetoriais do vetor **a**. (*a*) Componentes vetoriais do vetor **b**.

três dimensões. Nesta seção, vamos estudar uma técnica mais direta, na qual os vetores são somados, combinando-se suas componentes, eixo por eixo.

Para começar, considere a equação

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \tag{3-9}$$

que diz que o vetor **r** é igual ao vetor (**a** + **b**). Se isso é verdade, então cada componente de **r** deve ser igual a componente correspondente de (a + **b**):

$$r_x = a_x + b_x, \tag{3-10}$$
$$r_y = a_y + b_y, \tag{3-11}$$
$$r_z = a_z + b_z. \tag{3-12}$$

Em outras palavras, dois vetores são iguais somente se todas as suas componentes correspondentes forem iguais. De acordo com as Eqs. 3-10 a 3-12, para somar os vetores **a** e **b**, precisamos: (1) decompor os vetores em suas componentes; (2) somar as componentes correspondentes, eixo por eixo, para calcular as componentes do vetor soma **r**; e (3) se necessário, combinar as componentes de **r** para determinar o próprio vetor **r**. (O vetor **r** pode ser representado de duas formas. Podemos expressá-lo em função dos vetores unitários ou fornecer o módulo e a orientação de **r**, usando a Eq. 3-6 em duas dimensões ou o método do Exemplo 3-1 para três dimensões.)

**EXEMPLO 3-3** Você está participando de um rali e recebe as seguintes instruções: do ponto de partida, use as estradas disponíveis para viajar 36 km para leste até o ponto de controle "Alfa", depois 45 km para o norte até o ponto de controle "Bala" e, finalmente, 25 km para noroeste até o ponto de controle "Cruz". (As estradas e os pontos de controle aparecem na Fig. 3-15.) Ao chegar ao ponto de controle "Cruz", quais são o módulo e a orientação do seu deslocamento **d** em relação ao ponto de partida?

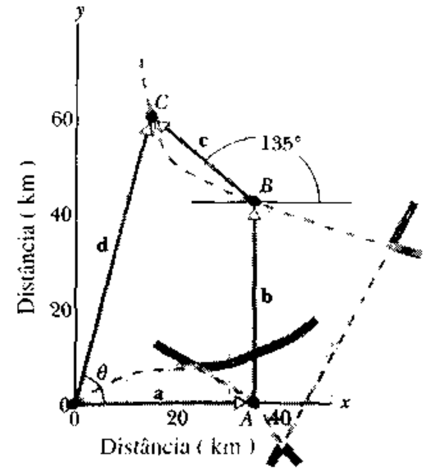



**Fig. 3-15** Exemplo 3-3. Mapa de um rali, mostrando a origem, os pontos de controle Alfa, Bala e Cruz e as estradas da região.

**Solução** A Fig. 3-15 mostra uma orientação conveniente para um sistema de coordenadas $xy$ e os vetores que representam os três deslocamentos envolvidos. As componentes escalares de **d** são

$$\begin{aligned} d_x &= a_x + b_x + c_x = 36 \text{ km} + 0 + (25 \text{ km})(\cos 135°) \\ &= (36 + 0 - 17{,}7) \text{ km} = 18{,}3 \text{ km} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_y &= a_y + b_y + c_y = 0 + 45 \text{ km} + (25 \text{ km})(\text{sen } 135°) \\ &= (0 + 45 + 17{,}7) \text{ km} = 62{,}7 \text{ km}. \end{aligned}$$

Agora podemos usar a Eq. 3-6 para calcular o módulo e a orientação de **d**:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(18{,}3 \text{ km})^2 + (62{,}7 \text{ km})^2} \\ &= 65 \text{ km} \end{aligned} \qquad \text{(Resposta)}$$

e

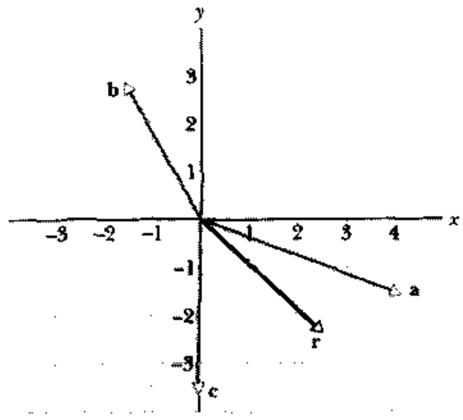
$$\theta = \tan^{-1} \frac{d_y}{d_x} = \tan^{-1} \frac{62{,}7 \text{ km}}{18{,}3\text{km}} = 74°, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde $\theta$ é o ângulo que aparece na Fig. 3-15.

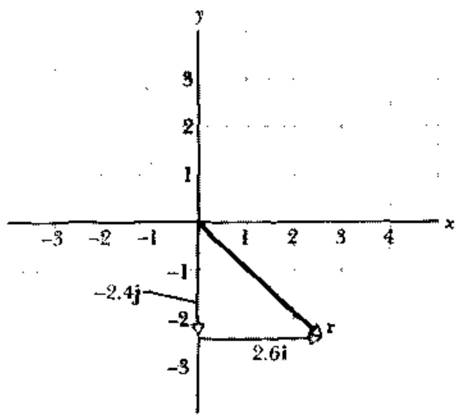
**EXEMPLO 3-4** Os três vetores abaixo estão expressos em termos dos vetores unitários:

$$\mathbf{a} = 4{,}2\,\mathbf{i} - 1{,}6\,\mathbf{j},$$
$$\mathbf{b} = -1{,}6\,\mathbf{i} + 2{,}9\,\mathbf{j},$$
$$\mathbf{c} = -3{,}7\,\mathbf{j}.$$

Todos os três vetores estão no plano $xy$, já que nenhum deles possui componentes em relação ao eixo dos $z$. Determine o vetor **r** que é a soma destes três vetores. Por conveniência, as unidades foram omitidas nas expressões acima; se quiser, você pode imaginar que as coordenadas estão expressas em metros.




(*a*)




(*b*)

**Fig. 3-16** Exemplo 3-4. O vetor **r** é a soma vetorial dos outros três vetores.

**Solução** De acordo com as Eqs. 3-10 e 3-11, temos:

$$r_x = a_x + b_x + c_x = 4{,}2 - 1{,}6 + 0 = 2{,}6$$

e

$$r_y = a_y + b_y + c_y = -1{,}6 + 2{,}9 - 3{,}7 = -2{,}4.$$

Assim,

$$\mathbf{r} = 2{,}6\mathbf{i} - 2{,}4\mathbf{j}. \qquad \text{(Resposta)}$$

A Fig. 3-16*a* mostra os três vetores e a sua soma. A Fig. 3-16*b* mostra **r** e suas componentes vetoriais.

## 3-6 Os Vetores e as Leis da Física

Em todos os sistemas de coordenadas que mostramos até agora, os eixos dos $x$ e dos $y$ foram traçados paralelamente às bordas do papel. Assim, quando um vetor **a** aparece no desenho, suas componentes vetoriais $a_x\mathbf{i}$ e $a_y\mathbf{j}$ também são paralelas às bordas do papel (veja a Fig. 3-17*a*). Esta orientação dos eixos foi escolhida apenas por razões estéticas. Poderíamos usar um outro sistema de coordenadas cujos eixos fizessem um ângulo $\phi$ com o antigo sistema, como na Fig. 3-17*b*,

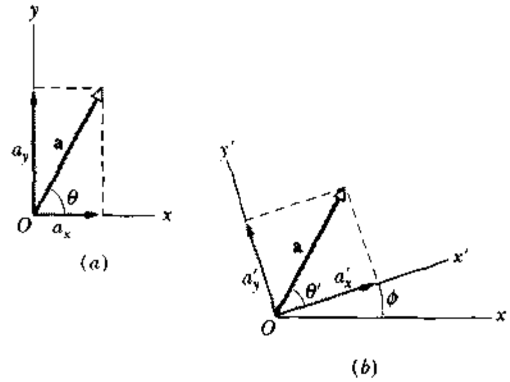



**Fig. 3-17** (*a*) O vetor **a** e suas componentes. (*b*) O mesmo vetor, depois que os eixos dos sistema de coordenadas sofrem uma rotação de um ângulo $\phi$.

caso em que as componentes do vetor **a** (cuja orientação não muda) passariam a ter novos valores, que vamos chamar de $a'_x$ e $a'_y$. Como existe um número infinito de valores para $\phi$, existe um número infinito de modos de representar o vetor **a** em termos de suas componentes.

Qual é, então, o "verdadeiro" par de componentes? A resposta é que todos os pares são igualmente válidos, já que cada par (com seus respectivos eixos) é apenas uma forma diferente de representar o mesmo vetor **a**; todos dão origem a um vetor com o mesmo módulo e a mesma orientação. Na Fig. 3-17, temos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2} \qquad (3\text{-}13)$$

e

$$\theta = \theta' + \phi. \qquad (3\text{-}14)$$

O fato é que temos uma grande liberdade para escolher um sistema de coordenadas, porque as relações entre vetores (entre elas, por exemplo, a soma de vetores da Eq. 3-1) não dependem da origem escolhida para o sistema de coordenadas nem da orientação dos eixos. O que também se aplica às relações da física; elas são todas independentes da escolha do sistema de coordenadas. Acrescente a isso a simplicidade e versatilidade da linguagem dos vetores e será fácil compreender por que as leis da física são quase sempre apresentadas nessa linguagem: uma equação, como a Eq. 3-9, pode representar três (ou mais) relações, como as Eqs. 3-10, 3-11 e 3-12.

## 3-7 Multiplicação de Vetores*

*Existem três formas diferentes de multiplicar vetores. Nenhuma delas é exatamente igual à multiplicação algébrica comum.*

*Como as informações contidas nesta seção não são essenciais para a compreensão dos capítulos seguintes (os produtos escalares serão discutidos apenas no Cap. 7 e os produtos vetoriais no Cap. 12), talvez o seu professor prefira deixá-lo para mais tarde.

### Multiplicação de um Vetor por um Escalar

Quando multiplicamos um vetor **a** por um escalar $s$, o resultado é um novo vetor cujo módulo é o produto do módulo de **a** pelo valor absoluto de $s$ e cuja direção é a mesma de **a**. O sentido é o mesmo de **a** se $s$ for positivo e o sentido é o oposto se $s$ for negativo. Para dividir **a** por $s$, multiplicamos **a** por $1/s$.

Tanto na multiplicação como na divisão, o escalar pode ser um número puro ou uma grandeza física; no segundo caso, o vetor resultante não representará a mesma grandeza física que o vetor original **a**.

### Um Olhar à Frente

Vejamos, por exemplo, a equação abaixo, que aparece no Cap. 5:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

onde **a** é um vetor aceleração, $m$ é uma massa (que é um escalar positivo) e **F** é um vetor força. Embora você possa não compreender o significado da equação, está em condições de observar dois aspectos. Em primeiro lugar, como $m$ é um escalar positivo, **F** e **a** têm a mesma direção e o mesmo sentido. Em segundo lugar, como $m$ é uma grandeza física (como vimos no Cap. 1, a unidade de massa é o quilograma), **F** não representa a mesma grandeza que o vetor original **a**.

### O Produto Escalar

Existem duas formas de multiplicar um vetor por outro vetor. A primeira produz um escalar; a segunda, um novo vetor. Os alunos costumam confundir os dois tipos de multiplicação; é importante que, desde o começo, você preste atenção nas diferenças entre eles.

O **produto escalar** dos vetores **a** e **b** da Fig. 3-18$a$ é representado pela expressão $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ e definido da seguinte forma:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\phi, \tag{3-15}$$

onde $a$ é o módulo de **a**, $b$ é o módulo de **b** e $\phi$ é o ângulo* entre **a** e **b**. Observe que o lado direito da equação contém apenas escalares (incluindo o valor de $\cos\phi$); assim, o resultado é um *escalar*. Quando nos referimos ao **produto escalar** de dois vetores **a** e **b**, em geral falamos em "a escalar b".

O produto escalar pode ser considerado como o produto de duas grandezas: (1) o módulo de um dos vetores; (2) a componente escalar do segundo vetor na direção do primeiro. Assim, por exemplo, na Fig. 3-18$b$, a componente escalar de **a** na direção de **b** é $a\cos\phi$; observe que essa componente pode ser obtida, traçando-se uma perpendicular a **b** a partir da extremidade de **a**. Da mesma forma, a componente escalar de **b** na direção de **a** é dada por $b\cos\phi$. Quando $\phi$ é igual a 0°, a componente de um dos vetores na direção do outro tem o maior valor possível, o que também ocorre com o produto escalar. Por outro lado, quando $\phi$ é igual a 90°, a componente de um dos vetores na direção do outro é zero e o produto escalar também é zero.

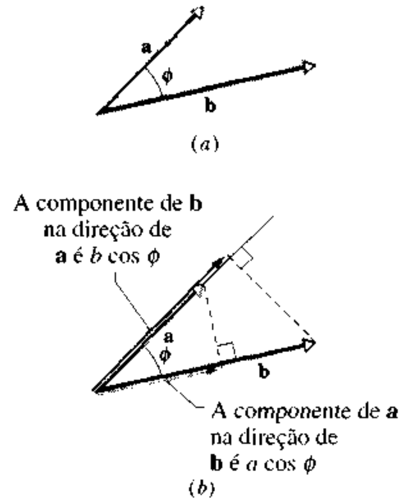



**Fig. 3-18** ($a$) Dois vetores **a** e **b**, fazendo um ângulo $\phi$. ($b$) Cada vetor tem uma componente na direção do outro vetor.

A Eq. 3-15 pode ser reescrita da seguinte forma para destacar as componentes e mostrar que a ordem da multiplicação é irrelevante:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} &= (a\cos\phi)(b)\\ &= (a)(b\cos\phi).\end{aligned} \tag{3-16}$$

Em outras palavras, a lei comutativa se aplica ao produto escalar. Quando os dois vetores são expressos em termos dos vetores unitários, o produto escalar assume a forma

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}), \tag{3-17}$$

que obedece à **lei distributiva**, como será demonstrado no Exemplo 3-5.

### Um Olhar à Frente

Como exemplo de produto escalar, escolhemos a definição do trabalho $W$ (um escalar) realizado por uma força **F** quando seu ponto de aplicação sofre um deslocamento **d**. Se $\phi$ é o ângulo entre os vetores **F** e **d**, o trabalho $W$ é definido como

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d} = Fd\cos\phi.$$

Voltaremos a esta definição no Cap. 7.

---

*Na Fig. 3-18$a$ existem na verdade dois ângulos entre os vetores: $\phi$ e $360° - \phi$. Qualquer um dos dois pode ser usado na Eq. 3-15, porque os seus cossenos são iguais.

**EXEMPLO 3-5** Qual é o ângulo $\phi$ entre $\mathbf{a} = 3{,}0\,\mathbf{i} - 4{,}0\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = -2{,}0\,\mathbf{i} + 3{,}0\,\mathbf{k}$?

**Solução** De acordo com a Eq. 3-15, o produto escalar é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= ab\cos\phi = \sqrt{3{,}0^2 + 4{,}0^2}\,\sqrt{2{,}0^2 + 3{,}0^2}\cos\phi \\ &= 18{,}0\cos\phi. \end{aligned} \tag{3-18}$$

Por outro lado, de acordo com a Eq. 3-17,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (3{,}0\,\mathbf{i} - 4{,}0\,\mathbf{j})\cdot(-2{,}0\,\mathbf{i} + 3{,}0\,\mathbf{k}).$$

Usando a lei distributiva da multiplicação, temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (3{,}0\,\mathbf{i})\cdot(-2{,}0\,\mathbf{i}) + (3{,}0\,\mathbf{i})\cdot(3{,}0\,\mathbf{k}) \\ &\quad + (-4{,}0\,\mathbf{j})\cdot(-2{,}0\,\mathbf{i}) + (-4{,}0\,\mathbf{j})\cdot(3{,}0\,\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Vamos agora aplicar a Eq. 3-15 a todas as parcelas. Para a primeira parcela, o ângulo entre os dois vetores é 0°; para as outras três parcelas, o ângulo é 90°. Assim, temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= -(6{,}0)(1) + (9{,}0)(0) + (8{,}0)(0) - (12)(0) \\ &= -6{,}0.\end{aligned} \tag{3-19}$$

Igualando os resultados das Eqs. 3-18 e 3-19, temos:

$$18{,}0\cos\phi = -6{,}0,$$

ou

$$\phi = \cos^{-1}\frac{-6{,}0}{18{,}0} = 109° \approx 110°. \qquad \text{(Resposta)}$$

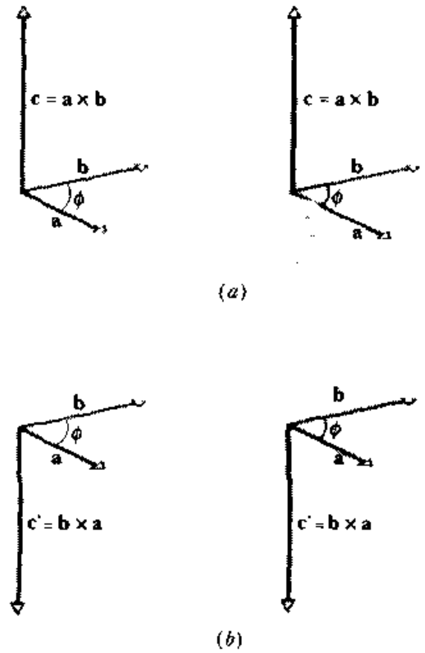



**Fig. 3-19** Ilustração da regra da mão direita para produtos vetoriais. (*a*) Empurre o vetor **a** na direção do vetor **b** com os dedos da mão direita: seu polegar mostrará a direção e o sentido do vetor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. (*b*) Demonstração de que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$.

## O Produto Vetorial

O **produto vetorial** de dois vetores **a** e **b** é representado pela expressão $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e produz um terceiro vetor, **c**, cujo módulo é dado por

$$c = ab \operatorname{sen} \phi, \tag{3-20}$$

onde $\phi$ é o *menor* dos dois ângulos entre **a** e **b**.* Quando nos referimos ao **produto vetorial** do vetor **a** pelo vetor **b**, em geral falamos em "a vetorial b" ou "a vetor b". Quando **a** e **b** são paralelos ou antiparalelos, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$. O módulo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é máximo quando **a** e **b** são perpendiculares.

A direção de **c** é perpendicular ao plano que contém **a** e **b**. A Fig. 3-19*a* mostra como o sentido de **c** pode ser determinado com o auxílio da chamada **regra da mão direita**. Disponha os vetores **a** e **b** de modo que suas origens coincidam. Imagine uma reta que seja perpendicular ao plano que contém os vetores **a** e **b** e passe pela sua origem comum. Finja que está segurando essa linha com a mão *direita* de tal forma que os seus dedos empurrem o vetor **a** na direção de **b** através do menor ângulo entre eles. O seu polegar estendido apontará no sentido de **c**.

No caso do produto vetorial, a ordem dos vetores é importante. Na Fig. 3-19*b*, estamos determinando o sentido de $\mathbf{c}' = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$, de modo que os dedos são colocados de modo a empurrarem o vetor **b** na direção de **a**. Em conseqüência, o polegar fica apontado no sentido oposto ao do caso anterior. Vemos portanto que $\mathbf{c}' = -\mathbf{c}$, ou seja,

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}. \tag{3-21}$$

Em outras palavras, a lei comutativa não se aplica ao produto vetorial.

Quando os vetores são expressos em termos dos vetores unitários, o produto vetorial assume a forma

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}), \tag{3-22}$$

à que pode ser aplicada a lei distributiva, como será visto no Exemplo 3-7.

### Um Olhar à Frente

Vamos encontrar o produto vetorial pela primeira vez no Cap. 12, quando discutirmos uma força **F** cujo ponto de aplicação está a uma distância **r** de uma certa origem. O torque, $\tau$ (um efeito de rotação) que esta força exerce em relação à origem é definido através da equação

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

*Neste caso, é preciso usar o menor dos dois ângulos entre os vetores porque sen $\phi$ e sen $(360° - \phi)$ têm sinais opostos.

**EXEMPLO 3-6** O vetor **a** está contido no plano $xy$ da Fig. 3-20. Ele tem um módulo de 18 unidades e faz um ângulo de 250° com o sentido positivo dos $x$. O vetor **b** tem um módulo de 12 unidades e está alinhado com o eixo dos $z$ no sentido positivo.

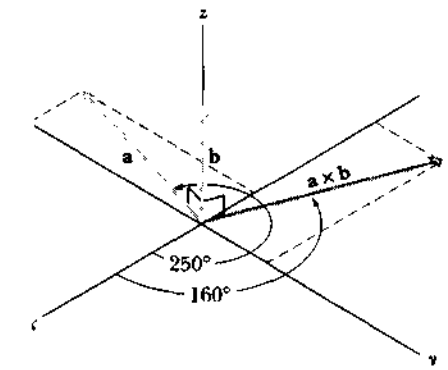



**Fig. 3-20** Exemplo 3-6. Multiplicação de vetores.

a. Qual é o produto escalar dos dois vetores?

**Solução** O ângulo $\phi$ entre os dois vetores é igual a 90°, de modo que, de acordo com a Eq. 3-15,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\phi = (18)(12)(\cos 90°) = 0. \qquad \text{(Resposta)}$$

O produto escalar de dois vetores perpendiculares é sempre zero. Coerente, portanto, com o fato de que, nesse caso, nenhum dos dois vetores tem componente na direção do outro vetor.

b. Qual é o produto vetorial **c** dos vetores **a** e **b**?

**Solução** De acordo com a Eq. 3-20, o módulo do produto vetorial é dado por

$$ab\,\text{sen}\,\phi = (18)(12)(\text{sen}\,90°) = (216). \qquad \text{(Resposta)}$$

O vetor **c** é perpendicular ao plano formado por **a** e **b**. Ele deve ser portanto perpendicular a **b**, o que significa que deve estar no plano $xy$. Usando a regra da mão direita ilustrada na Fig. 3-19, vemos que **c** tem o sentido indicado na Fig. 3-20. Como **c** também é perpendicular a **a**, a direção de **c** faz um ângulo de 250° − 90° = 160° com o sentido positivo dos $x$.

**EXEMPLO 3-7** Se $\mathbf{a} = 3\,\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = -2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{k}$, obtenha o vetor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

**Solução** De acordo com a Eq. 3-22, temos:

$$\mathbf{c} = (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \times (-2\mathbf{i} + 3\,\mathbf{k}),$$

Usando a lei distributiva, temos:

$$\mathbf{c} = -(3\mathbf{i} \times 2\mathbf{i}) + (3\mathbf{i} \times 3\mathbf{k}) + (4\mathbf{j} \times 2\mathbf{i}) - (4\mathbf{j} \times 3\mathbf{k}).$$

Em seguida, calculamos os valores de todas as parcelas, usando a Eq. 3-20 e determinando os sinais com o auxílio da regra da mão direita. O resultado é o seguinte:

$$\mathbf{c} = 0 - 9\,\mathbf{j} - 8\,\mathbf{k} - 12\,\mathbf{i} = -12\,\mathbf{i} - 9\,\mathbf{j} - 8\,\mathbf{k}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O vetor **c** é perpendicular a **a** e **b**, um fato que você pode comprovar mostrando que $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = 0$ e $\mathbf{c}\cdot\mathbf{b} = 0$, isto é, que o vetor **c** não tem componentes nas direções de **a** e de **b**.

## Resolução de Problemas

### Tática 5: Erros Comuns no Cálculo de Produtos Vetoriais

Vários erros podem ser cometidos durante o cálculo de um produto vetorial. (1) Deixar de representar os dois vetores com uma origem comum quando na ilustração original a extremidade do primeiro vetor coincide com a origem do segundo. É preciso deslocar mentalmente (ou, melhor ainda, tornar a desenhar) um deles na posição correta, sem modificar sua orientação. (2) Deixar de usar a mão direita ao aplicar a regra da mão direita porque ela está ocupada com um lápis ou calculadora. (3) Erro ao empurrar o primeiro vetor do produto na direção do segundo quando as orientações dos vetores exigem um movimento incômodo da mão para aplicar a regra da mão direita. Isso também pode acontecer quando você tenta imaginar o movimento em vez de executá-lo. (4) Deixar de trabalhar com um sistema de coordenadas destrógiro (veja a Fig. 3-13).

## RESUMO

***Escalares e Vetores***
Os *escalares*, como a temperatura, são especificados apenas por número e uma unidade (20°C) e obedecem às regras da álgebra comum. Os *vetores*, como o deslocamento, são especificados por um módulo e uma orientação (5 m, norte) e obedecem às regras especiais da álgebra vetorial.

***Soma Geométrica de Vetores***
Dois vetores **a** e **b** podem ser somados geometricamente. Para isso, basta desenhá-los na mesma escala e fazer com que a origem do segundo vetor coincida com a extremidade do primeiro. Nesse caso, o vetor soma, **s**, é o vetor que liga a origem do primeiro à extremidade do segundo (veja a Fig. 3-3). Para subtrair **b** de **a**, basta inverter o sentido de **b** para obter −**b** e em seguida somar −**b** a **a** (veja a Fig. 3-7). A soma e subtração de vetores são comutativas e obedecem à lei associativa.

***Componentes de um Vetor***
As *componentes* $a_x$ e $a_y$ de um vetor **a** são determinadas, traçando-se perpendiculares aos eixos do sistema de coordenadas a partir da extremidade do vetor, como na Fig. 3-8 e no Exemplo 3-2. As componentes são dadas por

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{e} \quad a_y = a\,\text{sen}\,\theta, \qquad (3\text{-}5)$$

onde $\theta$ é medido em relação ao sentido positivo dos $x$. O sinal da componente indica o seu sentido em relação ao eixo. Dadas as componentes, podemos reconstruir o vetor usando as expressões

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}, \qquad (3\text{-}6)$$

onde novamente $\theta$ é medido em relação ao sentido positivo dos $x$.

***Vetores Unitários***
É possível definir *vetores unitários* **i**, **j**, **k**, que possuem módulo unitário e cujas direções são as dos eixos dos $x$, dos $y$ e dos $z$ de um sistema de coordenadas destrógiro como o que aparece na Fig. 3-13. Em termos dos vetores unitários, um vetor **a** pode ser escrito na forma

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \qquad (3\text{-}7)$$

onde $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$ e $a_z\mathbf{k}$ são as **componentes vetoriais** e $a_x$, $a_y$ e $a_z$ são as **componentes escalares de a**. O Exemplo 3-4 mostra como é possível somar vetores usando vetores unitários.

***Soma de Vetores Usando as Componentes***
Para somarmos vetores através das componentes, usamos as equações

$$r_x = a_x + b_x; \qquad r_y = a_y + b_y; \qquad r_z = a_z + b_z. \qquad (3\text{-}10 \text{ a } 3\text{-}12)$$

Veja o Exemplo 3-3.

***Vetores e Leis Físicas***
Qualquer situação física que envolva vetores pode ser descrita em um número infinito de diferentes sistemas de coordenadas. Em geral, escolhemos um sistema que torne o nosso trabalho mais simples; entretanto, a relação entre as grandezas vetoriais não depende do sistema escolhido. As leis da física são independentes do sistema de coordenadas.

***Produto de um Escalar por um Vetor***
O produto de um escalar $s$ por um vetor $\mathbf{v}$ é um novo vetor cujo módulo é $sv$ e cuja direção é a mesma de $\mathbf{v}$. O sentido é o mesmo de $\mathbf{v}$ se $s$ for positivo e o sentido é contrário ao de $\mathbf{v}$ se $s$ for negativo. Para dividir $\mathbf{v}$ por $s$, basta multiplicar $\mathbf{v}$ por $(1/s)$.

***Produto Escalar***
O produto escalar de dois vetores, representado pela expressão $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, é a grandeza escalar dada por

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\phi, \qquad (3\text{-}15)$$

onde $\phi$ é o ângulo entre as direções de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (veja a Fig. 3-18$a$).

O produto escalar pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo do valor de $\phi$. A Fig. 3-18$b$ mostra que o produto escalar pode ser considerado como o produto do módulo de um dos vetores pela componente do segundo vetor na direção do primeiro. Em termos dos vetores unitários, o produto escalar é dado pela equação

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}), \qquad (3\text{-}17)$$

que obedece à lei distributiva, como está demonstrado no Exemplo 3-5. Observe que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$.

***Produto Vetorial***
O produto vetorial de dois vetores, representado pela expressão $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, é um *vetor* $\mathbf{c}$ cujo módulo é dado por

$$c = ab\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad (3\text{-}20)$$

onde $\phi$ é o menor dos dois ângulos entre as direções de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. O vetor $\mathbf{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ e seu sentido é dado pela regra da mão direita, ilustrada na Fig. 3-19. Observe que $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$. Em termos dos vetores unitários, o produto vetorial é dado pela equação

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\times(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) \qquad (3\text{-}22)$$

que obedece à lei distributiva. O produto vetorial está ilustrado nos Exemplos 3-6 e 3-7.

## QUESTIONÁRIO

**1.** Em 1969, três astronautas do Projeto Apolo partiram de Cabo Canaveral, foram até a Lua e retornaram à Terra, descendo no Oceano Pacífico. Um almirante assistiu a partida dos astronautas em Cabo Canaveral e depois viajou para o Oceano Pacífico num porta-aviões para recolhê-los. Compare os deslocamentos dos astronautas e do almirante.

**2.** É possível combinar dois vetores de módulos diferentes de tal forma que a resultante seja zero? E se forem três vetores?

**3.** Um vetor pode ter módulo zero se uma das suas componentes for diferente de zero?

**4.** A soma dos módulos de dois vetores pode ser igual ao módulo da soma desses vetores?

**5.** O módulo da diferença entre dois vetores pode ser maior do que o módulo dos vetores? Pode ser maior do que o módulo da soma dos dois vetores? Dê alguns exemplos.

**6.** Se a soma de três vetores é nula, eles estão necessariamente no mesmo plano?

**7.** Explique em que sentido uma equação vetorial contém mais informações do que uma equação escalar.

**8.** Por que os vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ não têm unidades?

**9.** Dê alguns exemplos de grandezas escalares. O valor de uma grandeza escalar depende do sistema de coordenadas escolhido?

**10.** É possível ordenar eventos no tempo. Assim, por exemplo, se o evento $b$ preceder o evento $c$ mas for posterior ao evento $a$, a ordem temporal desses eventos será $a$, $b$, $c$. O tempo tem, portanto, um sentido que nos permite distinguir passado, presente e futuro. Isso significa que o tempo é um vetor? Justifique sua resposta.

**11.** As leis comutativa e associativa se aplicam à subtração de vetores?

**12.** Um produto escalar pode ser negativo?

**13.** (a) Se $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, podemos concluir que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são perpendiculares? (b) Se $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$, podemos concluir que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

**14.** Se $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0$, podemos concluir que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são paralelos? A recíproca é verdadeira?

**15.** É preciso especificar um sistema de coordenadas quando (a) somamos, (b) calculamos o produto escalar, (c) calculamos o produto vetorial, (d) calculamos as componentes de dois vetores?

## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

**Seção 3-2 Soma de Vetores: Método Gráfico**

**1E.** Considere dois deslocamentos, um de módulo 3 m e outro de módulo 4 m. Mostre como os vetores deslocamento devem ser combinados para que o módulo do deslocamento resultante seja (a) 7 m, (b) 1 m e (c) 5 m.

**2E.** Quais são as propriedades de dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ tais que

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ e $a + b = c$;
(b) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$;
(c) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ e $a^2 + b^2 = c^2$?

**3E.** Uma mulher caminha 250 m na direção 30° a leste do norte e depois 175 m para o leste. (a) Usando métodos gráficos, determine o seu deslocamento resultante a partir do ponto inicial. (b) Compare o módulo do deslocamento com a distância total que a mulher percorreu.

**4E.** Uma pessoa caminha 3,1 km para o norte, 2,4 km para oeste e 5,2 km para o sul. (a) Represente os movimentos da pessoa em um diagrama vetorial. (b) Em que direção um passarinho teria que voar em linha reta para chegar ao mesmo ponto de destino? Que distância teria que percorrer?

**5E.** Um carro viaja 50 km para leste, 30 km para o norte e 25 km em uma direção 30° a leste do norte. Represente os movimentos do carro em um diagrama vetorial e determine o deslocamento total do veículo em relação ao ponto de partida.

**6P.** O vetor $\mathbf{a}$ tem um módulo de 5,0 unidades e está dirigido para leste. O vetor $\mathbf{b}$ está dirigido para 35° a oeste do norte e tem um módulo de 4,0 unidades. Construa diagramas vetoriais para calcular $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. Estime o módulo e a orientação dos vetores $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ a partir desses diagramas.

**7P.** Três vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, todos com um módulo de 50 unidades, estão em plano $xy$ e fazem ângulos de 30°, 195° e 315° com o sentido positivo dos $x$, respectivamente. Estime graficamente o módulo e orientação dos vetores (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ e (c) um vetor $\mathbf{d}$ tal que $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = 0$.

**8P.** Um banco no centro de Boston foi assaltado (veja o mapa da Fig. 3-21). Os ladrões, para despistarem a polícia, fugiram de helicóptero, viajando primeiro 20 milhas numa direção 45° ao sul do leste, depois 33 milhas em uma direção 26° ao norte do oeste e finalmente 16 milhas numa direção 18° a leste do sul. Concluída a terceira etapa do vôo, foram capturados. Em que cidade os ladrões foram presos? (Use o método geométrico para somar os deslocamentos no mapa.)

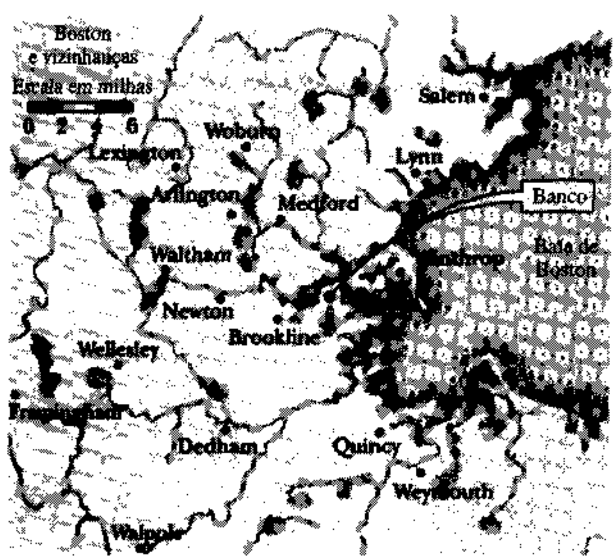



**Fig. 3-21** Problema 8.

## Seção 3-3 Vetores e seus Componentes

**9E.** Quais são as componentes $x$ e $y$ de um vetor $\mathbf{a}$ situado no plano $xy$ se ele faz um ângulo de 250° com o sentido positivo dos $x$ no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e seu módulo vale 7,3 unidades?

**10E.** A componente $x$ de um certo vetor vale $-25{,}0$ unidades e a componente $y$ vale $+40{,}0$ unidades. (a) Qual é o módulo do vetor? (b) Qual é o ângulo entre o vetor e o sentido positivo dos $x$?

**11E.** Um vetor deslocamento $\mathbf{r}$ situado no plano $xy$ tem 15 m de comprimento e a orientação indicada na Fig. 3-22. Determine as componentes $x$ e $y$ do vetor.

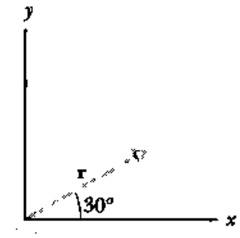



**Fig. 3-22** Exercício 11.

**12E.** Uma máquina pesada é colocada numa prancha que faz um ângulo de 20° com a horizontal e arrastada por uma distância de 12,5 m (Fig. 3-23). (a) Qual a altura final da máquina em relação ao solo? (b) Qual a distância horizontal percorrida por ela?

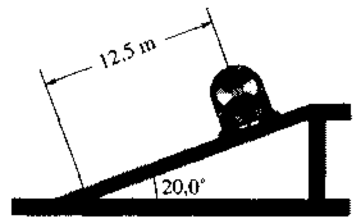



**Fig. 3-23** Exercício 12.

**13E.** O ponteiro dos minutos de um relógio de parede tem 10 cm de comprimento. Qual é o vetor deslocamento da extremidade do ponteiro (a) quando ele se move de um quarto de hora para meia hora, (b) quando se move na meia hora seguinte e (c) quando se move na hora seguinte?

**14E.** Um iate pretendia viajar para um ponto situado 120 km ao norte, mas uma ventania inesperada fez com que fosse parar 100 km a leste do ponto de partida. Em que direção deve navegar e que distância deve percorrer para chegar ao destino original?

**15P.** Uma pessoa deseja chegar a um ponto situado a 3,40 km da sua localização atual numa direção 35,0° ao norte do leste. Entretanto, todas as ruas que podem levá-la ao destino têm direção norte-sul ou direção leste-oeste. Qual a menor distância que a pessoa terá que percorrer para chegar ao ponto desejado?

**16P.** *Falhas geológicas* são planos de separação que se formam entre dois blocos de rocha quando um dele se desloca. Na Fig. 3-24, os pontos $A$ e $B$ coincidiam antes que o bloco que está em primeiro plano se deslocasse para baixo e para a direita. O deslocamento $AB$ é medido no plano da falha. A componente horizontal de $AB$ é o *rejeito horizontal AC*. A componente de $AB$ na direção de maior inclinação no plano de falha é o *rejeito de mergulho AD*. (a) Qual é o deslocamento $AB$ se o rejeito horizontal é 22,0 m e o rejeito de mergulho é 17,0 m? (b) Se o plano da falha tem uma inclinação de 52,0° em relação à horizontal, qual é o componente vertical de $AB$?

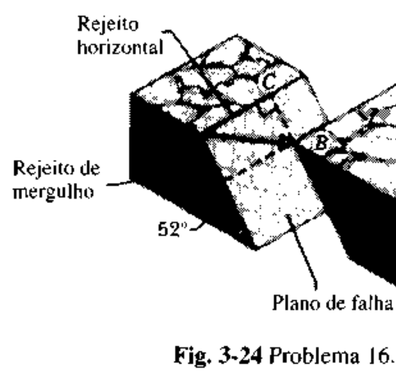



**Fig. 3-24** Problema 16.

**17P.** Uma roda com 45,0 cm de raio roda sem escorregar num piso horizontal (Fig. 3.25). $P$ é um ponto pintado na borda da roda. No tempo $t_1$, $P$ está no ponto de contato entre a roda e o piso. Num tempo posterior $t_2$, a roda descreveu meia rotação. Qual foi o deslocamento de $P$ entre os tempos $t_1$ e $t_2$?

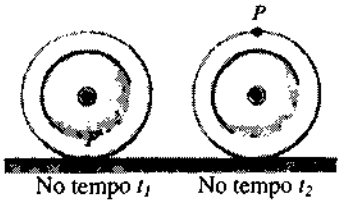



**Fig. 3-25** Problema 17.

**18P.** A localização de duas cidades da América do Sul difere de 1° de latitude e 1° de longitude. Mostre que o módulo do vetor deslocamento de $B$ em relação a $A$ é dado aproximadamente por $d(1 + \cos^2 \lambda)^{1/2}$, onde $\lambda$ é a latitude de $A$ e $d$ = 111 km.

**19P.** Um sala tem 5 m de comprimento, 4 m de largura e 3 m de altura. Uma mosca parte do chão, de um canto da sala, voa para o teto e pousa no canto diagonalmente oposto. (a) Qual é o módulo de deslocamento da mosca? (b) A distância percorrida pela mosca pode ser menor do que esse valor? Maior do que ele? Igual a ele? (c) Escolha um sistema de coordenadas apropriado e calcule as componentes do vetor deslocamento neste sistema. (d) Se a mosca decide andar e não voar, qual a menor distância que ela terá que percorrer?

### Seção 3-5 Somando Vetores através de suas Componentes

**20E.** (a) Expresse os seguintes ângulos em radianos: 20,0°, 50,0°, 100°. (b) Converta os seguintes ângulos para graus: 0,330 rad, 2,10 rad, 7,70 rad.

**21E.** Calcule as componentes escalares da soma **r** dos vetores deslocamento **c** e **d** cujas componentes em metros, ao longo de três direções mutuamente perpendiculares, são: $c_x = 7{,}4$, $c_y = -3{,}8$, $c_z = -6{,}1$; $d_x = 4{,}4$, $d_y = -2{,}0$, $d_z = 3{,}3$.

**22E.** (a) Qual é a soma, em termos de vetores unitários, dos dois vetores $\mathbf{a} = 4{,}0\,\mathbf{i} + 3{,}0\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = -13\,\mathbf{i} + 7{,}0\,\mathbf{j}$? (c) Qual é o módulo e a orientação do vetor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$?

**23E.** Calcule as componentes $x$ e $y$, o módulo e a orientação de (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e (b) $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ se $\mathbf{a} = 3{,}0\,\mathbf{i} + 4{,}0\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 5{,}0\,\mathbf{i} - 2{,}0\,\mathbf{j}$.

**24E.** Dois vetores são dados por $\mathbf{a} = 4\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$. Calcule (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ e (c) um vetor **c** tal que $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$.

**25E.** Dados dois vetores $\mathbf{a} = 4{,}0\,\mathbf{i} - 3{,}0\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 6{,}0\,\mathbf{i} + 8{,}0\,\mathbf{j}$, calcule o módulo de orientação de (a) **a**, (b) **b**, (c) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (d) $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ e (e) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Qual é a relação entre as orientações dos últimos dois vetores?

**26P.** Se $\mathbf{a} - \mathbf{b} = 2\mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 4\mathbf{c}$ e $\mathbf{c} = 3\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}$, quanto valem **a** e **b**?

**27P.** Dois vetores **a** e **b** têm módulos iguais a 10,0 unidades. A orientação é a indicada na Fig. 3-26. Se $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, calcule (a) as componentes $x$ e $y$ de **r**, (b) o módulo de **r** e (c) o ângulo que **r** faz com o sentido positivo dos $x$.

**28P.** Depois da tacada inicial, um golfista necessitou de mais três tacadas para colocar a bola no buraco. Na primeira, a bola se deslocou 12 m para o norte; na segunda, 6 m para sudeste; na terceira, 3 m para sudoeste. Que deslocamento seria necessário para colocar a bola no buraco com uma única tacada após a tacada inicial?

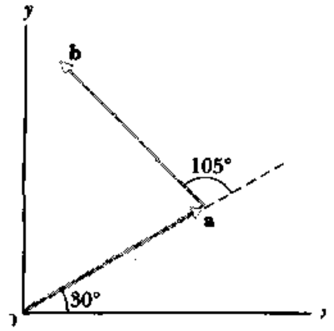



**Fig. 3-26** Problema 27.

**29P.** Uma estação de radar detecta um avião que vem do leste. No momento em que é observado pela primeira vez, o avião está a 400 m de distância, 40° acima do horizonte. O avião é acompanhado por mais 123° no plano vertical leste-oeste e está a 860 m de distância quando é observado pela última vez. Calcule o deslocamento da aeronave durante o período de observação.

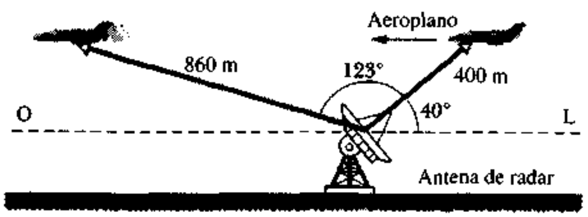



**Fig. 3-27** Problema 29.

**30P.** (a) Um homem sai de casa, caminha 1.000 m para leste, 2.000 m para o norte, tira uma moeda do bolso e a deixa cair de um penhasco com 500 m de altura. Escolha um sistema de coordenadas e escreva uma expressão, usando vetores unitários, para o deslocamento da moeda desde a casa, até a base do penhasco. (b) O homem volta para casa seguindo um caminho diferente. Qual o seu deslocamento desde que saiu de casa?

**31P.** Uma partícula sofre três deslocamentos sucessivos num plano: 4,00 m para sudoeste, 5,00 m para leste e 6,00 m numa direção 60,0° ao norte do leste. Tome o eixo dos $y$ na direção norte e o eixo dos $x$ na direção leste e calcule (a) as componentes dos três deslocamentos, (b) as componentes do deslocamento resultante, (c) o módulo e a orientação do deslocamento resultante e (d) o deslocamento que seria necessário para levar a partícula de volta ao ponto de partida.

**32P.** Prove que dois vetores devem ter o mesmo módulo para que sua soma seja perpendicular à sua diferença.

**33P.** Dois vetores de comprimentos $a$ e $b$ fazem entre si um ângulo $\theta$. Prove, calculando as componentes dos vetores em relação a dois eixos perpendiculares, que o comprimento da soma dos dois vetores é dado por

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}\ .$$

**34P.** (a) Usando vetores unitários, expresse as diagonais (retas que ligam dois vértices passando pelo centro) de um cubo em função das arestas, cujo comprimento é $a$. (b) Calcule os ângulos que os diagonais fazem com as arestas adjacentes. (c) Calcule o comprimento das diagonais.

**35P*.** Uma pessoa viaja de Washington até Manila. (a) Descreva o vetor deslocamento. (b) Calcule o módulo do vetor deslocamento, sabendo que a latitude e longitude das duas cidades são 39° N, 77° O e 15° N e 121° L, respectivamente.

### Seção 3-6 Os Vetores e as Leis da Física

**36E.** Um vetor **a**, cujo módulo é de 17,0 m, faz um ângulo de 56,0° com o sentido positivo dos $x$ (Fig. 3-28). (a) Quais são as componentes $a_x$ e $a_y$ do vetor? (b) Um segundo sistema de coordenadas faz um ângulo de 18° com o primeiro. Quais são as componentes $a'_x$ e $a'_y$ do vetor **a** no segundo sistema?

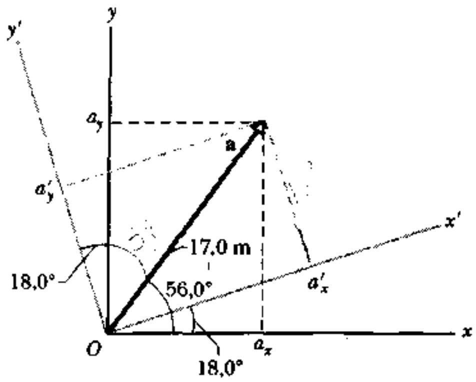



**Fig. 3-28** Exercício 36.

### Seção 3-7 Multiplicação de Vetores

**37E.** Um vetor **d** tem um módulo de 2,5 m e aponta para o norte. Calcule o módulo e a orientação dos seguintes vetores: (a) 4,0**d**; (b) 3,0**d**.

**38E.** Considere um vetor **a** no sentido positivo do eixo dos $x$, um vetor **b** no sentido positivo do eixo dos $y$ e um escalar $d$. Qual é a orientação do vetor **b**/$d$ se $d$ for (a) positivo e (b) negativo? Qual é o módulo de (c) **a**·**b** e (d) **a**·**b**/$d$? Qual é a orientação de (e) **a** × **b** e (f) **b** × **a**? (g) Quais são os módulos dos produtos vetoriais em (e) e (f)? (h) Qual é o módulo e a orientação de **a** × **b**/$d$?

**39E.** Mostre que, num sistema de coordenadas de destrógiro

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$

e

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0.$$

Os resultados serão diferentes se o sistema de coordenadas for retangular mas não destrógiro?

**40E.** Mostre que, em um sistema de coordenadas destrógiro

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$$

e

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k};\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j};\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}.$$

Os resultados serão diferentes se o sistema de coordenadas for retangular mas não destrógiro?

**41E.** Mostre que para qualquer vetor **a**, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$ e $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = 0$.

**42E.** Calcule os produtos (a) "norte vetorial oeste", (b) "para baixo escalar sul", (c) "leste vetorial para cima", (d) "oeste escalar oeste" e (e) "sul vetorial sul". Suponha que todos os vetores têm módulo unitário.

**43E.** Um vetor **a** de módulo 10 unidades e outro vetor **b** de módulo 6 unidades fazem entre si um ângulo de 60°. Calcule (a) o produto escalar dos dois vetores e (b) o módulo do produto vetorial **a** × **b**.

**44E.** Dois vetores, **r** e **s**, estão contidos no plano $xy$. Seus módulos são 4,50 e 7,30 unidades, respectivamente, e eles fazem ângulos de +320° e +85,0°, respectivamente, com o sentido positivo dos $x$. Quais são os valores de (a) **r** · **s** e (b) **r** × **s**?

**45E.** Para os vetores da Fig. 3-29, calcule (a) **a** · **b**, (b) **a** · **c** e (c) **b** · **c**.

**46E.** Para os vetores da Fig. 3-29, calcule (a) **a** × **b**, (b) **a** × **c** e (c) **b** × **c**.

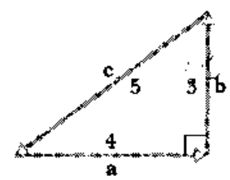



**Fig. 3-29** Exercícios 45 e 46.

**47P.** ***Produto Escalar em Função das Coordenadas.*** Suponha que dois vetores sejam representados em termos das coordenadas como

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

e

$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

Mostre que

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

**48P.** Use a definição de produto escalar, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\theta$, e o fato de que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ (veja o Problema 47) para calcular o ângulo entre os dois vetores dados por **a** = 3,0 **i** + 3,0 **j** + 3,0 **k** e **b** = 2,0 **i** + 1,0 **j** + 3,0 **k**.

**49P.** (a) Determine as componentes e o módulo de **r** = **a** − **b** + **c** se **a** = 5,0 **i** + 4,0 **j** − 6,0 **k**, **b** = −2,0 **i** + 2,0 **j** + 3,0 **k** e **c** = 4,0 **i** + 3,0 **j** + 2,0 **k**. (b) Calcule o ângulo entre **r** e o sentido positivo dos $z$.

**50P.** ***Produto Vetorial em Função das Coordenadas.*** Mostre que para os vetores **a** e **b** do Problema 47, $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{i}\,(a_yb_z - a_zb_y) + \mathbf{j}\,(a_zb_x - a_xb_z) + \mathbf{k}\,(a_xb_y - a_yb_x)$.

**51P.** Dois vetores são dados por **a** = 3,0 **i** + 5,0 **j** e **b** = 2,0 **i** + 4,0 **j**. Calcule (a) **a** × **b**, (b) **a** · **b** e (c) (**a** + **b**) · **b**.

**52P.** Dois vetores **a** e **b** têm componentes, em unidades arbitrárias, $a_x$ = 3,2, $a_y$ = 1,6, $b_x$ = 0,50, $b_y$ = 4,5. (a) Calcule o ângulo entre **a** e **b**. (b) Calcule as componentes de um vetor **c** que é perpendicular a **a**, está no plano $xy$ e cujo módulo vale 5,0 unidades.

**53P.** O vetor **a** está no plano $yz$, faz um ângulo de 63° com o eixo +$y$, tem uma componente $z$ positiva e seu módulo vale 3,20 unidades. O vetor

**b** está no plano $xz$, faz um ângulo de 48° com o eixo $+x$, tem uma componente $z$ positiva e seu módulo vale 1,40 unidades. Calcule (a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e (c) o ângulo entre **a** e **b**.

**54P.** Três vetores são dados por $\mathbf{a} = 3{,}0\,\mathbf{i} + 3{,}0\,\mathbf{j} - 2{,}0\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -1{,}0\,\mathbf{i} - 4{,}0\,\mathbf{j} + 2{,}0\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{c} = 2{,}0\,\mathbf{i} + 2{,}0\,\mathbf{j} + 1{,}0\,\mathbf{k}$. Calcule (a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, (b) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ e (c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

**55P.** Calcule os ângulos entre as diagonais de um cubo de aresta $a$. Veja o Problema 34.

**56P.** Mostre que a área do triângulo contido entre os vetores **a** e **b** da Fig. 3-30 é dada por $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|/2$, onde as barras verticais significam módulo.

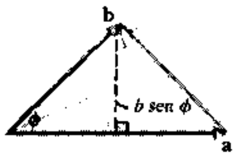



**Fig. 3-30** Problema 56.

**57P.** (a) Mostre que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ é igual a zero quaisquer que sejam os vetores **a** e **b**. (b) Qual é o valor de $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ se o ângulo entre os vetores **a** e **b** é $\phi$?

**58P.** Os módulos dos três vetores que aparecem na Fig. 3.31 são $a = 3{,}00$, $b = 4{,}00$ e $c = 10{,}0$. (a) Calcule as componentes $x$ e $y$ desses vetores. (b) Determine os dois números $p$ e $q$ tais que $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$.

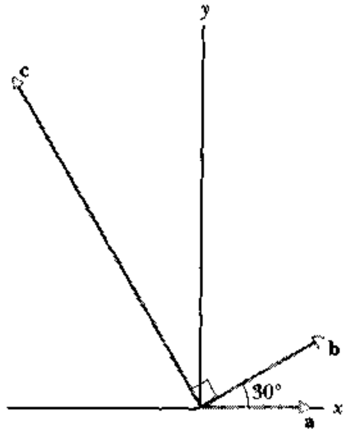



**Fig. 3-31** Problema 58.

**59P.** Mostre que o *produto misto* $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ tem módulo igual ao volume do paralelepípedo formado pelos vetores **a**, **b** e **c**, como mostra a Fig. 3-32.


**Fig. 3-32** Problema 59.

## PROBLEMAS ADICIONAIS

**60.** O oásis B fica 25 km a leste do oásis A. Partindo do oásis A, um camelo viaja 24 km numa direção 15° ao sul do leste e depois viaja 8,0 km para o norte. A que distância o camelo se encontra do oásis B nesse momento?

**61.** Um vetor **B**, cujo módulo vale 8,0, é somado a um vetor **A** localizado sobre o eixo dos $x$. A soma desses vetores é um terceiro vetor situado sobre o eixo dos $y$ e cujo módulo é o dobro do módulo de **A**. Qual é o módulo de **A**?

**62.** Se o vetor **B** é somado ao vetor **A**, o resultado é $6{,}0\mathbf{i} + 1{,}0\mathbf{j}$. Se **B** é subtraído de **A**, o resultado é $-4{,}0\mathbf{i} + 7{,}0\mathbf{j}$. Qual é o módulo de **A**?

**63.** Quando um vetor **B** é somado ao vetor $\mathbf{C} = 3{,}0\mathbf{i} + 4{,}0\mathbf{j}$, o vetor resultante está no sentido positivo dos $y$ e tem o mesmo módulo que **C**. Qual é o módulo de **B**?