

SISTEMAS DE PARTÍCULAS

9



Quando você dá um salto para a frente, o normal é que sua cabeça e tronco descrevam uma trajetória parabólica, parecida com a de uma bala de canhão. Entretanto, quando uma bailarina clássica executa um grand jeté como se mostra na fotografia ao lado, a cabeça e o tronco permanecem paralelos ao piso durante boa parte do salto. A bailarina parece flutuar no palco. A platéia pode não conhecer as leis do movimento de Newton, mas mesmo assim percebe que algo fora do comum está acontecendo. Como a bailarina consegue “desafiar” as leis de Newton?

9-1 Um Ponto Especial

Os físicos adoram observar fenômenos complicados e descobrir neles alguma coisa simples e familiar. Eis um exemplo. Quando você joga um machado para cima, o movimento é bem mais complexo do que, por exemplo, o de uma bola (Fig. 9-1a). Como cada ponto do machado se move de forma diferente, não pode ser representado como uma partícula única (Fig. 9-1b). Entretanto, se você examinar o movimento mais de perto, verificará que existe um ponto especial do machado que descreve uma trajetória parabólica, semelhante à percorrida pela bola. Este ponto, chamado **centro de massa**, fica perto da junção entre o cabo e a lâmina. Você pode localizá-lo equilibrando o machado sobre um dedo estendido; no momento em que o machado ficar em equilíbrio, o centro de massa estará bem acima do seu dedo. Se o machado fosse arremessado no escuro, com uma pequena lâmpada no centro de massa, a simplicidade do movimento deste ponto seria bem visível.

9-2 O Centro de Massa

Em nossa discussão do centro de massa, vamos começar com sistemas simples de partículas e depois passar para objetos mais complexos como machados.

Sistemas de Partículas

A Fig. 9-2a mostra duas partículas de massas m_1 e m_2 separadas por uma distância d . Escolhemos arbitrariamente a origem do eixo dos x para que coincidisse com m_1 . A posição do centro de massa deste sistema de duas partículas é definida através da seguinte equação:

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d. \quad (9-1)$$

Suponhamos, por exemplo, que $m_2 = 0$. Nesse caso, só existe uma partícula (m_1) e a posição do centro de massa

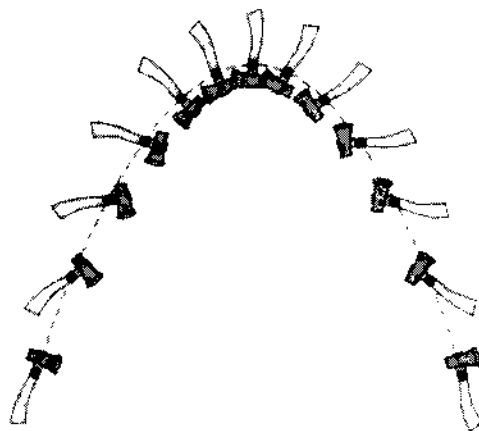


Fig. 9-1 (a) O centro de massa de uma bola, localizado no seu centro, segue uma trajetória parabólica quando a bola é lançada no ar. Os outros pontos da bola seguem trajetórias semelhantes. (b) O centro de massa de um machado (representado na figura por um círculo preto) também segue uma trajetória parabólica, embora os outros pontos do machado percorram trajetórias bem mais complexas.

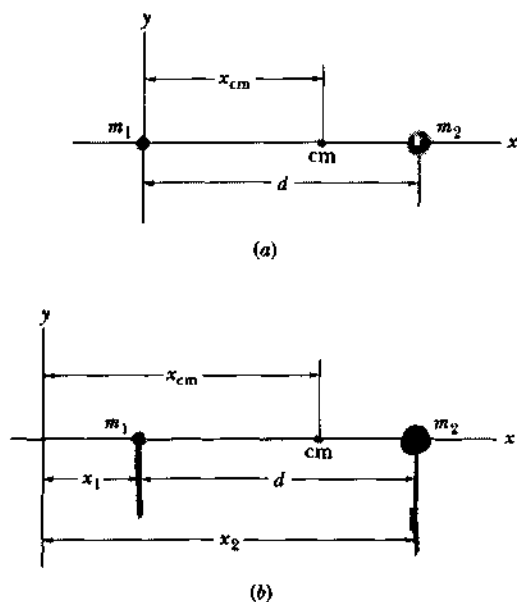


Fig. 9-2 (a) Duas partículas de massas m_1 e m_2 estão separadas por uma distância d . O ponto cm indica a posição do centro de massa, calculada com o auxílio da Eq. 9-1. (b) A mesma situação de (a), exceto pelo fato de que a origem do sistema de coordenadas foi deslocada para a esquerda. A posição do centro de massa pode ser calculada com o auxílio da Eq. 9-3. A posição do centro de massa em relação às duas partículas é a mesma nos dois casos.

deve coincidir com a posição dessa partícula. Realmente, de acordo com a Eq. 9-1, temos $x_{cm} = 0$. Se, por outro lado, $m_1 = 0$, teremos novamente apenas uma partícula (m_2) e, como seria de se esperar, $x_{cm} = d$. Se $m_1 = m_2$, as massas das partículas são iguais e o centro de massa deve ficar no ponto médio entre elas; de acordo com a Eq. 9-1, temos, como seria de se esperar, $x_{cm} = d/2$. Finalmente, se m_1 e m_2 forem diferentes entre si e diferentes de zero, x_{cm} , de acordo com a Eq. 9-1, deverá ter um valor compreendido entre 0 e d , isto é, o centro de massa terá que estar localizado entre as duas partículas.

A Fig. 9-2b mostra uma situação mais geral em que a origem do sistema de coordenadas foi deslocada para a esquerda. A posição do centro de massa é agora definida através da equação

$$\rightarrow x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (9-2)$$

Observe que se fizermos $x_1 = 0$, x_2 será igual a d e a Eq. 9-2 ficará idêntica à Eq. 9-1, como seria de se esperar. Observe também que, apesar do deslocamento da origem do sistema de coordenadas, as distâncias do centro de massa até as duas partículas se mantêm inalteradas.

A Eq. 9-2 pode ser escrita na forma

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} \quad (9-3)$$

onde M é a massa total do sistema. No exemplo que estamos considerando, $M = m_1 + m_2$. Podemos aplicar a mesma definição a uma situação mais geral em que n partículas estão situadas em diferentes pontos do eixo dos x . Nesse caso, a massa total é $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ e a posição do centro de massa é dada por

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{M} \\ = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad (9-4)$$

onde i é um índice que assume todos os valores inteiros entre 1 e n e é usado para identificar as várias partículas e suas coordenadas.

Quando as partículas estão distribuídas em três dimensões, são necessárias três coordenadas para especificar a localização do centro de massa. Por extensão da Eq. 9-4, essas coordenadas são dadas por

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \\ y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i \\ z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad (9-5)$$

Podemos também definir a posição do centro de massa usando a notação vetorial. A posição de uma partícula cujas coordenadas são x_i , y_i e z_i é dada pelo vetor posição

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k} \quad (9-6)$$

onde o índice i identifica a partícula e \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são vetores unitários na direção dos eixos x , y e z . Da mesma forma, a posição do centro de massa de um sistema de partículas pode ser expressa por um vetor-posição:

$$\mathbf{r}_{cm} = x_{cm} \mathbf{i} + y_{cm} \mathbf{j} + z_{cm} \mathbf{k} \quad (9-7)$$

As três equações escalares da Eq. 9-5 podem, portanto, ser substituídas por uma única equação vetorial,

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (9-8)$$

onde M é novamente a massa total do sistema. Para verificar que a Eq. 9-8 está correta, basta substituir \mathbf{r}_{cm} e \mathbf{r}_i por seus valores, dados pelas Eqs. 9-6 e 9-7, e separar as componentes x , y e z . Como resultado, aparecerão as três equações escalares da Eq. 9-5.

Corpos Rígidos

Um objeto comum, como um machado, contém um número tão grande de partículas (átomos) que é mais simples

considerá-lo como uma distribuição contínua de matéria. Nesse caso, as "partículas" se tornam elementos infinitesimais de massa, dm , os somatórios da Eq. 9-5 se transformam em integrais e as coordenadas do centro de massa passam a ser dadas por

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int x \, dm \\ y_{cm} = \frac{1}{M} \int y \, dm \\ z_{cm} = \frac{1}{M} \int z \, dm \quad (9-9)$$

Em princípio, as integrais devem ser calculadas para todos os elementos de massa do objeto. Na prática, porém, existe uma forma mais simples de calculá-las. Se o objeto tem uma densidade (massa por unidade de volume ou massa específica) uniforme, podemos escrever:

$$\frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} \quad (9-10)$$

onde dV é o volume ocupado por um elemento de massa e V é o volume total do objeto. Substituindo dm , dado pela Eq. 9-10, na Eq. 9-9, temos:

$$x_{cm} = \frac{1}{V} \int x \, dV \\ y_{cm} = \frac{1}{V} \int y \, dV \\ z_{cm} = \frac{1}{V} \int z \, dV \quad (9-11)$$

As integrais acima são calculadas sobre o volume do objeto (veja o Exemplo 9-4).

Muitos objetos possuem um ponto, eixo ou plano de simetria. Nesse caso, o centro de massa do objeto está sobre esse ponto, eixo ou plano. Por exemplo: o centro de massa de uma esfera homogênea (que possui um ponto de simetria) fica no centro da esfera. O centro de massa de um cone homogêneo (que possui um eixo de simetria, fica no eixo do cone. O centro de massa de uma banana (que possui um plano de simetria, que a divide em duas partes iguais) fica nesse plano.

O centro de massa de um objeto não está necessariamente localizado no interior do objeto. Não existe borracha no centro de massa de um pneu, nem ferro no centro de massa de uma ferradura.

EXEMPLO 9-1 A Fig. 9-3 mostra três partículas de massas $m_1 = 1,2$ kg, $m_2 = 2,5$ kg e $m_3 = 3,4$ kg situadas nos vértices de um triângulo equilátero de lado $a = 140$ cm. Qual a localização do centro de massa?

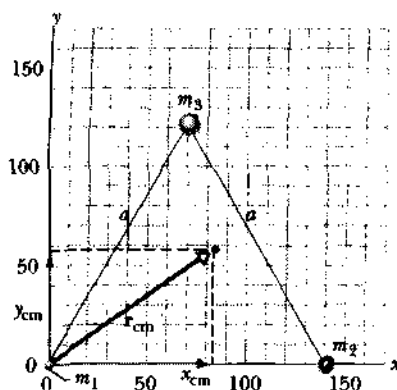


Fig. 9-3 Exemplo 9-1. Três partículas de massas diferentes formam um triângulo equilátero de lado a . A posição do centro de massa é definida pelo vetor \mathbf{r}_{cm} .

Solução Escolhemos os eixos de coordenadas x e y de tal forma que uma das partículas fique na origem e o eixo dos x coincida com um dos lados do triângulo. Nesse caso, as coordenadas das três partículas terão os seguintes valores:

Partícula	Massa (kg)	x (cm)	y (cm)
m_1	1,2	0	0
m_2	2,5	140	0
m_3	3,4	70	121

Devido à nossa escolha dos eixos, três das coordenadas que aparecem na tabela acima são nulas, o que simplifica os cálculos. A massa total M do sistema é 7,1 kg.

De acordo com a Eq. 9-5, as coordenadas do centro de massa são dadas por

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M}$$

$$= \frac{(1,2 \text{ kg})(0) + (2,5 \text{ kg})(140 \text{ cm}) + (3,4 \text{ kg})(70 \text{ cm})}{7,1 \text{ kg}}$$

$$= 83 \text{ cm} \quad (\text{Resposta})$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M}$$

$$= \frac{(1,2 \text{ kg})(0) + (2,5 \text{ kg})(0) + (3,4 \text{ kg})(121 \text{ cm})}{7,1 \text{ kg}}$$

$$= 58 \text{ cm}. \quad (\text{Resposta})$$

A posição do centro de massa é definida pelo vetor \mathbf{r}_{cm} da Fig. 9-3.

EXEMPLO 9-2 Determine a posição do centro de massa da placa triangular homogênea que aparece na Fig. 9-4.

Solução A Fig. 9-4a mostra a placa dividida em fatias finas, paralelas a cada um dos três lados. Por razões de simetria, o centro de massa de uma fatia fina fica no ponto médio da fatia; assim, o centro de massa da placa deve ficar sobre a reta que liga os pontos médios de todas as fatias. Essa reta é a mesma que liga o vértice superior ao ponto médio do lado oposto. A placa ficaria em equilíbrio se fosse colocada sobre uma lâmina de faca de tal forma que os pontos de contato entre a lâmina e a placa coincidisse com essa reta de simetria.

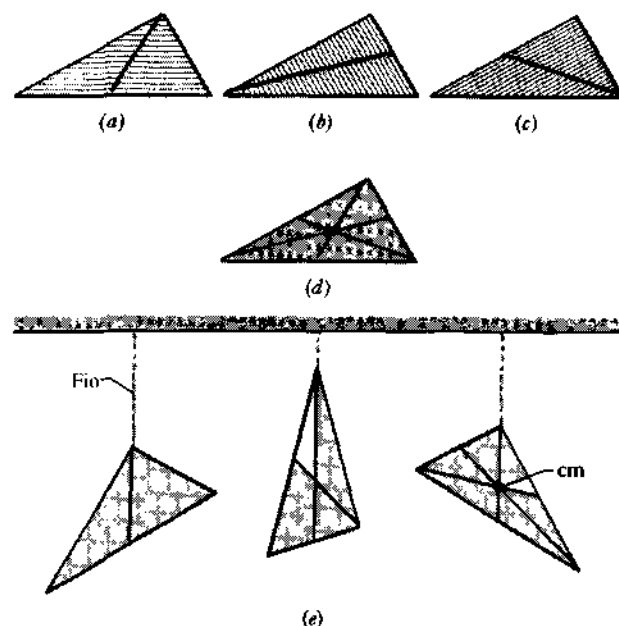


Fig. 9-4 Exemplo 9-2. Em (a), (b) e (c), o triângulo foi dividido em fatias finas, paralelas a cada um dos três lados. O centro de massa deve estar localizado sobre as retas bissetriz a tais paralelas. (d) O centro de massa está no ponto de interseção das três retas. (e) O centro de massa também pode ser determinado pendurando-se o triângulo pelos três vértices, um de cada vez.

Nas Figs. 9-4b e 9-4c, a placa foi dividida em fatias paralelas aos dois outros lados do triângulo. Mais uma vez, o centro de massa deve estar localizado sobre as retas indicadas, que ligam um dos vértices do triângulo ao ponto médio do lado oposto. Assim, o centro de massa da placa deve estar situado na interseção das três retas de simetria, como se pode ver na Fig. 9-4d. Este é o único ponto que as três retas têm em comum.

É possível verificar experimentalmente esta conclusão partindo da idéia intuitiva (e correta) de que um objeto suspenso por um ponto se orienta de tal forma que o seu centro de massa fica na mesma vertical que o ponto de suspensão. Suspenda o triângulo pelos três vértices, um de cada vez, e trace uma linha vertical a partir de cada ponto de suspensão, como indicado na Fig. 9-4e. O centro de massa do triângulo será o ponto de interseção das três linhas.

EXEMPLO 9-3 A Fig. 9-5(a) mostra uma placa de metal circular de raio $2R$ da qual foi removido um disco de raio R . Vamos chamar esta placa com um furo de objeto X . O centro de massa está indicado como um ponto sobre o eixo dos x . Determine a posição deste ponto.

Solução A Fig. 9-5b mostra o objeto X antes que o disco fosse removido. Chame o disco de objeto D e a placa original de objeto C . Por simetria, o centro de massa do objeto C fica na origem do sistema de coordenadas escolhido, como está indicado na figura.

Para determinar a localização do centro de massa de um objeto composto de várias partes, supomos que a massa de cada uma das partes está concentrada no centro de massa dessa parte. Assim, o objeto C pode ser considerado como equivalente a duas massas pontuais, que representam os objetos X e D . A Fig. 9-5c mostra as posições dos centros de massa dos três objetos.

De acordo com a Eq. 9-2, a posição do centro de massa do objeto C é dada por

$$x_C = \frac{m_D x_D + m_X x_X}{m_D + m_X},$$

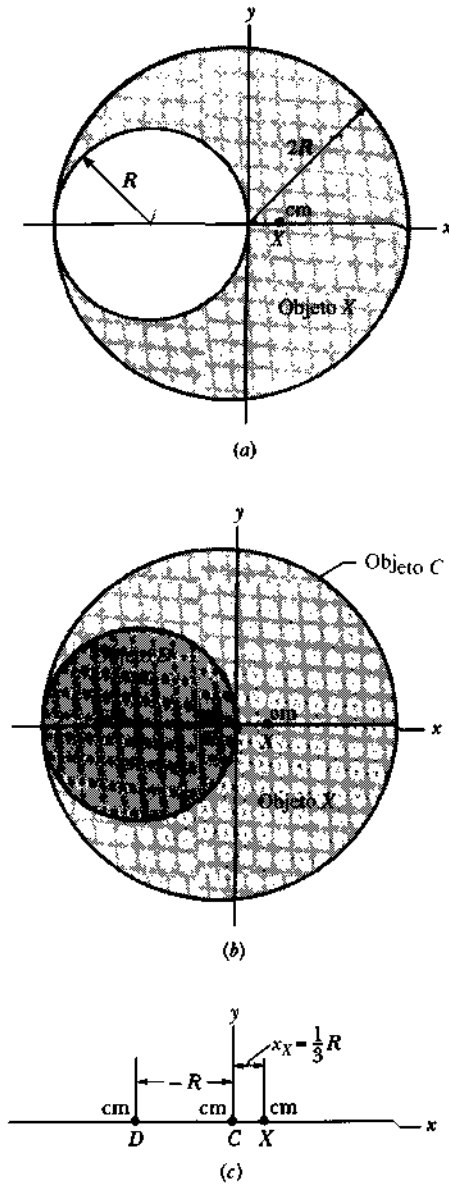


Fig. 9-5 Exemplo 9-3. (a) O objeto X é um disco de metal de raio $2R$ com um furo de raio R ; o seu centro de massa fica em x_X . (b) o objeto D é um disco de metal com a mesma posição e as mesmas dimensões que o furo do objeto X ; o seu centro de massa fica em $x_D \approx -R$. O objeto C é um objeto constituído pelos objetos X e D ; o seu centro de massa fica na origem do sistema de coordenadas. (c) Os centros de massa dos três objetos.

onde x_D e x_X são as posições dos centros de massa dos objetos D e X , respectivamente. Levando em conta o fato de que $x_C \approx 0$ e calculando o valor de x_X , temos:

$$x_X = -\frac{x_D m_D}{m_X} \quad (9-12)$$

Chamando de ρ a densidade (massa específica) do material de que é feita a placa e t a sua espessura, temos:

$$m_D = \pi R^2 \rho t \quad \text{e} \quad m_X = \pi (2R)^2 \rho t - \pi R^2 \rho t.$$

Com essas substituições e com $x_D = -R$, a Eq. 9-12 se torna

$$x_X = -\frac{(-R)(\pi R^2 \rho t)}{\pi (2R)^2 \rho t - \pi R^2 \rho t} = \frac{1}{3}R. \quad (\text{Resposta})$$

Observe que a densidade e a espessura da placa uniforme não aparecem na expressão final.

EXEMPLO 9-4 Silbury Hill (Fig. 9-6a), um monte de terra em uma planície perto de Stonehenge, foi construído há 4.600 anos por motivos desconhecidos, talvez para servir de cemitério. É um tronco de cone circular reto (Fig. 9-6b) de raios $r_1 = 16$ m e $r_2 = 88$ m e altura $h = 40$ m. Os lados do monte fazem um ângulo $\theta = 30^\circ$ com a horizontal.

a. Qual a posição do centro de massa do monte?

Solução Como o monte tem simetria circular, podemos dizer que o centro de massa está sobre o eixo do tronco de cone, a uma distância z_{cm} da base. Para determinar o valor de z_{cm} , usamos a terceira linha da Eq. 9-11. Podemos simplificar a integral levando em conta a simetria do monte. Para isso, consideramos uma “fatia” horizontal de espessura in-

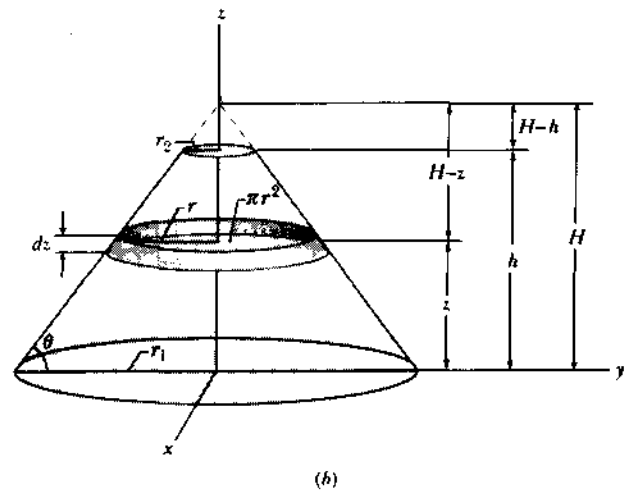
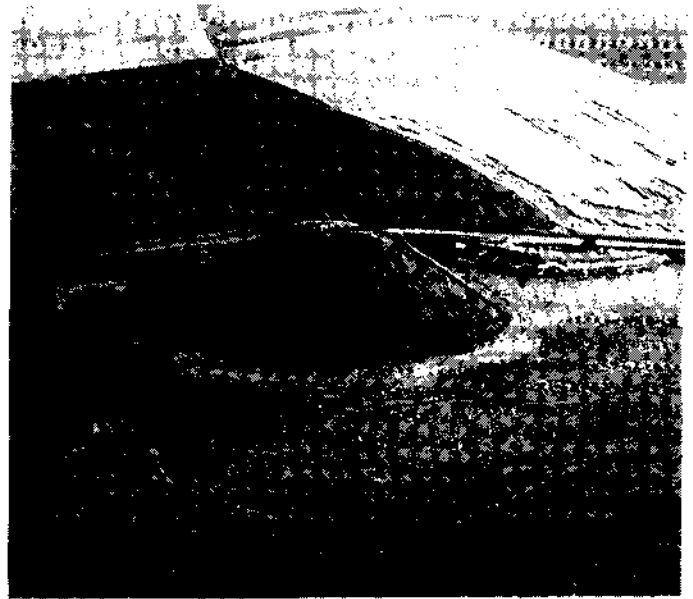


Fig. 9-6 Exemplo 9-4. (a) A construção de Silbury Hill, na Inglaterra, feita durante o período neolítico, exigiu cerca de $1,8 \times 10^7$ horas de trabalho. Sua finalidade é desconhecida. (b) Silbury Hill tem a forma aproximada de um tronco de cone circular reto. A figura mostra uma “fatia” de raio r e espessura dz a uma distância z da base.

finitesimal, como a mostrada na Fig. 9-6b. A fatia tem raio r , espessura dz , área πr^2 e está a uma distância z da base. O volume dV da fatia é dado por

$$dV = \pi r^2 dz. \quad (9-13)$$

O monte é constituído por uma pilha dessas fatias, cujos raios variam desde r_1 , na base do monte, até r_2 , no seu topo. Se o cone fosse completo, teria uma altura que chamamos de H na Fig. 9-6b. A relação entre r e H é dada por

$$\tan \theta = \frac{H}{r_1} = \frac{H-z}{r},$$

ou

$$r = (H-z) \frac{r_1}{H}. \quad (9-14)$$

Substituindo as Eqs. 9-13 e 9-14 na terceira linha da Eq. 9-11, temos:

$$\begin{aligned} z_{\text{cm}} &= \frac{1}{V} \int z dV = \frac{\pi r_1^2}{V H^2} \int_0^H z (H-z)^2 dz \\ &= \frac{\pi r_1^2}{V H^2} \int_0^H (z^3 - 2z^2 H + z H^2) dz \\ &= \frac{\pi r_1^2}{V H^2} \left[\frac{z^4}{4} - \frac{2z^3 H}{3} + \frac{z^2 H^2}{2} \right]_0^H \\ &= \frac{\pi r_1^2 H^4}{V H^2} \left[\frac{1}{4} - \frac{2H}{3H} + \frac{H^2}{2H^2} \right]. \end{aligned} \quad (9-15)$$

O volume de um cone circular reto é $\pi R^2 Z/3$, onde R é o raio da base e Z a altura. O cone completo da Fig. 9-6b tem uma altura $H = r_1 \tan 30^\circ = 50,8 \text{ m}$. Para calcular o volume do monte, subtraímos o volume de um cone cujo raio da base é r_2 e cuja altura é $(H-h)$ do volume de um cone cujo raio da base é r_1 , e cuja altura é H :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi r_1^2 H - \frac{1}{3} \pi r_2^2 (H-h) \\ &= \frac{1}{3} \pi [(88 \text{ m})^2 (50,8 \text{ m}) - (16 \text{ m})^2 (50,8 \text{ m} - 40 \text{ m})] \\ &= 4,091 \times 10^5 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Substituindo este e outros valores conhecidos na Eq. 9-15, temos:

$$\begin{aligned} z_{\text{cm}} &= \frac{\pi (88 \text{ m})^2 (40 \text{ m})^4}{(4,091 \times 10^5 \text{ m}^3) (50,8 \text{ m})^2} \\ &\times \left[\frac{1}{4} - \frac{2(50,8 \text{ m})}{3(40 \text{ m})} + \frac{(50,8 \text{ m})^2}{2(40 \text{ m})^2} \right] \\ &= 12,37 \text{ m} \approx 12 \text{ m}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Se a densidade do material de que é feito Silbury Hill é $\rho = 1,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, qual o trabalho necessário para construir o monte, supondo que todo o material utilizado se encontrava inicialmente na sua base?

Solução O trabalho usado para construir o monte é igual à energia potencial gravitacional U associada ao monte, que pode ser calculada supondo que toda a massa está concentrada no centro de massa. A massa do monte é dada por $m = \rho V$. Temos, então:

$$\begin{aligned} W = U &= mg z_{\text{cm}} = \rho V g z_{\text{cm}} \\ &= (1,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) (4,091 \times 10^5 \text{ m}^3) \\ &\times (9,8 \text{ m/s}^2) (12,37 \text{ m}) \\ &= 7,4 \times 10^{10} \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 1: PROBLEMAS DE CENTRO DE MASSA

Os Exemplos 9-1 a 9-3 apresentam três estratégias para simplificar problemas de centro de massa. (1) Fazer uso da simetria do objeto, seja ela pontual, axial ou planar. (2) Se o objeto puder ser dividido em várias partes, tratar cada uma dessas partes como uma partícula, localizada no centro de massa correspondente. (3) Tomar cuidado com a escolha dos eixos. Se o sistema é um grupo de partículas, a origem deve ficar na posição de uma das partículas. Se o sistema é um corpo com um eixo de simetria, o eixo de simetria deve ser tomado como eixo dos x . A escolha da origem do sistema é completamente arbitrária. A posição do centro de massa é independente do sistema de coordenadas escolhido, mas a escolha criteriosa do sistema de eixos pode simplificar consideravelmente a resolução do problema.

9-3 A Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

Quando você dá uma tacada na sinuca, atingindo com a bola branca uma bola parada, é natural esperar que o sistema de duas bolas apresente algum movimento “para a frente” após o impacto. Seria muito estranho, por exemplo, se as duas bolas recuassem, ou se ambas se movessem para a direita ou para a esquerda.

O que continua a se mover para a frente, com um movimento inafetado pela colisão, é o centro de massa das duas bolas. Se você der várias tacadas e prestar atenção no centro de massa — que, no caso de dois corpos de massas iguais, como duas bolas de sinuca, fica no ponto médio da reta que liga os dois corpos — verá que o que estamos afirmando é verdade. Não importa que a colisão seja frontal ou de raspão; em todos os casos, o centro de massa das duas bolas move-se numa continuação natural da trajetória da bola branca, como se a colisão jamais tivesse acontecido. Vamos examinar este fenômeno mais de perto.

Substituímos o par de bolas de sinuca por um conjunto de n partículas de massas (possivelmente) diferentes. Não estamos interessados no movimento individual dessas partículas, mas apenas no movimento do seu centro de massa. Embora o centro de massa seja apenas um ponto imaginário, move-se como uma partícula cuja massa é igual à massa total do sistema; podemos associar uma posição, uma velocidade e uma aceleração a essa “partícula”. Como será demonstrado daqui a pouco, a equação que rege o movimento do centro de massa de um sistema de partículas é a seguinte:

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = M \mathbf{a}_{\text{cm}} \quad (\text{sistemas de partículas}) \quad (9-16)$$

A Eq. 9-16 nada mais é que a segunda lei de Newton aplicada ao centro de massa de um sistema de partículas. Observe que conserva a mesma forma ($\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$) que a equação que rege o movimento de uma única partícula. Para aplicar a Eq. 9-16 a casos concretos, é necessário interpretar com cuidado as três grandezas que aparecem na equação:

1. $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}}$ é a soma *vetorial* de *todas* as forças *externas* que agem sobre o sistema. As forças exercidas por uma parte do sistema sobre outra são chamadas de *forças internas* e não devem ser incluídas na Eq. 9-16.

2. M é a *massa total* do sistema. Estamos supondo que não há entrada nem saída de massa no sistema durante o movimento das partículas, de modo que M permanece constante. Nesse caso, dizemos que o sistema é **fechado**.

3. \mathbf{a}_{cm} é a aceleração do *centro de massa* do sistema. A Eq. 9-16 não fornece nenhuma informação a respeito da aceleração de outros pontos do sistema.

A Eq. 9-16, como todas as equações vetoriais, é equivalente a três equações escalares que envolvem as componentes de $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}}$ e \mathbf{a}_{cm} em relação aos três eixos do sistema de coordenadas. Essas equações são as seguintes:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{\text{ext},x} &= Ma_{\text{cm},x} \\ \Sigma F_{\text{ext},y} &= Ma_{\text{cm},y} \\ \Sigma F_{\text{ext},z} &= Ma_{\text{cm},z}\end{aligned}\quad (9-17)$$

Podemos agora investigar o comportamento das bolas de sinuca. Enquanto a bola branca está se movendo, nenhuma força externa age sobre o sistema de duas bolas. De acordo com a Eq. 9-16, $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ implica $\mathbf{a}_{\text{cm}} = 0$. Como aceleração é a mesma coisa que taxa de variação da velocidade, chegamos à conclusão de que a velocidade do centro de massa das duas bolas não pode variar. Quando as duas bolas se chocam, as forças envolvidas são *internas*, exercidas pelas bolas uma sobre a outra. Essas forças não contribuem para $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}}$, que continua igual a zero. Assim, o centro de massa do sistema, que estava se movendo antes da colisão, continua a se mover depois da colisão, na mesma direção, no mesmo sentido e com a mesma velocidade.

Considere agora outro exemplo de sistema constituído por dois corpos, a Terra (de massa m_T) e a Lua (de massa

m_L). Ao contrário do que acontece com as bolas de sinuca, *existe* uma força externa agindo sobre o sistema, a força de atração gravitacional do Sol. De acordo com a Eq. 9-16, o centro de massa do sistema Terra-Lua se move sob a influência da força gravitacional do Sol como se uma única partícula de massa $m_T + m_L$ se encontrasse nessa posição, sob o efeito da força gravitacional do Sol. Como a Terra e a Lua giram em torno do centro de massa, que por sua vez está se movendo em torno do Sol, elas descrevem trajetórias onduladas, como se pode ver na Fig. 9-7.

A Eq. 9-16 se aplica não só a sistemas de partículas mas também a corpos sólidos, como o machado da Fig. 9-1b. Nesse caso, M da Eq. 9-16 é a massa do machado e $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}}$ é o peso $M\mathbf{g}$ do machado. De acordo com a Eq. 9-16, $\mathbf{a}_{\text{cm}} = \mathbf{g}$. Em outras palavras, o centro de massa do machado se move como se fosse uma única partícula de massa M .

A Fig. 9-8 mostra outro caso interessante. Suponha que um fogo de artifício seja lançado em uma trajetória parabólica. A certa altura, explode em fragmentos. Se a explosão não tivesse ocorrido, seguiria a trajetória indicada na figura por uma linha tracejada. As forças da explosão são *internas* ao sistema, isto é, são exercidas por partes do sistema sobre outras partes do mesmo sistema. Se ignorarmos a resistência do ar, a força *externa* total $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}}$ que age sobre o sistema será apenas o peso $M\mathbf{g}$ do sistema, que é o mesmo antes e depois da explosão. Assim, de acordo com a Eq. 9-16, a aceleração do centro de massa dos fragmentos (enquanto não se chocam com o solo) permanece igual à \mathbf{g} e este ponto segue a mesma trajetória parabólica que o fogo de artifício teria seguido se não tivesse explodido.

Quando uma bailarina executa um *grand jeté*, levanta os braços e estica as pernas horizontalmente assim que os pés deixam o chão (Fig. 9-9). Com isso, o centro de massa se desloca para cima em relação ao tronco da bailarina. Embora o centro de massa continue a descrever uma trajetória parabólica, esse deslocamento faz com que a cabeça e o tronco da bailarina atinjam uma altura menor do que em um salto normal. O resultado é que a cabeça e o tronco descrevem uma trajetória quase horizontal.

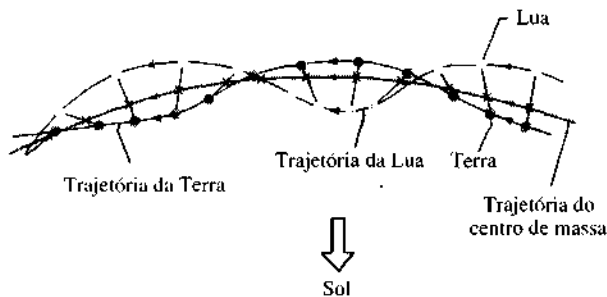


Fig. 9-7 A atração gravitacional do Sol é uma força externa que age sobre o sistema Terra-Lua. O centro de massa deste sistema descreve uma órbita simples em torno do Sol, como se toda a massa estivesse concentrada neste ponto. A Terra e a Lua seguem trajetórias onduladas, como se pode ver na figura, onde os pontos representam os centros da Terra e da Lua e os "X" o centro de massa do sistema. (Na verdade, o centro de massa fica no interior da Terra, de modo que as oscilações do movimento da Terra são muito menores do que a figura dá a entender.)

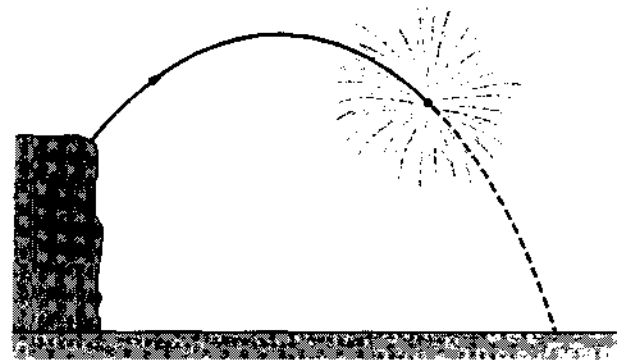


Fig. 9-8 Um fogo de artifício explode em pleno voo. Na ausência de atrito com o ar, o centro de massa dos fragmentos continuaria a seguir a trajetória parabólica original até que os primeiros fragmentos atingissem o solo.



Fig. 9-9 Um grand jeté. (Adaptado de *The Physics of Dance*, de Kenneth Laws, Schirmer Books, 1984.)

Demonstração da Equação 9-16

Vamos agora demonstrar esta importante equação. De acordo com a Eq. 9-8, temos, para um sistema de n partículas,

$$M\mathbf{r}_{cm} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 + \cdots + m_n\mathbf{r}_n, \quad (9-18)$$

onde M é a massa total do sistema e \mathbf{r}_{cm} é o vetor que indica a posição do centro de massa.

Derivando a Eq. 9-18 em relação ao tempo, temos:

$$M\mathbf{v}_{cm} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 + \cdots + m_n\mathbf{v}_n. \quad (9-19)$$

onde $\mathbf{v}_1 (= d\mathbf{r}_1/dt)$ é a velocidade da primeira partícula, e assim por diante, e $\mathbf{v}_{cm} (= d\mathbf{r}_{cm}/dt)$ é a velocidade do centro de massa.

Derivando a Eq. 9-19 em relação ao tempo, temos:

$$M\mathbf{a}_{cm} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3 + \cdots + m_n\mathbf{a}_n. \quad (9-20)$$

Onde $\mathbf{a}_1 (= d\mathbf{v}_1/dt)$ é a aceleração da primeira partícula, e assim por diante, e $\mathbf{a}_{cm} (= d\mathbf{v}_{cm}/dt)$ é a aceleração do centro de massa. Embora o centro de massa seja apenas um ponto geométrico, possui uma posição, uma velocidade e uma aceleração, como se fosse uma partícula.

De acordo com a segunda lei de Newton, $m_1\mathbf{a}_1$ é a força resultante \mathbf{F}_1 que age sobre a primeira partícula, e assim por diante. Podemos portanto reescrever a Eq. 9-20 na forma

$$M\mathbf{a}_{cm} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots + \mathbf{F}_n. \quad (9-21)$$

Entre as forças que aparecem no lado direito da Eq. 9-21 estão forças que as partículas do sistema exercem umas sobre as outras (forças internas) e forças exercidas sobre as partículas do sistema por partículas que não pertencem ao sistema (forças externas). De acordo com a terceira lei de Newton, as forças internas formam pares do tipo ação e reação e se cancelam mutuamente na soma que aparece do lado direito da Eq. 9-21. O que resta é a soma vetorial de todas as forças externas que agem sobre o sistema. A Eq.

9-21 se reduz portanto à Eq. 9-16, a equação que nos propusemos a demonstrar.

EXEMPLO 9-5 Uma bola de massa m e raio R é colocada no interior de uma casca esférica com a mesma massa m e raio interno $2R$. O sistema está em repouso sobre uma mesa na posição indicada na Fig. 9-10a. A bola é liberada, balança várias vezes para um lado e para outro e finalmente se imobiliza na parte inferior da casca esférica, como na Fig. 9-10c. Qual o deslocamento d da casca esférica durante o processo?

Solução As únicas forças externas que agem sobre o sistema são o peso do sistema e a força normal exercida pela mesa. Como nenhuma dessas forças tem componente horizontal, $\sum F_{ext,x} = 0$. De acordo com a Eq. 9-17, a componente da aceleração $\mathbf{a}_{cm,x}$ do centro de massa do sistema também deve ser zero. Como a velocidade inicial é zero, a posição horizontal do centro de massa do sistema não pode variar durante o processo.

Podemos representar a bola e a casca esférica como partículas de massa m , localizadas nos respectivos centros de massa. A Fig. 9-10b mostra o sistema antes de a bola ser liberada e a Fig. 9-10d a situação final, depois que a bola está em repouso na parte inferior da casca esférica. Escolhemos a origem para que coincida com a posição inicial do centro da casca esférica. A Fig. 9-10b mostra que, em relação a esta origem, o centro de massa do sistema está localizado inicialmente a uma distância $R/2$ para a esquerda, na metade da distância entre as duas partículas (lembre-se de que ambas possuem a mesma massa m). Quando o sistema volta ao repouso, os centros de massa da bola e da casca esférica possuem a mesma coordenada horizontal que o centro de massa do sistema. Assim, como se pode ver na Fig. 9-10d, a casca esférica deve se mover para a esquerda de uma distância

$$d = \frac{1}{2}R \quad (\text{Resposta})$$

para que o centro de massa se mantenha estacionário em relação à horizontal.

EXEMPLO 9-6 A Fig. 9-11a mostra um sistema de três partículas, cada uma submetida a uma força externa diferente e todas inicialmente em repouso. Qual a aceleração do centro de massa deste sistema?

Solução A posição do centro de massa, calculada utilizando-se o método do Exemplo 9-1, está indicada na figura por um ponto. Como mostra a Fig. 9-11(b), tratamos este ponto como se fosse uma partícula real.

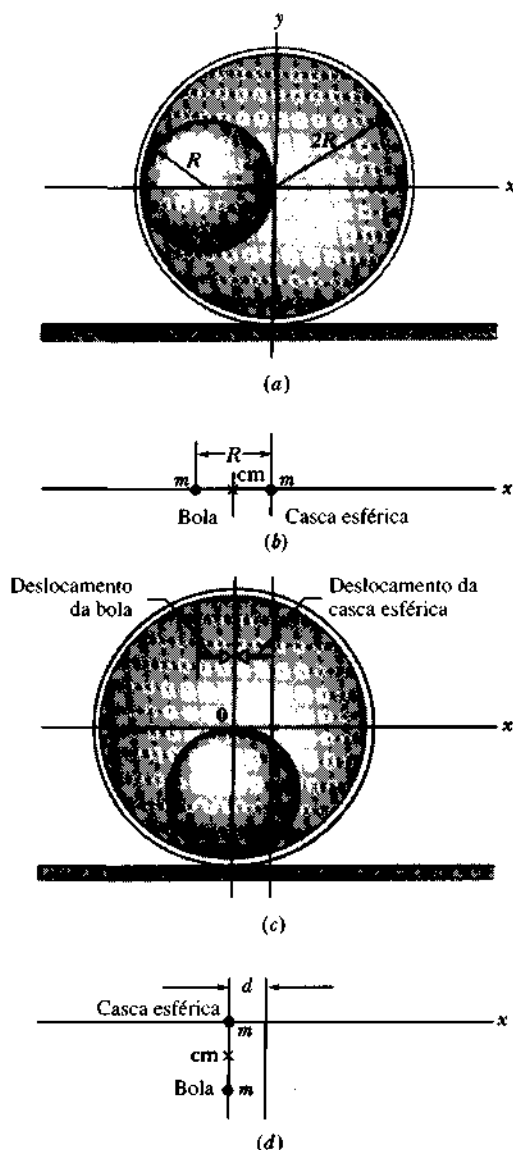


Fig. 9-10 Exemplo 9-5. (a) Uma bola de raio R é liberada a partir desta posição inicial e rola sem atrito no interior de uma casca esférica de raio $2R$. (b) Os centros de massa da bola, da casca esférica e do sistema constituído pelos dois corpos. (c) O estado final, depois que a bola volta ao repouso. A casca esférica deve se mover de tal forma que a coordenada horizontal do centro de massa do sistema não se modifique. (d) Os centros de massa da bola, da casca esférica e do sistema constituído pelos dois corpos possuem agora a mesma coordenada horizontal.

atribuindo a ele uma massa M igual à massa total do sistema (16 kg) e supondo que todas as forças externas sejam aplicadas a esse ponto.

A componente x da força externa resultante ΣF_{ext} que age sobre o centro de massa é dada por

$$\begin{aligned}\Sigma F_{\text{ext},x} &= 14 \text{ N} - 6,0 \text{ N} + (12 \text{ N})(\cos 45^\circ) \\ &= 16,5 \text{ N},\end{aligned}$$

e a componente Y é dada por

$$\Sigma F_{\text{ext},y} = (12 \text{ N})(\sin 45^\circ) = 8,49 \text{ N}.$$

A força externa resultante tem portanto um módulo

$$\Sigma F_{\text{ext}} = \sqrt{(16,5 \text{ N})^2 + (8,49 \text{ N})^2} = 18,6 \text{ N}$$

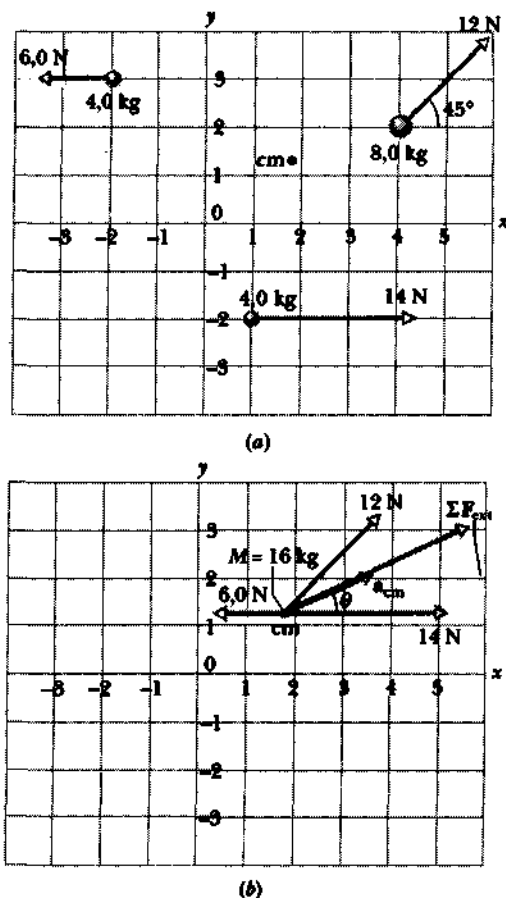


Fig. 9-11 Exemplo 9-6. (a) Três partículas, inicialmente em repouso nas posições indicadas, são submetidas a forças externas. O centro de massa do sistema está indicado na figura. (b) As forças são transferidas para o centro de massa do sistema, que se comporta como uma partícula cuja massa M é igual à massa total do sistema. A força resultante e a aceleração do centro de massa estão indicadas na figura.

e faz um ângulo com o eixo dos x dado por

$$\begin{aligned}\theta &= \tan^{-1} \frac{8,49 \text{ N}}{16,5 \text{ N}} = \tan^{-1} 0,515 \\ &= 27^\circ.\end{aligned}\quad (\text{Resposta})$$

Esta também é a direção do vetor aceleração a_{cm} do centro de massa. De acordo com a Eq. 9-16, o módulo de a_{cm} é dado por

$$\begin{aligned}a_{\text{cm}} &= \frac{\Sigma F_{\text{ext}}}{M} = \frac{18,6 \text{ N}}{16 \text{ kg}} = 1,16 \text{ m/s}^2 \\ &\approx 1,2 \text{ m/s}^2.\end{aligned}\quad (\text{Resposta})$$

As três partículas da Fig. 9-11a e o centro de massa do sistema se movem com acelerações diferentes. Cada partícula se move em linha reta (com velocidade cada vez maior) na direção da força que age sobre ela. O centro de massa, por sua vez, se move na direção de a_{cm} .

9-4 Momento Linear*

Momento é outra dessas palavras que possuem vários significados na linguagem do dia-a-dia mas apenas um signi-

*Veja a nota de rodapé da Seção 10-1, onde se comenta a tradução da expressão *linear momentum*. (N. do R.)

ficado preciso na física. O momento linear de uma partícula é um vetor \mathbf{p} definido através da equação

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (\text{momento linear de uma partícula}), \quad (9-22)$$

onde m é a massa da partícula e \mathbf{v} a sua velocidade. (O adjetivo *linear* é muitas vezes omitido, mas serve para distinguir \mathbf{p} do momento *angular*, que será definido no Cap. 12.) Observe que como m é uma grandeza escalar positiva, \mathbf{p} e \mathbf{v} , de acordo com a Eq. 9-22, têm sempre a mesma direção e o mesmo sentido.

Na verdade, Newton formulou a sua segunda lei em termos de momento:

A taxa de variação do momento de uma partícula é proporcional à resultante das forças que agem sobre a partícula e tem a mesma direção e o mesmo sentido que essa força.

Quando expressa em forma de equação, esta lei se torna:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (9-23)$$

Substituindo \mathbf{p} pelo seu valor, dado pela Eq. 9-22, temos:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

Assim, as relações $\sum \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ e $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ são expressões equivalentes da segunda lei de Newton quando aplicadas ao movimento de uma única partícula na mecânica clássica.

O Momento em Altas Velocidades

Para partículas que se movem com velocidades próximas às da luz, os resultados experimentais não estão de acordo com as previsões da mecânica newtoniana. Nesse caso, temos que usar a teoria da relatividade especial de Einstein. Nessa teoria, a relação $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ continua a ser válida, *contanto* que o momento de uma partícula não seja definido como $m\mathbf{v}$, mas como

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (9-24)$$

onde c é a velocidade da luz.

As velocidades de objetos de dimensões macroscópicas como bolas de futebol, balas de revólver e naves espaciais são tão menores que a velocidade da luz, que a grandeza $(v/c)^2$ na Eq. 9-24 é muito menor do que a unidade. Nesse caso, a Eq. 9-24 é equivalente à Eq. 9-22 e a teoria da relatividade conduz aos mesmos resultados que a mecânica newtoniana. No caso de elétrons e outras partículas subatômicas, porém, velocidades próximas às da luz são muito frequentes e a definição da Eq. 9-24 deve ser usada, mesmo em problemas rotineiros de engenharia, como o projeto de aceleradores de partículas.

9-5 O Momento Linear de um Sistema de Partículas

Considere agora um sistema de n partículas, cada uma com sua massa, velocidade e momento linear. As partículas podem interagir umas com as outras e podem também estar sujeitas a forças externas. O sistema como um todo possui um momento linear total \mathbf{P} , definido como a soma vetorial dos momentos lineares de todas as partículas. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \cdots + \mathbf{p}_n \\ &= m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 + \cdots + m_n\mathbf{v}_n. \end{aligned} \quad (9-25)$$

Comparando esta equação com a Eq. 9-19, vemos que

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{cm} \quad (\text{momento linear sistema de partículas}), \quad (9-26)$$

o que nos permite definir de outra forma o momento linear de um sistema de partículas:

O momento linear de um sistema de partículas é igual ao produto da massa total M do sistema pela velocidade do seu centro de massa.

Derivando a Eq. 9-26 em relação ao tempo, temos:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = M\mathbf{a}_{cm}. \quad (9-27)$$

Comparando as Eqs. 9-16 e 9-27, vemos que é possível escrever a segunda lei de Newton para um sistema de partículas na forma equivalente

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (9-28)$$

A Eq. 9-28 é a generalização da equação $\sum \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ para um sistema com mais de uma partícula. A Tabela 9-1 mostra algumas relações importantes que são válidas para partícula única e sistemas de partículas.

9-6 Conservação do Momento Linear

Suponha que a soma das forças externas que agem sobre um sistema de partículas seja zero (isto é, o sistema seja isolado) e que o número de partículas que compõem o sistema seja constante (isto é, o sistema seja fechado). Fazendo $\sum \mathbf{F}_{ext} = 0$ na Eq. 9-28, temos $d\mathbf{P}/dt = 0$, ou seja:

$$\mathbf{P} = \text{constante} \quad (\text{sistema isolado e fechado}) \quad (9-29)$$

Este importante resultado, chamado **lei de conservação do momento linear**, também pode ser escrito na forma

Tabela 9-1
Algumas Definições e Leis da Mecânica Clássica

Lei ou Definição	Partícula Única	Sistema de Partículas
Segunda lei de Newton	$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$	$\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = M\mathbf{a}_{\text{cm}}$ (9-16)
Momento linear	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (9-22)	$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\text{cm}}$ (9-26)
Segunda lei de Newton	$\Sigma \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ (9-23)	$\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = d\mathbf{P}/dt$ (9-28)
Teorema do trabalho-energia cinética	$W = \Delta K$	

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f \quad (\text{sistema isolado e fechado}), \quad (9-30)$$

onde os índices se referem aos valores de \mathbf{P} em um certo instante inicial e em um instante subsequente. De acordo com as Eqs. 9-29 e 9-30, se nenhuma força externa agir sobre um sistema de partículas, o momento linear total do sistema permanecerá constante.

Como a lei da conservação da energia, discutida no Cap. 8, a lei de conservação do momento linear é mais geral do que a própria mecânica newtoniana; continua a ser válida no domínio das partículas subatômicas, onde as leis de Newton não mais se aplicam. Continua a ser válida quando as partículas possuem velocidades elevadas e a teoria da relatividade de Einstein deve ser utilizada, isto é, quando a Eq. 9-24 e não a Eq. 9-22 deve ser usada para calcular o momento linear.

Analisando a Eq. 9-26 ($\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\text{cm}}$), vemos que, se \mathbf{P} é constante, então \mathbf{v}_{cm} , a velocidade do centro de massa, também deve ser constante. Isto, por sua vez, significa que \mathbf{a}_{cm} , a aceleração do centro de massa, deve ser igual a zero, o que está de acordo com a Eq. 9-16, ($\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = M\mathbf{a}_{\text{cm}}$) quando $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$. Assim, a lei da conservação do momento linear está de acordo com as duas formas da segunda lei de Newton para sistemas de partículas que aparecem na Tabela 9-1.

As Eqs. 9-29 e 9-30 são equações vetoriais e, portanto, equivalem a três equações escalares correspondentes à conservação do momento linear em três direções perpendiculares entre si. Dependendo das forças que agem sobre o sistema, o momento linear pode ser conservado em uma ou duas direções, mas não em todas.

Suponha, por exemplo, que você chute uma bola pelo alto. Enquanto a bola está se movendo, a única força externa que age sobre ela (supondo que o atrito com o ar possa ser desprezado) é o peso $m\mathbf{g}$, dirigido verticalmente para baixo. Nessa situação, o momento linear da bola na direção vertical varia com o tempo, mas como a bola não está sendo submetida a nenhuma força horizontal, o momento linear na direção horizontal permanece constante.

EXEMPLO 9-7 Uma série de balas, todas de massa $m = 3,8$ g, é disparada horizontalmente, com velocidade $v = 1.100$ m/s, contra um bloco de madeira de massa $M = 12$ kg que se encontra inicialmente em repouso sobre uma mesa horizontal (Fig. 9-12). Desprezando o atrito do bloco com a mesa, qual a sua velocidade depois de ser atingido por oito balas?

Solução Para que o nosso sistema seja fechado, deve incluir tanto o bloco como as oito balas (veja a Fig. 9-12).

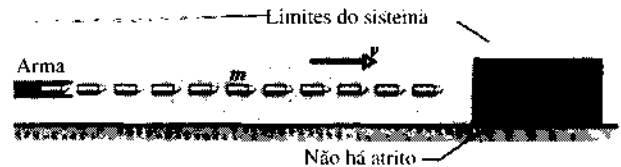


Fig. 9-12 Exemplo 9-7. Uma arma dispara uma série de balas na direção de um bloco de madeira. O sistema ao qual aplicamos a lei de conservação do momento linear está indicado na ilustração. O sistema é constituído pelo bloco e oito balas.

O sistema não está isolado, porque se encontra sob a influência de várias forças externas: as balas e bloco têm peso e a mesa que sustenta o bloco exerce uma força normal sobre ele. Entretanto, todas essas forças são verticais e portanto não podem mudar os momentos horizontais das balas e do bloco nem o momento horizontal do sistema como um todo. Não existe nenhuma força horizontal externa aplicada; as forças envolvidas nas colisões entre as balas e o bloco são *forças internas* e não podem, pois, mudar o momento horizontal do sistema.

Já que não existe nenhuma força capaz de mudar o momento horizontal do sistema, podemos aplicar a lei de conservação do momento linear (Eq. 9-30) na direção de movimento das balas. O momento linear horizontal inicial, medido enquanto as balas ainda não se chocaram com o bloco* e, portanto, em repouso, é dado por

$$P_i = n(mv),$$

onde mv é o momento linear de uma das balas e $n = 8$. O momento linear horizontal final, medido depois que todas as balas ficaram encravadas no bloco e este está se movendo sobre a mesa com velocidade V é dado por

$$P_f = (M + nm)V.$$

De acordo com a lei de conservação do momento linear, devemos ter

$$P_i = P_f$$

ou

$$n(mv) = (M + nm)V.$$

Calculando o valor de V , temos:

$$\begin{aligned} V &= \frac{nm}{M + nm} v \\ &= \frac{(8)(3,8 \times 10^{-3} \text{ kg})}{12 \text{ kg} + (8)(3,8 \times 10^{-3} \text{ kg})} (1.100 \text{ m/s}) \\ &= 2,8 \text{ m/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

*Para simplificar, estamos supondo que os tiros foram disparados em rápida sucessão, de modo que a oitava bala deixou a arma antes que a primeira atingisse o alvo. (Esta hipótese não tem nenhuma influência sobre o resultado final.)

Com a escolha do sistema que foi feita, não foi necessário considerar os detalhes de como as balas atingiram o bloco. As forças envolvidas nestas colisões são todas internas.

EXEMPLO 9-8 Um canhão de massa $M = 1.300 \text{ kg}$ (Fig. 9-13) dispara uma bala de massa $m = 72 \text{ kg}$ na horizontal com uma velocidade $v = 55 \text{ m/s}$ em relação ao canhão, que recua (sem atrito) com uma velocidade V em relação à Terra.

a. Qual o valor de V ?

Solução Tomamos nosso sistema como constituído pelo canhão mais a bala. Fazendo isso, asseguramos que as forças envolvidas no disparo sejam internas ao sistema, e portanto possam ser ignoradas. As forças externas que agem sobre o sistema não têm componentes na direção horizontal. Assim, a componente horizontal do momento linear total do sistema deve ser a mesma antes e depois de o canhão ser disparado.

Escolhemos um eixo fixo em relação à Terra como referência e supomos que as velocidades são positivas quando estão dirigidas para a direita na Fig. 9-13. Como todas as velocidades que aparecem na figura são horizontais, podem ser representadas pelos seus respectivos valores escalares, usando-se o sinal negativo se o movimento for da direita para a esquerda. Assim, a velocidade v é representada por v . Embora a Fig. 9-13 mostre o vetor V apontando para a esquerda, não conhecemos de antemão o sentido de V , de modo que o representamos por V , que pode ser positivo ou negativo.

A velocidade da bala em relação à Terra é v_T , que representamos por v_T . A velocidade da bala em relação ao canhão é igual à diferença entre a velocidade da bala em relação à Terra e a velocidade do canhão em relação à Terra. Assim,

$$v = v_T - V,$$

ou

$$v_T = v + V. \quad (9-31)$$

Antes de o canhão ser disparado, o sistema possui um momento linear P_i igual a zero. Depois que o canhão é disparado, o sistema possui um momento linear horizontal P_f que, de acordo com a Eq. 9-31, é dado por

$$P_f = MV_T + mv = MV + m(v + V),$$

onde o primeiro termo do lado direito é o momento linear do canhão depois de sofrer o recuo e o segundo é o momento linear da bala.

De acordo com a lei de conservação do momento linear na direção horizontal, devemos ter $P_i = P_f$ ou

$$0 = MV + m(v + V)$$

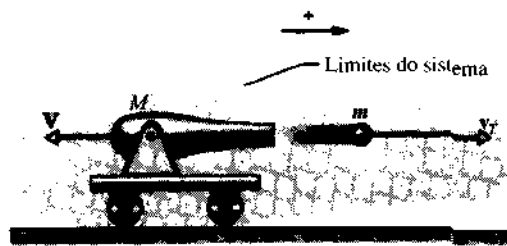


Fig. 9-13 Exemplo 9-8. Um canhão de massa M dispara uma bala de massa m . A bala tem uma velocidade v_T em relação à Terra e uma velocidade v em relação ao canhão. O canhão, depois de sofrer o recuo, adquire uma velocidade V em relação à Terra. A seta mostra o sentido que foi tomado como positivo para todas as velocidades.

Calculando o valor de V , temos:

$$V = -\frac{mv}{M + m} = -\frac{(72 \text{ kg})(55 \text{ m/s})}{1.300 \text{ kg} + 72 \text{ kg}} = -2,9 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

O sinal negativo mostra que o recuo faz com que o canhão se mova da direita para a esquerda, como era de se esperar.

b. Qual o valor de v_T ?

Solução De acordo com a Eq. 9-31, temos:

$$v_T = v + V = 55 \text{ m/s} + (-2,9 \text{ m/s}) = 52 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

Por causa do recuo do canhão, a bala se move um pouco mais devagar em relação à Terra do que em relação ao canhão.

Observe que neste problema é importante escolher corretamente o sistema (canhão + bala) e especificar com clareza a referência (Terra ou canhão) em relação à qual são medidas as várias velocidades.

EXEMPLO 9-9 Uma espaçonave de massa M está viajando no espaço com uma velocidade $v_i = 2.100 \text{ km/h}$ em relação ao Sol. Em um determinado instante, ejeta para trás um estágio auxiliar de massa $0,20M$ com uma velocidade relativa $u = 500 \text{ km/h}$. Qual a velocidade da espaçonave depois que o estágio é ejetado?

Solução Vamos tomar o sistema como constituído pela espaçonave mais o estágio auxiliar e supor que a velocidade é positiva quando seu sentido é o mesmo em que a espaçonave está se movendo. Como o sistema é fechado e isolado, o momento linear é conservado, ou seja:

$$P_i = P_f, \quad (9-32)$$

onde os índices i e f se referem aos valores antes e depois da ejeção, respectivamente. Antes da ejeção, temos

$$P_i = Mv_i. \quad (9-33)$$

Seja U a velocidade do estágio ejetado e v_f a velocidade da espaçonave depois da ejeção, ambas medidas em relação ao Sol. O momento linear total do sistema depois da ejeção é dado por

$$P_f = 0,20MU + 0,80Mv_f, \quad (9-34)$$

onde o primeiro termo do lado direito é o momento linear do estágio e o segundo é o momento linear da espaçonave.

A velocidade relativa u do estágio ejetado é igual à diferença entre as velocidades da espaçonave e do estágio:

$$u = v_f - U,$$

ou

$$U = v_f - u.$$

Substituindo esta última expressão na Eq. 9-34 e substituindo as Eqs. 9-33 e 9-34 na Eq. 9-32, temos:

$$Mv_i = 0,20M(v_f - u) + 0,80Mv_f,$$

o que nos dá

$$v_f = v_i + 0,2u,$$

ou

$$v_f = 2100 \text{ km/h} + (0,2)(500 \text{ km/h}) \\ = 2200 \text{ km/h.} \quad (\text{Resposta})$$

EXEMPLO 9-10 A Fig. 9.14 mostra dois blocos ligados por uma mola e apoiados em uma superfície horizontal sem atrito. Os blocos, de massas m_1 e m_2 , são afastados e depois liberados sem velocidade inicial. Qual é a fração da energia cinética total em cada bloco depois que eles são liberados?

Solução Tomamos os dois blocos e a mola como o nosso sistema e a superfície horizontal onde estão apoiados como referência. Supomos que as velocidades são positivas quando os blocos se movem da esquerda para a direita (Fig. 9-14).

O momento P_i do sistema antes que os blocos sejam liberados é zero. O momento P_f depois que os blocos são liberados é dado por

$$P_f = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades dos blocos. De acordo com a lei de conservação do momento, devemos ter $P_i = P_f$ ou

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Assim, temos

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1} \quad (9-35)$$

O sinal negativo indica que as duas velocidades têm sempre sentidos opostos. A Eq. 9-35 é válida para qualquer instante depois que os blocos são liberados, sejam quais forem suas velocidades nesse momento.

As energias cinéticas dos dois blocos são $K_1 = m_1 v_1^2/2$ e $K_2 = m_2 v_2^2/2$ e a fração que queremos calcular, para o bloco de massa m_1 , é dada por

$$\text{frac}_1 = \frac{K_1}{K_1 + K_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}. \quad (9-36)$$

De acordo com a Eq. 9-35, $-v_2 = -v_1(m_1/m_2)$. Substituindo v_2 por seu valor na Eq. 9-36, obtemos, depois de algumas simplificações,

$$\text{frac}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (\text{Resposta}) \quad (9-37)$$

Da mesma forma, para o bloco de massa m_2 ,

$$\text{frac}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (\text{Resposta}) \quad (9-38)$$

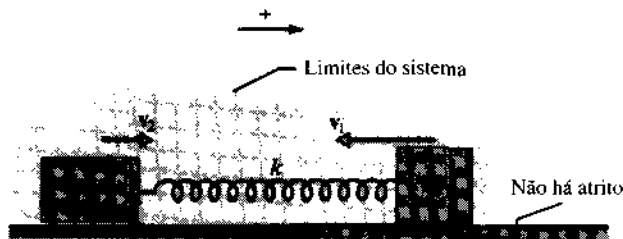


Fig. 9-14 Exemplo 9-10. Dois blocos apoiados em uma superfície sem atrito foram afastados e depois liberados sem velocidade inicial. A soma vetorial dos momentos lineares dos blocos na direção horizontal permanece nula no movimento subsequente. Os limites do sistema estão indicados na ilustração. A seta mostra o sentido que foi tomado como positivo para todas as velocidades.

Assim, a divisão de energia cinética entre os dois blocos é independente do tempo, com o bloco de menor massa recebendo a maior fração da energia cinética. Se, por exemplo, $m_2 = 10m_1$, temos:

$$\text{frac}_1 = \frac{10m_1}{m_1 + 10m_1} = 0,91$$

e

$$\text{frac}_2 = \frac{m_1}{m_1 + 10m_1} = 0,09.$$

Se $m_2 \gg m_1$, então, de acordo com as Eqs. 9-37 e 9-38, $\text{frac}_1 \approx 100\%$ e $\text{frac}_2 \approx 0$, isto é, praticamente toda a energia cinética se concentrará no bloco de massa menor.

As Eqs. 9-37 e 9-38 também podem ser aplicadas a uma pedra que cai. Nesse caso, m_2 é a massa da Terra, m_1 é a massa da pedra e a mola da Fig. 9-14 é substituída pela força gravitacional (atrativa) entre a Terra e a pedra. O melhor sistema de coordenadas para este problema é um sistema para o qual o centro de massa do sistema pedra-Terra esteja em repouso. Neste sistema, a pedra fica com praticamente toda a energia cinética ($\text{frac}_1 \approx 1$) e a energia cinética da Terra é praticamente zero ($\text{frac}_2 \approx 0$). De acordo com a Eq. 9-35, porém, vemos que os momentos lineares da pedra e da Terra permanecem constantes durante o movimento; a pequena velocidade v que a Terra adquire é compensada por sua gigantesca massa.

EXEMPLO 9-11 Uma bomba explode no interior de um coco de massa M , inicialmente em repouso em um piso sem atrito, quebrando-o em três pedaços, que são arremessados horizontalmente. A Fig. 9-15 mostra os pedaços vistos de cima. O pedaço C, com uma massa de $0,30M$, tem uma velocidade $v_{jc} = 5,0 \text{ m/s}$. (O índice f se refere à velocidade final do fragmento.)

a. Qual a velocidade do fragmento B, de massa $0,20M$?

Solução Escolhemos o sistema de coordenadas xy que aparece na Fig. 9-15b, com o semi-eixo negativo dos x coincidindo com v_{ja} . O eixo dos x faz um ângulo de 80° com v_{jc} e um ângulo de 50° com v_{jb} .

O momento linear do coco (e seus fragmentos) é conservado tanto na direção do eixo dos x como na direção do eixo dos y porque as forças envolvidas na explosão são forças internas e não existe nenhuma força externa agindo sobre o coco na direção desses eixos. Na direção do eixo dos y , a lei de conservação do momento linear assume a forma

$$P_{iy} = P_{fy}, \quad (9-39)$$

onde o índice i se refere ao valor inicial (antes da explosão) e o índice y se refere à componente y do vetor P_i ou P_f .

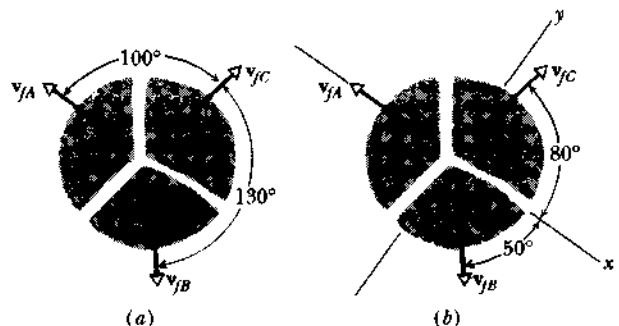


Fig. 9-15 Exemplo 9-11. Uma bomba explode e três pedaços de coco deslizam sem atrito em uma superfície plana. (a) A explosão vista de cima. (b) A mesma vista, mostrando o sistema de coordenadas usado para resolver o problema.

Como o coco se encontra inicialmente em repouso, a componente P_{ix} do momento linear inicial é zero. Para determinar uma expressão para P_{ix} , calculamos a componente y do momento linear final para cada fragmento:

$$\begin{aligned} p_{fA,y} &= 0, \\ p_{fB,y} &= -0,20Mv_{fB,y} = -0,20Mv_{fB} \sin 50^\circ \\ p_{fC,y} &= 0,30Mv_{fC,y} = 0,30Mv_{fC} \sin 80^\circ. \end{aligned}$$

(Observe que $P_{ix} = 0$ por causa da forma como os eixos foram escolhidos.) A Eq. 9-39 se torna portanto

$$P_{iy} = P_{fy} = p_{fA,y} + p_{fB,y} + p_{fC,y}.$$

Nesse caso, com $v_C = 5,0$ m/s, temos:

$$0 = 0 - 0,20Mv_{fB} \sin 50^\circ + (0,30M)(5,0 \text{ m/s}) \sin 80^\circ,$$

e portanto

$$v_{fB} = 9,64 \text{ m/s} \approx 9,6 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual a velocidade do fragmento A?

Solução Como o momento linear também é conservado na direção do eixo dos x , temos:

$$P_{ix} = P_{fx}, \quad (9-40)$$

onde $P_{ix} = 0$ porque o coco se encontra inicialmente em repouso. Para determinar P_{fx} , calculamos as componentes x dos momentos finais, usando o fato de que o fragmento A deve ter uma massa de $0,50M$:

$$\begin{aligned} p_{fA,x} &= -0,50Mv_{fA}, \\ p_{fB,x} &= 0,20Mv_{fB,x} = 0,20Mv_{fB} \cos 50^\circ, \\ p_{fC,x} &= 0,30Mv_{fC,x} = 0,30Mv_{fC} \cos 80^\circ. \end{aligned}$$

A Eq. 9-40 se torna portanto

$$P_{ix} = P_{fx} = p_{fA,x} + p_{fB,x} + p_{fC,x}.$$

Nesse caso, com $v_C = 5,0$ m/s e $v_B = 9,64$ m/s, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= -0,50Mv_{fA} + 0,20M(9,64 \text{ m/s}) \cos 50^\circ \\ &\quad + 0,30M(5,0 \text{ m/s}) \cos 80^\circ, \end{aligned}$$

e portanto

$$v_{fA} = 3,0 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TÁTICA 2: CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

Esta é uma boa ocasião para reler a Tática 1 do Cap. 8, que se refere a problemas que envolvem a conservação de energia mecânica. As mesmas sugestões apresentadas naquela ocasião se aplicam a problemas que envolvem a conservação de momento linear.

Em primeiro lugar, certifique-se de que você está trabalhando com um sistema fechado e isolado. *Fechado* significa que o número de partículas do sistema permanece constante (nenhuma partícula entra no sistema ou sai dele). *Isolado* significa que a força externa resultante sobre o sistema é nula. Quando o sistema não é fechado e isolado, as Eqs. 9-29 e 9-30 não são verdadeiras.

Lembre-se de que o momento linear é um vetor e que cada componente pode ser conservado separadamente, contanto que o componente correspondente da força externa resultante seja nulo. No Exemplo 9-8, o sistema canhão + bala não está submetido a nenhuma força externa na direção horizontal, de modo que a componente horizontal do momento linear é conservada. Entretanto, a força externa resultante que age ver-

ticalmente sobre este sistema não é nula: a bala está sujeita ao próprio peso durante toda a trajetória. Assim, neste sistema a componente vertical do momento linear não é conservada.

Escolha dois estados apropriados do sistema (que você pode chamar de estado inicial e estado final) e escreva expressões para o momento linear do sistema nesses dois estados. Ao escrever essas expressões, certifique-se de que os movimentos de todos os corpos do sistema foram especificados em relação ao mesmo sistema de coordenadas de um referencial inercial. Certifique-se também de que todos os corpos que fazem parte do sistema foram incluídos nas expressões e nenhum corpo exterior ao sistema foi incluído. O Exemplo 9-8 mostra como é importante saber exatamente em relação a que sistema de coordenadas (a Terra ou o canhão, no caso) o movimento está sendo especificado.

Finalmente, iguale as expressões de P_i e P_f e calcule o valor da grandeza pedida.

9-7 Sistemas de Massa Variável: Um Foguete (Opcional)

Nos sistemas que discutimos até agora, supusemos que a massa total do sistema permanecia constante. Nem sempre isso é verdade. No caso de um foguete, por exemplo (Fig. 9-16), o combustível constitui a maior parte da massa inicialmente presente; todo esse combustível é queimado e ejetado pelo foguete durante o vôo.

Trataremos do problema da variação de massa do foguete durante o vôo aplicando a segunda lei de Newton, não ao foguete, mas ao sistema constituído por ele, mais os produtos de combustão ejetados. A massa deste último sistema não varia durante o vôo.

Cálculo da Aceleração

Suponha que você esteja em um referencial de inércia observando um foguete que viaja pelo espaço sem estar sub-

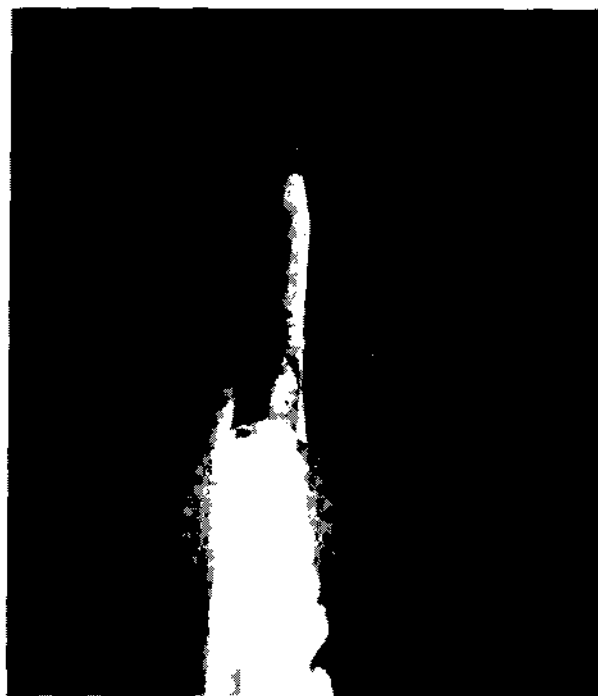


Fig. 9-16 Decolagem de um foguete do Projeto Mercury.

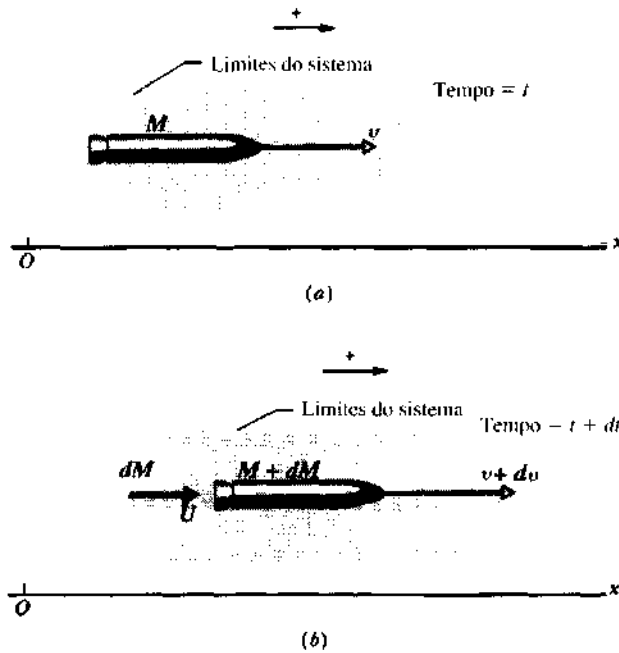


Fig. 9-17 (a) Um foguete de massa M no instante t . (b) O mesmo foguete no instante $t + dt$. Os produtos de combustão ejetados durante o intervalo dt também aparecem na ilustração. A seta mostra o sentido que foi tomado como positivo para todas as velocidades.

metido a nenhuma força gravitacional ou de atrito. Seja M a massa do foguete e v a sua velocidade em um certo instante de tempo t (Fig. 9-17a).

A Fig. 9-17b mostra a situação depois que se passa um intervalo de tempo dt . O foguete agora está viajando com velocidade $v + dv$ e possui uma massa $M + dM$, em que a variação de massa dM é uma quantidade *negativa*. Os produtos de combustão ejetados pelo foguete durante o intervalo de tempo dt têm massa $-dM$ e velocidade U em relação ao nosso referencial de inércia.

Nosso sistema é constituído pelo foguete mais os produtos de combustão ejetados durante o intervalo dt . Como o sistema é fechado e isolado, o momento linear deve ser conservado durante o intervalo dt , isto é,

$$P_i = P_f, \quad (9-41)$$

onde os índices i e f se referem aos valores no início e no final do intervalo dt . A Eq. 9-41 pode ser reescrita na forma

$$Mv = -dM U + (M + dM)(v + dv), \quad (9-42)$$

em que o primeiro termo do lado direito é o momento linear dos produtos de combustão ejetados durante o intervalo dt e o segundo termo é o momento linear do foguete no final do mesmo intervalo.

Podemos simplificar a Eq. 9-42 usando a velocidade u dos produtos de combustão em relação ao foguete. Para obter o valor de u , subtraímos a velocidade U dos produtos ejetados da velocidade $v + dv$ do foguete no final do intervalo dt :

$$u = (v + dv) - U.$$

Isso nos dá

$$U = v + dv - u. \quad (9-43)$$

Substituindo este resultado na Eq. 9-42, obtemos, depois de algumas simplificações,

$$-dM u = M dv. \quad (9-44)$$

Dividindo ambos os membros por dt , temos:

$$-\frac{dM}{dt} u = M \frac{dv}{dt}. \quad (9-45)$$

Podemos substituir dM/dt (a taxa com que o foguete perde massa) por $-R$, onde R é um número positivo que expressa o consumo de combustível do foguete. Além disso, dv/dt nada mais é que a aceleração do foguete. Com essas mudanças, a Eq. 9-45 se torna

$$Ru = Ma \quad (\text{primeira equação do foguete}). \quad (9-46)$$

A Eq. 9-46 é válida para qualquer instante de tempo, contanto que a massa M , o consumo de combustível R e a aceleração a sejam calculados para esse instante.

O lado esquerdo da Eq. 9-46 tem dimensões de força ($\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$) e depende apenas das características de projeto do motor do foguete, isto é, a taxa R (massa por unidade de tempo) com que os produtos de combustão são ejetados e a velocidade u com que eles são ejetados em relação ao foguete. Este termo Ru é chamado de **empuxo** do foguete e representado pela letra E . A relação entre a Eq. 9-46 e a segunda lei de Newton fica evidente quando escrevemos esta equação na forma $E = Ma$, onde a é a aceleração do foguete no momento em que sua massa é M .

Cálculo da Velocidade

Como varia a velocidade do foguete durante o vôo? De acordo com a Eq. 9-44, temos:

$$dv = -u \frac{dM}{M}.$$

Integrando ambos os membros, temos:

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -u \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M},$$

onde M_i é a massa inicial do foguete e M_f a massa final. Calculando a integral, temos:

$$v_f - v_i = -u \ln \frac{M_f}{M_i} \quad (\text{segunda equação do foguete}). \quad (9-47)$$

A Eq. 9-47 permite calcular o aumento de velocidade do foguete quando a massa diminui de M_i para M_f .^{*} Ela deixa clara a vantagem dos foguetes de vários estágios, em que M_f é reduzida, ejetando-se os estágios sucessivos quando o combustível desses estágios se esgota. O ideal é que o foguete chegue ao destino apenas com a carga útil.

EXEMPLO 9-12 Um foguete cuja massa inicial M_i é 850 kg consome combustível a uma taxa $R = 2,3$ kg/s. A velocidade u dos gases ejetados em relação ao foguete é de 2.800 m/s.

a. Qual o empuxo do foguete?

Solução O empuxo é dado por

$$E = Ru = (2,3 \text{ kg/s})(2800 \text{ m/s}) \\ = 6440 \text{ N} \approx 6400 \text{ N.} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual a aceleração inicial do foguete?

Solução De acordo com a segunda lei de Newton, temos:

$$a = \frac{E}{M_i} = \frac{6440 \text{ N}}{850 \text{ kg}} = 7,6 \text{ m/s}^2. \quad (\text{Resposta})$$

Para ser lançado da superfície da Terra, um foguete deve ter uma aceleração inicial maior do que $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Em outras palavras, o empuxo $E (= 6.400 \text{ N})$ do foguete deve ser maior do que o peso inicial do foguete, que é $M_i g = 850 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 = 8.300 \text{ N}$. Como os requisitos de aceleração ou empuxo não são satisfeitos, o foguete não pode ser lançado da superfície da Terra. Ele poderia ser lançado já no espaço, a partir de um outro foguete, mais potente.

c. Suponha, então, que o foguete seja lançado de uma nave que já se encontra no espaço, onde a força gravitacional é desprezível. A massa M_f do foguete quando o combustível se esgota é 180 kg. Qual a velocidade do foguete em relação à nave nesse momento?

Solução O foguete começa com uma velocidade relativa $u_i = 0$. De acordo com a Eq. 9-47, temos:

$$v_f = u \ln \frac{M_i}{M_f} \\ = (2800 \text{ m/s}) \ln \frac{850 \text{ kg}}{180 \text{ kg}} \\ = (2800 \text{ m/s}) \ln 4,72 \approx 4300 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta})$$

Observe que a velocidade final do foguete pode ser maior do que a velocidade de ejeção u .

9-8 Sistemas de Partículas: Variações na Energia Cinética (Opcional)

Suponha que uma patinadora se afaste de um corrimão, como na Fig. 9-18, ganhando energia cinética no proces-

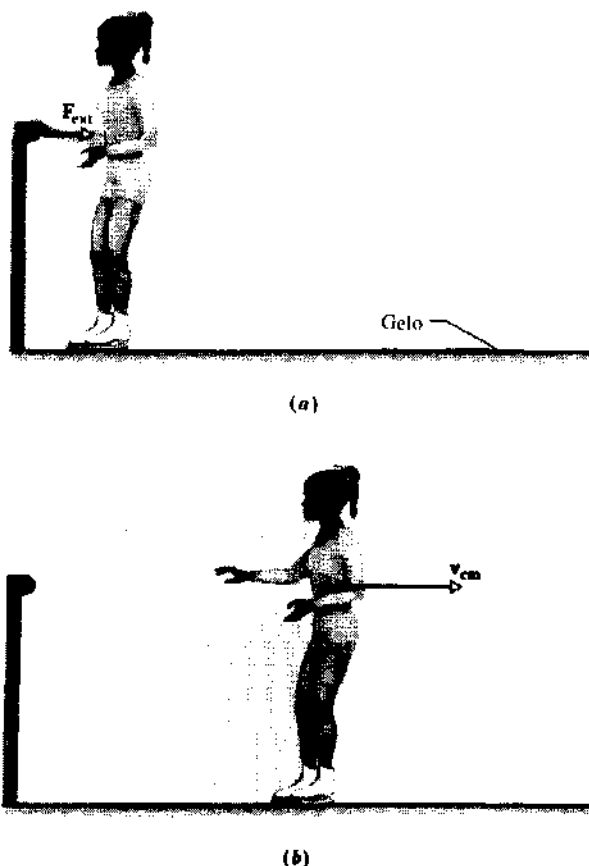


Fig. 9-18 (a) Uma patinadora se afasta de um corrimão. O corrimão exerce uma força \mathbf{F}_{ext} sobre ela. (b) A patinadora desliza no gelo, com velocidade \mathbf{v}_{cm} .

so. De onde vem essa energia? Se você perguntar à patinadora, ela certamente responderá: “De mim!” E estará certa. A patinadora usa suas reservas internas de energia para esticar o braço e se afastar do corrimão, e tem plena consciência do esforço físico envolvido.

Entretanto, a variação da energia cinética da patinadora não pode ser explicada pelo teorema do trabalho e energia cinética, apresentado na Seção 7-5,

$$W = K_f - K_i = \Delta K \quad (\text{uma partícula}), \quad (9-48)$$

segundo o qual o aumento de energia cinética de uma partícula é igual ao trabalho realizado pela força \mathbf{F}_{ext} a que tal partícula está submetida. A razão para isso é que a patinadora não pode ser considerada como uma partícula. O critério para representar o corpo como uma partícula é que todas as partes do corpo se movam da mesma forma. Ao esticar o braço para se afastar do corrimão, a patinadora viola esse requisito. Assim, deve ser tratada como um sistema de partículas, ao qual a Eq. 9-48 simplesmente não se aplica.

Este resultado nos leva a outra questão, uma questão formal. Encontramos pela primeira vez a segunda lei de Newton ($\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$) no estudo de uma única partícula. Vimos na Seção 9-3 que escrevendo a mesma lei na forma $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = M\mathbf{a}_{\text{cm}}$ podemos aplicá-la a sistemas de partículas. Para isso, trata-

^{*}O símbolo “ln” na Eq. 9-47 significa *logaritmo neperiano*, ou *logaritmo natural*, que é o logaritmo na base $e (= 2,718...)$. Aperte a tecla “ln” e não a tecla “log” na sua calculadora.

mos o sistema como uma partícula única de massa M , localizada no centro de massa do sistema. Em seguida, supomos que a força externa resultante $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}}$ age sobre o sistema neste ponto. A questão agora é a seguinte: "Podemos usar esta forma da segunda lei de Newton para estudar as variações da energia cinética de um sistema de partículas?" A resposta é afirmativa.

Considere um sistema de partículas, como a patinadora, submetido a uma força externa \mathbf{F}_{ext} (que pode ser a resultante de várias forças), e tome o eixo dos x na direção da força. Suponha que o centro de massa do sistema se desloca de uma distância dx_{cm} ao longo deste eixo em um intervalo de tempo dt . Para este movimento unidimensional, a segunda lei de Newton assume a forma

$$F_{\text{ext}} = Ma_{\text{cm}}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima por dx_{cm} , temos:

$$\begin{aligned} F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} &= Ma_{\text{cm}} dx_{\text{cm}} = M \frac{dv_{\text{cm}}}{dt} dx_{\text{cm}} \\ &= M \frac{dx_{\text{cm}}}{dt} dv_{\text{cm}} \end{aligned}$$

ou

$$F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = Mv_{\text{cm}} dv_{\text{cm}}. \quad (9-49)$$

Sob a ação da força, o centro de massa do sistema se desloca de uma posição inicial x_i até uma posição final x_f . Integrando a Eq. 9-49 entre esses limites, temos:

$$\int_{x_i}^{x_f} F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = \left(\frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 \right)_f - \left(\frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 \right)_i. \quad (9-50)$$

A Eq. 9-50 pode ser escrita na forma

$$\int_{x_i}^{x_f} F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = K_{\text{cm},f} - K_{\text{cm},i} = \Delta K_{\text{cm}} \quad (9-51)$$

Se \mathbf{F}_{ext} é uma força constante, podemos simplificar o lado esquerdo da Eq. 9-51 escrevendo:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_f} F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} &= F_{\text{ext}} \int_{x_i}^{x_f} dx_{\text{cm}} = F_{\text{ext}} (x_{\text{cm},f} - x_{\text{cm},i}) \\ &= F_{\text{ext}} d_{\text{cm}}, \end{aligned}$$

onde d_{cm} é o deslocamento do centro de massa durante o intervalo considerado. Com esta simplificação, a Eq. 9-51 se torna:

$$F_{\text{ext}} d_{\text{cm}} = K_{\text{cm},f} - K_{\text{cm},i} = \Delta K_{\text{cm}} \quad (9-52)$$

As Eqs. 9-51 e 9-52 mostram que podemos determinar a variação da energia cinética do centro de massa de um sistema de partículas calculando o valor numérico do lado esquerdo da Eq. 9-51 (se a força externa resultante \mathbf{F}_{ext} for

uma força variável) ou do lado esquerdo da Eq. 9-52 (se \mathbf{F}_{ext} for uma força constante).

Por exemplo: se nossa patinadora empurrar o corrimão com uma força constante de 200 N enquanto seu centro de massa se desloca de uma distância $d_{\text{cm}} = 0,10$ m, a força externa exercida sobre ela pelo corrimão será igual a 200 N e, de acordo com a Eq. 9-52, sua energia cinética aumentará de $(200 \text{ N})(0,10 \text{ m}) = 20 \text{ J}$.

A grandeza ΔK_{cm} nas Eqs. 9-51 e 9-52 é a variação de energia cinética associada apenas ao movimento de translação do sistema, isto é, o movimento do sistema quando é tratado como uma partícula única com toda a massa concentrada no centro de massa. As variações de energia associadas a rotações do sistema ou a vibrações ou movimentos internos não estão incluídas em ΔK_{cm} . (Voltaremos a abordar este assunto em outros capítulos.)

Na Seção 8-7, consideramos um bloco sujeito apenas a uma força de atrito cinético f que se move horizontalmente de uma distância d e cuja energia cinética varia de ΔK . Mostramos que

$$-fd = \Delta K. \quad (9-53)$$

Observe que a Eq. 9-53 é equivalente à Eq. 9-52: f é uma força externa constante que age sobre um sistema de partículas (o bloco), d é o deslocamento do centro de massa do bloco e ΔK é a variação de energia cinética do centro de massa. O sinal negativo é necessário porque a força de atrito e o deslocamento têm sentidos opostos.

O que Faz um Carro se Mover?

Uma situação comum em que uma força externa age sobre um sistema de partículas, fazendo variar a energia cinética do centro de massa do sistema, é aquela na qual um automóvel é acelerado a partir do repouso, como na Fig. 9-19. Nesta situação, a força externa \mathbf{F}_{ext} é a força de atrito exercida pela estrada sobre os pneus. Quando o motor faz as rodas do carro girarem, os pneus exercem uma força sobre o piso, no sentido da traseira do carro. A força \mathbf{F}_{ext} é a reação do piso, que aponta para a frente, no sentido da aceleração do carro. À medida que o carro ganha velocidade, sua energia cinética aumenta. Podemos fazer aqui a mesma pergunta que no caso da patinadora: "De onde vem esta energia?"

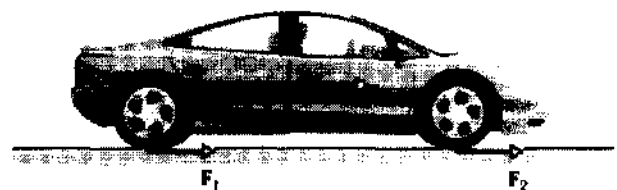


Fig. 9-19 Um automóvel, inicialmente em repouso, acelera para a direita. O piso exerce quatro forças de atrito (duas delas indicadas na figura) sobre os quatro pneus. A resultante dessas quatro forças é a força \mathbf{F}_{ext} a que o carro está submetido.

A energia cinética adquirida pelo automóvel (todos nós sabemos) vem da combustão da gasolina. Por causa dos movimentos internos do motor, transmissão, rodas e pneus, o carro não pode ser tratado como uma única partícula. Devemos considerá-lo como um sistema de partículas, ao qual as Eqs. 9-51 e 9-52 se aplicam.

As Eqs. 9-51 e 9-52 também se aplicam à frenagem de um carro. Nesta situação, a força de atrito exercida pela estrada sobre os pneus tem o sentido contrário ao do movimento e a energia cinética do carro diminui. Os lados esquerdos das Eqs. 9-51 e 9-52 agora são negativos e a energia cinética “perdida” se transforma na energia térmica das superfícies de frenagem. Os freios se aquecem.

EXEMPLO 9-13 Um carro e seu motorista têm uma massa $M = 1.400$ kg. O carro está viajando com uma velocidade $v_{cm} = 24,0$ m/s quando

o motorista pisa nos freios, fazendo com que ele pare depois de percorrer uma distância $d_{cm} = 180$ m. Qual a força total de atrito F_{ext} (suposta constante) que o piso exerce sobre os pneus durante o processo? Suponha que os freios foram aplicados de modo a não bloquear as rodas.

Solução Como estamos supondo que a força externa F_{ext} é constante, usamos a Eq. 9-52 para dar conta da variação de energia cinética do centro de massa do carro. Nesta situação F_{ext} está dirigida para a traseira do carro, isto é, tem o sentido oposto ao do deslocamento; assim, o lado esquerdo da Eq. 9-52 é negativo. Escrevendo a energia cinética inicial como $Mv_{cm}^2/2$ e levando em conta o fato de que a energia cinética final é zero, temos:

$$-F_{ext}d_{cm} = 0 - \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$

e portanto

$$F_{ext} = \frac{Mv_{cm}^2}{2d_{cm}} = \frac{(1400 \text{ kg})(24,0 \text{ m/s})^2}{(2)(180 \text{ m})} = 2.240 \text{ N.} \quad (\text{Resposta})$$

RESUMO

Centro de Massa

O centro de massa de um sistema de partículas é definido como o ponto cujas coordenadas são dadas por

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \\ y_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \\ z_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i, \end{aligned} \quad (9-5)$$

ou

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i, \quad (9-8)$$

onde M é a massa total do sistema. Para uma distribuição contínua de massa, o centro de massa é dado por

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M} \int x \, dm, \\ y_{cm} &= \frac{1}{M} \int y \, dm, \\ z_{cm} &= \frac{1}{M} \int z \, dm. \end{aligned} \quad (9-9)$$

Quando a densidade (massa específica ou massa por unidade de volume) é uniforme, a Eq. 9-9 pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{V} \int x \, dV, \\ y_{cm} &= \frac{1}{V} \int y \, dV, \\ z_{cm} &= \frac{1}{V} \int z \, dV, \end{aligned} \quad (9-11)$$

onde V é o volume ocupado pela massa M .

Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

O movimento do centro de massa de qualquer sistema de partículas obedece à segunda lei de Newton para um sistema de partículas, que pode ser escrita na forma

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{cm} \quad (9-16)$$

onde $\sum \mathbf{F}_{ext}$ é a resultante das forças externas a que o sistema está submetido, M é a massa total do sistema e \mathbf{a}_{cm} é a aceleração do centro de massa do sistema.

Momento Linear e a Segunda Lei de Newton

Para o caso de uma única partícula, definimos uma grandeza vetorial \mathbf{p} chamada **momento linear** através da equação

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (9-22)$$

Em termos do momento linear, a segunda lei de Newton pode ser escrita na forma

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (9-23)$$

Para um sistema de partículas, essas relações se tornam

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{cm} \quad \text{e} \quad \sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (9-26, 9-28)$$

(A Tabela 9-1 mostra algumas relações importantes usadas no estudo do movimento de partículas e sistemas de partículas.)

Momento Relativístico

Uma definição mais geral (relativística) do momento linear é a seguinte:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (9-24)$$

A forma acima deve ser usada sempre que a velocidade da partícula for uma fração considerável da velocidade da luz, c . A Eq. 9-24 é válida para qualquer velocidade e é equivalente à Eq. 9-22 quando $v \ll c$.

Conservação do Momento Linear

Quando um sistema é isolado, isto é, a força externa resultante sobre ele é nula, o momento linear \mathbf{P} do sistema permanece constante:

$$\mathbf{P} = \text{constante} \quad (\text{sistema isolado, fechado}). \quad (9-29)$$

A Eq. 9-29 também pode ser escrita na forma

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f \quad (\text{sistema isolado, fechado}). \quad (9-30)$$

onde os índices se referem aos valores de \mathbf{P} em um instante inicial e em um instante posterior. As Eqs. 9-29 e 9-30 são formulações equivalentes da **lei de conservação do momento linear**.

Sistemas de Massa Variável

A Seção 9-7 ilustra uma estratégia para lidar com sistemas de massa variável. Redefinimos o sistema, aumentando seus limites até que inclua um sistema maior cuja massa permaneça constante: em seguida, aplicamos a lei de conservação do momento linear. No caso de um foguete, isso significa que o sistema ampliado deve incluir tanto o foguete quanto os gases ejetados. Uma análise desse tipo mostra que, na ausência de forças externas, o movimento de um foguete obedece à equação

$$Ru = Ma \quad (\text{primeira equação do foguete}) \quad (9-46)$$

onde a é a aceleração instantânea do foguete, M é a massa instantânea do foguete (incluindo o combustível que ainda não foi queimado), R é a taxa de consumo de combustível (massa por unidade de tempo) e u é a velocidade dos gases ejetados em relação ao foguete. O produto

Ru é chamado de **empuxo** do foguete. Para um foguete com R e u constantes, cuja velocidade varia de v_i para v_f quando a massa varia de M_i para M_f temos

$$v_f - v_i = u \ln \frac{M_i}{M_f} \quad (\text{segunda equação do foguete}) \quad (9-47)$$

Variação da Energia Cinética de um Sistema de Partículas

Quando uma força externa F_{ext} resultante atua sobre um sistema de partículas, podemos supor que a massa M do sistema está concentrada no centro de massa e que a força F_{ext} está aplicada a este ponto. Podemos então determinar a variação da energia cinética do centro de massa do sistema, ΔK_{cm} . Se F_{ext} é uma força variável, usamos a equação

$$\int_{x_i}^{x_f} F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = K_{\text{cm},f} - K_{\text{cm},i} = \Delta K_{\text{cm}}, \quad (9-51)$$

onde dx_{cm} é o deslocamento incremental do centro de massa e $K_{\text{cm},i}$ e $K_{\text{cm},f}$ são, respectivamente, os valores inicial e final da energia cinética do centro de massa. Se F_{ext} é uma força constante, usamos a equação

$$F_{\text{ext}} d_{\text{cm}} = K_{\text{cm},f} - K_{\text{cm},i} = \Delta K_{\text{cm}}, \quad (9-52)$$

onde d_{cm} é o deslocamento do centro de massa. Se o deslocamento dx_{cm} na Eq. 9-51 ou o deslocamento d_{cm} na Eq. 9-52 tem o mesmo sentido de F_{ext} , o lado esquerdo da equação correspondente é positivo e a energia cinética do centro de massa aumenta. Se dx_{cm} ou d_{cm} tem o sentido oposto ao de F_{ext} , o lado esquerdo da equação correspondente é negativo e a energia cinética do centro de massa diminui.

QUESTIONÁRIO

1. A Fig. 9-20 mostra (a) um triângulo isósceles e (b) um cone circular reto cujo diâmetro tem o mesmo comprimento que a base do triângulo. O centro de massa do triângulo fica a um terço do topo, mas o do cone fica a apenas um quarto do topo. Como explicar a diferença?

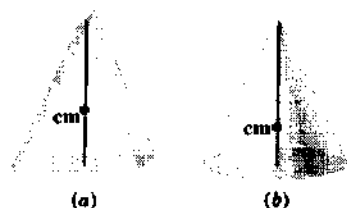


Fig. 9-20 Questão 1.

2. Qual a localização do centro de massa da atmosfera da Terra?

3. Um escultor amador decide fazer um modelo de um pássaro (Fig. 9-21). Felizmente, a obra fica de pé sozinha. O modelo é feito de uma única lâmina de metal de espessura uniforme. Dos pontos numerados, qual corresponde provavelmente à localização do centro de massa?



Fig. 9-21 Questão 3.

4. Alguém afirma que quando um atleta experiente de salto em altura passa pelo sarrafo o seu centro de massa na verdade está *abaixo* do sarrafo. Isso é possível?

5. Um passarinho se encontra em uma gaiola de arame, que, por sua vez, está pendurada em uma balança de mola. A leitura da balança quando o passarinho está voando é menor, igual ou maior do que quando está de pé no chão da gaiola?

6. Um barco à vela pode ser movido pelo vento lançado sobre ela, produzido por um ventilador a bordo do barco? Explique sua resposta.

7. Um barqueiro em um lago de águas calmas pode chegar à margem dando puxões em uma corda amarrada à proa do barco. Você sabe explicar como isto é possível?

8. Como uma pessoa sentada em repouso em uma superfície horizontal sem atrito pode se deslocar sobre a superfície?

9. Um homem está de pé em uma placa de gelo, segurando um fogo de artifício. Ele joga o fogo de artifício para o alto. Descreva sucintamente, mas da forma mais exata que puder, o movimento do centro de massa do fogo de artifício e o movimento do centro de massa constituído pelo homem mais o fogo de artifício. Será conveniente descrever os movimentos durante cada um dos seguintes períodos: (a) depois que o homem lança o fogo de artifício, mas antes que este exploda; (b) depois que o fogo de artifício explode, mas antes que o primeiro fragmento caia no gelo; (c) depois que o primeiro fragmento cai no gelo, mas antes que o último fragmento caia no gelo; (d) depois que o último fragmento caiu no gelo, mas antes que o primeiro fragmento chegue à borda da placa.

10. Em 1920, um conhecido jornal publicou o seguinte comentário a respeito das experiências pioneiras com foguetes de Robert H. Goddard, negando a possibilidade de que um foguete pudesse funcionar no vácuo: "Que o Prof. Goddard, com sua 'cátedra' no Clark College e o apoio da Smithsonian Institution não conheça a relação entre ação e reação e a necessidade de dispor de algo melhor do que o vácuo contra o que reagir... afirmar isso seria absurdo. Naturalmente, ele apenas parece não dispor do conhecimento que é ministrado diariamente nas escolas de segundo grau." O que está errado neste argumento?

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

Seção 9-2 O Centro de Massa

1E. (a) A que distância o centro de massa do sistema Terra-Lua se encontra do centro da Terra? (Use os valores das massas da Terra e da Lua e da distância entre os dois astros que aparecem no Apêndice C.) (b) Expresse a resposta do item (a) como uma fração do raio da Terra.

2E. A distância entre os centros dos átomos de carbono (C) e oxigênio (O) em uma molécula de monóxido de carbono (CO) é $1,131 \times 10^{-10}$ m. Determine a posição do centro de massa da molécula de CO em relação ao átomo de carbono. (Use as massas dos átomos de C e O que aparecem no Apêndice D.)

3E. (a) Quais são as coordenadas do centro de massa das três partículas que aparecem na Fig. 9-22? (b) O que acontece com o centro de massa quando a massa da partícula de cima aumenta gradualmente?

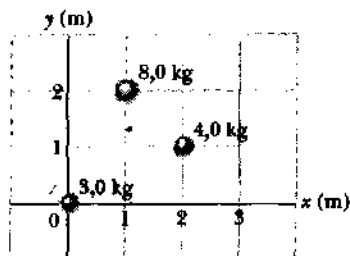


Fig. 9-22 Exercício 3.

4E. Três barras finas de comprimento L são dispostas em forma de U invertido, como na Fig. 9-23. As duas barras laterais têm massa M ; a barra central tem massa $3M$. Qual a localização do centro de massa do conjunto?

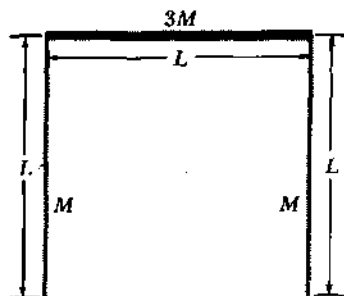


Fig. 9-23 Exercício 4.

5E. Uma placa quadrada homogênea de 6 m de lado tem um recorte quadrado com 2 m de lado (Fig. 9-24). O centro desse recorte fica em $x = 2$ m, $y = 0$. O centro da placa quadrada fica em $x = y = 0$. Calcule as coordenadas do centro de massa da placa recortada.

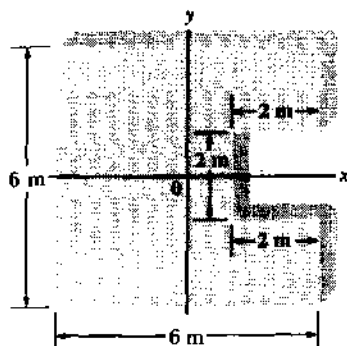


Fig. 9-24 Exercício 5.

6P. Mostre que a razão entre as distâncias de duas partículas ao seu centro de massa é o inverso da razão entre suas massas.

7P. A Fig. 9-25 mostra as dimensões de uma placa composta; metade da placa é feita de alumínio (densidade = $2,70 \text{ g/cm}^3$) e metade de ferro (densidade = $7,85 \text{ g/cm}^3$). Qual a localização do centro de massa da placa?

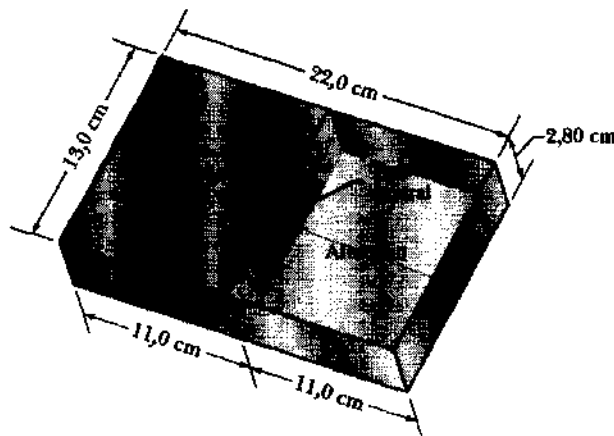


Fig. 9-25 Problema 7.

8P. Na molécula de amônia (NH_3) (Fig. 9-26), os três átomos de hidrogênio (H) formam um triângulo equilátero; o centro do triângulo fica a $9,40 \times 10^{-11}$ m de cada átomo de hidrogênio. O átomo de nitrogênio (N) fica no topo de uma pirâmide cuja base é formada pelos três átomos de hidrogênio. A distância nitrogênio-hidrogênio é $10,14 \times 10^{-11}$ m e a razão de massas atômicas nitrogênio-hidrogênio é 13,9. Determine a posição do centro de massa da molécula em relação ao átomo de nitrogênio.

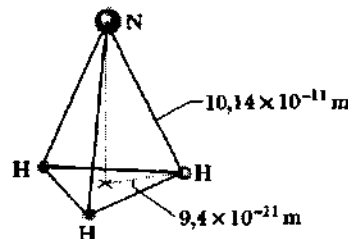


Fig. 9-26 Problema 8.

9P. Uma caixa cúbica, sem tampa, com 40 cm de lado, é feita de chapas de metal homogêneas de espessura desprezível (Fig. 9-27). Determine as coordenadas do centro de massa da caixa.

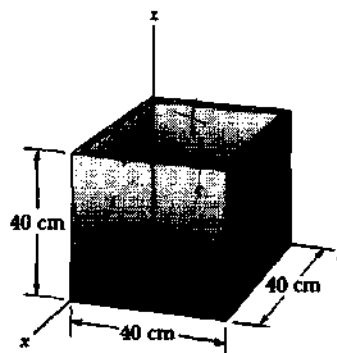


Fig. 9-27 Problema 9.

10P. Duas placas metálicas em forma de triângulo retângulo, ambas de altura $H = 2,0$ cm e comprimento $L = 3,5$ cm, são dispostas como na Fig. 9-28. (a) Quais são as coordenadas do centro de massa do conjunto? (b) Se as duas placas sofrem uma rotação de 180° em torno da vertical de modo que os lados de $2,0$ cm fiquem adjacentes, quais são as coordenadas do centro de massa do novo conjunto?

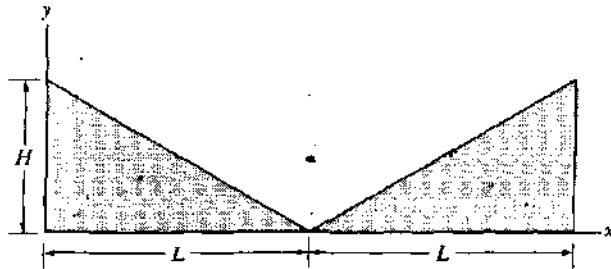
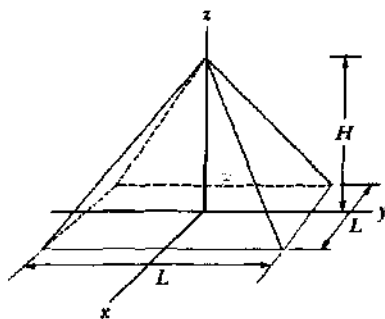


Fig. 9-28 Problema 10.

11P*. A Grande Pirâmide de Quéops, em Gizé, Egito (Fig. 9-29a), tinha uma altura $H = 147$ m antes que a pedra mais alta caísse. A base da estrutura é um quadrado de lado $L = 230$ m (veja a Fig. 9-29b). Supondo que a densidade da pirâmide é uniforme, calcule a que distância o centro de massa original ficava do centro da base.



(a)



(b)

Fig. 9-29 Problema 11.

12P*. Uma lata em forma de cilindro reto de massa M , altura H e densidade uniforme está cheia de refrigerante (Fig. 9-30). A massa total do refrigerante é m . Fazemos pequenos furos na base e na tampa da lata para drenar o conteúdo e medimos o valor de h , a distância vertical entre o centro de massa e a base da lata, para várias situações. Qual é o valor de h (a) com a lata cheia e (b) com a lata vazia? (c) O que acontece com h enquanto a lata está sendo esvaziada? (d) Se x é altura do líquido

que resta em um determinado instante, determine o valor de x (em função de M , H e m) no momento em que o centro de massa se encontra o mais próximo possível da base da lata.

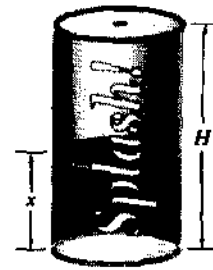


Fig. 9-30 Problema 12.

Seção 9-3 A Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

13E. Dois patinadores, um de 65 kg e outro de 40 kg, seguram as pontas de uma vara com 10 m de comprimento e massa desprezível. Os patinadores usam a vara como apoio para deslizarem um em direção ao outro até que se encontrem. Qual a distância percorrida pelo patinador de 40 kg?

14E. Um velho Galaxy com uma massa de 2.400 kg está viajando por uma estrada reta a 80 km/h. Ele é seguido por um Escort com uma massa de 1.600 kg viajando a 60 km/h. Qual a velocidade do centro de massa dos dois carros?

15E. Um homem de massa m está pendurado em uma escada de corda presa a um balão de massa M ; veja a Fig. 9-31. O balão está parado em relação ao solo. (a) Se o homem começa a subir a escada com velocidade v (em relação à escada), em que direção e com que velocidade (em relação à Terra) o balão vai se mover? (b) Qual será o movimento depois que o homem parar de subir?

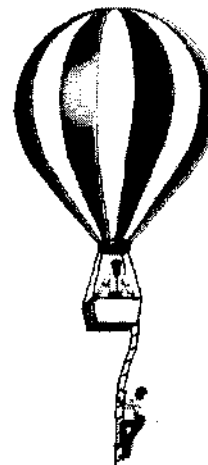


Fig. 9-31 Exercício 15.

16E. Duas partículas P e Q estão inicialmente em repouso a 1,0 m uma da outra. P tem uma massa de 0,10 kg e Q uma massa de 0,30 kg. P e Q se atraem com uma força constante de $1,0 \times 10^{-2}$ N. Nenhuma força externa age sobre o sistema. (a) Descreva o movimento do centro de massa. (b) A que distância da posição original de P as duas partículas se chocam?

17E. Um canhão e um suprimento de balas de canhão se encontram no interior de um vagão fechado de comprimento L , como na Fig. 9-32. O canhão dispara para a direita; o recuo faz o vagão se mover para a esquerda. As balas disparadas continuam no vagão depois de se cho-

carem com a parede oposta. (a) Qual a maior distância que o vagão pode ter percorrido depois que todas as balas forem disparadas? (b) Qual a velocidade do vagão depois que todas as balas forem disparadas?

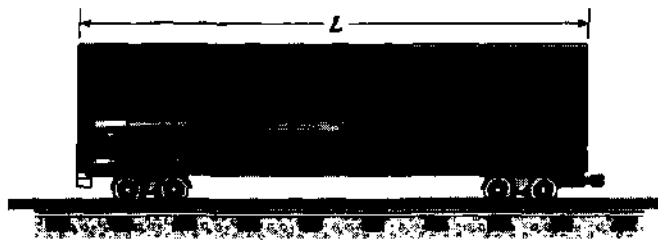


Fig. 9-32 Exercício 17.

18P. Deixa-se cair uma pedra em $t = 0$. Uma segunda pedra, com uma massa duas vezes maior que a da primeira, é largada do mesmo ponto em $t = 100$ ms. (a) Onde está o centro de massa das duas pedras em $t = 300$ ms? Suponha que nenhuma das duas pedras chegou ao chão. (b) Qual a velocidade do centro de massa do sistema nesse momento?

19P. Ricardo, com 80 kg de massa, e Carmelita, que é mais magra, estão passando no Lago Mercedes em uma canoa de 30 kg. Com a canoa parada em águas tranquilas, eles trocam de lugar. Seus bancos estão a 3,0 m de distância e simetricamente dispostos em relação ao centro da embarcação. Ricardo observa que durante a troca a canoa se deslocou de 40 cm em relação a um tronco submerso e calcula a massa de Carmelita. Qual foi o resultado obtido por Ricardo?

20P. Um projétil é disparado por um canhão com uma velocidade inicial de 20 m/s. O ângulo do disparo é 60° em relação à horizontal. Quando chega ao ponto mais alto da trajetória, o projétil explode em dois fragmentos de massas iguais (Fig. 9-33). Um dos fragmentos, cuja velocidade imediatamente após a explosão é zero, cai verticalmente. A que distância do canhão o outro fragmento atinge o solo, supondo que o terreno seja plano e a resistência do ar possa ser desprezada?

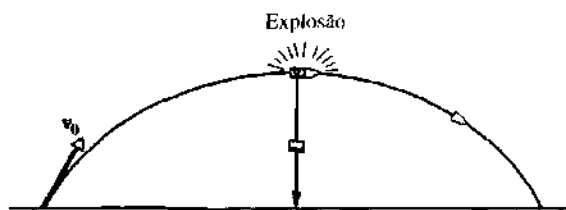


Fig. 9-33 Problema 20.

21P. Dois sacos idênticos de açúcar são ligados por uma corda de massa desprezível que passa por uma roldana sem atrito, de massa desprezível, com 50 mm de diâmetro. Os dois sacos estão no mesmo nível e cada um possui originalmente uma massa de 500 g. (a) Determine a posição horizontal do centro de massa do sistema. (b) Suponha que 20 g de açúcar são transferidos de um saco para o outro, mas os sacos são mantidos nas posições originais. Determine a nova posição horizontal do centro de massa. (c) Os dois sacos são liberados. Em que direção se move o centro de massa? (d) Qual é a sua aceleração?

22P. Um cachorro de 5,0 kg está em um bote de 20 kg que se encontra a 6,0 m da margem (que fica à esquerda na Fig. 9-34a). Ele anda 2,4 m no barco, em direção à margem, e depois pára. O atrito entre o bote e a água é desprezível. A que distância da margem está o cachorro depois da caminhada? (Sugestão: Veja a Fig. 9-34b. O cachorro se move para a esquerda; o bote se desloca para a direita; e o centro de massa do sistema cachorro + barco? Será que ele se move?)

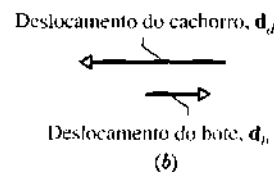
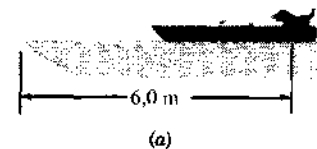


Fig. 9-34 Problema 22.

Seção 9-4 Momento Linear

23E. Qual o momento linear de um automóvel que pesa 16.000 N e está viajando a 88 km/h?

24E. Suponha que sua massa é 80 kg. Com que velocidade teria que correr para ter o mesmo momento linear que um automóvel de 1.600 kg viajando a 1,2 km/h?

25E. Com que velocidade deve viajar um Volkswagen de 816 kg (a) para ter o mesmo momento linear que um Cadillac de 2.650 kg viajando a 16 km/h e (b) para ter a mesma energia cinética?

26E. Qual o momento linear de um elétron viajando com uma velocidade de $0,99c$ ($= 2,97 \times 10^8$ m/s)?

27E. O momento linear de uma partícula viajando a $1,5 \times 10^8$ m/s é $2,9 \times 10^{-19}$ kg·m/s. Determine a massa da partícula e portanto sua identidade com base neste resultado experimental.

28P. Um objeto é rastreado por uma estação de radar, que descobre que seu vetor posição é dado por $\mathbf{r} = (3,500 - 160t)\mathbf{i} + 2,700\mathbf{j} + 300t\mathbf{k}$, onde \mathbf{r} está em metros e t em segundos. O eixo x da estação de radar aponta para leste, o eixo y para o norte e o eixo z verticalmente para cima. Se o objeto é uma ogiva de míssil de 250 kg, determine (a) o seu momento linear, (b) a direção do seu movimento e (c) a força resultante a que está submetido.

29P. Uma bola branca de 0,165 kg, com uma velocidade inicial de 2,00 m/s, se choca com a tábua de uma mesa de sinuca, como mostra a vista de cima da Fig. 9-35. Se os eixos dos x e dos y forem definidos como na figura, o choque inverterá a componente y da velocidade da bola mas não modificará a componente x . (a) Quanto vale o ângulo θ da Fig. 9-35? (b) Qual a variação do momento linear da bola na notação de vetores unitários? (O fato de que a bola está rolando é irrelevante para responder às duas perguntas.)

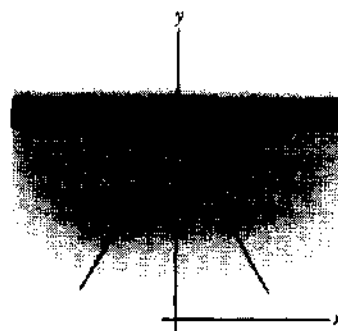


Fig. 9-35 Problema 29.

30P. Um caminhão de 2.100 kg, viajando para o norte a 41 km/h, vira para leste e aumenta a velocidade para 51 km/h. (a) Qual a variação da energia cinética do caminhão? (b) Qual o módulo, direção e sentido da variação de momento linear do caminhão?

31P. Uma bola de 50 g é lançada do nível do solo para o ar com uma velocidade inicial de 16 m/s. O ângulo de lançamento é de 30° em relação à horizontal. (a) Quais são os valores da energia cinética da bola, inicialmente e pouco antes de se chocar com o solo? (b) Determine os valores correspondentes de momento linear (módulo, direção e sentido). (c) Mostre que a variação do momento linear é igual ao peso da bola multiplicado pelo tempo de percurso.

32P. Uma partícula de massa m tem um momento linear \mathbf{p} cujo módulo é mc . Qual a velocidade da partícula em termos de c , a velocidade da luz?

Seção 9-6 Conservação do Momento Linear

33E. Um homem de 100 kg, de pé em uma superfície de atrito desprezível, dá um chute em uma pedra de 0,70 kg, fazendo com que ela adquira uma velocidade de 3,90 m/s. Qual a velocidade do homem depois do chute?

34E. Dois blocos de massas 1,0 kg e 3,0 kg, ligados por uma mola, estão em repouso em uma superfície sem atrito. Em um certo instante, são projetados um na direção do outro de tal forma que o bloco de 1,0 kg viaja inicialmente com uma velocidade de 1,7 m/s em direção ao centro de massa, que permanece em repouso. Qual a velocidade inicial do outro bloco?

35E. Um veículo espacial está viajando a 4.300 km/h em relação à Terra quando o motor, cujo combustível se esgotou, é desacoplado e arremessado para trás com uma velocidade de 82 km/h em relação ao módulo de comando. A massa do motor é quatro vezes a massa do módulo de comando. Qual a velocidade do módulo de comando em relação à Terra depois da separação?

36E. Um homem de 75 kg está viajando em uma carroça a 2,3 m/s. Ele salta para fora da carroça de modo a ficar com velocidade horizontal zero. Qual a variação resultante na velocidade da carroça?

37E. Um vagão-plataforma de peso P pode rolar sem atrito em um trecho reto e plano da linha férrea. Inicialmente, um homem de peso p está de pé no carro, que se move para a esquerda com velocidade v_{rel} ; veja a Fig. 9-36. Qual a variação de velocidade do vagão quando o homem corre para a esquerda com uma velocidade v_{rel} em relação ao vagão?



Fig. 9-36 Exercício 37.

38P. O último estágio de um foguete está viajando com uma velocidade de 7.600 m/s. Este último estágio é feito de duas partes presas por uma trava: um tanque de combustível com uma massa de 290,0 kg e uma cápsula de instrumentos com uma massa de 150,0 kg. Quando a trava é acionada, uma mola comprimida faz com que as duas partes se separem com uma velocidade relativa de 910,0 m/s. (a) Qual a velocidade das duas partes depois que elas se separam? Suponha que todas as velocidades têm a mesma direção. (b) Calcule a energia cinética total das duas partes antes e depois de se separarem e explique a diferença (se houver).

39P. Uma caldeira explode, partindo-se em três pedaços. Dois pedaços, de massas iguais, são arremessados em trajetórias perpendiculares entre si, com a mesma velocidade de 30 m/s. O terceiro pedaço tem uma massa de três vezes a de um dos outros pedaços. Qual o módulo, direção e sentido de sua velocidade logo após a explosão?

40P. Um núcleo radioativo, inicialmente em repouso, se desintegra emitindo um elétron e um neutrino, que se afastam do núcleo em trajetórias perpendiculares entre si. (O neutrino é uma das partículas fundamentais da física.) O momento linear do elétron é $1,2 \times 10^{-22}$ kg·m/s e o do neutrino é $6,4 \times 10^{-21}$ kg·m/s. (a) Determine o módulo, direção e sentido do momento linear do núcleo depois que ele se desintegra. (b) A massa do núcleo residual é $5,8 \times 10^{-26}$ kg. Qual a sua energia cinética logo após a desintegração?

41P. Um vagão-plataforma de 2.140 kg, que pode se mover praticamente sem atrito, está em repouso ao lado de uma plataforma. Um lutador de sumô de 242 kg corre pela plataforma (paralelamente aos trilhos) com uma velocidade de 5,3 m/s e pula no vagão. Qual a velocidade do vagão se o lutador (a) fica de pé no vagão; (b) continua correndo no mesmo sentido com uma velocidade de 5,3 m/s em relação ao vagão e (c) começa a correr no sentido oposto com uma velocidade de 5,3 m/s em relação ao vagão?

42P. Um tremó-foguete com uma massa de 2.900 kg viaja sobre trilhos a 250 m/s. A certa altura, uma caçamba do tremó mergulha em uma vala com água localizada entre os trilhos e transporta água para um tanque, inicialmente vazio, localizado no tremó. Aplicando a lei de conservação do momento linear, determine a velocidade do tremó depois que 920 kg de água foram recolhidos. Despreze o atrito entre a caçamba e a água que está na vala.

43P. Uma bala de 3,50 g é disparada horizontalmente contra dois blocos que se encontram em repouso em uma superfície plana sem atrito, como na Fig. 9-37a. A bala atravessa o primeiro bloco, que possui uma massa de 1,20 kg, e fica encravada no segundo bloco, cuja massa vale 1,80 kg. Com isso, os blocos adquirem velocidades de 0,630 m/s e 1,40 m/s, respectivamente (Fig. 9-37b). Desprezando a massa removida do primeiro bloco pela bala, determine (a) a velocidade da bala imediatamente após emergir do primeiro bloco e (b) a velocidade original da bala.

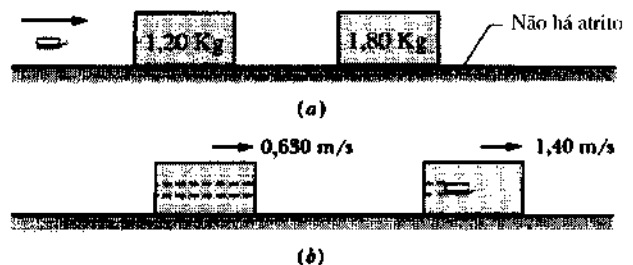


Fig. 9-37 Problema 43.

44P. Um corpo de 8 kg de massa está viajando a 2 m/s, sem estar submetido a nenhuma força externa. Em certo instante, ocorre uma explosão que divide o corpo em dois fragmentos de 4 kg. A explosão fornece aos fragmentos uma energia cinética adicional de 16 J. Os dois fragmentos continuam a viajar na mesma direção que o corpo original. Determine a velocidade e sentido do movimento dos fragmentos depois da explosão.

45P. Você está a bordo de um tremó, sobre uma superfície de gelo plana e com atrito desprezível. Junto com você estão duas pedras de massas m_1 e m_2 tais que $M = 6,00m_1 = 12,0m_2$, onde M é a massa do tremó mais a sua massa. Para colocar o tremó em movimento, você arremessa as pedras para trás, simultaneamente ou uma após a outra, mas sempre com uma velocidade u_{rel} em relação ao tremó. Qual a velocidade atingida pelo tremó (a) quando você joga as duas pedras ao mesmo tempo; (b) quando

você joga primeiro m_1 e depois m_2 e (c), quando você joga primeiro m_2 e depois m_1 ?

46P. Um canhão de 1.400 kg, capaz de disparar um projétil de 70,0 kg com uma velocidade de 556 m/s em relação ao cano da arma, é ajustado para um ângulo de 39° acima da horizontal. O canhão está montado sobre trilhos sem atrito, de modo que pode recuar livremente. (a) Qual a velocidade do projétil em relação à Terra? (b) Qual o ângulo em relação ao solo com que o projétil é lançado? (*Sugestão:* A componente horizontal do momento linear do sistema não se altera quando o canhão é disparado.)

Seção 9-7 Sistemas de Massa Variável: Um Foguete

47E. Um foguete está se afastando do sistema solar com uma velocidade de $6,0 \times 10^3$ m/s. O motor é ligado e passa a ejetar gases com uma velocidade de $3,0 \times 10^3$ m/s em relação ao foguete. A massa do foguete no momento em que o motor é ligado é $4,0 \times 10^4$ kg e ele passa a experimentar uma aceleração de $2,0$ m/s². (a) Qual o empuxo do foguete? (b) A que taxa, em quilogramas por segundo, o combustível é ejetado durante o voo?

48E. Uma sonda espacial de 6.090 kg, viajando para Júpiter com uma velocidade de 105 m/s em relação ao Sol, aciona o motor, ejetando 80,0 kg de gases com uma velocidade de 253 m/s em relação à sonda. Supondo que os gases são ejetados no sentido oposto ao do movimento inicial da sonda, qual a sua velocidade final?

49E. Um foguete em repouso no espaço, em uma região em que a força gravitacional é desprezível, tem uma massa de $2,55 \times 10^5$ kg, da qual $1,81 \times 10^5$ kg são combustível. O consumo de combustível do motor é de 480 kg/s e a velocidade de escapamento dos gases é de 3,27 km/s. O motor é acionado durante 250 s. (a) Determine o empuxo do foguete. (b) Qual é a massa do foguete depois que o motor é desligado? (c) Qual é a velocidade final do foguete?

50E. Considere um foguete em repouso no espaço. Qual deve ser a razão de massas (razão entre a massa inicial e a massa final) para que, depois de ligado o motor, a velocidade final do foguete seja (a) igual à velocidade de escapamento dos gases e (b) o dobro da velocidade de escapamento dos gases?

51E. Durante uma missão lunar, é necessário aumentar a velocidade de uma espaçonave de 2,2 m/s quando está viajando a 400 m/s. A velocidade de saída dos gases é 1.000 m/s. Que fração da massa inicial da espaçonave deve ser queimada e ejetada para conseguir esse aumento de velocidade?

52E. Um vagão de estrada de ferro está se movendo com uma velocidade constante de 3,20 m/s debaixo de um elevador de cereais. O produto cai no vagão à razão de 540 kg/min. Qual o valor da força que deve ser aplicada ao vagão, desprezando-se o atrito, para que ele continue a se mover com a mesma velocidade?

53P. Um foguete de um estágio, em repouso em um certo referencial inercial, tem massa M quando o motor é ligado. Mostre que quando a massa diminui para $0,368M$ os gases que saem do motor estão em repouso em relação ao sistema de referência original.

54P. Um foguete de 6.100 kg é disparado verticalmente a partir da superfície da Terra. Se a velocidade de escapamento dos gases é 1.200 m/s, qual deve ser a massa de gás ejetada por segundo, se o empuxo (a) é igual ao peso do foguete e (b) é tal que o foguete recebe uma aceleração vertical inicial de 21 m/s²?

55P. Um trenó de 5,4 kg transportando 35 kg de areia desliza a partir do repouso por uma rampa de gelo com 90 m de comprimento e uma inclinação de 30° em relação à horizontal. A areia escorrega pelo fundo do trenó à razão de 2,3 kg/s. Quanto tempo leva o trenó para chegar ao final da

rampa? (*Sugestão:* Em vez de recorrer a cálculos complicados, verifique qual é a influência da massa de um corpo que está descendo um plano inclinado sobre a sua aceleração.)

56P. Duas longas barcas estão viajando na mesma direção e no mesmo sentido em águas tranquilas: uma com uma velocidade de 10 km/h, a outra com uma velocidade de 20 km/h. Quando estão passando uma pela outra, operários jogam carvão da mais lenta para a mais rápida à razão de 1.000 kg/min; veja a Fig. 9-38. Qual a força adicional que deve ser fornecida pelos motores das duas barcas para que continuem a viajar com as mesmas velocidades? Suponha que a transferência de carvão se dá perpendicularmente à direção de movimento da barcaça mais lenta e que a força de atrito entre as embarcações e a água não depende do seu peso.

57P. Um avião a jato está viajando a 180 m/s. O motor consome por segundo 68 m³ de ar, que têm uma massa de 70 kg. Esse ar é usado para queimar 2,9 kg de combustível por segundo. A energia resultante da queima é usada para comprimir os produtos da combustão e ejetá-los com uma velocidade de 490 m/s em relação à aeronave. Determine (a) o empuxo do motor e (b) a potência do motor em watts.

Seção 9-8 Sistemas de Partículas: Variações na Energia Cinética

58E. Um automóvel com passageiros tem um peso de 16.400 N e está viajando a 113 km/h quando o motorista freia até parar. O piso da estrada exerce uma força de atrito de 8.230 N sobre as rodas. Calcule a distância que o veículo percorre até parar, fazendo uso de considerações sobre energia.

59E. Você fica de pé e depois se agacha, fazendo com que o seu centro de massa se desloque 18 cm para baixo. Em seguida, salta para cima na vertical. A força média exercida sobre você pelo chão, enquanto há contato entre ambos, é o triplo do seu peso. Qual a sua velocidade para cima quando o seu centro de massa passa pela posição que ocupava quando você estava de pé?

60E. Uma mulher de 55 kg se agacha e depois salta para cima na vertical. Na posição agachada, seu centro de massa está 40 cm acima do piso; quando seus pés deixam o chão, o centro de massa está 90 cm acima do piso; no ponto mais alto do salto, está 120 cm acima do piso. (a) Qual a força média exercida sobre a mulher pelo piso, enquanto há contato entre ambos? (b) Qual a velocidade máxima atingida pela mulher?

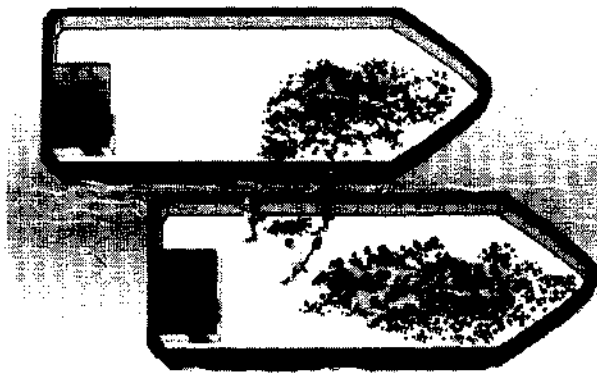


Fig. 9-38 Problema 56.

61P. Um jogador de hóquei de 110 kg patina a 3,0 m/s em direção a uma grade na beira do rink e se imobiliza segurando a grade com os braços estendidos. Durante o processo de frenagem, seu centro de massa se move 30 cm em direção à grade. (a) Qual a variação de energia

cinética do centro de massa do jogador durante este processo? (b) Qual a força média que o jogador exerce sobre a grade?

62P. Em muitas bicicletas, os freios são pedaços de borracha que podem ser comprimidos contra as rodas. Uma bicicleta desse tipo, que está viajando inicialmente a $40,2 \text{ km/h}$, é freada e pára depois que os pneus, que possuem um raio de $35,6 \text{ cm}$, descrevem 55 rotações. A massa da

bicicleta mais a do ciclista é de $51,1 \text{ kg}$. Suponha que os freios dianteiro e traseiro são idênticos e que os pneus não derrapam na pista. (a) Qual o trabalho realizado por um dos freios? (O pneu continua a girar enquanto sofre o atrito do freio.) (b) Suponha que a força exercida pelo freio sobre cada pneu é constante e calcule o seu valor. (c) Qual é a aceleração da bicicleta? (d) Qual é a força horizontal que o piso exerce sobre cada um dos pneus?

PROBLEMAS ADICIONAIS

63. Um corpo de $0,70 \text{ kg}$ está se movendo horizontalmente com uma velocidade de $5,0 \text{ m/s}$ quando se choca com uma parede vertical. O corpo ricocheteia com uma velocidade de $2,0 \text{ m/s}$. Qual o módulo da variação do momento linear durante o processo?

64. No instante em que uma partícula de $3,0 \text{ kg}$ tem uma velocidade de $6,0 \text{ m/s}$ no sentido negativo do eixo dos y , uma partícula de $4,0 \text{ kg}$ tem uma velocidade de $7,0 \text{ m/s}$ no sentido positivo do eixo dos x . Qual a velocidade do centro de massa do sistema das duas partículas?

65. Um corpo de $2,0 \text{ kg}$, que está deslizando em uma superfície sem atrito, sofre uma explosão e se divide em dois fragmentos de $1,0 \text{ kg}$.

Depois da explosão, as velocidades dos fragmentos são de $3,0 \text{ m/s}$ na direção norte e $5,0 \text{ m/s}$ em uma direção 30° ao norte do leste. Qual a velocidade original da massa de $2,0 \text{ kg}$?

66. Um automóvel de 1.000 kg está parado em um sinal de trânsito. No momento em que o sinal abre, o automóvel começa a se mover com uma aceleração constante de $4,0 \text{ m/s}^2$. No mesmo instante, um caminhão de 2.000 kg , viajando com uma velocidade constante de $8,0 \text{ m/s}$, ultrapassa o automóvel. (a) A que distância do sinal de trânsito está o centro de massa do sistema automóvel-caminhão no tempo $t = 3,0 \text{ s}$? (b) Qual a velocidade do centro de massa do sistema automóvel-caminhão nesse momento?