

ROLAMENTO, TORQUE E MOMENTO ANGULAR

12



Em 1897, um trapezista europeu executou o primeiro salto mortal triplo, durante o vôo do trapézio até as mãos de seu parceiro.

Durante os 85 anos seguintes, vários trapezistas tentaram realizar um salto mortal quádruplo, mas só em 1982 ele foi executado em público: Miguel Vazquez, do Circo Ringling Bros. e Barnum & Bailey girou o seu corpo em quatro círculos completos, em pleno ar, antes de ser agarrado por seu irmão Juan. Os dois ficaram atônitos com seu feito. Por que foi tão difícil conseguir realizá-lo e qual foi o princípio da Física que tornou possível (finalmente) executar aquele salto?

12-1 Rolamento

Quando uma bicicleta se move em linha reta, o centro de cada uma das rodas se desloca para a frente executando um movimento de translação pura. Entretanto, um ponto qualquer localizado no aro da roda segue uma trajetória mais complexa, como mostra a Fig. 12-1. Nesta seção, analisaremos o rolamento de uma roda considerando-o, primeiramente, como a combinação de uma translação pura com uma rotação pura e, em seguida, apenas como rotação.

O Rolamento Descrito como uma Combinação de Rotação e Translação

Imagine que você esteja observando a roda de uma bicicleta que passa a uma velocidade constante, rolando suavemente, sem deslizar. Como mostra a Fig. 12-2, o centro de massa O da roda move-se para a frente a uma velocidade constante v_{cm} .

O ponto P , onde a roda e o chão estão em contato, também se move para a frente com velocidade v_{cm} , de modo que ele está sempre situado diretamente abaixo do ponto O .

Durante um intervalo de tempo t , você vê os pontos O e P moverem-se para a frente, percorrendo uma distância s . O ciclista vê a roda girar um ângulo θ em torno do seu centro, enquanto o ponto da roda que tocava o chão no início de t descreve um arco de comprimento s . A Eq. 11-15 relaciona o comprimento do arco s com o ângulo de rotação θ :

$$s = R\theta \quad (12-1)$$

onde R é o raio da roda. A velocidade linear v_{cm} do centro da roda (que é o centro de massa desta roda uniforme) é ds/dt , e a velocidade angular ω da roda em torno do seu centro é $d\theta/dt$. Assim, derivando a Eq. 12-1 em relação ao tempo, obtemos

$$v_{cm} = \omega R \quad (\text{rolamento}) \quad (12-2)$$



Fig. 12-1 Fotografia de um disco durante o rolamento, feita com múltiplas exposições. Pequenas lâmpadas foram presas ao disco, uma no centro e outra na borda. Esta última traça uma curva denominada *ciclóide*.

(Observe que a Eq. 12-2 vale apenas se a roda girar suavemente, isto é, sem deslizar sobre o solo.)

A Fig. 12-3 mostra que o movimento de rolamento de uma roda é uma combinação de dois movimentos: um puramente translacional e outro puramente rotacional. A Fig. 12-3a mostra o movimento puramente rotacional (como se o eixo de rotação que passa pelo centro estivesse estacionário): todos os pontos da roda giram em torno do centro com velocidade angular ω . (Este é o tipo de movimento que estudamos no Cap. 11.) Todos os pontos situados na borda externa da roda têm velocidade linear v_{cm} , dada pela Eq. 12-2. A Fig. 12-3b mostra o movimento puramente translacional (como se a roda não estivesse rolando): cada ponto da roda se move para a direita com velocidade v_{cm} .

A combinação das Figs. 12-3a e 12-3b dá origem à Fig. 12-3c, que mostra o movimento de rolamento real executado pela roda. Observe que, nesta combinação de movimentos, a parte inferior da roda (no ponto P) está estacionária, enquanto a parte superior (no ponto T) se move a uma velocidade igual a $2v_{cm}$, mais rapidamente que qualquer outra parte da roda. Esses resultados são mostrados na Fig. 12-4, que é uma fotografia de uma roda de bicicleta se movendo. Os raios próximos do topo da roda aparecem borrados, enquanto os da parte inferior estão bem mais nítidos, o que mostra que ela se move mais rapidamente na parte superior que na inferior.

O movimento de qualquer corpo circular rolando suavemente sobre uma superfície pode ser decomposto em um

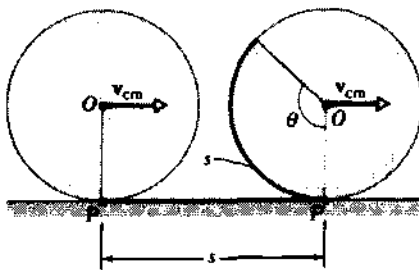


Fig. 12-2 O centro de massa O de uma roda que está rolando percorre uma distância s com velocidade v_{cm} , enquanto que a roda gira um ângulo θ . O ponto de contato P , entre a roda e a superfície sobre a qual está rolando, também percorre uma distância s .

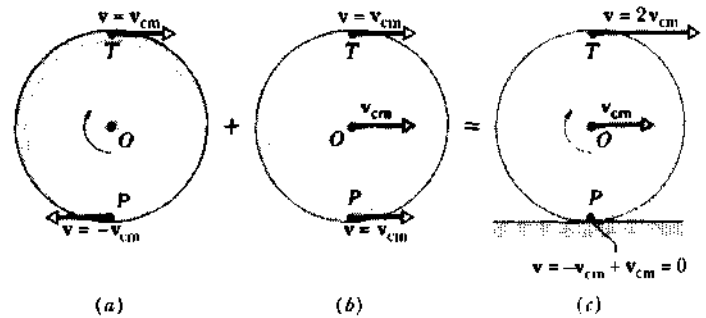


Fig. 12-3 O rolamento de uma roda, visto como uma combinação de um movimento puramente rotacional com outro puramente translacional. (a) O movimento puramente rotacional: todos os pontos da roda movem-se com a mesma velocidade angular ω . Todos os pontos que estão sobre a borda externa da roda movem-se com a mesma velocidade linear $v = v_{cm}$. As velocidades lineares v de dois destes pontos, no topo (T) e na base (P) da roda, são mostradas na figura. (b) O movimento puramente translacional: todos os pontos da roda movem-se para a direita com a mesma velocidade linear v_{cm} , idêntica à do centro da roda. (c) O movimento de rolamento da roda é a combinação de (a) e (b).

movimento puramente translacional e outro puramente rotacional, como nas Figs. 12-3a e 12-3b.

O Rolamento Visto como Rotação Pura

A Fig. 12-5 sugere um outro modo de analisar o rolamento de uma roda considerando-o, agora, como sendo uma rotação pura em torno de um eixo que passa pelo ponto em que ela toca o solo, durante todo o tempo em que se move, ou seja, um eixo que passa pelo ponto P na Fig. 12-3c e que é perpendicular ao plano da figura. Os vetores mostrados na Fig. 12-5 representam as velocidades instantâneas de vários pontos da roda durante o rolamento.

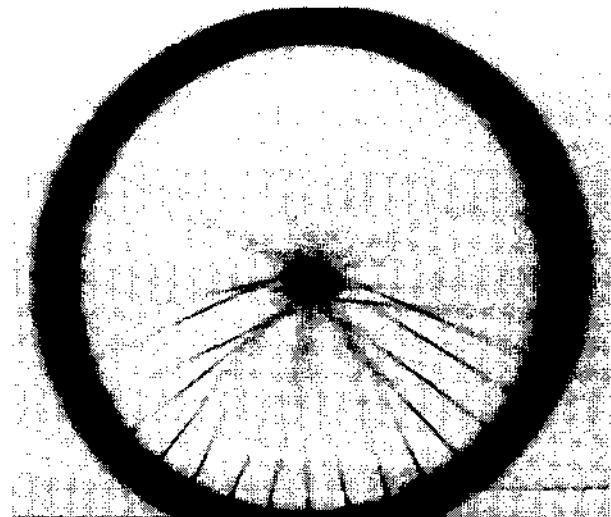


Fig. 12-4 Fotografia de uma roda de bicicleta ao se mover. Os raios próximos à parte superior da roda aparecem mais borrados que os que estão próximos à base, porque se movem mais depressa, como mostra a Fig. 12-3c.

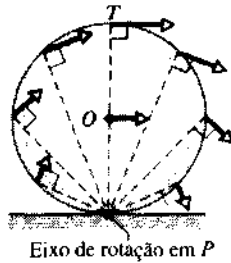


Fig. 12-5 O rolamento pode ser visto como uma rotação pura, com velocidade angular ω , em torno de um eixo que passa por P . Os vetores mostram as velocidades lineares instantâneas de alguns pontos da roda. Você pode obter esses vetores combinando os movimentos rotacional e translacional, como na Fig. 12-3.

Pergunta. Para um observador estacionário, qual é o valor da velocidade angular da roda de bicicleta, em torno desse novo eixo?

Resposta. A mesma velocidade angular ω que o ciclista atribui à roda, ao observá-la em rotação pura em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa.

Vamos usar esta resposta para calcular a velocidade linear do topo da roda, do ponto de vista de um observador estacionário. Sendo R o raio da roda, o topo está situado a uma distância $2R$ do eixo que passa por P na Fig. 12-5, de modo que a sua velocidade linear deve ser (usando a Eq. 12-2)

$$v_{\text{topo}} = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v_{\text{cm}}$$

o que concorda inteiramente com a Fig. 12-3c. Você pode fazer uma verificação semelhante para as velocidades lineares dos pontos O e P na Fig. 12-3c.

A Energia Cinética

Vamos agora calcular a energia cinética da roda, medida pelo observador estacionário. Se considerarmos que o rolamento é uma rotação pura em torno de um eixo que passa por P na Fig. 12-5, teremos

$$K = \frac{1}{2}I_P\omega^2 \quad (12-3)$$

onde ω é a velocidade angular da roda e I_P é o seu momento de inércia em torno do eixo que passa por P . Usando o teorema dos eixos paralelos (Eq. 11-25), temos

$$I_P = I_{\text{cm}} + MR^2, \quad (12-4)$$

onde M é a massa da roda e I_{cm} é o seu momento de inércia em torno de um eixo que passa através do centro de massa. Substituindo a Eq. 12-4 na Eq. 12-3, obtemos

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

e, usando a relação $v_{\text{cm}} = \omega R$ (Eq. 12-2), temos então

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 \quad (12-5)$$

Podemos interpretar o primeiro termo ($\frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2$) como sendo a energia cinética associada à rotação da roda em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa (como na Fig. 12-3a), enquanto o segundo termo ($\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$) pode ser interpretado como sendo a energia cinética associada ao movimento de translação da roda (conforme mostra a Fig. 12-3b).

O Papel do Atrito

Se a roda girar com velocidade constante, como mostra a Fig. 12-2, não haverá tendência de ocorrer deslizamento no ponto de contato P e, deste modo, nenhuma força de atrito atuará sobre a roda naquele ponto. No entanto, se uma força for aplicada sobre a roda, alterando a velocidade v_{cm} do seu centro de massa ou a velocidade angular ω em torno do centro, então haverá a tendência de ocorrer deslizamento da roda em P e uma força de atrito agirá sobre a roda, no ponto de contato, opondo-se àquela tendência. Até que a roda comece realmente a deslizar, atuará sobre ela uma força de atrito *estático* f_s . Se a roda começar a deslizar, passará a atuar sobre ela uma força de atrito *cinético* f_k .

Na Fig. 12-6a, uma roda desce um plano inclinado. O peso Mg atua no seu centro de massa. Como a força Mg não possui braço de alavanca em relação ao centro da roda, ela não pode exercer torque em torno do centro e, deste modo, não pode fazer com que a roda inicie uma rotação. Entretanto, como Mg tende a fazer a roda deslizar sobre o plano inclinado, uma força de atrito atua sobre a roda em P , a parte que está em contato com o plano, opondo-se ao deslizamento. Esta força, que aponta para cima ao longo do plano inclinado, *possui* um braço de alavanca relativamente ao centro, que é o raio da roda. Deste modo, esta força de atrito produz um torque em torno do centro e faz com que a roda entre em rotação.

Na Fig. 12-6b, faz-se com que uma roda gire cada vez mais rápido à medida que rola sobre uma superfície plana,

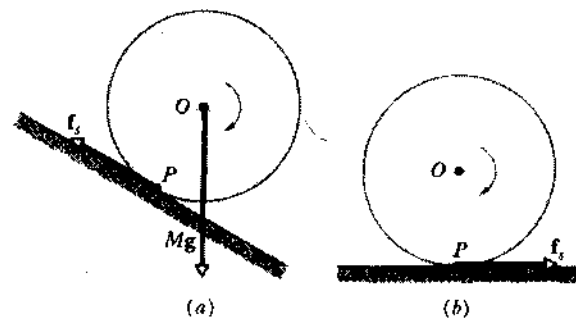


Fig. 12-6 (a) Uma roda desce girando em um plano inclinado sem deslizar. Uma força de atrito estático f_s atua sobre a roda em P , opondo-se à tendência da roda ao deslizamento, devido ao peso Mg . (b) Uma roda gira horizontalmente sem deslizar, enquanto sua velocidade angular aumenta. Uma força de atrito estático f_s atua sobre ela em P , opondo-se à tendência da roda ao deslizamento. Se em (a) ou (b) ela deslizar, a força de atrito será f_k , uma força de atrito cinético.

como ocorre com uma bicicleta ao ser acelerada. O acréscimo no valor de ω tende a fazer com que a parte inferior da roda deslize para a esquerda. Uma força de atrito, cujo sentido aponta para a direita, atua sobre a roda em P , opondo-se à tendência ao deslizamento. (Esta força de atrito é a força externa que atua sobre o sistema bicicleta-ciclista, fazendo-o acelerar.)

EXEMPLO 12-1 Um disco cilíndrico sólido e uniforme, de massa M de 1,4 kg e raio R de 8,5 cm, rola sobre uma mesa horizontal a uma velocidade v de 15 cm/s.

a. Qual é a velocidade instantânea da parte superior do disco?

Solução Quando se fala da velocidade de um objeto que rola, sempre nos referimos à velocidade do seu centro. Observando a Fig. 12-3c, vemos que a velocidade do topo do disco é exatamente duas vezes aquele valor, ou seja,

$$v_{\text{topo}} = 2v_{\text{cm}} = (2)(15 \text{ cm/s}) = 30 \text{ cm/s.} \quad (\text{Resposta})$$

b. Qual é a velocidade angular ω do disco?

Solução Da Eq. 12-2, temos

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v_{\text{cm}}}{R} = \frac{15 \text{ cm/s}}{8,5 \text{ cm}} = 1,8 \text{ rad/s} \\ &= 0,28 \text{ rev/s.} \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

Esse valor é o mesmo, tanto para um eixo de rotação passando por P , na Fig. 12-5, quanto para um eixo que passa pelo centro de massa.

c. Qual é a energia cinética K do disco?

Solução Fazendo $I_{\text{cm}} = (1/2)MR^2$ e usando a relação $v_{\text{cm}} = \omega R$ na Eq. 12-5, obtemos

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}MR^2\right)(v_{\text{cm}}/R)^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 = \frac{3}{4}Mv_{\text{cm}}^2 \\ &= \frac{3}{4}(1,4 \text{ kg})(0,15 \text{ m/s})^2 \\ &= 0,024 \text{ J} = 24 \text{ mJ.} \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

d. Qual é a fração da energia cinética que está associada ao movimento de translação e qual a que está relacionada com o movimento de rotação em torno de um eixo que passa pelo centro de massa?

Solução A energia cinética associada à translação é o segundo termo da Eq. 12-5, ou seja, $(1/2)Mv_{\text{cm}}^2$. A fração que procuramos é, então, usando a expressão obtida no item (c),

$$\text{frac} = \frac{\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2}{\frac{3}{4}Mv_{\text{cm}}^2} = \frac{2}{3} \text{ ou } 67\%. \quad (\text{Resposta})$$

Os 33% restantes estão associados à rotação em torno de um eixo que passa pelo centro de massa.

A razão entre a energia translacional e a rotacional depende do momento de inércia do objeto. Como mostra a Tabela 12-1, o objeto cuja massa está mais distante do eixo central de rotação (e que, portanto, possui maior momento de inércia) — que é o aro — tem a maior parte de sua energia cinética envolvida na rotação. E aquele cuja massa esteja mais próxima do eixo central de rotação (e que, portanto, tenha o menor momento de inércia) — que é a esfera — é o que tem a menor fração de sua energia cinética envolvida na rotação.

Tabela 12-1

Distribuição Relativa das Energias Cinéticas Translacional e Rotacional para Corpos em Rolamento

Objeto	Momento de Inércia I_{cm}	Porcentagem de Energia Armazenada na	
		Translação	Rotação
Aro	$1 MR^2$	50%	50%
Disco	$\frac{1}{2} MR^2$	67%	33%
Esfera	$\frac{2}{5} MR^2$	71%	29%
Genérico*	βMR^2	$100 \frac{1}{1 + \beta}$	$100 \frac{\beta}{1 + \beta}$

* β pode ser calculado, para qualquer objeto em rolamento, como I_{cm}/MR^2 .

As fórmulas apresentadas no final da Tabela 12-1 se aplicam ao objeto genérico em rolamento, que tem **parâmetro de momento de inércia** β . Este parâmetro vale 1 para o aro, $\frac{1}{2}$ para um disco e $\frac{2}{5}$ para uma esfera.

EXEMPLO 12-2 Uma bola de boliche, de raio $R = 11$ cm e massa M de 7,2 kg, desce rolando, a partir do repouso, uma rampa de comprimento L igual a 2,1 m. A rampa está inclinada de um ângulo θ igual a 34° em relação à horizontal; veja a esfera da Fig. 12-7. Qual é a velocidade da bola quando chega ao fim da rampa? Suponha que ela tenha densidade uniforme.

Solução O centro da bola percorre uma distância vertical $h = L \sin \theta$, de modo que a bola perde uma energia potencial gravitacional igual a $MgL \sin \theta$. Essa perda de energia potencial é igual ao ganho de energia cinética. Desse modo, podemos escrever (veja Eq. 12-5)

$$MgL \sin \theta = \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 \quad (12-6)$$

Vemos na Tabela 11-2(g) que, para uma esfera sólida, $I_{\text{cm}} = (2/5)MR^2$. Podemos também substituir ω pela razão equivalente v_{cm}/R . Substituindo essas duas quantidades na Eq. 12-6, teremos

$$MgL \sin \theta = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)(MR^2)(v_{\text{cm}}/R)^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$$

Resolvendo para v_{cm} , temos

$$\begin{aligned} v_{\text{cm}} &= \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)gL \sin \theta} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)(9,8 \text{ m/s}^2)(2,1 \text{ m})(\sin 34^\circ)} \\ &= 4,1 \text{ m/s.} \quad (\text{Resposta}) \end{aligned}$$

Observe que a resposta não depende nem da massa nem do raio da bola.

EXEMPLO 12-3 Neste exemplo vamos generalizar o resultado obtido no Exemplo 12-2. Um aro, um disco e uma esfera uniformes, com a

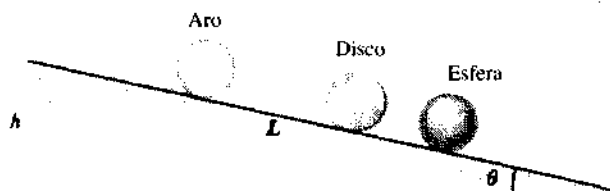


Fig. 12-7 Exemplos 12-2 e 12-3. Um aro, um disco e uma esfera rolam, partindo do repouso, num plano inclinado de ângulo θ . Embora tenham iniciado seu movimento partindo do repouso, na mesma posição e no mesmo instante, chegam à base do plano na ordem que aparece na figura.

mesma massa M e o mesmo raio R , são abandonados simultaneamente, partindo do repouso, do alto de uma rampa de comprimento L de 2,5 m e que faz um ângulo θ igual a 12° com a horizontal (Fig. 12-7).

a. Qual dos corpos alcança primeiro a base da rampa?

Solução A Tabela 12-1 nos dá a resposta. A esfera tem a maior parte de sua energia cinética (71%) envolvida no movimento de translação e, assim, ela ganha a corrida. Em seguida, vem o disco e, finalmente, o aro.

b. Quais são as velocidades dos corpos ao chegarem à base da rampa?

Solução O centro de massa de cada um dos corpos percorre a mesma distância vertical h , quando estes rolam a rampa. Assim, como acontece com um corpo em queda livre, a energia potencial do corpo sofre um decréscimo igual a Mgh , que é convertido em energia cinética. Deste modo, na base da rampa, as energias cinéticas dos três objetos são iguais. O modo como estas energias cinéticas se dividem nas formas translacional e rotacional depende da distribuição da massa de cada objeto.

Usando a Eq. 12-5, podemos escrever (fazendo $\omega = v_{cm}/R$)

$$\begin{aligned} Mgh &= \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 \\ &= \frac{1}{2}I_{cm}(v_{cm}^2/R^2) + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 \\ &= \frac{1}{2}(I_{cm}/R^2)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 \end{aligned} \quad (12-7)$$

Fazendo $h = L \sin \theta$ e resolvendo para obter v_{cm} , temos

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gL \sin \theta}{1 + I_{cm}/MR^2}}, \quad (\text{Resposta}) \quad (12-8)$$

que é a expressão algébrica da resposta que procuramos.

Observe que a velocidade não depende nem da massa nem do raio do objeto que rola, mas apenas da distribuição de sua massa em torno do seu eixo central, que aparece no termo I_{cm}/MR^2 . Uma bolinha de gude e uma bola de boliche terão a mesma velocidade na base da rampa e, assim, levarão o mesmo tempo para descê-la. Uma bola de boliche será mais rápida que um disco de qualquer massa ou raio, e quase todos os objetos serão mais rápidos que um aro. (Uma exceção aparece na Questão 8.)

Para o aro, temos (veja a Tabela 12-1) $I_{cm}/MR^2 = 1$ e, portanto, a Eq. 12-8 fornece

$$\begin{aligned} v_{cm} &= \sqrt{\frac{2gL \sin \theta}{1 + I_{cm}/MR^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(2)(9,8 \text{ m/s}^2)(2,5 \text{ m})(\sin 12^\circ)}{1 + 1}} \\ &= 2,3 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Um cálculo semelhante fornece $v_{cm} = 2,6 \text{ m/s}$ para o disco ($I_{cm}/MR^2 = 1/2$) e $2,7 \text{ m/s}$ para a esfera ($I_{cm}/MR^2 = 2/5$). Esse resultado confirma a previsão que fizemos em (a) de que a ordem de chegada nessa corrida seria esfera, disco e aro.

EXEMPLO 12-4 A Fig. 12-8 mostra um corpo esférico e uniforme de massa M e raio R que desce rolando um plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal. Desta vez, vamos analisar o movimento de forma mais direta, usando as leis de Newton em vez de considerações sobre a energia, como fizemos no Exemplo 12-3.

a. Qual é a aceleração linear do corpo durante o rolamento?

Solução A Fig. 12-8 mostra as forças que atuam sobre o corpo: o peso Mg , a força normal N e uma força de atrito estático f_s . Podemos considerar que o peso atua no centro de massa, que está localizado no centro

deste corpo uniforme. A força normal e a de atrito atuam na porção do corpo que está em contato com a rampa, no ponto P . Os braços de alavanca do peso e da força normal, em torno de um eixo que passa pelo centro do corpo, são iguais a zero. Deste modo, essas forças não podem provocar a rotação do corpo em torno daquele centro. A rotação do corpo em sentido horário é o resultado de um torque negativo devido à força de atrito; essa força possui um braço de alavanca igual a R em relação ao centro do corpo.

Aplicamos agora a forma linear da segunda lei de Newton ($\Sigma F = Ma$) ao longo da rampa, adotando o sentido da subida como sendo o positivo. Obtemos assim,

$$\Sigma F = f_s - Mg \sin \theta = Ma \quad (12-9)$$

Esta equação possui duas incógnitas f_s e a . Para obtermos outra equação nestas mesmas incógnitas, aplicamos em seguida a forma angular da segunda lei de Newton ($\Sigma \tau = I\alpha$) em torno de um eixo de rotação que passa pelo centro de massa. (Embora tenhamos obtido a relação $\Sigma \tau = I\alpha$, no Cap. 11, para um eixo fixo a um referencial inercial, ela vale para um eixo de rotação que passa pelo centro de massa de um corpo acelerado, desde que o eixo não mude de direção.) Deste modo, obtemos

$$\Sigma \tau = -f_s R = I_{cm}\alpha = I_{cm}\frac{a}{R}, \quad (12-10)$$

onde usamos a relação $\alpha = a/R$ (Eq. 11-18).

Resolvendo a Eq. 12-10 para obter a força de atrito, temos

$$f_s = -\frac{I_{cm}}{R^2}a \quad (12-11)$$

onde o sinal de menos nos recorda que a força de atrito f_s atua em sentido oposto ao da aceleração a . Substituindo a Eq. 12-11 na Eq. 12-9 e resolvendo-a para obter a , temos

$$a = -\frac{g \sin \theta}{1 + I_{cm}/MR^2}. \quad (\text{Resposta}) \quad (12-12)$$

Também poderíamos ter obtido uma segunda equação somando os torques e aplicando a segunda lei de Newton na forma angular em torno de um eixo que passa pelo ponto de contato P . Neste caso, o $\Sigma \tau$ consis-

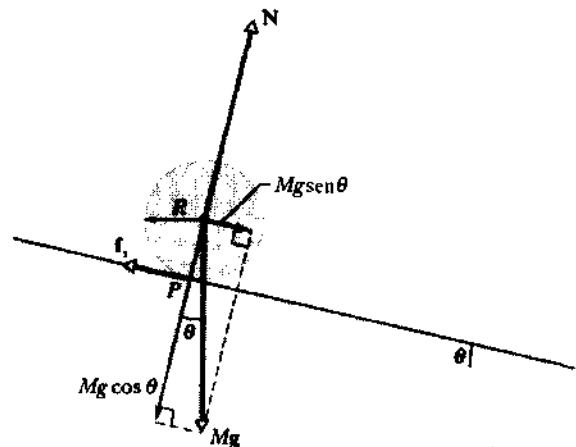


Fig. 12-8 Exemplo 12-4. Um corpo esférico, uniforme, de raio R , desce rolando um plano inclinado. As forças que atuam sobre ele são o peso Mg , a força normal N e uma força de atrito f_s que aponta no sentido de subida da rampa. (Por clareza, N foi deslocada ao longo de sua linha de ação até que a sua origem estivesse no centro do corpo.)

tiria apenas no torque devido à componente $Mg \sin \theta$, que atua no centro do corpo e tem braço de alavanca igual a R :

$$\sum \tau = - (Mg \sin \theta) (R) = I_P \alpha = I_P \frac{a}{R} \quad (12-13)$$

onde I_P é o momento de inércia em relação a um eixo que passa por P . Para encontrarmos I_P , usaremos o teorema dos eixos paralelos:

$$I_P = I_{cm} + MR^2. \quad (12-14)$$

Substituindo-se I_P dado pela Eq. 12-14 na Eq. 12-13 e resolvendo esta última para obter a , chegaríamos novamente à Eq. 12-12.

b. Qual é a força de atrito f_c ?

Solução Substituindo a Eq. 12-12 na Eq. 12-11, temos

$$f_c = Mg \frac{\sin \theta}{1 + MR^2/I_{cm}}. \quad (\text{Resposta}) \quad (12-15)$$

Examinando a Eq. 12-15, vemos que a força de atrito é menor do que $Mg \sin \theta$, que é a componente do peso que atua paralelamente à rampa. Isto deve ocorrer para que o objeto seja acelerado enquanto rola pela rampa.

A Tabela 12-1 mostra que, se o corpo que rola for um disco sólido, $I_{cm}/MR^2 = 1/2$. Assim, a aceleração e a força de atrito podem ser obtidas a partir das Eqs. 12-12 e 12-15. Temos, então:

$$a = -\frac{1}{2}g \sin \theta \quad \text{e} \quad f_s = \frac{1}{3}Mg \sin \theta$$

c. Qual é a velocidade do corpo quando ele chega à base da rampa, sabendo-se que esta tem comprimento L ?

Solução Como a aceleração do movimento é constante, podemos usar a relação

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (12-16)$$

Fazendo $x - x_0 = -L$, $v_0 = 0$ e usando o valor de a obtido na Eq. 12-12, teremos a Eq. 12-8 — o mesmo resultado a que chegamos usando o método da energia. Isso não é surpresa porque, afinal, tudo o que dissemos a respeito da energia mecânica é consistente com as leis de Newton.

12-2 O ioiô

O ioiô é um laboratório de Física que pode ser guardado no bolso. Quando ele rola pelo fio percorrendo uma distância h , perde uma quantidade mgh de sua energia potencial, mas adquire energia cinética translacional ($\frac{1}{2}m\bar{v}^2$) e rotacional ($\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$). Quando começa a subir novamente, perde energia cinética e ganha energia potencial.

Num ioiô moderno, o fio não é amarrado ao eixo, mas apenas passa em volta dele, formando uma argola. Quando ele desenrola todo o fio, ocorre um ligeiro impacto que remove toda a energia cinética translacional remanescente. Então, começa a girar, tendo apenas energia cinética rotacional. Ele permanece girando (“dormindo”) até que você o “acorde”, dando um puxão no fio para que este se enrole no eixo, fazendo-o tornar a subir. A sua energia cinética rotacional, quando o fio está todo esticado (quando ele está “dormindo”), pode ser aumentada consideravel-

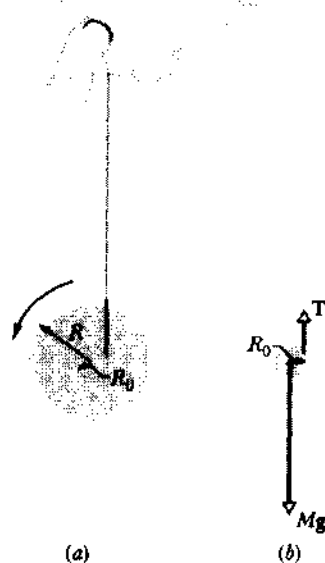


Fig. 12-9 (a) Um ioiô, visto em corte transversal. O fio, de espessura desprezível, está enrolado em torno de um eixo de raio R_0 . (b) Diagrama de forças do ioiô, em movimento descendente. Apenas o eixo foi representado.

mente se o jogarmos para baixo com alguma velocidade inicial v_{cm} e, conseqüentemente, ω , em vez de simplesmente abandoná-lo para que inicie seu movimento descendente a partir do repouso.

Vamos analisar o movimento do ioiô diretamente, usando a segunda lei de Newton. A Fig. 12-9a mostra um ioiô idealizado, no qual a espessura do fio é desprezível.* A Fig. 12-9b mostra um diagrama de forças, no qual apenas o seu eixo é mostrado. Aplicando-se a segunda lei de Newton, na sua forma linear, $\sum F = ma$, obtemos

$$\sum F = T - Mg = Ma. \quad (12-17)$$

onde M é a sua massa e T é a tensão no fio.

Aplicando-se a segunda lei de Newton na sua forma angular ($\sum \tau = I\alpha$) em torno de um eixo que passa pelo centro de massa, obtemos

$$\sum \tau = TR_0 = I\alpha. \quad (12-18)$$

onde R_0 é o raio do eixo do ioiô e I é o seu momento de inércia em torno do seu eixo central. A aceleração a do ioiô aponta para baixo (sendo, portanto, negativa). Do ponto de vista da Fig. 12-9, a sua aceleração angular α tem sentido anti-horário (portanto, é positiva) porque, ainda segundo a figura, o torque dado pela Eq. 12-18 tem este sentido. A

* Num ioiô real, a espessura do fio não pode ser desprezada, pois ela altera o raio efetivo do eixo do ioiô, que varia em função da quantidade de fio que está enrolada.

relação entre α e a é dada pela expressão $a = -\alpha R_0$. Resolvendo esta equação para obter $\alpha (= -a/R_0)$ e substituindo este valor na Eq. 12-18, encontramos

$$TR_0 = -\frac{Ia}{R_0}.$$

Depois de eliminarmos T , usando esta expressão e a Eq. 12-17, obtemos o valor de a

$$a = -g \frac{1}{1 + I/MR_0^2} \quad (12-19)$$

Portanto, um ioiô ideal desenrola o seu fio com aceleração constante. Para que a aceleração seja pequena, ele deve ser leve, com momento de inércia grande e ter um eixo cujo raio seja pequeno.

EXEMPLO 12-5 Um ioiô é composto de dois discos de latão cuja espessura b é igual a 8,5 mm e cujo raio R mede 3,5 cm. Os dois discos estão ligados por um eixo de raio $R_0 = 3,2$ mm.

a. Qual é o valor do momento de inércia em torno do eixo central? Despreze o momento de inércia do eixo. A densidade ρ do latão é de 8.400 kg/m³.

Solução O momento de inércia I de um disco em torno do seu eixo central é igual a $\frac{1}{2}(MR^2)$. Neste problema, podemos considerar os dois discos juntos como se fossem um só. Primeiramente, determinamos sua massa fazendo

$$\begin{aligned} M &= V\rho = (2)(\pi R^2)(b)(\rho) \\ &= (2)(\pi)(0,035 \text{ m})^2(0,0085 \text{ m})(8.400 \text{ kg/m}^3) \\ &= 0,550 \text{ kg}. \end{aligned}$$

O momento de inércia é, portanto,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}MR^2 = (\frac{1}{2})(0,550 \text{ kg})(0,035 \text{ m})^2 \\ &= 3,4 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

b. Um fio de comprimento $\ell = 1,1$ m e de espessura desprezível está enrolado em torno do eixo. Qual é a aceleração linear do ioiô quando ele rola descendo o fio, a partir do repouso?

Solução A Eq. 12-19 nos dá

$$\begin{aligned} a &= -g \frac{1}{1 + I/MR_0^2} \\ &= -\frac{9,8 \text{ m/s}^2}{1 + \frac{3,4 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{(0,550 \text{ kg})(0,0032 \text{ m})^2}} \\ &= -0,16 \text{ m/s}^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

A aceleração aponta para baixo e o seu valor é o mesmo, quer o ioiô esteja rolando para baixo ou para cima.

Observe que a quantidade I/MR_0^2 que aparece na Eq. 12-19 é simplesmente o parâmetro de momento de inércia β que aparece na Tabela 12-1. Para este ioiô, temos $\beta = 60$, um valor muito maior do que o de

qualquer um dos objetos listados na tabela. A sua aceleração é pequena e corresponde à de um aro que desce rolando um plano inclinado a 1,9°.

c. Qual é a tensão no seu fio?

Solução Podemos calcular a tensão substituindo o valor de a , obtido na Eq. 12-19 na Eq. 12-17, e resolvendo esta última para obter T . Encontraremos, então, que

$$T = \frac{Mg}{1 + MR_0^2/I}, \quad (12-20)$$

que mostra, como era de se esperar, que a tensão no fio é menor do que o peso do ioiô. Numericamente, temos

$$\begin{aligned} T &= \frac{(0,550 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)}{1 + (0,550 \text{ kg})(0,0032 \text{ m})^2/(3,4 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2)} \\ &= 5,3 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Este valor é o mesmo, quer ele esteja subindo, quer esteja descendo pelo fio.

12-3 Torque Revisitado

No Cap. 11, definimos o torque τ para um corpo rígido que pode girar em torno de um eixo fixo, sendo que cada partícula do corpo é forçada a mover-se em um círculo, de centro no eixo. Vamos agora generalizar a definição de torque de modo que ela se aplique a uma *partícula* (em vez de apenas um corpo rígido), que se move em relação a um *ponto fixo* (em vez de um eixo fixo), tomado geralmente como sendo a origem. A trajetória da partícula não precisa ser um círculo em torno daquele ponto e nem mesmo estar contida num plano.

A Fig. 12-10 mostra uma partícula localizada no ponto P no plano xy . Sua posição em relação à origem O é dada por um vetor posição \mathbf{r} . Uma única força \mathbf{F} , contida no plano xy , atua sobre a partícula, sendo que o vetor \mathbf{F} e uma extensão do vetor \mathbf{r} fazem um ângulo ϕ entre si.

O torque exercido sobre a partícula por essa força, em relação à origem O , é uma grandeza vetorial definida como

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (\text{definição de torque}) \quad (12-21)$$

De acordo com as regras do produto vetorial (veja a Fig. 3-19), $\boldsymbol{\tau}$ é perpendicular ao plano que contém \mathbf{r} e \mathbf{F} . Portanto, o vetor $\boldsymbol{\tau}$ da Fig. 12-10 é paralelo ao eixo z , no sentido de z crescente. Ao aplicarmos a regra da mão direita para encontrarmos o sentido de $\boldsymbol{\tau}$, é conveniente deslizarmos o vetor \mathbf{F} , sem mudarmos sua direção, até que a sua origem coincida com o ponto O , como mostra a Fig. 12-10. A origem do torque $\boldsymbol{\tau}$ também está em O .

A magnitude do vetor $\boldsymbol{\tau}$ é dada por (veja a Eq. 3-20)

$$\tau = rF \sin \phi \quad (12-22)$$

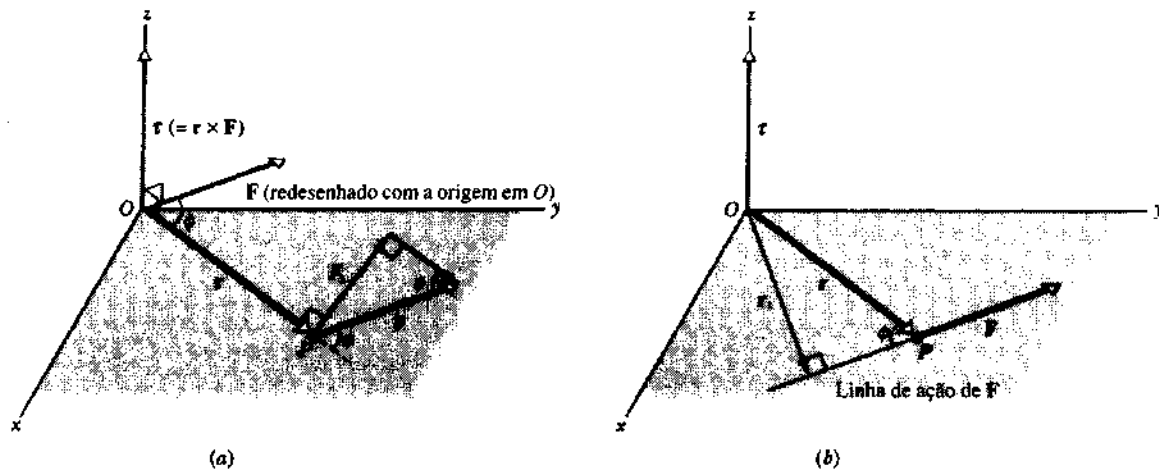


Fig. 12-10 Definindo o torque. Uma força \mathbf{F} , pertencente ao plano xy , atua sobre uma partícula localizada no ponto P . Esta força exerce um torque $\tau (= \mathbf{r} \times \mathbf{F})$ sobre a partícula, em relação à origem O . O vetor torque aponta na direção de z crescente. Sua magnitude é dada por rF_{\perp} em (a) e por $r_{\perp}F$ em (b).

A Eq. 12-22 pode ser reescrita como

$$\tau = rF_{\perp}, \quad (12-23)$$

onde F_{\perp} é a componente de \mathbf{F} perpendicular a \mathbf{r} (Fig. 12-10a). A Eq. 12-22 pode ainda ser reescrita como

$$\tau = r_{\perp}F \quad (12-24)$$

onde r_{\perp} (o braço de alavanca de \mathbf{F}) é a distância perpendicular entre O e a linha de ação de \mathbf{F} (Fig. 12-10b).

Observe que, se o ângulo entre a força \mathbf{F} e o vetor posição \mathbf{r} for 0 ou 180° , então, a Eq. 12-22 nos diz que o torque é zero. Obtemos o mesmo resultado usando a Eq. 12-23 (em que a componente perpendicular $F_{\perp} = 0$) e com a Eq. 12-24 (em que o braço de alavanca $r_{\perp} = 0$).

As Eqs. 12-22 a 12-24 concordam com a nossa definição de torque dada anteriormente, em que consideramos apenas o caso particular de uma força que atua sobre um corpo rígido forçado a girar em torno de um eixo fixo. (Veja as Eqs. 11-28 a 11-30.) Lembre-se de que identificamos o torque sobre um corpo rígido como sendo a *ação de rotação* de uma força aplicada: ele tende a girar o corpo; isto é, o vetor posição de uma parte qualquer do corpo gira em torno de um eixo fixo. Analogamente, o torque que atua sobre a partícula mostrada na Fig. 12-10 tende a fazer girar o vetor posição da partícula, \mathbf{r} , em torno da origem.

EXEMPLO 12-6 Na Fig. 12-11a, três forças, cada uma tendo módulo igual a $2,0 \text{ N}$, atuam sobre uma partícula, que está sobre o plano xz , num ponto P dado pelo vetor posição \mathbf{r} , onde $r = 3,0 \text{ m}$ e $\theta = 30^\circ$. A força \mathbf{F}_1 é paralela ao eixo x , a força \mathbf{F}_2 ao z e a \mathbf{F}_3 ao y . Qual é o torque devido a cada uma das forças, em relação à origem?

Solução As Figs. 12-11b e 12-11c são vistas superiores do plano xz , onde os vetores \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 foram redesenhados, tendo suas origens no ponto O , para mostrar melhor os ângulos que esses vetores fazem com o vetor \mathbf{r} .

O ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{F}_3 é de 90° . Aplicando a Eq. 12-22 para cada uma das forças, encontramos as magnitudes dos torques

$$\begin{aligned} \tau_1 &= rF_1 \sin \phi_1 = (3,0 \text{ m})(2,0 \text{ N})(\sin 150^\circ) \\ &= 3,0 \text{ N} \cdot \text{m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= rF_2 \sin \phi_2 = (3,0 \text{ m})(2,0 \text{ N})(\sin 120^\circ) \\ &= 5,2 \text{ N} \cdot \text{m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_3 &= rF_3 \sin \phi_3 = (3,0 \text{ m})(2,0 \text{ N})(\sin 90^\circ) \\ &= 6,0 \text{ N} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

(Resposta)

Para encontrarmos as direções desses torques, aplicamos a regra da mão direita, posicionando os dedos da mão direita de modo a girarem \mathbf{r} até alcançar \mathbf{F} , através do *menor* ângulo formado pelos dois vetores. O torque τ_i é perpendicular a \mathbf{r} e a \mathbf{F}_i (Fig. 12-11d) e sua direção faz um ângulo $\theta = 30^\circ$ com a direção de z decrescente. Na Fig. 12-11d, representamos \mathbf{F}_3 por meio de um círculo cruzado, \otimes , sugerindo a cauda de uma flecha. (Se \mathbf{F}_3 possuísse sentido oposto, seria representada por um ponto no interior de um círculo, \odot , sugerindo a ponta de uma flecha.) Todos esses torques são mostrados na Fig. 12-11e.

12-4 Momento Angular

Como todas as grandezas lineares, o momento linear tem um correspondente angular. A Fig. 12-12 mostra uma partícula com momento linear $\mathbf{p} (= m\mathbf{v})$ situada no ponto P , no plano xy . O **momento angular** ℓ dessa partícula, relativamente à origem O , é uma grandeza vetorial definida como

$$\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (12-25)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição da partícula em relação à origem O . Conforme aquela se move em relação a O , no sentido

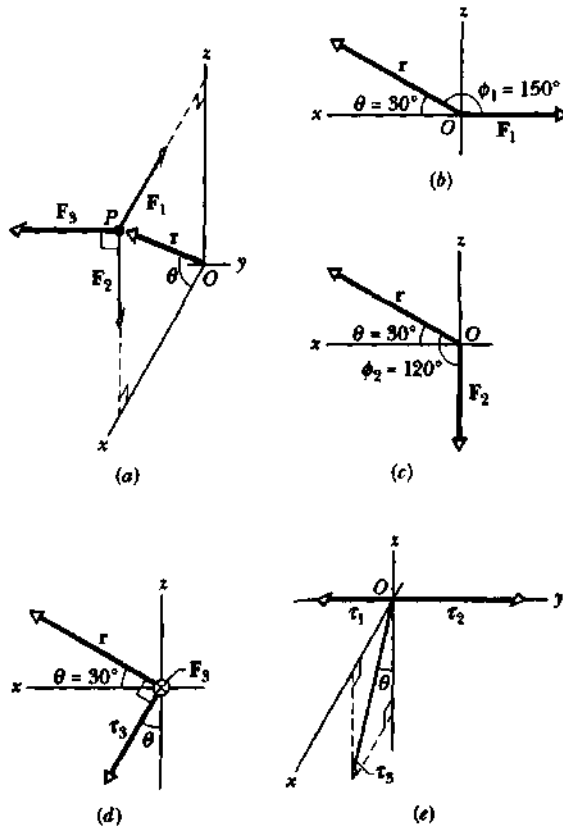


Fig. 12-11 Exemplo 12-6. (a) Uma partícula situada no ponto P sofre a ação de três forças, cada uma paralela a um dos eixos coordenados. O ângulo ϕ (usado na determinação do torque) é mostrado em (b) para F_1 e (c) para F_2 . (d) O torque τ_3 é perpendicular a r e a F_1 (o símbolo \otimes indica que F_1 é perpendicular ao plano da figura e aponta para dentro). (e) Os torques (relativamente à origem O) que atuam sobre a partícula.

de seu momento $\mathbf{p} (= m\mathbf{v})$, o vetor posição \mathbf{r} gira em torno de O . Para que uma partícula tenha momento angular, não é necessário que gire em torno de O . A comparação das Eqs. 12-21 e 12-25 mostra que a relação entre o momento angular e o linear é a mesma que existe entre o torque e a força. A unidade do momento angular no SI é o quilograma-metro-quadrado por segundo ($\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$), equivalente ao Joule.segundo (J.s).

O vetor momento angular ℓ na Fig. 12-12 é paralelo ao eixo z e aponta no sentido crescente de z . Assim, ℓ é positivo em concordância com a rotação em sentido anti-horário executada pelo vetor posição da partícula, \mathbf{r} , em torno do eixo z . (Um vetor ℓ negativo, consistente com uma rotação de \mathbf{r} em torno de z em sentido horário, apontaria no sentido decrescente de z .)

O módulo de ℓ é dado por

$$\ell = rmv \sin \phi \quad (12-26)$$

onde ϕ é o ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{p} . A Eq. 12-26 pode ser reescrita como

$$\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp} \quad (12-27)$$

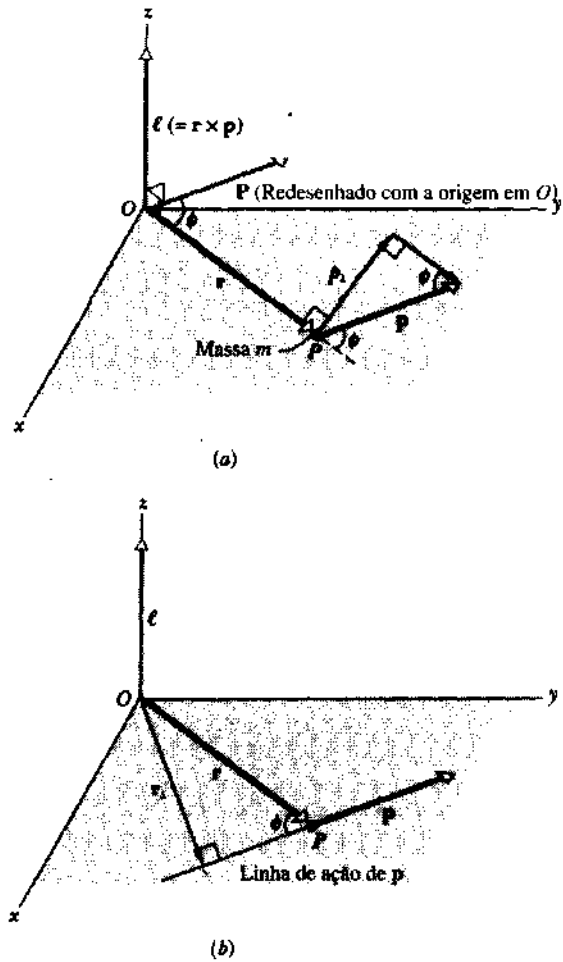


Fig. 12-12 Definindo o momento angular. Uma partícula de massa m , localizada no ponto P , possui momento linear $\mathbf{p} (= m\mathbf{v})$, pertencente ao plano xy . A partícula tem momento angular $\ell (= \mathbf{r} \times \mathbf{p})$, relativamente à origem O . O vetor momento angular aponta no sentido de z crescente. (a) A magnitude de ℓ é dada por $\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp}$. (b) A magnitude de ℓ é também dada por $\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv$.

onde p_{\perp} é a componente de \mathbf{p} perpendicular a \mathbf{r} (como na Fig. 12-12a), e $p_{\perp} = mv_{\perp}$. A Eq. 12-26 pode também ser reescrita como

$$\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv \quad (12-28)$$

onde r_{\perp} é a distância perpendicular entre O e um prolongamento de \mathbf{p} (como na Fig. 12-12b). Se uma partícula estiver se afastando da origem em linha reta ($\phi = 0$) ou se aproximando da origem em linha reta ($\phi = 180^\circ$), a Eq. 12-26 nos diz que a partícula não possui momento angular em torno daquela origem.

Do mesmo modo que o torque, o momento angular só tem sentido se for especificada uma origem. Além disso, se a partícula da Fig. 12-12 não estivesse situada no plano xy ou se o momento linear \mathbf{p} da partícula também não estivesse naquele plano, o momento angular ℓ não seria paralelo ao eixo z . A direção do vetor momento angular é sempre perpendicular ao plano formado pelos vetores \mathbf{r} e \mathbf{p} .

12-5 Segunda Lei de Newton na Forma Angular

A segunda lei de Newton escrita na forma

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (\text{uma partícula}) \quad (12-29)$$

expressa a íntima relação que existe entre força e momento linear para uma partícula. Já examinamos bastante o paralelismo existente entre grandezas lineares e angulares e isso nos dá a certeza de que existe também uma relação íntima entre o torque e o momento angular. Guiando-nos pela Eq. 12-29, podemos até mesmo supor que esta relação deve ser

$$\sum \tau = \frac{d\ell}{dt} \quad (\text{uma partícula}) \quad (12-30)$$

A Eq. 12-30 é, de fato, uma forma angular da segunda lei de Newton, para uma partícula:

A soma vetorial de todos os torques que atuam sobre uma partícula é igual à sua taxa de variação do momento angular, em relação ao tempo.

A Eq. 12-30 não possui significado, a menos que os torques τ e o momento angular ℓ sejam definidos relativamente à mesma origem.

Demonstração da Eq. 12-30

Começemos com a Eq. 12-25, a definição de momento angular:

$$\ell = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

Derivando* cada membro com relação ao tempo t , obtemos

$$\frac{d\ell}{dt} = m \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} \right). \quad (12-31)$$

Mas $d\mathbf{v}/dt$ é a aceleração \mathbf{a} da partícula e $d\mathbf{r}/dt$ é a sua velocidade \mathbf{v} . Assim, podemos reescrever a Eq. 12-31 como

$$\frac{d\ell}{dt} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{v})$$

Como $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ (o produto vetorial de qualquer vetor com ele mesmo é zero, porque o ângulo entre os dois vetores é necessariamente zero), temos

$$\frac{d\ell}{dt} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{a}.$$

Usemos agora a segunda lei de Newton ($\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$) para substituímos $m\mathbf{a}$ pelo seu equivalente, a soma vetorial das forças que atuam sobre a partícula, obtendo

$$\frac{d\ell}{dt} = \mathbf{r} \times \left(\sum \mathbf{F} \right) = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}). \quad (12-32)$$

Finalmente, a Eq. 12-21 mostra que $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ é o torque associado à força \mathbf{F} , de modo que a Eq. 12-32 se torna

$$\sum \tau = \frac{d\ell}{dt}.$$

Esta é a Eq. 12-30, a relação que desejávamos demonstrar.

EXEMPLO 12-7 Um pinguim de massa m cai do ponto A , localizado a uma distância horizontal d da origem O , partindo do repouso, como mostra a Fig. 12-13.

a. Qual é o momento angular do pinguim em torno de O ?

Solução O momento angular é dado pela Eq. 12-25 ($\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$); sua magnitude é (pela Eq. 12-26):

$$\ell = rp \sin \phi.$$

Onde $r \sin \phi = d$, não importando qual a distância percorrida pelo pinguim na queda, e $p = mv = m(gt)$. Assim, ℓ tem magnitude

$$\ell = mgt d. \quad (\text{Resposta}) \quad (12-33)$$

A regra da mão direita mostra que o vetor momento angular ℓ aponta para dentro do plano da Fig. 12-13, no sentido decrescente de z . Representamos ℓ através de um círculo cruzado, \otimes , na origem. O vetor ℓ muda com o tempo apenas em magnitude, permanecendo o seu sentido constante.

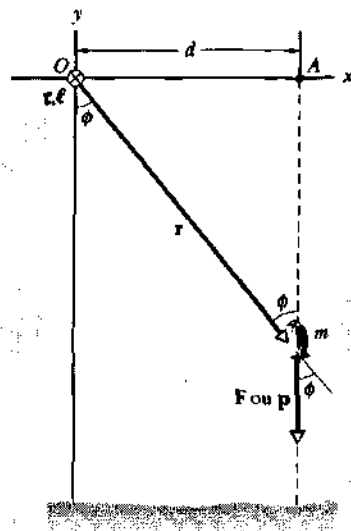


Fig. 12-13 Exemplo 12-7. Um pinguim de massa m cai verticalmente do ponto A . O torque τ e o momento angular ℓ do pinguim em queda, relativamente à origem O , apontam para dentro do plano da figura, em O .

* Ao derivar um produto vetorial, você deve ter o cuidado de não inverter a ordem das duas grandezas (no nosso caso, \mathbf{r} e \mathbf{v}) que formam o produto. (Veja a Eq. 3-21.)

b. Qual é o torque exercido pelo peso mg do pinguim em torno da origem O ?

Solução O torque é dado pela Eq. 12-21 ($\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$); sua magnitude é (pela Eq. 12-22):

$$\tau = rF \sin \phi$$

Mais uma vez, $r \sin \phi = d$ e $F = mg$. Portanto,

$$\tau = mgd = \text{uma constante.} \quad (\text{Resposta}) \quad (12-34)$$

Observe que o torque é simplesmente o produto da força mg pelo braço de alavanca d . A regra da mão direita mostra que o vetor torque τ aponta para dentro do plano da Fig. 12-13, no sentido decrescente de z , sendo assim paralelo a ℓ . (Note que também podemos obter a Eq. 12-34 derivando a Eq. 12-33 em relação a t e substituindo o resultado na Eq. 12-30.)

Vemos que τ e ℓ dependem fortemente da escolha da origem (através do valor de d). Se o pinguim cai da origem, temos $d = 0$ e, portanto, não há torque nem momento angular.

12-6 Momento Angular de um Sistema de Partículas

Voltemos agora nossa atenção para o movimento de um sistema de partículas em relação a uma origem dada. Observe que “um sistema de partículas” inclui um corpo rígido como caso particular. O momento angular total \mathbf{L} de um sistema de partículas é a soma (vetorial) dos momentos angulares individuais ℓ de cada uma das partículas:

$$\mathbf{L} = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \dots + \ell_i = \sum_{i=1}^n \ell_i \quad (12-35)$$

onde $i = (1, 2, 3, \dots)$ discrimina cada uma das partículas.

Com o tempo, os momentos angulares das partículas individuais podem mudar, seja por causa de interações com o sistema (entre as partículas individuais), seja por causa de influências externas que atuem sobre o sistema. Podemos encontrar a variação temporal do momento angular total \mathbf{L} do sistema, calculando a derivada temporal da Eq. 12-35. Assim,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\ell_i}{dt} \quad (12-36)$$

Pela Eq. 12-30, vemos que $d\ell_i/dt$ é simplesmente $\Sigma \tau_i$, a soma (vetorial) dos torques que atuam sobre a i -ésima partícula.

Alguns torques são *internos*, associados com forças que as partículas do sistema exercem umas sobre as outras; outros, são *externos*, associados com forças externas que atuam sobre o sistema. As forças internas se cancelam aos pares,* devido ao princípio da ação e reação de Newton. Portanto, ao somarmos os torques, temos que considerar apenas aqueles associados às forças externas. A Eq. 12-36 se torna, então

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (\text{sistema de partículas}) \quad (12-37)$$

* Devemos supor além disso que ambas as forças, em cada par ação-reação interna, têm a mesma linha de ação.

A Eq. 12-37 é a segunda lei de Newton para um sistema de partículas, expressa em termos de grandezas angulares, e é análoga a $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = d\mathbf{P}/dt$ (Eq. 9-23). A Eq. 12-37 estabelece que a soma (vetorial) dos *torques externos* que atuam sobre um sistema de partículas é igual à taxa de variação temporal do *momento angular* do sistema. A Eq. 12-37 só tem significado se os vetores torque e momento angular estiverem referidos à mesma origem. Num referencial inercial, a Eq. 12-37 pode ser aplicada a qualquer ponto. Num referencial acelerado (como, por exemplo, uma roda que gira num plano inclinado), a Eq. 12-37 só se aplica ao *centro de massa* do sistema.

12-7 Momento Angular de um Corpo Rígido que Gira em Torno de um Eixo Fixo

Consideraremos a seguir o momento angular para o caso particular em que o sistema de partículas constitui um corpo rígido em rotação. A Fig. 12-14a mostra esta situação: o corpo está limitado a girar em torno de um eixo fixo, que identificamos como sendo o eixo z , e que atravessa o corpo. A velocidade angular do corpo é ω .

Podemos determinar o momento angular do corpo que gira somando as componentes z dos momentos angulares dos elementos de massa do corpo. Na Fig. 12-14a, um elemento de massa Δm_i se move, em torno do eixo z , numa trajetória circular. A posição do elemento de massa em relação à origem O é dada pelo vetor posição \mathbf{r}_i . O raio da trajetória circular é $r_{\perp i}$, que é a distância perpendicular entre o elemento e o eixo z .

A magnitude do momento angular ℓ_i deste elemento de massa, relativamente ao ponto O , é dada pela Eq. 12-26:

$$\ell_i = (r_i)(p_i)(\sin 90^\circ) = (r_i)(\Delta m_i v_i)$$

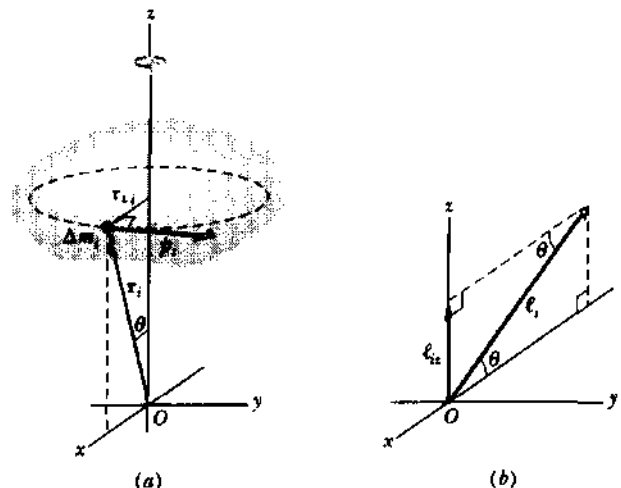


Fig. 12-14 (a) Um corpo rígido gira em torno do eixo z , com velocidade angular ω . Um elemento de massa do corpo, Δm_i , move-se em torno do eixo z num círculo de raio $r_{\perp i}$. Este elemento possui momento linear \mathbf{p}_i , e sua posição em relação à origem O é dada pelo vetor \mathbf{r}_i . A figura mostra Δm_i no instante em que $\mathbf{r}_{\perp i}$ está paralelo ao eixo x . (b) Momento angular ℓ_i do elemento de massa que aparece em (a), em relação à origem O . A componente z ℓ_{iz} de ℓ_i , também está representada.

Tabela 12-2

Outras Relações de Correspondência entre Translação e Rotação*

	Translação		Rotação
Força	\mathbf{F}	Torque	$\boldsymbol{\tau} (= \mathbf{r} \times \mathbf{F})$
Momento linear	\mathbf{p}	Momento angular	$\boldsymbol{\ell} (= \mathbf{r} \times \mathbf{p})$
Momento linear ^b	$\mathbf{P} (= \sum \mathbf{p}_i)$	Momento angular ^b	$\mathbf{L} (= \sum \boldsymbol{\ell}_i)$
Momento linear ^b	$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{cm}$	Momento angular ^c	$L = I\omega$
Lei de Newton ^b	$\Sigma \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$	Lei de Newton ^b	$\Sigma \boldsymbol{\tau}_{ext} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$
Lei de conservação ^d	$\mathbf{P} = \text{uma constante}$	Lei de conservação ^d	$\mathbf{L} = \text{uma constante}$

*Veja também a Tabela 11-3.

^bPara sistemas de partículas, inclusive corpos rígidos.^cPara um corpo rígido, em torno de um eixo fixo, sendo L a componente paralela àquele eixo.^dPara um sistema isolado.

onde p_i e v_i são, respectivamente, o momento linear e a velocidade linear do elemento de massa, e o ângulo entre \mathbf{r}_i e \mathbf{p}_i é igual a 90° . O vetor momento angular do elemento de massa da Fig. 12-14a, $\boldsymbol{\ell}_i$, é mostrado na Fig. 12-14b.

Estamos interessados na componente de $\boldsymbol{\ell}_i$ que é paralela ao eixo de rotação que, neste caso, é o eixo z . Esta componente z é

$$\ell_{iz} = \ell_i \sin \theta = (r_i \sin \theta) (\Delta m_i v_i) = r_{\perp i} \Delta m_i v_i$$

A componente z do momento angular total do corpo rígido é obtida somando-se as contribuições de todos os elementos de massa que constituem o corpo. Assim, como $v = \omega r_{\perp}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_{i=1}^n \ell_{iz} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i v_i r_{\perp i} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i (\omega r_{\perp i}) r_{\perp i} \\ &= \omega \left(\sum_{i=1}^n \Delta m_i r_{\perp i}^2 \right). \end{aligned} \quad (12-38)$$

Podemos remover ω do somatório, neste caso, porque ele é uma constante: tem o mesmo valor para todos os pontos do corpo rígido em rotação.

A quantidade $\sum \Delta m_i r_{\perp i}^2$ que aparece na Eq. 12-38 é o momento de inércia I do corpo em torno do eixo fixo (veja a Eq. 11-22). Assim, a Eq. 12-38 reduz-se a

$$L_z = I\omega \quad (\text{corpo rígido, eixo fixo}) \quad (12-39)$$

Eliminamos o subscrito z , porém você deve lembrar-se de que o momento angular definido pela Eq. 12-39 é apenas a componente do momento angular paralela ao eixo de rotação. Da mesma forma, I nessa equação é o momento de inércia do corpo em torno daquele mesmo eixo.

A Tabela 12-2, que complementa a Tabela 11-3, amplia a nossa lista de relações lineares e angulares correspondentes.

EXEMPLO 12-8 A Fig. 12-15 mostra a Terra girando em torno do seu eixo, enquanto descreve sua órbita ao redor do Sol.

a. Qual é o momento angular associado à rotação da Terra em torno do seu eixo?

Solução Da Eq. 12-39 e da Tabela 11-2(g), temos

$$L_{rot} = I\omega = \frac{1}{2}MR^2 \frac{2\pi \text{ rad}}{T}$$

onde M e R são a massa e o raio da Terra e $T (= 24 \text{ h} = 8,64 \times 10^4 \text{ s})$ é o tempo necessário para que a Terra execute uma rotação completa (T é o período de rotação). Assim,

$$\begin{aligned} L_{rot} &= \left(\frac{1}{2}\right)(5,98 \times 10^{24} \text{ kg})(6,37 \times 10^6 \text{ m})^2 \frac{2\pi}{8,64 \times 10^4 \text{ s}} \\ &= 7,1 \times 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

O vetor \mathbf{L}_{rot} é paralelo ao eixo de rotação da Terra, apontando (como mostra a regra da mão direita) do pólo Sul para o pólo Norte.

b. Qual é o momento angular associado ao movimento orbital da Terra em torno do Sol?

Solução Considerando a Terra como uma partícula e aplicando a Eq. 12-39, temos

$$L_{orb} = I\omega = MR^2 \frac{2\pi \text{ rad}}{T},$$

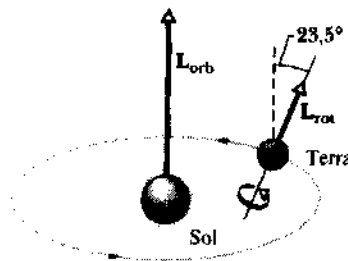


Fig. 12-15 Exemplo 12-8. Vista em perspectiva da Terra girando em torno do seu eixo, enquanto segue sua órbita em torno do Sol (suposta circular). Os vetores momento angular não foram desenhados em escala; na verdade, L_{orb} é cerca de 4×10^6 vezes maior que L_{rot} .

onde R é agora a distância média Terra-Sol e T ($= 1 \text{ ano} = 3,16 \times 10^7 \text{ s}$) é o período de revolução da Terra em torno do Sol. Assim,

$$L_{\text{orb}} = (5,98 \times 10^{24} \text{ kg})(1,50 \times 10^{11} \text{ m})^2 \frac{2\pi}{3,16 \times 10^7 \text{ s}} \\ = 2,7 \times 10^{40} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \quad (\text{Resposta})$$

O vetor L_{orb} é perpendicular ao plano da órbita da Terra. Devido à inclinação do eixo desta, os vetores momento angular orbital e rotacional fazem entre si um ângulo de $23,5^\circ$. Ambos os vetores permanecem constantes em magnitude e sentido, enquanto a Terra se move em sua órbita durante o ano.*

12-8 Conservação do Momento Angular

Até aqui, discutimos duas poderosas leis de conservação: a da energia e a do momento linear. Agora, estamos diante de uma terceira lei deste tipo, a conservação do momento angular. Começemos com a Eq. 12-37 ($\sum \tau_{\text{ext}} = dL/dt$), que é a segunda lei de Newton escrita na forma angular. Se nenhum torque externo resultante atuar sobre o sistema, esta equação se tornará $dL/dt = 0$, ou seja,

$$L = \text{constante} \quad (12-40)$$

Esta equação representa a **lei da conservação do momento angular**:

Se nenhum torque externo atuar sobre um sistema, o (vetor) momento angular L deste sistema permanecerá constante, não importando quais sejam as alterações que ocorram dentro do sistema.

A Eq. 12-40 é uma equação vetorial e, como tal, é equivalente a três equações escalares que correspondem à conservação do momento angular em três direções mutuamente perpendiculares.

Semelhante às outras duas leis que já discutimos, a Eq. 12-40 permanece válida mesmo fora dos limites da mecânica newtoniana. Ela vale para partículas cujas velocidades são próximas à da luz (o domínio da teoria da relatividade), e permanece válida no universo das partículas subatômicas (governado pela Mecânica Quântica). Jamais foi encontrada uma exceção para essa lei.

12-9 Conservação do Momento Angular: Alguns Exemplos

1. O pião humano. A Fig. 12-16 mostra um estudante sentado num banco que pode girar livremente em torno de

um eixo vertical. O estudante, que foi posto em rotação com uma velocidade angular inicial ω_i , reduzida, segura dois halteres com os braços abertos. Seu vetor momento angular L aponta para a parte superior da figura, ao longo do eixo vertical.

O instrutor pede, então, que o estudante encolha os braços, puxando-os para junto do corpo; isto faz com que o seu momento de inércia seja reduzido do valor inicial I_i para um valor inferior I_f porque a massa está agora concentrada numa região mais próxima do eixo de rotação. Sua velocidade de rotação aumenta, consideravelmente, de ω_i a ω_f . Para diminuir sua velocidade, o estudante só precisa estender os braços novamente.

Não há nenhum torque externo atuando sobre o sistema constituído pelo estudante, o banco e os halteres. Deste modo, o momento angular do sistema em torno do eixo de rotação deve permanecer constante, não importando o modo como o estudante movimentar os pesos. Das Eqs. 12-39 e 12-40, temos

$$L = I\omega = \text{uma constante}$$

ou

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f.$$

Na Fig. 12-16a, a velocidade angular do estudante, ω_i , é relativamente baixa e o seu momento de inércia, I_i , relativamente grande. Na Fig. 12-16b, a velocidade angular precisa ser maior a fim de compensar a diminuição do momento de inércia.

2. O salto ornamental. A Fig. 12-17 mostra uma atleta executando um mergulho com salto mortal. Como você já deveria supor, o seu centro de massa segue uma trajetória parabólica. Ela deixa a prancha com um momento angular

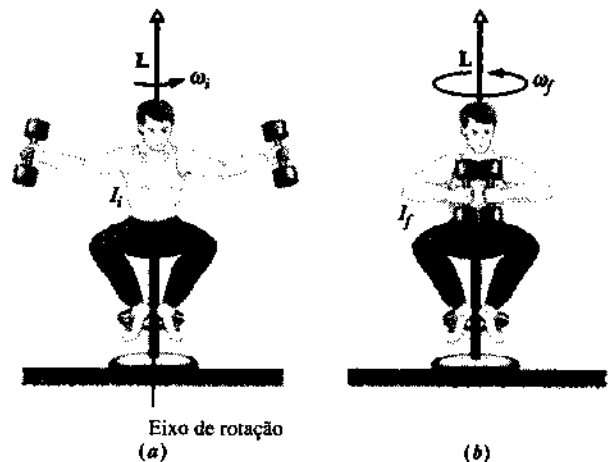


Fig. 12-16 (a) O estudante possui momento de inércia relativamente grande, enquanto sua velocidade angular é relativamente pequena. (b) Diminuindo seu momento de inércia, o estudante aumenta automaticamente sua velocidade angular. O momento angular do sistema, L , permanece constante.

*Esta afirmativa é apenas aproximada, pois, devido à influência dos outros planetas, a força gravitacional sobre a Terra não é central, logo, seu momento angular orbital não se conserva. Além disso, como a Terra não é perfeitamente esférica, as forças gravitacionais — devido ao Sol e à Lua — exercem um torque que faz com que o eixo de rotação da Terra descreva um cone no espaço, um movimento chamado **precessão dos equinócios**. (N. do R.)

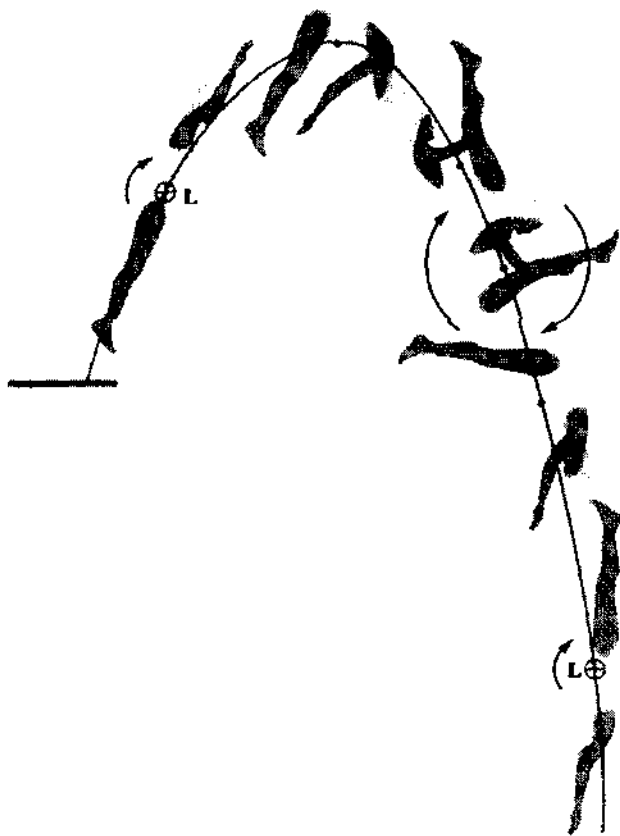


Fig. 12-17 O momento angular L da atleta é constante durante o salto, sendo representado pela cauda de uma seta, \otimes , que é perpendicular ao plano da figura. Observe também que o centro de massa (veja os pontos) segue uma trajetória parabólica.

L bem definido, em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa, representado por um vetor que aponta para dentro do plano da Fig. 12-17, perpendicularmente à página. Enquanto está no ar, a atleta constitui-se num sistema isolado, no que concerne a torques externos, e o seu momento angular não pode se alterar. Juntando seus braços e pernas na *posição dobrada*, a atleta pode reduzir consideravelmente o seu momento de inércia em torno do eixo de rotação e, deste modo, aumentar muito a sua velocidade angular. Estendendo os braços e pernas (na *posição aberta*) no final do salto, ela aumenta o seu momento de inércia e, assim, diminui sua velocidade angular de modo a entrar na água o mais verticalmente possível, espalhando uma quantidade mínima de água. Mesmo num salto mais complicado, envolvendo movimentos em parafuso, o momento angular do atleta se conserva em módulo, direção e sentido, durante todo o tempo de execução do salto.

3. Estabilizando um satélite (ou um disco). Antes que um satélite seja lançado do compartimento de carga de um ônibus espacial (veja Fig. 12-18), faz-se com que ele entre em rotação em torno do seu eixo. Por quê?

É mais difícil alterar-se a direção da velocidade de uma partícula (por meio de um impulso lateral), quando o seu momento linear é grande. Do mesmo modo, a orientação



Fig. 12-18 Lançamento do satélite de comunicações mexicano Morelos-D, do compartimento de carga de um ônibus espacial. Faz-se o satélite girar em torno do seu eixo central para estabilizar a sua orientação, enquanto ele se dirige à sua órbita.

de um corpo que está girando é mais difícil de ser alterada (por meio de um torque externo) quando o momento angular do corpo é grande. A orientação de um satélite que *não* estivesse girando, poderia ser mudada até mesmo por um pequeníssimo torque externo devido, por exemplo, à tênue atmosfera residual ou à pressão de radiação da luz do Sol. Já a orientação de um satélite que está girando *não* é afetada por tais fatores.

O processo pelo qual um disco é estabilizado durante o voo é exatamente o mesmo, sendo este um exemplo mais conhecido.

4. Orientação de um veículo espacial. Quando um sistema isolado de partículas não possui momento angular, a sua orientação no espaço pode ser mudada através de alterações internas ocorridas no sistema? Se ele não for um corpo rígido, a resposta é: "Sim, sob certas condições."

A Fig. 12-19, que representa um veículo espacial dotado de um volante firmemente preso à sua estrutura, sugere um método para controlar a orientação. O conjunto *veículo espacial + volante* forma um sistema isolado. Se o momento angular L do sistema for igual a zero, ele deverá permanecer assim.

Para mudar a orientação do veículo espacial, o volante é acionado, como na Fig. 12-19a. O veículo começa a girar em sentido oposto, para manter nulo o momento angular do sistema. Quando o volante retornar ao repouso, o veículo também deixará de girar, mas sua orientação terá mudado, como na Fig. 12-19b. Em nenhum instante durante esta manobra o momento angular do sistema *veículo espacial + volante* tem valor diferente de zero.

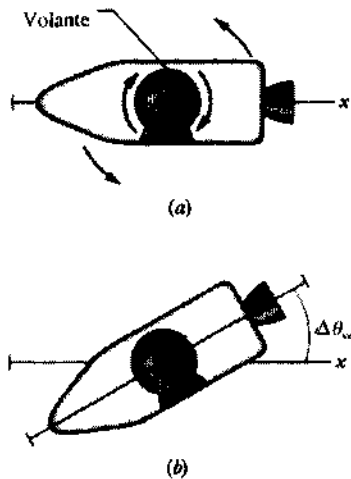


Fig. 12-19 (a) Um veículo espacial idealizado, dotado de um volante. Se o volante for posto para girar em sentido horário, como mostra a figura, o veículo irá girar em sentido anti-horário, porque o momento angular total deve permanecer nulo. (b) Quando o volante pára, a nave também pára de girar, mas a orientação do seu eixo terá sido alterada de um ângulo $\Delta\theta_{ve}$.

A conservação do momento angular exige que

$$I_{ve}\omega_{ve} + I_{vo}\omega_{vo} = 0 \quad (12-41)$$

durante todo o tempo. (O subscrito *ve* refere-se ao veículo espacial e *vo* ao volante.) As duas velocidades angulares têm sinais opostos, correspondendo aos sentidos opostos das rotações do veículo e do volante. Como $\omega = \Delta\theta/\Delta t$, podemos escrever a Eq. 12-41 como

$$I_{ve}\Delta\theta_{ve} = -I_{vo}\Delta\theta_{vo}$$

ou

$$\Delta\theta_{ve} = -\frac{I_{vo}}{I_{ve}}\Delta\theta_{vo}$$

Onde $\Delta\theta_{ve}$ é o ângulo que o veículo espacial gira num dado intervalo de tempo, enquanto $\Delta\theta_{vo}$ é o ângulo de giro do volante no mesmo intervalo de tempo. O sinal negativo nos lembra que esses dois ângulos têm sentidos opostos. Como $I_{vo} \ll I_{ve}$, o volante precisa executar muitas revoluções para que a nave gire um ângulo pequeno. (Na verdade, estudos de engenharia demonstram que os retrofoguetes são mais eficientes que os volantes, quando se trata de alterar a orientação de naves espaciais.)

Um fato interessante ocorreu com a nave *Voyager 2*, na sua passagem pelo planeta Urano, em 1986. A nave sofria uma rotação indesejável toda vez que o seu gravador era acionado em alta velocidade. A equipe de Terra, no Laboratório de Propulsão a Jato, teve de programar o computador de bordo para acionar os retrofoguetes sempre que o gravador fosse ligado ou desligado, de modo a contrabalançar o seu efeito.

5. A incrível estrela que encolhe. Quando a intensidade das reações nucleares que ocorrem no núcleo de uma estrela diminui, ela pode entrar em colapso, gerando grandes pressões no seu interior. O colapso pode chegar ao ponto de reduzir o raio da estrela desde um valor próximo ao do nosso Sol até o valor incrivelmente pequeno de alguns poucos quilômetros. Ela se torna, então, uma *estrela de nêutrons*, assim chamada porque o material do qual ela é feita foi comprimido até formar um gás de nêutrons extremamente denso.

Durante este processo de contração, a estrela é um sistema isolado, e o seu momento angular L não pode mudar. Porque o seu momento de inércia se reduz enormemente, a sua velocidade angular aumenta proporcionalmente, até 600-800 revoluções por segundo. A título de comparação, o nosso Sol, que é uma estrela típica, executa cerca de uma revolução por mês.

EXEMPLO 12-9 A Fig. 12-20a mostra um estudante novamente sentado num banco que pode girar livremente em torno de um eixo vertical. O estudante, inicialmente em repouso, segura uma roda de bicicleta, cujo aro recebeu uma camada de chumbo, e seu momento de inércia I em torno do eixo central é igual a $1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. A roda está girando com velocidade angular ω_i igual a 3,9 r.p.s.; vista de cima, a rotação tem sentido anti-horário. O seu eixo é vertical e o seu momento angular L_i aponta verticalmente para cima. O estudante agora inverte a roda (Fig. 12-20b). Como resultado, ele e o banco giram em torno do eixo deste último. Com que velocidade angular e em que sentido gira o estudante? (O momento de inércia I_0 do sistema *estudante + banco + roda* em torno do eixo do banco é igual a $6,8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.)

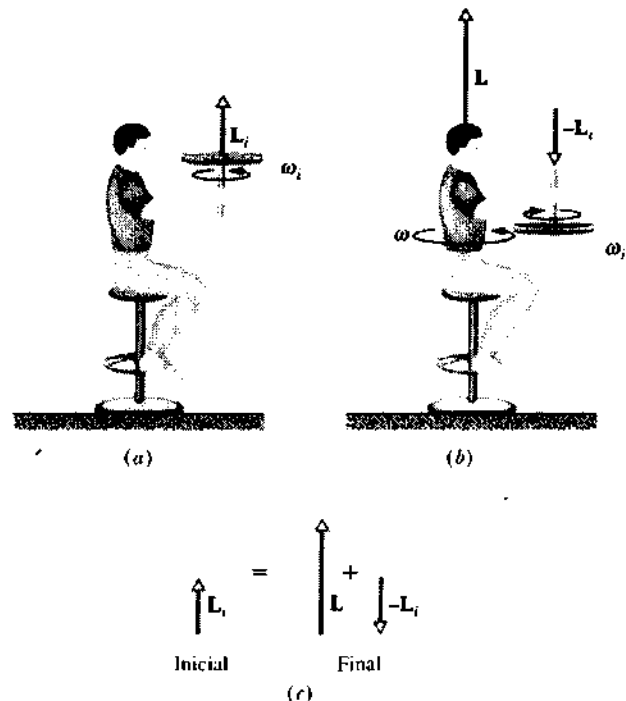


Fig. 12-20 Exemplo 12-9. (a) Um estudante segura uma roda de bicicleta que gira em torno da vertical. (b) O estudante inverte a roda e, assim, começa também a girar. (c) O momento angular total do sistema deve permanecer constante, apesar da inversão.

Solução Não há torque resultante atuando sobre o sistema *estudante + banco + roda* que possa alterar o seu momento angular em torno de qualquer eixo vertical. O momento angular inicial do sistema, L_i , é apenas o da roda de bicicleta. Depois que a roda é invertida, o sistema deve continuar a ter momento angular total de mesma magnitude e sentido.

Depois da inversão, o momento angular da roda é $-L_i$, e o conjunto *estudante + banco* deve adquirir algum momento angular, que chamaremos de L . Assim, como mostra a Fig. 12-20c, temos

$$L_i = L + (-L_i)$$

ou

$$L = 2L_i = I_0\omega,$$

onde ω é a velocidade angular adquirida pelo estudante, após a inversão da roda. Isto nos dá

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2L_i}{I_0} = \frac{2I\omega_i}{I_0} \\ &= \frac{(2)(1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(3,9 \text{ rev/s})}{6,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \\ &= 1,4 \text{ r.p.s.} \quad (\text{Resposta})\end{aligned}$$

Este resultado positivo nos diz que o estudante gira em sentido anti-horário, em torno do eixo do banco, visto de cima. Se ele quiser parar de rodar, só precisa inverter a roda novamente.

Ao invertê-la, terá plena consciência da necessidade de aplicar um torque. Este torque, no entanto, é interno ao sistema *estudante + banco + roda* e, assim, não pode mudar o seu momento angular total.

Entretanto, podemos escolher como nosso sistema apenas o conjunto *estudante + banco*, sendo a roda externa ao novo sistema. De acordo com este ponto de vista, quando o estudante aplicar um torque sobre a roda, esta reagirá exercendo um torque sobre ele, e que será agora um torque externo. A ação deste torque externo é que muda o valor do momento angular do sistema *estudante + banco*, fazendo com que ele gire. O fato de um torque ser considerado externo ou interno depende inteiramente do modo como escolhemos definir o nosso sistema.

EXEMPLO 12-10 Um trapezista deve executar um salto mortal triplo durante o voo até o seu parceiro, com a duração de $t = 1,87 \text{ s}$. No primeiro e último quartos de revolução, ele está na posição

esticada mostrada na Fig. 12-21, com momento de inércia $I_1 = 19,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, em torno do seu centro de massa. Durante o restante do voo, está em posição moderadamente dobrada, com momento de inércia $I_2 = 5,50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

a. Qual deve ser sua velocidade angular inicial ω_1 , em torno do seu centro de massa?

Solução Ele gira, na posição estendida, um ângulo total $\theta_1 = 0,500$ revoluções num tempo total t_1 e, na posição dobrada, um ângulo θ_2 no tempo t_2 , dados por

$$t_1 = \frac{\theta_1}{\omega_1}, \quad t_2 = \frac{\theta_2}{\omega_2}, \quad (12-42)$$

onde ω_2 é a sua velocidade angular na posição dobrada. Podemos obter uma expressão para ω_2 , observando que o seu momento angular se conserva durante o voo:

$$I_2\omega_2 = I_1\omega_1$$

de onde temos

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 \quad (12-43)$$

O seu tempo total de voo é

$$t = t_1 + t_2$$

que, com substituições das Eqs. 12-42 e 12-43, pode ser escrito como

$$t = \frac{\theta_1}{\omega_1} + \frac{\theta_2 I_2}{\omega_1 I_1} = \frac{1}{\omega_1} \left(\theta_1 + \theta_2 \frac{I_2}{I_1} \right) \quad (12-44)$$

Inserindo os dados fornecidos, obtemos

$$1,87 \text{ s} = \frac{1}{\omega_1} \left(0,500 \text{ rev} + 2,50 \text{ rev} \frac{5,50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{19,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \right),$$

de onde encontramos, finalmente,

$$\omega_1 = 0,6369 \text{ r.p.s.} \approx 0,637 \text{ r.p.s.} \quad (\text{Resposta})$$

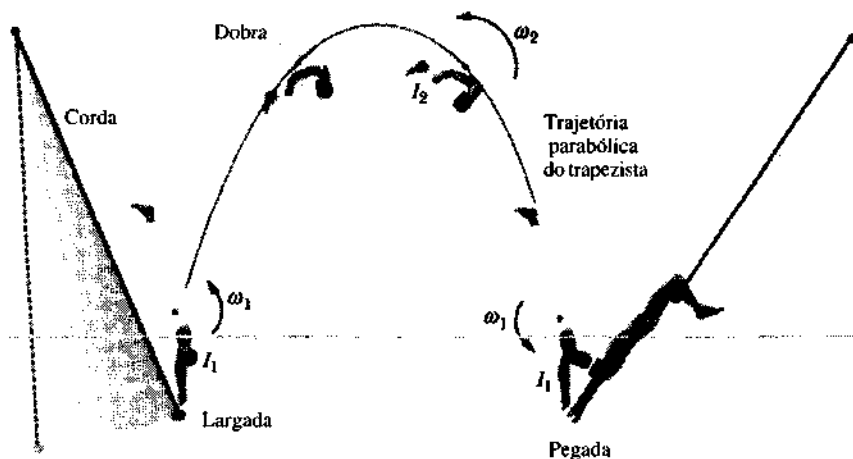


Fig. 12-21 Exemplo 12-10. O salto mortal triplo.

b. Se ele tentar agora um salto mortal quádruplo, com os mesmos valores de ω_i e r , porém dobrando mais o corpo, qual deverá ser o seu momento de inércia I_2 , na posição dobrada?

Solução O ângulo de rotação θ_2 , quando o corpo do trapezista está dobrado, é agora de 3,5 revoluções ($= 4,00 \text{ rev} - 0,500 \text{ rev}$) e a Eq. 12-44 se torna

$$1,87 \text{ s} = \frac{1}{0,6369 \text{ r.p.s.}} \times \left(0,500 \text{ rev} + 3,50 \text{ rev} \frac{I_2}{19,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \right),$$

de onde obtemos

$$I_2 = 3,929 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \approx 3,93 \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (\text{Resposta})$$

Este valor menor para I_2 permite uma volta mais rápida durante a posição dobrada e é quase o menor valor possível para um trapezista. Para realizar um salto mortal de quatro e meia voltas, um trapezista teria de aumentar o tempo de voo ou a velocidade angular inicial, mas qualquer uma dessas alterações tornaria mais difícil a pegada pelo seu parceiro. (Você saberia dizer por quê?)

c. Para o salto quádruplo, qual é o período de rotação T do trapezista (o tempo necessário para realizar uma rotação), durante a posição dobrada?

Solução Primeiramente, encontramos a velocidade angular ω_2 durante a posição dobrada, aplicando a Eq. 12-43:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{I_1}{I_2} \omega_1 = \frac{19,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{3,929 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} 0,6369 \text{ r.p.s.} \\ &= 3,226 \text{ r.p.s.} \end{aligned}$$

Determinamos, então, o intervalo de tempo T para uma rotação, fazendo

$$T = \frac{1 \text{ rev}}{\omega_2} = \frac{1 \text{ rev}}{3,226 \text{ r.p.s.}} = 0,310 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})$$

Uma das razões por que o salto mortal quádruplo é tão difícil é que a rotação ocorre rápido demais para que o trapezista possa ver claramente o que ocorre à sua volta ou consiga ajustar a sua velocidade angular, alterando o seu momento de inércia durante o voo.

EXEMPLO 12-11 Quatro hastes finas, cada uma com massa M e comprimento $d = 1,0 \text{ m}$, estão firmemente conectadas formando um sinal de adição; o conjunto gira num plano horizontal, em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro, com velocidade angular $\omega_i = -2,0 \text{ rad/s}$, em sentido horário (veja a Fig. 12-22). Uma bola de lama de massa m e velocidade inicial $v_i = 12 \text{ m/s}$ é atirada sobre o sinal e fica grudada à extremidade de uma das hastes. Seja $M = 3 \text{ m}$. Qual é a velocidade angular final ω_f do sistema *sinal de adição + bola de lama*, considerando-se que a trajetória inicial desta é cada uma das trajetórias mostradas na Fig. 12-22: trajetória 1 (o contato se dá quando a velocidade da bola é perpendicular à haste), trajetória 2 (contato radial), trajetória 3 (contato perpendicular) e trajetória 4 (o contato se dá num ângulo de 60° com a perpendicular)?

Solução O momento angular total L do sistema em torno do eixo é conservado durante a colisão:

$$L_f = L_i, \quad (12-45)$$

onde os subscritos f e i representam os valores final e inicial. Seja I_+ o momento de inércia do sinal de adição em torno do eixo. Da Tabela 11-2 (f), temos, para as quatro hastes,

$$I_+ = 4 \left(\frac{Md^2}{3} \right)$$

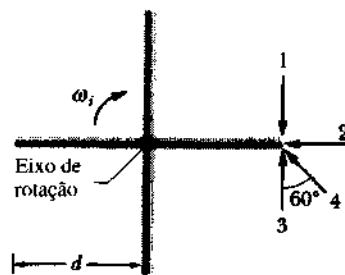


Fig. 12-22 Exemplo 12-11. Vista superior de quatro bastões firmemente unidos que giram em torno de um eixo central. Vêem-se também quatro trajetórias que uma bola de lama pode seguir até grudar num dos bastões.

O momento de inércia da bola de lama em torno do eixo, conforme a bola gira presa ao sinal de adição, é $I_{bi} = md^2$. Representemos o momento angular inicial (antes do contato) da bola de lama em torno do eixo por ℓ_i e a velocidade angular final do sistema por ω_f . Usando a relação $L = I\omega$, podemos reescrever a Eq. 12-45 na forma

$$I_+ \omega_f + I_{bi} \omega_f = I_+ \omega_i + \ell_i$$

e, em seguida, como

$$(\frac{4}{3}Md^2)\omega_f + (md^2)\omega_f = (\frac{4}{3}Md^2)\omega_i + \ell_i. \quad (12-46)$$

Substituindo $M = 3 \text{ m}$ e $\omega_i = -2,0 \text{ rad/s}$ e resolvendo a equação para obter ω_f , encontramos

$$\omega_f = \frac{1}{5md^2} (4md^2 (-2 \text{ rad/s}) + \ell_i). \quad (12-47)$$

Calculamos a magnitude de ℓ_i para as trajetórias 1 e 3 através da Eq. 12-28, com $r_{\perp} = d$ e $v = v_i$. Para a trajetória 2, usamos a Eq. 12-28 com $r_{\perp} = 0$. Para a trajetória 4, usamos a Eq. 12-27, onde $r = d$ e $v_{\perp} = v_i \cos 60^\circ$. Determinamos, então, o sinal de ℓ_i , verificando como um vetor que dá a posição da bola de lama em relação ao eixo gira em torno deste, à medida que ela se aproxima do sinal de adição: se ele girar em sentido horário, ℓ_i será negativo; se girar em sentido anti-horário, ℓ_i será positivo. Os resultados são:

$$\begin{aligned} \text{traj. 1: } \ell_i &= -mdv_i; & \text{via. 2: } \ell_i &= 0; \\ \text{traj. 3: } \ell_i &= mdv_i; & \text{via. 4: } \ell_i &= mdv_i \cos 60^\circ. \end{aligned}$$

Onde a velocidade $v_i = 12 \text{ m/s}$. Substituindo esses valores de volta na Eq. 12-47, juntamente com o valor de v_i , encontramos os valores de ω_f :

$$\begin{aligned} \text{traj. 1: } -4,0 \text{ rad/s;} & \quad \text{via. 2: } -1,6 \text{ rad/s;} \\ \text{traj. 3: } 0,80 \text{ rad/s;} & \quad \text{via. 4: } -0,40 \text{ rad/s.} \end{aligned}$$

12-10 Precessão de um Giroscópio (Opcional)

Um giroscópio simples consiste de uma roda que é presa a uma haste e está livre para girar em torno do eixo da haste. Se o extremo mais distante da haste de um giroscópio que não esteja girando for colocado sobre um suporte, como na Fig. 12-23a, e o giroscópio for solto, ele cairá, rodando para baixo em torno do suporte. Como a queda envolve uma

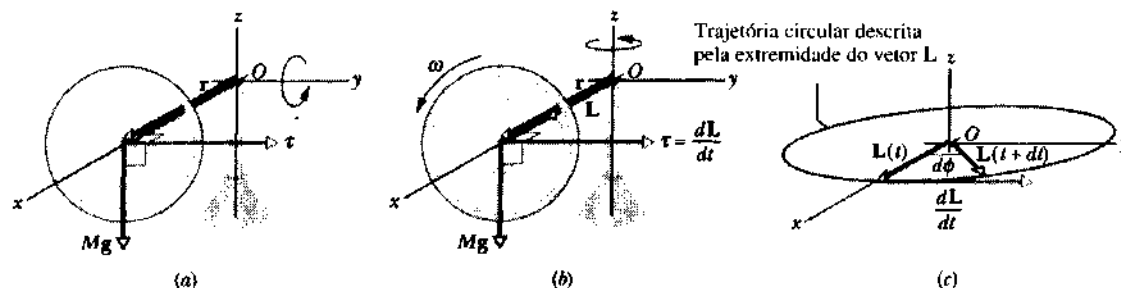


Fig. 12-23 (a) Um giroscópio que não está girando e que tem uma das extremidades do seu eixo apoiada num suporte cai com uma rotação em torno do eixo y, devido ao torque τ . (b) Um giroscópio que gira rapidamente, com momento angular L , precessa em torno do eixo z. (c) A taxa de variação temporal do momento angular, dL/dt , produz a rotação de L em torno de O .

rotação, ela é governada pela segunda lei de Newton na forma angular que, usando a Eq. 12-37, pode ser escrita como

$$\tau = dL/dt. \quad (12-48)$$

Esta equação nos diz que o torque que causa a rotação para baixo (a queda) muda o momento angular L do giroscópio, que inicialmente era igual a zero. O torque τ é devido ao peso Mg do giroscópio, que atua no seu centro de massa (que consideraremos como sendo o centro da roda), com braço de alavanca r relativamente ao suporte situado em O . A magnitude do torque é

$$\tau = Mgr \sin 90^\circ = Mgr \quad (12-49)$$

(pois o ângulo entre Mg e r é igual a 90°), e o seu sentido é mostrado na Fig. 12-23a.

Já um giroscópio que esteja girando rapidamente e seja solto do mesmo modo que o anterior, irá se comportar de modo muito diferente. Inicialmente, ele roda para baixo, ligeiramente, mas logo começa a girar em torno de um eixo vertical que passa através do suporte, executando um movimento denominado **precessão**. Por que o giroscópio que está girando fica suspenso no ar, em vez de cair? A chave para a solução deste mistério está no fato de que, quando o giroscópio é solto, o torque devido a Mg precisa mudar um momento angular inicial que não é mais igual a zero, mas tem um valor finito devido à rotação do giroscópio.

Para compreender como isso leva à precessão, consideremos primeiramente o momento angular L do giroscópio devido à sua rotação. Para simplificar a situação, vamos supor que a velocidade de rotação seja tão grande que o momento angular devido à precessão gradual é desprezível em comparação com L . Suponhamos também que a haste esteja na horizontal quando a precessão tem início (veja a Fig. 12-23b). A magnitude de L é dada pela Eq. 12-39 como

$$L = I\omega, \quad (12-50)$$

onde I é o momento de inércia do giroscópio em torno do seu eixo e ω é a velocidade angular do giroscópio. O vetor L aponta ao longo do eixo, como mostra a Fig. 12-23b. Como L é paralelo a r , o torque τ deve ser perpendicular a L .

De acordo com a Eq. 12-48, o torque τ provoca uma alteração infinitesimal dL no momento angular do giroscópio num intervalo de tempo dt ; isto é,

$$dL = \tau dt. \quad (12-51)$$

Entretanto, para um giroscópio que *gira rapidamente*, a magnitude de L é estabelecida pela Eq. 12-50. Portanto, como o torque atua de forma a alterar L , ele só pode modificar a sua direção e não a sua magnitude.

Da Eq. 12-51, vemos que a direção de dL é a direção de τ , perpendicular a L . O único modo de alterar L na direção de τ , sem alterar sua magnitude, é fazendo L rodar em torno do eixo z, como mostra a Fig. 12-23c: L mantém a sua magnitude, a extremidade do vetor L descreve uma trajetória circular, e τ é sempre tangente a esta trajetória. Como L deve sempre apontar ao longo do eixo do giroscópio, o eixo também deve rodar em torno de z, no sentido de τ . Deste modo, temos a precessão. Como o giroscópio deve obedecer à segunda lei de Newton na forma angular, em resposta a qualquer alteração do seu momento angular inicial ele deve precessar, em vez de simplesmente tombar.

Podemos encontrar a velocidade de precessão Ω usando, primeiramente, as Eqs. 12-49 e 12-51, para obtermos a magnitude de dL :

$$dL = \tau dt = Mgr dt \quad (12-52)$$

Quando L sofre uma alteração dL no intervalo de tempo dt , o eixo e L precessam em torno de z, descrevendo um ângulo infinitesimal $d\phi$. (Na Fig. 12-23c, o ângulo $d\phi$ aparece exagerado para maior clareza.) Com o auxílio das Eqs. 12-50 e 12-52, encontramos que $d\phi$ é dado por

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{Mgr dt}{I\omega}$$

Dividindo esta expressão por dt e fazendo a velocidade $\Omega = d\phi/dt$, obtemos

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega} \quad (\text{velocidade angular de precessão}) \quad (12-53)$$

Este resultado é válido sob a hipótese de que a velocidade de rotação ω é grande. Observe que a velocidade de precessão Ω decresce quando ω aumenta. Note também que não ocorreria precessão, se uma força peso Mg não atuasse no giroscópio, mas como I é uma função de M , a massa se cancela na Eq. 12-53 e, assim, Ω é independente da massa do giroscópio.

A Eq. 12-53 também se aplica se o eixo de um giroscópio que esteja girando fizer um ângulo qualquer com a horizontal. Ela também é válida para um pião que esteja girando, pois este é, essencialmente, um giroscópio que gira fazendo um ângulo com a horizontal.

12-11 Quantização do Momento Angular (Opcional)

Dizemos que uma grandeza física é **quantizada** se ela puder assumir somente certos valores discretos, de tal forma que todos os valores intermediários sejam proibidos. Até agora, já encontramos dois exemplos que apresentam esta característica: a quantização da massa (na Seção 2-9) e a quantização da energia (na Seção 8-9). O momento angular é o nosso terceiro exemplo.

Embora a quantização seja universal, ela se mostra de modo mais marcante apenas nos níveis atômico e subatômico, e é lá que vamos buscar nosso exemplo. Todas as partículas da Física, tais como o elétron, o próton e o pión, possuem valores intrínsecos bem característicos de momento angular, como se elas estivessem girando como um pião

(e, no entanto, não giram). Este momento angular intrínseco é dado pela relação

$$\ell = s \frac{h}{2\pi} \quad (12-54)$$

onde s (denominado *número quântico de spin*) é um inteiro, um semi-inteiro ou zero. A quantidade h que aparece na Eq. 12-54 é a constante de Planck, a constante básica da física quântica.

O número quântico de spin do elétron, por exemplo, é igual a $1/2$, de modo que o seu momento angular intrínseco é

$$\begin{aligned} \ell &= \left(\frac{1}{2}\right) (6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}) \left(\frac{1}{2\pi}\right) \\ &= 5,28 \times 10^{-35} \text{ J} \cdot \text{s}. \end{aligned}$$

O fato de h ter um valor tão pequeno significa que a quantização do momento angular não é perceptível nem mesmo no menor dos objetos macroscópicos. Do mesmo modo, as quantizações da massa e da energia não podem ser percebidas diretamente pelos nossos sentidos.

Os movimentos orbitais dos elétrons nos átomos — e o dos prótons e nêutrons no núcleo atômico — também são quantizados. As considerações sobre o momento angular ocupam uma posição central no nosso conhecimento acerca da estrutura da matéria nos níveis atômico e subatômico. Sempre que um físico se defronta com uma nova partícula ou estado quântico de um núcleo, átomo ou molécula, a pergunta mais provável que ele irá fazer a si mesmo é: “Qual é o seu momento angular?” Não há nada de surpreendente no fato da constante de Planck — que é a pedra fundamental da estrutura subatômica — ser expressa em unidades de momento angular.

RESUMO

Corpos em Rolamento

Para uma roda de raio R que se move sem deslizar,

$$v_{\text{cm}} = \omega R \quad (12-2)$$

onde v_{cm} é a velocidade do centro da roda e ω é a sua velocidade angular em torno do seu centro. Pode-se também descrever o movimento como se a roda executasse uma rotação instantânea em torno de um ponto P do solo, que está em contato com ela. A sua velocidade angular em torno deste ponto é idêntica à sua velocidade em torno do seu centro. Tendo isso em mente, podemos mostrar que a roda possui, ao se mover, energia cinética

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 \quad (12-5)$$

onde I_{cm} é o momento de inércia da roda em torno do seu centro.

Análise Usando a Segunda Lei de Newton

O Exemplo 12-4 ilustra a aplicação da segunda lei de Newton, nas formas aplicáveis à translação ($F = Ma_{\text{cm}}$) e à rotação ($\tau = I\alpha$), na análise do movimento acelerado de objetos que rolam.

O Vetor Torque

Em três dimensões, o *torque* τ é uma grandeza definida em relação a um ponto fixo (geralmente uma origem) pela relação

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (12-21)$$

onde \mathbf{F} é a força aplicada à partícula e \mathbf{r} é um vetor que dá a posição da partícula em relação a um ponto fixo (ou origem). A magnitude de τ é dada por

$$\tau = rF \sin \phi = rF_{\perp} = r_{\perp} F \quad (12-22, 12-23, 12-24)$$

onde ϕ é o ângulo entre \mathbf{F} e \mathbf{r} , F_{\perp} é a componente de \mathbf{F} perpendicular a \mathbf{r} , e r_{\perp} é a distância perpendicular entre o ponto fixo e a linha de ação de \mathbf{F} . O sentido de τ é dado pela regra da mão direita.

Momento Angular de uma Partícula

O **momento angular** ℓ de uma partícula com momento linear \mathbf{p} , massa m e velocidade linear \mathbf{v} é uma grandeza vetorial definida em relação a um ponto fixo (geralmente a origem) e dada pela relação

$$\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (12-25)$$

A magnitude de ℓ é dada por

$$\ell = rmv \sin \phi \quad (12-26)$$

$$= r p_{\perp} = r m v_{\perp} \quad (12-27)$$

$$= r_{\perp} p = r_{\perp} m v, \quad (12-28)$$

onde ϕ é o ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{p} , p_{\perp} e v_{\perp} são as componentes de \mathbf{p} e \mathbf{v} perpendiculares a \mathbf{r} , e r_{\perp} é a distância perpendicular entre o ponto fixo e a linha de ação de \mathbf{p} . A direção e o sentido de ℓ são dados pela regra da mão direita.

Forma Angular da Segunda Lei de Newton para uma Partícula

A segunda lei de Newton para uma partícula pode ser escrita na forma vetorial angular como

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} \quad (12-30)$$

onde $\sum \boldsymbol{\tau}$ é o torque total que atua sobre a partícula e $\boldsymbol{\ell}$ é o momento angular da partícula.

Momento Angular de um Sistema de Partículas

O momento angular \mathbf{L} de um sistema de partículas é a soma vetorial dos momentos angulares das partículas individuais:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{\ell}_2 + \cdots + \boldsymbol{\ell}_n = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\ell}_i \quad (12-35)$$

A taxa de variação temporal do momento angular é igual à soma dos torques externos que atuam sobre o sistema (os torques devidos a inte-

rações das partículas do sistema com partículas externas a ele). A relação exata é

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (\text{sistema de partículas}) \quad (12-37)$$

Momento Angular de um Corpo Rígido

Para um corpo rígido que está em rotação em torno de um eixo fixo, a componente do momento angular paralela ao eixo de rotação é

$$L = I\omega \quad (\text{corpo rígido, eixo fixo}) \quad (12-39)$$

Conservação do Momento Angular

O momento angular \mathbf{L} de um sistema permanece constante, se o torque externo total que atua sobre o sistema for igual a zero:

$$\mathbf{L} = \text{uma constante} \quad (\text{sistema isolado}). \quad (12-40)$$

Esta é a **lei da conservação do momento angular**. É uma das leis de conservação fundamentais da natureza, tendo sido verificada até mesmo em situações envolvendo partículas dotadas de altas velocidades ou de dimensões subatômicas, para as quais as leis de Newton não se aplicam.

Precessão de um Píão

A precessão de um píão pode ser analisada em termos da Eq. 12-37. A velocidade de precessão do píão, Ω , é dada por

$$\Omega = \frac{Mg r}{I\omega} \quad (12-53)$$

Quantização do Momento Angular

O momento angular é uma grandeza **quantizada**, ocorrendo na natureza apenas em múltiplos inteiros ou semi-inteiros de $\hbar/2\pi$, onde \hbar é a constante de Planck.

QUESTIONÁRIO

1. Uma bala de canhão esférica e uma bolinha de gude rolam num plano inclinado, partindo do repouso. Qual das duas chega primeiro à base do plano?

2. Uma lata cilíndrica cheia de carne e outra idêntica cheia de água rolam num plano inclinado. Compare suas acelerações angulares e lineares. Explique as diferenças.

3. Um cilindro sólido de madeira rola em dois planos inclinados de mesma altura, mas com ângulos de inclinação diferentes. A velocidade com que ele chega à base do plano é a mesma em cada caso? Ele demora mais tempo para rolar um dos planos do que o outro? Explique suas respostas.

4. Um cilindro sólido de latão e um de madeira têm o mesmo raio e massa idêntica, sendo que o de madeira é mais longo. Suponha que você os solte ao mesmo tempo, do alto de um plano inclinado. Qual deles alcançará a base primeiro? Suponha que agora os cilindros tenham o mesmo comprimento (e o mesmo raio) e que as massas sejam tornadas iguais, fazendo-se um furo ao longo do eixo do cilindro de latão. Qual dos dois cilindros chegará primeiro, desta vez? Explique as suas respostas. Suponha que os cilindros rolem sem deslizar.

5. Rute e Rogério andam de bicicleta, na mesma velocidade. As rodas da bicicleta de Rute possuem diâmetro um pouco maior do que as da bicicleta de Rogério. Qual é a comparação que se pode fazer entre as velocidades angulares das rodas de cada uma? O que se pode dizer sobre as velocidades das partes superiores dessas rodas?

6. Se o velocímetro de um carro é calibrado de forma a registrar um valor de velocidade linear proporcional à velocidade angular das rodas tra-

seiras, é necessário corrigir a leitura quando se usam pneus de maior diâmetro externo (como, por exemplo, pneus para neve)?

7. Um tambor cilíndrico é empurrado pela parte de cima por meio de uma tábua. Partindo da posição inicial mostrada na Fig. 12-24, ele rola para a frente uma distância $L/2$, igual à metade do comprimento da tábua. Não ocorre deslizamento em qualquer dos pontos de contato. Onde está a tábua agora? Qual a distância percorrida pela mulher?



Fig. 12-24 Questão 7.

8. Dois discos pesados estão conectados por uma haste curta de raio bem menor do que o raio deles. Este sistema é colocado sobre uma rampa de modo que os discos fiquem fora da superfície da rampa, como mostra a Fig. 12-25. O sistema rola pela rampa sem deslizar. (a) Perto da base desta, os discos tocam a mesa horizontal e o sistema passa a mover-se com uma velocidade translacional muito maior. Explique por quê. (b) Se este sistema competisse com um aro (de qualquer raio), qual dos dois chegaria primeiro à base? (c) Mostre que o sistema tem $\beta > 1$, onde β é o parâmetro de momento de inércia da Tabela 12-1.

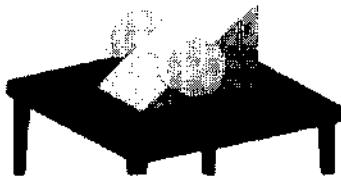


Fig. 12-25 Questão 8.

9. Um ioiô chega ao fim do seu fio e, então, sobe novamente. O sentido de sua rotação é invertido quando ele chega ao fim do fio? Explique sua resposta.

10. Um ioiô está em repouso sobre uma mesa horizontal e pode rolar livremente (Fig. 12-26). Se uma força horizontal F_1 puxar o fio, para onde ele rolará? O que acontece quando a força F_2 é aplicada (a sua linha de ação passa através do ponto de contato entre o ioiô e a mesa)? Se o fio for puxado verticalmente pela força F_3 , o que acontecerá?

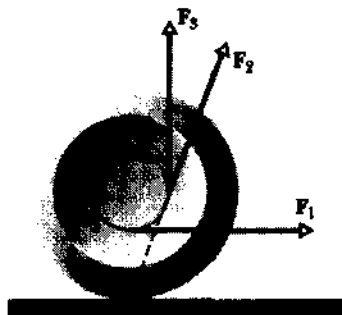


Fig. 12-26 Questão 10.

11. Um carro com tração traseira acelera rapidamente, partindo do repouso, e o motorista observa que o carro “levanta o nariz”. Por que isto acontece? Isto aconteceria com um carro que tivesse tração dianteira?

12. Os parafusos que prendem os motores dos aviões a jato à estrutura foram projetados para se partirem se o motor (que gira rapidamente) emperrar de repente devido a alguma falha. Por que esses “fusíveis estruturais” são utilizados?

13. Existe alguma vantagem em se colocar em rotação as rodas do trem de aterrissagem de um avião pouco antes do pouso? Se existe, como você poderia determinar a velocidade e o sentido da rotação mais adequados?

14. Um jogador de hóquei, num momento de irritação, arremessa um disco sobre o gelo. Este gira em torno do seu centro de massa, enquanto desliza, e finalmente pára devido à ação do atrito. Por que o seu movimento de rotação deve cessar exatamente no mesmo instante em que o seu centro de massa chega ao repouso?

15. Quando a velocidade angular ω de um objeto aumenta, o seu momento angular pode também aumentar ou não. Dê um exemplo de cada um desses casos.

16. Um estudante fica de pé sobre uma mesa que gira com velocidade angular ω e segura dois halteres idênticos com os braços abertos. Sem mover mais nada, ele solta os dois halteres. Que alteração, se é que há

alguma, sofre a velocidade angular do estudante? O momento angular é conservado? Explique suas respostas.

17. Um helicóptero perde o controle com as pás do rotor girando. Por que o corpo do helicóptero gira em sentido oposto ao das pás?

18. Se toda a população do mundo se mudasse para a Antártida, isto afetaria a duração do dia? Em caso afirmativo, diga como.

19. Um prato giratório circular roda com velocidade constante em torno de um eixo vertical. Não há atrito nem torque externo. Um recipiente circular está sobre o prato e gira junto com ele (veja a Fig. 12-27). O fundo do recipiente está coberto por uma camada de gelo de espessura uniforme que, obviamente, gira com ela. Suponha agora que o gelo se derreta, mas que nenhuma porção de água escape do recipiente. Pode-se dizer que a velocidade angular é agora maior do que a velocidade angular original? Justifique sua resposta.

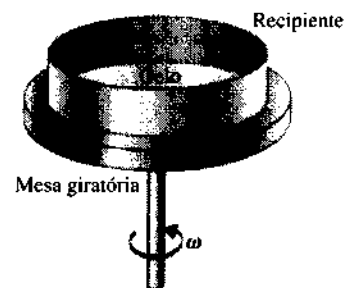


Fig. 12-27 Questão 19.

20. Você deseja distinguir um ovo cru de um cozido duro e, para isso, faz cada um deles girar sobre uma mesa. Explique como esta distinção pode ser feita. Explique também por que, se você parar um ovo cru que está girando tocando-o rapidamente no topo, ele volta a girar?

21. A Fig. 12-28a mostra um acrobata saltando numa cama elástica com momento angular zero. Ele pode, manobrando com seu corpo, aterrissar de costas, como na Fig. 12-28b? É interessante notar que 38% dos treinadores e 34% de uma amostra de físicos, a quem foi feita esta pergunta, tenham dado uma resposta errada. O que você acha? (Em “Do Springboard Divers Violate Angular Momentum Conservation?”, de Cliff Frohlich, *American Journal of Physics*, julho de 1979.)

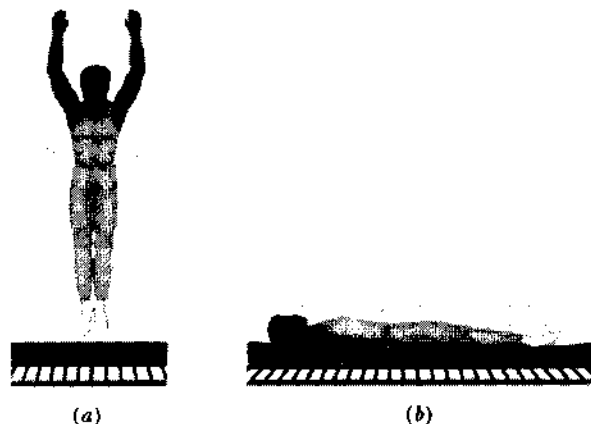


Fig. 12-28 Questão 21.

22. Quando se está num balanço, é possível fazer com que ele execute um círculo completo em torno do seu suporte? Suponha (se desejar) que o assento do balanço esteja preso ao suporte por meio de barras rígidas em vez de uma corda ou corrente. Explique sua resposta.

23. Uma roda de grande massa e que esteja girando pode ser usada para estabilizar um navio. Se ela for montada com seu eixo de rotação em

ângulo reto com o convés, qual será o seu efeito quando o navio tender a adernar?

24. Por que um zagueiro de futebol americano precisa fazer a bola girar rapidamente para assegurar-se de que ela se manterá na trajetória pretendida durante um passe longo?

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

Seção 12-1 Rolamento

1E. Um tubo de paredes finas rola pelo chão. Qual é a razão entre as suas energias cinéticas translacional e rotacional, em torno de um eixo paralelo ao seu comprimento e que passa pelo seu centro de massa?

2E. Um aro de 140 kg rola sobre um piso horizontal de modo que o seu centro de massa possui uma velocidade de 0,150 m/s. Qual é o trabalho que deve ser feito sobre o aro para fazê-lo parar?

3E. Os pneus de um automóvel, que trafega a 80,0 km/h, têm 75,0 cm de diâmetro. (a) Qual é a velocidade angular dos pneus em torno do eixo? (b) Se o carro chegar ao repouso, uniformemente, após 30,0 voltas dos pneus (sem derrapar), qual será a aceleração angular das rodas? (c) Qual é a distância percorrida pelo carro durante o período de frenagem?

4E. Um automóvel de massa igual a 1.000 kg possui quatro rodas de 10 kg cada. Quando o carro está em movimento, qual é a fração da sua energia cinética total devido à rotação das rodas em torno de seus eixos? Suponha que os momentos de inércia das rodas sejam idênticos aos de discos uniformes de mesma massa e tamanho. Explique por que não é necessário saber o raio das rodas.

5E. Um automóvel tem massa total de 1.700 kg. Ele é acelerado, a partir do repouso, até alcançar 40 km/h, em 10 s. Suponha que cada roda seja um disco uniforme de 32 kg. Determine, ao fim do intervalo de 10 s, (a) a energia cinética de rotação de cada roda em torno do seu eixo, (b) a energia cinética total de cada roda e (c) a energia cinética total do automóvel.

6E. Uma esfera uniforme rola num plano inclinado. (a) Qual deve ser o ângulo de inclinação para que a aceleração linear do centro da esfera seja igual a $0,10g$? (b) Com este ângulo, qual seria a aceleração de um bloco que deslizasse pelo plano inclinado sem atrito?

7E. Uma esfera sólida de peso igual a 35,58 N sobe rolando um plano inclinado, cujo ângulo de inclinação é igual a 30° . Na base do plano, o centro de massa da esfera tem uma velocidade linear de 4,88 m/s. (a) Qual é a energia cinética da esfera na base do plano inclinado? (b) Qual é a distância que a esfera percorre ao subir o plano? (c) A resposta ao item (b) depende do peso da esfera?

8E. Uma roda de raio igual a 0,250 m que, inicialmente, se move a 43,0 m/s, rola 225 m até parar. Calcule (a) sua aceleração linear e (b) sua aceleração angular. (c) Sendo o momento de inércia da roda igual a $0,155 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, calcule o torque exercido pelo atrito sobre a roda, em torno do seu centro.

9E. Considere um pneu de 66 cm de diâmetro de um carro que trafega a 80 km/h, numa estrada plana, no sentido positivo de x . Sob o ponto de vista de um passageiro no interior do carro, quais são a velocidade linear e o módulo da aceleração linear (a) do centro da roda, (b) de um ponto situado na parte superior do pneu e (c) de um ponto na base do pneu? (d) Repita os itens de (a) a (c) para o caso de um observador estacionário situado à beira da estrada.

10P. Um corpo de raio R e massa m rola horizontalmente, sem deslizar, com velocidade v . Ao encontrar uma elevação, ele a sobe rolando até uma altura máxima h . (a) Se $h = 3v^2/4g$, qual é o momento de inércia do corpo? (b) Qual deve ser a forma deste corpo?

11P. Uma esfera homogênea, inicialmente em repouso, rola sem deslizar, partindo da extremidade superior do trilho mostrado na Fig. 12-29, saindo pela extremidade da direita. Se $H = 60 \text{ m}$, $h = 20 \text{ m}$ e o extremo direito do trilho é horizontal, determine a distância horizontal do ponto A até o ponto que a esfera toca o chão.

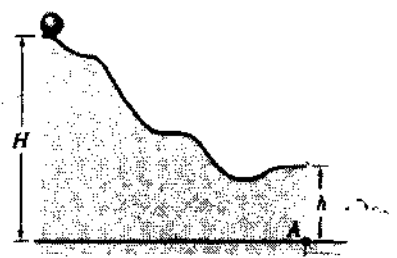


Fig. 12-29 Problema 11.

12P. Uma pequena esfera, de raio r e massa m , rola sem deslizar no interior de um hemisfério fixo, de raio R e que possui um eixo de simetria vertical. A esfera inicia o seu movimento no alto do hemisfério, partindo do repouso. (a) Qual é a sua energia cinética no fundo do hemisfério? (b) Qual a fração dessa energia que está associada a uma rotação em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa? (c) Qual é a força normal exercida pela esfera pequena sobre o hemisfério, quando ela está no fundo, se $r \ll R$?

13P. Uma bolinha de gude sólida de massa m e raio r rola sem deslizar sobre o trilho mostrado na Fig. 12-30, tendo partido do repouso em algum ponto do trecho retilíneo do trilho. (a) Qual é a altura mínima h , medida a partir da base do trilho, de onde devemos soltar a bolinha para que ela não perca contato com o trilho na parte mais alta da curva? (O raio da curva é R ; considere $R \gg r$) (b) Se a bolinha for solta de uma altura igual a $6R$ acima da base do trilho, qual será a componente horizontal da força que atua sobre ela no ponto Q?

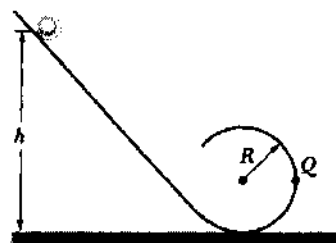


Fig. 12-30 Problema 13.

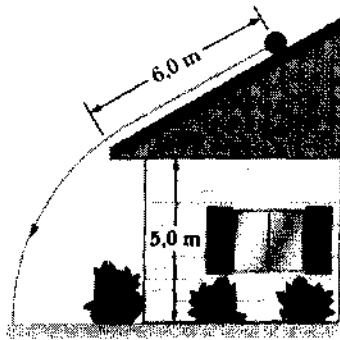


Fig. 12-31 Problema 14.

14P. Um cilindro sólido, de raio igual a 10 cm e massa de 12 kg, parte do repouso e rola sem deslizar uma distância de 6,0 m, descendo o telhado de uma casa, cuja inclinação é igual a 30° . (Veja a Fig. 12-31) (a) Qual é a velocidade angular do cilindro, em torno do seu centro, quando ele sai do telhado? (b) A parede externa da casa tem 5,0 m de altura. A que distância da beira do telhado o cilindro atinge o solo?

15P*. Um aparelho para testar a resistência dos pneus de automóvel numa derrapagem é construído como mostra a Fig. 12-32. Inicialmente, o pneu está parado, preso a uma estrutura de massa desprezível pivotada no ponto *B*. O momento de inércia da roda em torno do seu eixo é de $0,750 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, sua massa é de 15,0 kg e o seu raio é de 0,300 m. O pneu pode rodar livremente em torno do ponto *A*. Ele é colocado sobre a superfície de uma esteira rolante que se move com velocidade superficial de 12,0 m/s. (a) Se o coeficiente de atrito cinético entre o pneu e a esteira for igual a 0,60 e se o pneu não balançar, qual será o tempo necessário para que a roda alcance sua velocidade angular final? (b) Qual será o comprimento da marca de derrapagem sobre a superfície da esteira?

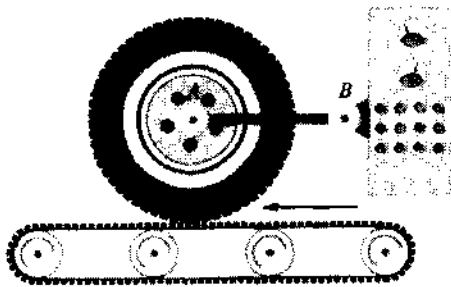


Fig. 12-32 Problema 15.

Seção 12-2 O Ioiô

16E. Um ioiô possui momento de inércia de $950 \text{ g}\cdot\text{cm}^2$ e massa de 120 g. O raio do seu eixo é de 3,2 mm e o comprimento do fio é de 120 cm. Ele rola até o final do fio, partindo do repouso. (a) Qual é a sua aceleração? (b) Quanto tempo ele leva para chegar ao final do fio? Quando chega ao final do fio, quais são (c) sua velocidade linear, (d) sua energia cinética de translação, (e) sua energia cinética de rotação e (f) sua velocidade angular?

17P. Suponha que o ioiô do Exercício 16, em vez de rolar a partir do repouso, fosse atirado para baixo com velocidade inicial de 1,3 m/s. Qual seria a sua velocidade angular quando chegasse ao final do fio?

Seção 12-3 Torque Revisitado

18E. Sendo $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$, mostre que o torque $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ é dado por

$$\boldsymbol{\tau} = (yF_z - zF_y)\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

19E. Mostre que, se \mathbf{r} e \mathbf{F} estão num dado plano, o torque $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ não possui componente naquele plano.

20E. Quais são o módulo, a direção e o sentido do torque em torno da origem que a força \mathbf{F} exerce sobre uma ameixa de coordenadas $(-2,0 \text{ m}; 0; 4,0 \text{ m})$, sendo que a única componente de \mathbf{F} é (a) $F_x = 6,0 \text{ N}$, (b) $F_y = -6,0 \text{ N}$, (c) $F_z = 6,0 \text{ N}$ e (d) $F_z = -6,0 \text{ N}$?

21E. Quais são o módulo, a direção e o sentido do torque em torno da origem exercido sobre uma partícula de coordenadas $(0; -4,0 \text{ m}; 3,0 \text{ m})$, pela força (a) \mathbf{F}_1 , de componentes $F_{1x} = 2,0 \text{ N}$, e $F_{1y} = F_{1z} = 0$, e (b) \mathbf{F}_2 , de componentes $F_{2x} = 0$, $F_{2y} = 2,0 \text{ N}$ e $F_{2z} = 4,0 \text{ N}$?

22P. A força $\mathbf{F} = (2,0 \text{ N})\mathbf{i} - (3,0 \text{ N})\mathbf{k}$ atua sobre uma pedrinha cujo vetor posição é $\mathbf{r} = (0,50 \text{ m})\mathbf{j} - (2,0 \text{ m})\mathbf{k}$, em relação à origem. Qual é o torque resultante exercido sobre a pedrinha em torno (a) da origem e (b) de um ponto de coordenadas $(2,0 \text{ m}; 0; -3,0 \text{ m})$?

23P. Qual é o torque em torno da origem exercido sobre um grão de areia situado nas coordenadas $(3,0 \text{ m}; -2,0 \text{ m}; 4,0 \text{ m})$ devido (a) à força $\mathbf{F}_1 = (3,0 \text{ N})\mathbf{i} - (4,0 \text{ N})\mathbf{j} + (5,0 \text{ N})\mathbf{k}$, (b) à força $\mathbf{F}_2 = (-3,0 \text{ N})\mathbf{i} - (4,0 \text{ N})\mathbf{j} - (5,0 \text{ N})\mathbf{k}$ e (c) à resultante de \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 ? (d) Repita (c) para um ponto de coordenadas $(3,0 \text{ m}; 2,0 \text{ m}; 4,0 \text{ m})$ em vez da origem.

24P. Qual é o torque resultante, em torno da origem, aplicado a uma pulga de coordenadas $(0; -4,0 \text{ m}; 5,0 \text{ m})$ pelas forças $\mathbf{F}_1 = (3,0 \text{ N})\mathbf{k}$ e $\mathbf{F}_2 = (-2,0 \text{ N})\mathbf{j}$?

25P. A força $\mathbf{F} = (-8,0 \text{ N})\mathbf{i} + (6,0 \text{ N})\mathbf{j}$ atua sobre uma partícula cujo vetor posição é $\mathbf{r} = (3,0 \text{ m})\mathbf{i} + (4,0 \text{ m})\mathbf{j}$. Quais são (a) o torque aplicado à partícula, em torno da origem e (b) o ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{F} ?

Seção 12-4 Momento Angular

26E. Um avião de 1.200 kg voa em linha reta a uma velocidade de 80 m/s, numa altitude de 1,3 km. Qual é o módulo do seu momento angular em relação a um ponto situado no solo, diretamente abaixo da trajetória do avião?

27E. Dois objetos estão se movendo como mostra a Fig. 12-33. Qual é o seu momento angular total em torno do ponto *O*?

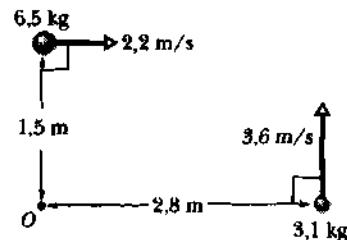


Fig. 12-33 Exercício 27.

28E. Uma partícula *P*, de massa igual a 2,0 kg, tem vetor posição \mathbf{r} ($r = 3,0 \text{ m}$) e velocidade \mathbf{v} ($v = 4,0 \text{ m/s}$), como mostra a Fig. 12-34. Sobre ela atua uma força \mathbf{F} ($F = 2,0 \text{ N}$). Todos os três vetores estão no plano *xy*. Quais são (a) o momento angular da partícula e (b) o torque exercido sobre ela, em torno da origem?

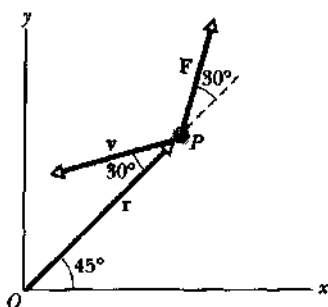


Fig. 12-34 Exercício 28.

29E. Sendo dados r , p e ϕ , podemos calcular o momento angular de uma partícula aplicando a Eq. 12-26. Entretanto, às vezes temos, em vez disso, as componentes (x, y, z) de \mathbf{r} e (v_x, v_y, v_z) de \mathbf{v} . (a) Mostre que as componentes de ℓ ao longo dos eixos x , y e z são dadas por

$$\ell_x = m(yv_z - zv_y),$$

$$\ell_y = m(zv_x - xv_z),$$

$$\ell_z = m(xv_y - yv_x)$$

(b) Mostre que, se a partícula se mover apenas no plano xy , o vetor momento angular possuirá apenas a componente z .

30E. Num certo instante de tempo, o vetor posição, medido em metros, de um objeto de massa igual a $0,25 \text{ kg}$, é $\mathbf{r} = 2,0\mathbf{i} - 2,0\mathbf{k}$. Naquele instante, a velocidade do objeto, em metros por segundo, é $\mathbf{v} = -5,0\mathbf{i} + 5,0\mathbf{k}$, e a força que atua sobre ele, em Newtons, é $\mathbf{F} = 4,0\mathbf{j}$. (a) Qual é o momento angular do objeto em torno da origem? (b) Qual é o torque que atua sobre ele? (Sugestão: Veja os Exercícios 18 e 29.)

31P. Calcule o momento angular, em torno do centro da Terra, de uma pessoa de 84 kg que esteja sobre o equador.

32P. Mostre que o momento angular, em torno de um ponto qualquer, de uma única partícula que se move com velocidade constante, permanece invariável durante todo o movimento.

33P. Duas partículas, cada uma com massa m e velocidade v , movem-se em sentidos opostos ao longo de linhas paralelas, separadas por uma distância d . Encontre uma expressão, em termos de m , v e d , para o momento angular total do sistema em torno de uma origem qualquer.

34P. Um objeto de $2,0 \text{ kg}$ se move num plano com velocidade de componentes $v_x = 30 \text{ m/s}$ e $v_y = 60 \text{ m/s}$, ao passar pelo ponto $(x, y) = (3,0; -4,0) \text{ m}$. (a) Qual é o seu momento angular em relação à origem nesse instante? (b) Qual é o seu momento angular em relação ao ponto $(-2,0; -2,0)$ nesse mesmo instante?

35P. (a) Use os dados fornecidos nos apêndices para calcular o momento angular total de todos os planetas devido às suas revoluções em torno do Sol. (b) Que fração desse momento angular está associada ao planeta Júpiter?

Seção 12-5 Segunda Lei de Newton na Forma Angular

36E. Uma partícula de $3,0 \text{ kg}$ está nas coordenadas $x = 3,0 \text{ m}$, $y = 8,0 \text{ m}$, com velocidade $\mathbf{v} = (5,0 \text{ m/s})\mathbf{i} - (6,0 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Sobre ela atua uma força de $7,0 \text{ N}$ que aponta no sentido negativo de x . (a) Qual é o momento angular da partícula? (b) Qual é o torque que atua sobre ela? (c) Qual é a taxa de variação do seu momento angular, em relação ao tempo?

37E. Uma partícula sofre a ação de dois torques em torno da origem: τ_1 tem módulo igual a $2,0 \text{ N}\cdot\text{m}$ e aponta no sentido crescente de x , e τ_2 tem

módulo de $4 \text{ N}\cdot\text{m}$ e aponta no sentido decrescente de y . Quais são o módulo, a direção e o sentido de $d\ell/dt$, onde ℓ é o momento angular da partícula?

38E. Qual é o torque, em torno da origem, que atua sobre uma partícula que se move no plano xy , se esta possuir os seguintes valores de momento angular em torno da origem:

(a) $-4,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$,

(b) $-4,0t^2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$,

(c) $-4,0\sqrt{t} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$,

(d) $-4,0/t^2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.

39E. Um carro de brinquedo de $3,0 \text{ kg}$ move-se sobre o eixo x com velocidade $\mathbf{v} = -2,0t^3 \text{ m/s}$ ao longo daquele eixo. Para $t > 0$, quais são (a) o momento angular do carro e (b) o torque que atua sobre ele, ambos em relação à origem? (c) Repita (a) e (b) para um ponto de coordenadas $(2,0 \text{ m}; 5,0 \text{ m}; 0)$, em vez da origem (d) Repita (a) e (b) para um ponto de coordenadas $(2,0; -5,0 \text{ m})$, em vez da origem.

40P. No instante $t = 0$, uma partícula de $2,0 \text{ kg}$ tem vetor posição $\mathbf{r} = (4,0 \text{ m})\mathbf{i} - (2,0 \text{ m})\mathbf{j}$, relativamente à origem. Sua velocidade é dada por $\mathbf{v} = (-6,0t^2 \text{ m/s})\mathbf{i} + (3,0 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Relativamente à origem, e para $t > 0$, quais são (a) o momento angular da partícula e (b) o torque que atua sobre ela? (c) Repita (a) e (b) para um ponto de coordenadas $(-2,0 \text{ m}; -3,0 \text{ m}; 0)$, em vez da origem.

41P. Um projétil de massa m é atirado do chão com velocidade inicial v_0 e a um ângulo inicial θ_0 , acima da horizontal. (a) Encontre uma expressão para o seu momento angular em torno do ponto de lançamento e como uma função do tempo. (b) Determine a taxa de variação do momento angular com o tempo. (c) Calcule $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ diretamente e compare o resultado com (b). Por que os resultados devem ser idênticos?

Seção 12-7 Momento Angular de um Corpo Rígido que Gira em Torno de um Eixo Fixo

42E. Um disco de lixa com momento de inércia igual a $1,2 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ é preso a uma furadeira elétrica cujo motor desenvolve um torque de $16 \text{ N}\cdot\text{m}$. Determine (a) o momento angular e (b) a velocidade angular do disco, 33 ms depois que o motor é ligado.

43E. O momento angular de um volante, que possui momento de inércia igual a $0,140 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, decresce de $3,00$ para $0,800 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ em $1,50 \text{ s}$. (a) Qual é o torque médio que atua sobre o volante durante esse período? (b) Supondo que a aceleração angular seja uniforme, qual foi o ângulo girado pelo volante? (c) Qual o valor do trabalho realizado sobre ele? (d) Qual é a sua potência média?

44E. Três partículas, cada uma de massa m , são presas umas às outras e a um eixo de rotação por três cordões sem massa, cada um de comprimento l , como mostra a Fig. 12-35. O conjunto gira em torno do eixo de rotação em O com velocidade angular ω , de tal forma que as partículas

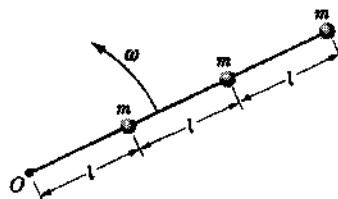


Fig. 12-35 Exercício 44.

permanecem numa linha reta. Quais são, em termos de m , l e ω e relativamente ao ponto O , (a) o momento de inércia do conjunto, (b) o momento angular da partícula do meio e (c) o momento angular total das três partículas?

45E. Uma barra uniforme gira num plano horizontal, em torno de um eixo vertical que passa por uma de suas extremidades. A barra tem 6,00 m de comprimento, pesa 10,0 N e gira a 240 r.p.m., em sentido horário, vista de cima. Calcule (a) o momento de inércia da barra em torno do eixo de rotação e (b) o momento angular da barra.

46P. As rodas A e B da Fig. 12-36 estão conectadas por uma correia que não desliza. O raio da roda B é três vezes maior do que o da A. Qual seria a razão entre os momentos de inércia I_A/I_B , se (a) ambas tivessem o mesmo momento angular e (b) ambas tivessem a mesma energia cinética de rotação?

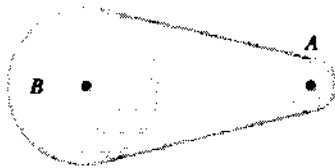


Fig. 12-36 Problema 46.

47P. Uma força impulsiva $F(t)$ atua durante um curto intervalo de tempo Δt sobre um corpo rígido que possui momento de inércia I e que está girando. Mostre que

$$\int \tau dt = \bar{F}R(\Delta t) = I(\omega_f - \omega_i)$$

onde R é o braço de alavanca da força, \bar{F} é o valor médio da força, durante o tempo em que ela atua sobre o corpo, e ω_i e ω_f são as velocidades angulares do corpo imediatamente antes e depois que a força atua. [A grandeza $\int \tau dt = \bar{F}R(\Delta t)$ é denominada *impulso angular*, em analogia com $\bar{F}(\Delta t)$, o impulso linear.]

48P*. Dois cilindros de raios R_1 e R_2 e momentos de inércia I_1 e I_2 , respectivamente, são sustentados por eixos perpendiculares ao plano da Fig. 12-37. O cilindro grande roda inicialmente com velocidade angular ω_0 . O cilindro menor é empurrado para a direita até tocar o maior, e começa a girar pela ação da força de atrito entre os dois. Finalmente, o deslizamento cessa e os dois giram com velocidades constantes, em sentidos opostos. Determine a velocidade angular final ω_2 do cilindro menor, em termos de I_1 , I_2 , R_1 , R_2 e ω_0 . (Sugestão: Nem o momento angular, nem a energia cinética são conservados. Aplique a equação do impulso angular apresentada no Problema 47.)

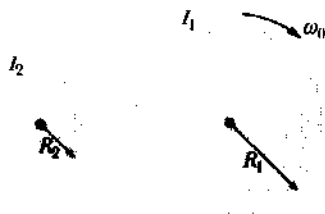


Fig. 12-37 Problema 48.

49P*. Um jogador de boliche principiante joga uma bola de massa M e raio $R = 11$ cm na pista, com velocidade inicial $v_i = 8,5$ m/s. A bola é arremessada de tal maneira que desliza uma certa distância antes de começar a rolar. Ela não está girando quando atinge a pista, sendo o seu movimento puramente translacional. O coeficiente de atrito cinético entre

ela e a pista é igual a 0,21. (a) Por quanto tempo a bola desliza? (Sugestão: Enquanto ela desliza, sua velocidade v diminui e a angular ω aumenta até que o deslizamento cessa e ela começa a rolar.) (b) Qual a distância que ela desliza na pista? (c) Quantas revoluções faz antes de começar a rolar? (d) A que velocidade está se movendo quando começa a rolar? (e) A resposta ao item (d) depende de M , R ou v_i ? Explique.

Seção 12-9 Conservação do Momento Angular: Alguns Exemplos

50E. O rotor de um motor elétrico tem momento de inércia $I_m = 2,0 \times 10^{-3}$ kg·m² em torno do seu eixo central. O motor é usado para mudar a orientação da sonda espacial na qual está instalado. O eixo do motor é montado paralelamente ao eixo da sonda, que tem momento de inércia $I_s = 12$ kg·m² em torno do seu eixo. Calcule o número de revoluções do rotor necessárias para fazer a sonda girar um ângulo de 30° em torno do seu eixo.

51E. Um homem está de pé sobre uma plataforma sem atrito que gira com velocidade angular de 1,2 r.p.s.; seus braços estão abertos e ele segura um peso em cada mão. Nesta posição, o momento de inércia do sistema composto pelo homem, os pesos e a plataforma é igual a 6,0 kg·m². Se, ao mover os pesos, o homem fizer o momento de inércia do sistema diminuir para 2,0 kg·m², (a) qual será a velocidade angular da plataforma e (b) qual será a razão entre a nova energia cinética do sistema e o seu valor original? (c) O que forneceu a energia cinética adicional?

52E. Dois discos são montados em mancais quase sem atrito, sobre um mesmo eixo e podem ser aproximados de modo a se acoplarem e girar como um disco único. (a) O primeiro disco, com momento de inércia de 3,3 kg·m², é posto para girar a 450 r.p.m. O segundo, com momento de inércia de 6,6 kg·m², a 900 r.p.m., no mesmo sentido do primeiro. Eles são, então, acoplados. Qual é a sua velocidade angular após o acoplamento? (b) Se o segundo disco girar a 900 r.p.m., em sentido oposto ao do primeiro, qual será a velocidade angular após o acoplamento?

53E. Uma roda gira livremente com velocidade angular de 800 r.p.m., num eixo cujo momento de inércia é desprezível. Uma segunda roda, inicialmente em repouso e que possui o dobro do momento de inércia da primeira, é subitamente acoplada ao mesmo eixo. (a) Qual a velocidade angular do conjunto formado pelo eixo e as duas rodas? (b) Que fração da energia cinética rotacional original é perdida?

54E. O momento de inércia de uma estrela girando que está em colapso cai a um terço do seu valor inicial. Qual é a razão entre a nova energia cinética de rotação e o valor inicial?

55E. Suponha que o combustível nuclear do Sol se extinga e ele, subitamente, entre em colapso formando um tipo de estrela denominada anã branca, com um diâmetro igual ao da Terra. Supondo que não houvesse perda de massa, qual seria o novo período de rotação do Sol (tempo necessário para uma rotação), que atualmente é de cerca de 25 dias? Suponha que o Sol e a anã branca sejam esferas sólidas uniformes.

56E. Num playground, há um pequeno carrossel de 1,20 m de raio e massa igual a 180 kg. Seu raio de giração (veja o Problema 58 do Cap. 11) é igual a 91,0 cm. Uma criança, de massa igual a 44,0 kg, corre a uma velocidade de 3,00 m/s, numa trajetória tangente à borda do carrossel, que inicialmente está em repouso, e pula sobre ele. Despreze qualquer atrito entre os mancais e o eixo do carrossel. Calcule (a) o momento de inércia do carrossel em torno do seu eixo de rotação; (b) o momento angular da criança, enquanto corre em torno do eixo de rotação do carrossel; e (c) a velocidade angular do carrossel e da criança depois que esta sobe no brinquedo.

57P. Uma roda de bicicleta com centro e raios de massa desprezível tem um aro fino de raio igual a 0,35 m e peso de 37,19 N; ela gira no seu eixo com atrito desprezível. Um homem segura a roda acima da cabeça com o eixo na vertical, de pé sobre uma mesa giratória que pode rodar livremente, sem atrito; a roda gira em sentido horário, vista de cima, com

velocidade angular de $57,7 \text{ rad/s}$, e a mesa está inicialmente em repouso. O momento de inércia do sistema roda + homem + mesa em torno do eixo de rotação é de $2,09 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. O homem, repentinamente, interrompe com a mão a rotação da roda (em relação à mesa). Determine a velocidade angular resultante do sistema (módulo, direção e sentido).

58P. Duas patinadoras, cada uma com massa de 50 kg , aproximam-se uma da outra em trajetórias paralelas separadas por uma distância de $3,0 \text{ m}$. Elas possuem velocidades de sentidos opostos e módulo igual a $1,4 \text{ m/s}$. A primeira patinadora segura a extremidade de uma longa baliza de massa desprezível, e a segunda agarra o outro extremo da baliza ao passar. Veja a Fig. 12-38. Suponha que não haja atrito com o gelo. (a) Descreva de forma quantitativa o movimento das patinadoras, depois que estão conectadas pela baliza. (b) Puxando esta, as patinadoras reduzem a sua distância para $1,0 \text{ m}$. Qual é agora a sua velocidade angular? (c) Calcule a energia cinética do sistema nos itens (a) e (b). (d) De onde vem a energia cinética adicional?

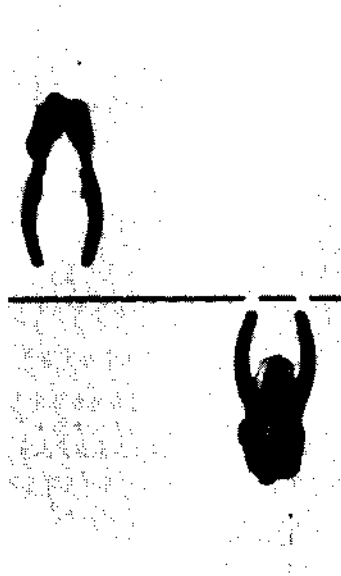


Fig. 12-38 Problema 58.

59P. Duas crianças, cada uma com massa M , sentam-se nos extremos opostos de uma prancha estreita de comprimento L e massa M (igual à das crianças). A prancha é pivotada no centro e pode girar livremente, sem atrito, num círculo horizontal. (Considere-a como se fosse uma haste fina.) (a) Qual é o momento de inércia do sistema formado pela prancha e as crianças, em torno de um eixo vertical que passa pelo centro da prancha? (b) Qual é o momento angular do sistema se ele roda com velocidade angular ω_0 em sentido horário, visto de cima? Quais são a direção e o sentido do momento angular? (c) Enquanto o sistema está rodando, as crianças puxam uma à outra em direção ao centro, até ficarem sentadas na metade da distância ao centro que tinham inicialmente. Qual é a nova velocidade angular, em termos de ω_0 ? (d) Qual é a mudança sofrida pela energia cinética do sistema como resultado da mudança de posição das crianças? (De onde vem a energia cinética adicional?)

60P. Um trilho de trem de brinquedo é montado sobre uma roda grande que pode girar livremente, com atrito desprezível, em torno de um eixo vertical (Fig. 12-39). Um trem de brinquedo de massa m é colocado sobre o trilho e, estando o sistema inicialmente em repouso, a eletricidade é ligada. O trem atinge uma velocidade constante v relativamente ao tri-

lho. Qual é a velocidade angular ω da roda, sendo sua massa igual a M e o seu raio igual a R ? (Considere a roda como um anel e despreze a massa dos raios e da engrenagem.)

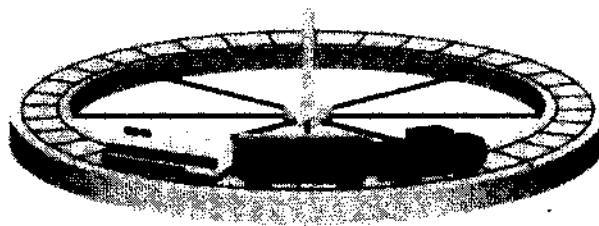


Fig. 12-39 Problema 60.

61P. Uma barata de massa m corre em sentido anti-horário na borda de um prato giratório (prato circular montado sobre um eixo vertical) de raio R e momento de inércia I , montado em mancais sem atrito. A velocidade da barata (em relação ao solo) é v , enquanto o prato gira em sentido horário com velocidade angular ω_0 . A barata encontra um pedaço de pão na borda do prato e pára. (a) Qual é a velocidade angular do prato giratório depois que a barata pára? (b) A energia mecânica é conservada?

62P. Uma menina de massa M está de pé sobre o aro externo de um carrossel sem atrito, de raio R e momento de inércia I , que não está em movimento. Ela atira uma pedra de massa m , horizontalmente, numa direção que é tangente à borda do carrossel. A velocidade da pedra, em relação ao chão, é v . Depois disso, quais são (a) a velocidade angular do carrossel e (b) a velocidade linear da menina?

63P. Se as calotas polares da Terra se derretessem e a água retornasse aos oceanos, a profundidade destes aumentaria cerca de 30 m . Que efeito isto teria sobre a rotação da Terra? Faça uma estimativa aproximada da mudança na duração do dia. (Teme-se que o aquecimento da atmosfera, resultante da poluição industrial, possa causar o derretimento das calotas polares.)

64P*. A partícula de massa m , mostrada na Fig. 12-40, desliza sobre uma superfície sem atrito e colide com uma barra vertical uniforme, ficando presa a ela. A barra oscila em torno de O , fazendo um ângulo θ antes de alcançar o repouso, temporariamente. Encontre o valor de θ em termos dos outros parâmetros dados na figura.

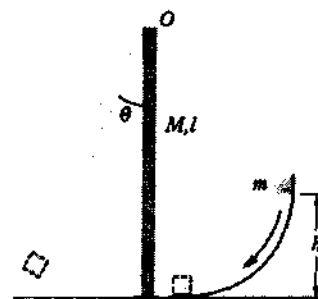


Fig. 12-40 Problema 64.

65P*. Duas bolas de $2,00 \text{ kg}$ cada são presas às extremidades de uma barra fina de massa desprezível, de $50,0 \text{ cm}$ de comprimento. A barra pode girar livremente, sem atrito, num plano vertical, em torno de um eixo horizontal que passa pelo seu centro. Enquanto a barra está na ho-

horizontal (Fig. 12-41), uma bolota de massa de vidro de 50,0 g cai sobre uma das bolas com velocidade de 3,00 m/s e fica grudada a ela. (a) Qual é a velocidade angular do sistema, logo após ser atingido pela massa de vidro? (b) Qual é a razão entre a energia cinética do sistema inteiro após a colisão e a energia cinética da bolota de massa de vidro, pouco antes da colisão? (c) Qual será o ângulo em que o sistema irá girar até parar temporariamente?

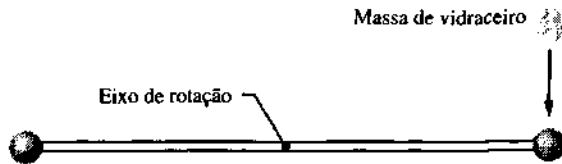


Fig. 12-41 Problema 65.

68. Uma haste fina e uniforme de 0,50 m de comprimento e 4,0 kg de massa pode rodar num plano horizontal, em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro. A haste está em repouso quando uma bala de massa igual a 3,0 g, movendo-se no mesmo plano horizontal, atinge uma de suas extremidades. Visto de cima, o sentido da velocidade da bala faz um ângulo de 60° com a haste (Fig. 12-42). Sabendo-se que a bala se aloja na haste e que a velocidade angular desta é de 10 rad/s, imediatamente após o impacto, qual é o módulo da velocidade da bala pouco antes do impacto?

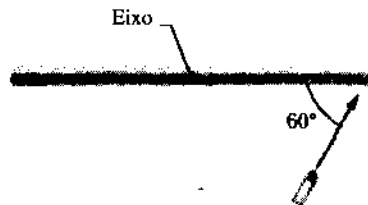


Fig. 12-42 Problema 68. A haste, vista de cima.

69. Uma plataforma horizontal, com o formato de um disco, roda sobre um mancal sem atrito, em torno de um eixo vertical que passa pelo centro do disco. A massa da plataforma é de 150 kg, seu raio é de 2,0 m e o seu momento de inércia em torno do eixo de rotação é de $300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Uma estudante de 60 kg caminha lentamente da borda para o centro da plataforma. Se a velocidade angular do sistema for igual a 1,5 rad/s, quando a estudante começar a andar, qual será a velocidade angular quando ela estiver a 0,50 m do centro? (Sugestão: Use o princípio da conservação do momento angular.)

70. Uma força horizontal constante de 10 N é aplicada a uma roda de massa igual a 10 kg e raio de 0,30 m, como mostra a Fig. 12-43. A roda gira sem deslizar sobre uma superfície horizontal e a aceleração do seu centro de massa é de $0,60 \text{ m/s}^2$. (a) Quais são o módulo, a direção e o sentido da força de atrito que atua sobre a roda? (b) Qual é o momento

Seção 12-10 Precessão de um Giroscópio (Opcional)

66E. Um pião gira a 30 r.p.s. em torno de um eixo que faz um ângulo de 30° com a vertical. Sua massa é de 0,50 kg e o seu momento de inércia em torno do eixo central é de $5,0 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. O centro de massa dista 4,0 cm do ponto de contato entre o pião e o chão. Se a rotação, vista de cima, tiver sentido horário, quais serão o módulo, a direção e o sentido da velocidade de precessão?

67P. Um giroscópio consiste de um disco giratório uniforme, de 50 cm de raio, convenientemente montado no centro de um eixo de 12 cm de comprimento (de massa desprezível), de modo que o giroscópio possa girar e precessar livremente. Sua velocidade de rotação é de 1.000 rpm. Encontre a velocidade de precessão (em rpm), sabendo que o eixo é sustentado em uma das extremidades e está na posição horizontal.

de inércia desta, em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa e é perpendicular ao seu plano?

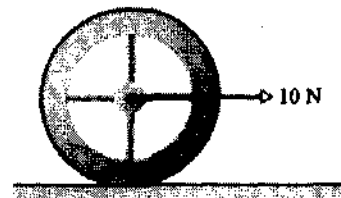


Fig. 12-43 Problema 70.

71. Uma partícula de massa igual a 0,80 kg está situada na posição $\mathbf{r} = (2,0 \text{ m})\mathbf{i} + (3,0 \text{ m})\mathbf{j}$. O momento linear da partícula está no plano xy, seu módulo é igual a $2,4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, e sua direção faz um ângulo de 115° , medidos em sentido anti-horário, com o eixo x. Qual é o momento angular da partícula em torno da origem, expresso em termos dos vetores unitários do sistema de coordenadas?

72. Um disco fonográfico, de massa igual a 0,10 kg e raio de 0,10 m, gira em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro com velocidade angular de 4,7 rad/s. Seu momento de inércia em torno do seu eixo de rotação é igual a $5,0 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Um pedaço de massa de vidro de massa igual a 0,020 kg cai verticalmente sobre ele e fica grudado em sua borda. Qual é a velocidade angular do disco, imediatamente após a massa de vidro aderir a ele?

73. Uma esfera oca, de massa igual a 3,0 kg e raio de 0,15 m, com momento de inércia $I = 0,040 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ em torno do seu centro de massa, rola sem deslizar, subindo um plano inclinado a 30° com a horizontal. Numa certa posição inicial, a energia cinética total da esfera é igual a 20 J. (a) Quanto da sua energia cinética inicial é rotacional? (b) Qual é a velocidade do centro de massa da esfera na posição inicial? Quais são (c) a energia cinética total da esfera e (d) a velocidade do seu centro de massa, depois que ela já subiu 1,0 m ao longo do plano inclinado, a partir de sua posição inicial?

A Dança e a Mecânica das Rotações

KENNETH LAWS
DICKINSON COLLEGE

Os bailarinos, quando se apresentam no palco, movimentam-se numa extraordinária variedade de formas — algumas graciosas em sua simplicidade, outras estonteantes na sua atlética complexidade. Alguns movimentos ou posições podem até inspirar a reação: "Puxa! Isto parece impossível!" De fato, os bailarinos executam frequentemente movimentos que nos deixam maravilhados, parecendo até violarem, às vezes, as leis da Física. Esta observação, porém, requer uma análise mais detalhada!

O corpo humano em movimento não é um objeto rígido cujas dimensões e configurações sejam constantes e facilmente mensuráveis. Entretanto, alguns movimentos do "vocabulário" da dança podem ser descritos de modo suficientemente rigoroso para nos permitir aplicar os princípios da mecânica clássica ao corpo em movimento no espaço, sob a influência da força gravitacional, entre outras.

Uma categoria particularmente interessante de movimentos de dança envolve a rotação — voltas no chão ou no ar, rotações em torno de eixos verticais, horizontais ou inclinados, e rotações diversas nas quais se cria a ilusão de realizar o impossível. A base para uma análise das rotações é a relação entre o torque e o momento angular. Por exemplo, de que modo um bailarino consegue o torque sobre seu corpo necessário para iniciar uma *pirouette* (pirueta — rotação em torno de um eixo vertical, em que um dos pés é mantido no chão)? Ou como se consegue fazer um salto com giro, em que parece que o corpo só começa a girar depois de deixar o solo? Como um bailarino (ou patinador do gelo) consegue alterar sua velocidade de rotação durante o movimento?

O bailarino geralmente inicia uma *pirouette* com ambos os pés no chão, um atrás do outro (Fig. 1). Empurrando lateralmente, com um dos pés em um sentido e o outro no sentido oposto, produzem-se duas forças iguais e opostas que atuam contra o solo, tendo uma distância perpendicular d entre elas (Fig. 2). As forças correspondentes, exercidas pelo chão sobre os pés, produzem um torque sobre o corpo, que faz com que ele adquira momento angular. Quando o bailarino se eleva sobre um dos pés para a posição normal de *pirouette* (Fig. 3), existe uma rotação resultante cuja velocidade é determinada pela magnitude do torque, por sua duração e pelo momento de inércia do corpo na sua configuração de rotação. (Veja as Eqs. 12-37 e 12-39.) Observe que, como não há força resultante horizontal, o corpo não possui aceleração linear.

A magnitude do torque depende da magnitude das forças e da separação dos pés. Esta



Fig. 1 Posição de preparação para uma *pirouette*.

separação é, em geral, de meio metro, mas pode até ser de apenas alguns poucos centímetros, numa preparação para a "quinta posição", na qual os pés estão bem próximos um do outro e antiparalelos. Neste caso, geralmente se observa que o bailarino "dá corda" com os braços, fazendo com que eles comecem a rodar antes que o resto do corpo suba para a posição de *pirouette*. Este procedimento de dar corda serve para permitir que algum momento angular fique armazenado numa parte do corpo que esteja em rotação — os braços — enquanto os

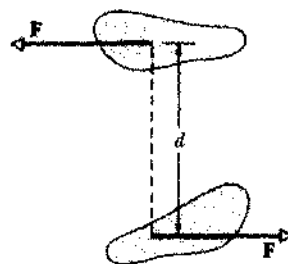


Fig. 2 Forças aplicadas ao chão pelos pés. As forças de reação exercidas pelo chão sobre os pés produzem um torque que gera a aceleração angular necessária para a execução de uma *pirouette*.

LEITURA COMPLEMENTAR 2



Kenneth Laws é professor de Física no Dickinson College em Carlisle, PA, onde ensina desde 1962. Ele obteve seus títulos acadêmicos de B.S. (Bachelor of Science — Bacharel em Ciências), M.S. (Master of Science — Mestre em Ciências) e Ph.D. (Philosophia Doctor — Doutor em Filosofia) em Caltech, na Universidade da Pensilvânia e no Bryn Mawr College, respectivamente. Desde 1976 ele estuda o balé clássico no Central Pennsylvania Youth Ballet e, nos últimos tempos, vem aplicando os princípios da Física aos movimentos da dança. Seu trabalho o tem levado a ministrar numerosas palestras e aulas em todo o país, e resultou num livro, *The Physics of Dance*, publicado em 1984 (e em 1988 como brochura) pela Schirmer Books.

pés ainda estão plantados no chão e em condições de exercer forças sobre ele. Aumentando a duração do torque aplicado, compensa-se a sua menor intensidade, que advém da pequena separação entre os pontos de aplicação das forças, permitindo assim atingir um momento angular final de valor significativo.

Uma vez que a magnitude do torque e a sua duração tenham sido estabelecidos, a velocidade de rotação é determinada pelo momento de inércia do corpo. Numa posição normal de *pirouette*, como mostra a Fig. 3, o momento de inércia é pequeno e é possível alcançar-se velocidades angulares substanciais — às vezes superiores a duas revoluções por segundo. Voltas do tipo *Arabesque* ou *grandes pirouettes*, nas quais uma perna é estendida para trás ou para o lado, respectivamente, são rotações mais lentas porque o momento de inércia do corpo nessas configurações é consideravelmente maior. Alterando a distribuição da massa corporal em relação ao eixo de rotação, o bailarino pode modificar sua velocidade angular durante a rotação. Um patinador do gelo, por exemplo, aumenta a velocidade angular durante a execução de uma *pirouette* trazendo os braços e a perna livre para junto do eixo de rotação.

Suponha que dois bailarinos executem uma *pirouette* com a mesma música (mesmo ritmo e, deste modo, acelerações angulares iguais), mas que um deles seja 15% maior que o outro, em cada uma das dimensões lineares. Observe que o volume de um bailarino é, portanto a sua massa, depende do cubo da dimensão linear, enquanto o momento de inércia do corpo depende do quadrado da distância de cada elemento de massa ao eixo de rotação.

Questão 1

Qual é o torque adicional necessário para o bailarino maior iniciar a *pirouette*, em relação ao menor?



Fig. 3 Posição de *pirouette* de um bailarino durante a rotação.



Fig. 4 Uma *pirouette* executada com o auxílio de um parceiro, dita "com apoio".

Agora, tenha em mente que, na posição de preparação antes de iniciar a rotação, os pés do bailarino maior estarão 15% mais afastados.

Questão 2

O quanto maior é a força horizontal entre os pés e o chão que o bailarino maior precisa exercer a fim de realizar a *pirouette*, em relação ao menor?

Uma situação interessante ocorre quando o torque para uma *pirouette* é aplicado pelas mãos de um parceiro, ao invés do chão. Tais *pirouettes* "com apoio", comuns no balé clássico, são geralmente executadas como mostra a Fig. 4. Suponha que a mulher esteja na posição para essa *pirouette*, preparando-se para uma rotação para a direita. Se o seu parceiro tentar iniciar o giro puxando-a para trás com sua mão direita e empurrando-a para a frente com a esquerda, ela irá girar, mas seu corpo fará uma rotação de ângulo considerável antes que o torque tenha tido a chance de desenvolver um momento angular expressivo. Deste modo, a velocidade de rotação resultante será pequena.

Agora, suponha que, antes do bailarino aplicar o torque sobre a cintura da mulher, ela estenda sua perna direita para a frente e um pouco para a esquerda (*croisé*). Assim, quando ele aplica o torque, a perna da bailarina se move da frente para o lado direito. A perna reta, estendida horizontalmente, tem um momento de inércia que é igual a cerca de quatro vezes o do corpo girando na posição de *pirouette*. Deste modo, quando a perna está girando, ela pode ter uma quantidade substancial de momento angular, enquanto o resto do corpo permanece de frente para a platéia. Assim, o intervalo de tempo durante o qual o homem pode aplicar o torque sobre a cintura da sua parceira aumenta consideravelmente, gerando um momento angular final significativamente maior. Quando a mulher finalmente movimenta sua perna direita da posição lateral para a de *pirouette*, com o pé sobre o joelho esquerdo, o momento an-

gular é transferido da perna que estava girando para o corpo como um todo, produzindo uma velocidade angular muito maior do que seria possível obter sem a utilização da perna girante.

Outro movimento demonstra um processo similar envolvendo a transferência de momento angular entre diferentes partes do corpo. Uma série de voltas do tipo *fouetté*, comumente vistas no balé, representa um movimento no qual o estilo da dança e as propriedades mecânicas que permitem a execução suave do movimento se ajustam perfeitamente. A Fig. 5 mostra uma dentre uma série de *fouettés*. Esta é uma forma de *pirouette* com repetição, em que uma vez em cada revolução, quando o bailarino está de frente para a platéia, a perna direita é movida da sua posição de *pirouette*, sobre o joelho esquerdo, e levada à frente, de onde gira esticada para o lado e, então, retorna ao joelho esquerdo. Durante esse tempo, o momento angular da rotação é armazenado na perna que está girando, permitindo que o resto do corpo faça uma pausa na sua rotação enquanto está de frente para o público. Esta pausa tem dois propósitos. Em primeiro lugar, ela faz com que a forma do movimento seja compatível com o estilo do balé clássico, em que o corpo está, geralmente, numa posição "aberta" para a platéia. Neste caso, uma parcela significativa do tempo total do giro é gasta com o corpo de frente para a platéia, entre rotações sucessivas. Em segundo lugar, a pausa permite que o bailarino saia da posição de ponta e apoie o pé esquerdo, momentaneamente, no chão. Nesta posição, um giro contra o chão, com a planta do pé apoiada, pode produzir o torque necessário para repor o momento angular perdido, durante a rotação anterior, pela ação do atrito.

Vamos calcular a razão entre o tempo que o bailarino passa de frente para a platéia e o tempo gasto na rotação, em cada ciclo do movimento. Suponha que o momento de inércia do corpo que gira com velocidade angular ω , na posição normal de *pirouette* seja $I_c = 0,62 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, e, para a perna que roda horizontalmente com velocidade angular ω_p em torno de um eixo vertical que passa pela junta do quadril, seja $I_p = 2,55 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. (Estes e outros dados numéricos, relativos ao corpo de um bailarino, podem ser encontrados no livro *The Physics of Dance*, de Kenneth Laws, Schirmer Books, 1984, p. 137.) Se o momento angular permanecer aproximadamente constante durante um ciclo completo do movimento e se as transições entre as duas configurações forem breves, a razão ω_p/ω , poderá ser calculada. A perna, durante sua fase ativa, irá girar de um ângulo de aproximadamente 90° , mas o corpo, como um todo, deverá girar 360° .

Questão 3

Calcule a razão entre o tempo de pausa (perna girando) e o tempo de giro.

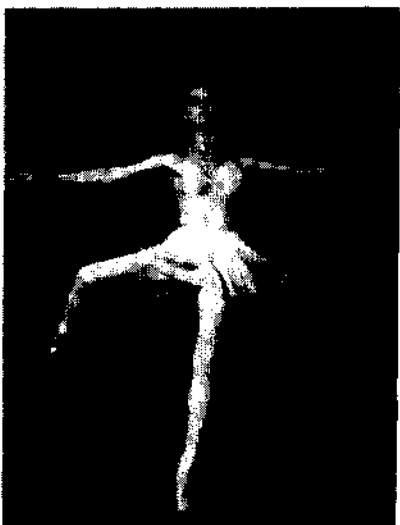
Os saltos são comuns no balé, e os saltos com giros no ar são particularmente impressionantes. Um *tour jeté* é um salto com um giro de 180° em torno de um eixo quase vertical, onde as pernas



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)

Fig. 5 Lisa de Ribère executando volteios em *fouetté*. Observe que ela gira muito pouco, enquanto que a perna concentra a maior parcela do momento angular nas fotos (a), (b) e (c). O corpo, então, gira rapidamente em (d) e (e), enquanto a perna é mantida recolhida, onde o seu momento de inércia é menor.

se cruzam no ar, de modo que o bailarino inicia o salto com uma perna e volta ao chão com a perna oposta. (Veja a Fig. 6.) O movimento será mais eficiente se a rotação aparentemente ocorrer só depois que o bailarino sair do chão. Será que o corpo pode girar de modo a alterar sua orientação no espaço, mesmo sem possuir momento angular?

Realmente, rotações com momento angular zero são possíveis. Observe que, quando o bailarino deixa o chão (Fig. 6a), a perna esquerda está estendida para a frente, possuindo um grande momento de inércia, pois está longe do eixo de rotação. Mas o tronco, a cabeça, a perna direita e os braços estão próximos ao eixo de rotação. Deste modo, a perna esquerda, com o seu grande momento de inércia, pode rodar um ângulo pequeno num dado sentido, enquanto o

restante do corpo gira um ângulo grande — próximo de 180° — em sentido oposto, de modo que a soma dos momentos angulares das duas rotações é igual a zero durante todo o processo. Depois que ocorre a rotação, as posições das pernas são invertidas, a perna esquerda descendo para tocar o chão e a direita subindo para uma posição semelhante à que a esquerda ocupava no início, só que agora atrás do corpo. A rotação completa ocorreu sem nenhum momento angular resultante.

Esses movimentos de giro — *pirouettes*, *pirouettes* com apoio, rotações *fouetté*, *tours jetés* — são apenas uma pequena amostra do variado vocabulário da dança. Quando assistimos a uma apresentação de balé, podemos apreciar estes e outros movimentos mais profundamente quando, além do senso estético,

temos a compreensão do modo como os bailarinos trabalham dentro das restrições impostas pelas leis da Física.

Uma Experiência

Um *demi-fouetté* é uma rotação com momento angular igual a zero que pode ser executada de modo bem simples, e que demonstra o princípio descrito na análise do *tour jeté* feita acima. Iniciando com os braços acima da cabeça e a perna esquerda estendida para a frente, eleve-se sobre a ponta do pé direito e, então, gire a perna esquerda para a esquerda, na horizontal, rapidamente, levando-a para trás do corpo. Este movimento faz com que o tronco, a cabeça, os braços e a perna de apoio girem para a direita. Qual foi o ângulo de rotação da perna esquerda? E o ângulo de

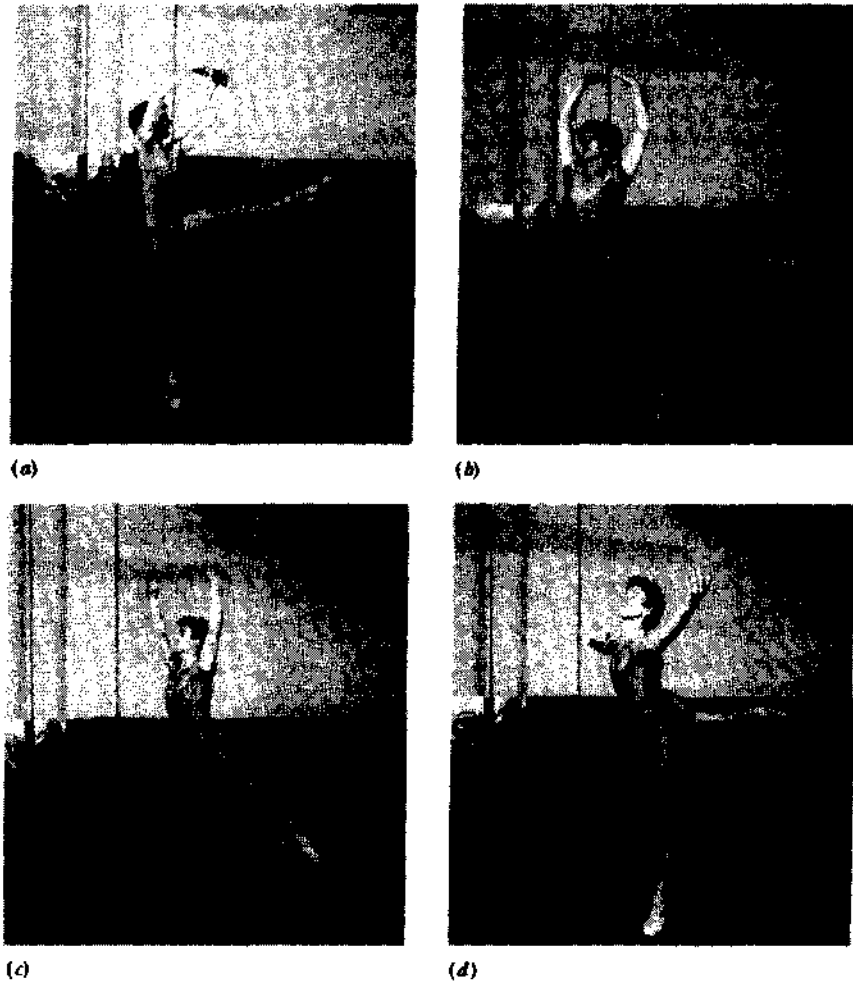


Fig. 6 Sequência de posições num *tour jeté*, executado por Sean Lavery.

rotação do restante do corpo? O que esses ângulos revelam acerca do momento de inércia da perna que gira, que está distante do eixo de rotação, em comparação com o momento de inércia do resto do corpo, que é mantido o mais próximo possível do eixo de rotação?

Como o atrito entre o pé de apoio e o chão perturba o processo, um modo melhor de realizar o movimento é dar um salto no ar, a partir da posição inicial descrita acima e, *então*, realizar os movimentos de rotação, descendo ao chão com o mesmo pé, após a rotação.

Respostas das Questões

1. Cerca de duas vezes mais!
2. 75%.
3. Aproximadamente 1!