1. Übung Numerik von partiellen Differentialgleichungen - stationäre Probleme
12. Oktober 2018

1. Sei V ein Hilbertraum,
$$A : V \times V \to \mathbb{R}$$
eine stetige, elliptische und symmetrische Bilinearform,
$$f : V \to \mathbb{R}$$
eine stetige Linearform auf V sowie $J(v) := \frac{1}{2}A(v,v) - f(v)$. Weiters sei $V_0 \subset V$ ein linearer Teilraum, $g \in V$ und $V_g = g + V_0$.
Zeigen Sie: J nimmt sein Minimum über V_g genau dann bei $u \in V_g$ an, wenn für $u \in V_g$ $A(u,v) = f(v) \quad \forall v \in V_0$ gilt. Muss dazu V_0 abgeschlossen sein?

2. Sei V ein Hilbertraum sowie $A : V \to V$ ein linearer, beschränkter sowie selbstadjungierter Operator.
Zeigen Sie ohne allgemeine Spektraltheorie zu verwenden:
$$\|A\| := \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|(Av, v)|}{\|v\|^2}$$

3. Sei $T_\sigma : l_2 \to l_2$ ein linearer Operator mit $(T_\sigma x)_n = \sigma_n x_n$, wobei $\sigma \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $\sigma_n \to 0$.
Zeigen Sie, dass T kompakt ist.

4. Lösen Sie die Poissongleichung $-\Delta u = 1$ mit Dirichlet-Randbedingungen $u = 0$ auf dem "L-shape" Gebiet $\Omega = (0,2)^2 \setminus [1,2]^2$ mit NGSolve. Plotten Sie die partiellen Ableitungen. Schätzen Sie für $p = 1 \ldots 8$ den L_2-Fehler und den H^1-Fehler, indem Sie mit einer FEM-Lösung höherer Ordnung vergleichen (z.B. $p + 2$).