3. Übung Numerik von partiellen Differentialgleichungen - stationäre Probleme
9. November 2018

1. Sei $\Omega = (0, \pi)$ und $u = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i \sin(ix)$ die Zerlegung der Funktion u in ihre Fourierkoeffizienten. Wir definieren für $s \in [0, \frac{3}{2})$ die $\| \cdot \|_{H_0^s}$ Norm mittels

$$\|u\|_{H_0^s}^2 := \sum_{i=1}^{\infty} i^{2s} u_i^2.$$

Bem.: Damit gilt $\|u\|_{H_0^0} \cong \|u\|_{L_2}$ sowie $\|u\|_{H_0^1} \cong \|\nabla u\|_{L_2}$.

   a.) Sei $0 < a < \pi$. Für welche s liegt die Funktion u_1 mit

$$u_1(x) := \begin{cases} 1 & x > a \\ 0 & x \leq a \end{cases}$$

   in H_0^s? Der Raum H_0^s ist als Abschluss $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^s}}$ erklärt.

   b.) Für welche s liegt das Punktauswertungsfunktional $f : u \mapsto u(a)$ in $(H_0^s)^*$?

2. Sei $s \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ und $u \in H_0^s$. Dann ist u Hölderstetig mit Exponent $\alpha = s - \frac{1}{2}$, d.h. es gilt

$$|u(x) - u(y)| \leq c\,|x - y|^\alpha$$

3. Finden Sie einen Fortsetzungsoperator $E : H^2(-2, 0)$ nach $H^2(-2, 1)$. Zeigen Sie Stetigkeit bzgl. L_2-Norm und H^1 und H^2-Seminormen. Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $Eu(x) = au(-x) + bu(-2x)$ für $x \in (0, 1)$.

4. V, W, Hilberträume, $B(.,.) : V \times W \to \mathbb{R}$, stetige Bilinearform, erfülle die zweite $\inf - \sup$ Bedingung

$$\inf_{v \in W} \sup_{u \in V} \frac{B(u, v)}{\|u\|_V \|v\|_W} \geq \beta_1,$$

Formel (2.10) aus Skript. Zeigen Sie, dass damit der Operator B surjektiv ist, d.h. das Variationsproblem

$$\text{suche } u \in V : \quad B(u, v) = f(v) \quad \forall\, v \in W$$

für alle $f \in W^*$ lösbar ist. Es gibt eine Lösung u mit $\|u\| \leq \beta_1^{-1} \|f\|$.

Hinweis: Ein lineares Gleichungssystem $Bx = y$ mit $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $n < m$, vollen Rang können Sie mittles $BB^t w = y$, und $x := B^t w$ lösen. Definieren Sie $B^* : W \to V^*$ mittels $\langle B^* v, u \rangle_{V^* \times V} = B(u, v)$, und zeigen Sie dass $(B^* w, B^* v)_{V^*}$ eine stetig und elliptische Bilinearform auf W ist.

5. Sei $\Omega = \cup_i \Omega_i$ eine Zerlegung in Teilgebiete, und $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ stückweise konstant bezüglich dieser Zerlegung. Betrachten Sie das Variationsproblem

$$\text{suche } u \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_\Omega \lambda \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v.$$

Bestimmen Sie die klassische Formulierung der Differentialgleichung. Geben Sie die Übergangsbedingungen an den Interfaces $\gamma_{ij} = \overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j}$ an.

6. Sei $\Omega = (0,1)^2$, $\Omega_1 = (0.3, 0.5) \times (0.5, 0.7)$, $\Omega_2 = (\Omega \setminus \Omega_1)^\circ$. Es sei $\lambda_{|\Omega_1} = 1$ und $\lambda_{|\Omega_2} = 10$, $f_{|\Omega_1} = 1$ und $f_{|\Omega_2} = 0$. Lösen Sie das entsprechende Variationsproblem aus Beispiel 5 mittels FEM. Berechnen Sie die Wärmeflüsse $\int_{\Gamma_i} \lambda \frac{\partial u}{\partial n}$ durch die einzelnen Randstücke von Ω_1 mit einer Methode Ihrer Wahl. Die Summe sollte 0.04 ergeben.