4. Übung Numerik von partiellen Differentialgleichungen - stationäre Probleme
16. November 2015

1. Zeigen Sie folgende Variante der Friedrichsungleichung:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^\alpha} u(x)^2\, dx \leq c \int_0^\infty u'(x)^2\, dx$$

für $u \in C^1(\mathbb{R}_0^+)$ mit $u' \in L_2$ und $u(0) = 0$, für $\alpha > 2$. Gilt die Ungleichung auch für $\alpha = 2$?
Hinweis: HS der Integralrechung, Cauchy Schwarz, Fubini.

2. Sei $I = (-1, 1)$ sowie T das Dreieck mit Eckpunkten $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Wir definieren den Fortsetzungsoperator $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} L_2(I) \to L_2(T) \\ u \mapsto \frac{1}{2y} \int\limits_{x-y}^{x+y} u(s)\, ds \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für $y \in (0, 1)$

$$\int\limits_{-1+y}^{1-y} |\mathcal{E}u|^2 + |\nabla(\mathcal{E}u)|^2\, dx \leq c \min\{\|u\|^2_{H^1(I)}, \frac{1}{y^2}\|u\|^2_{L_2(I)}\}$$

gilt.

Zeigen Sie damit weiters

$$\|\nabla \mathcal{E}u\|_{L_2([y-1,1-y]\times\{y\})} \leq c\, \|u\|_{y^{-1}L_2(I)+H^1(I)}.$$

Rechts steht die Norm eines Summenraums, $s^{-1}L_2$ ist der Raum L_2 versehen mit der Norm $s^{-1}\|\cdot\|_{L_2}$.

Schließen Sie daraus

$$\|\nabla \mathcal{E}u\|_{L_2(T)} \leq c\, \|u\|_{H^{1/2)}(I)}$$

Hinweis: Integration über y, Interpolationsraum über K-Funktional.

3. *Timoshenko Balken:* Gesucht sind $(w, \beta) \in V_0 \subset [H^1(0, 1)]^2$ so dass

$$\int_0^1 \beta'\delta' + \frac{1}{t^2} \int_0^1 (w' - \beta)(v' - \delta) = \int_0^1 fv \qquad \forall\ (v, \delta) \in V_0.$$

Dabei ist $t \in (0, 1)$ ein gegebener kleiner Parameter, und $f \in L_2$ gegeben. Untersuchen Sie Lösbarkeit mit Lax-Milgram (Stetigkeit, Elliptizität über Tartar, Kern der Bilinearform ?). Wie wächst $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ mit $t \to 0$? Welche Folgen hat dies für Cea's Lemma ?

Betrachten Sie für V_0 folgende Kombinationen von wesentlichen Randbedingungen:

(a) $w(0) = \beta(0) = 0$
(b) $w(0) = w(1) = 0$
(c) $\beta(0) = \beta(1) = 0$

Mechanische Interpretation (Zusatzinformation). w beschreibt die vertikale Deformation eines Balken unter vertikaler Last f, β ist die linearisierte Verdrehung der Normalen. Die Energie im System setzt sich aus der Biegeenergie $\frac{1}{2}\int_0^1 (\beta')^2$, der Scherenergie $\frac{1}{t^2}\int_0^1 (w'-\beta)^2$ welche die Abweichung der Deformation der Normalen von der Normalen der Deformation bestraft, und der Energie aufgrund der anliegenden Belastung $-\int_0^1 fw$. Minimierung dieses Energiefunktionals führt auf obige Gleichung.

4. Lösen Sie eine Reissner Mindlin Plattengleichung mit NGSolve - Python. Das ist das 2D Analogon zum Timoshenko-Balken. Gesucht sind $w, \beta \in V_0 \subset [H^1]^3$ (mit w skalar und $\beta = (\beta_x, \beta_y)$ vektorwertig) sodass

$$\int_\Omega \nabla\beta \cdot \nabla\delta + \frac{1}{t^2}\int_\Omega (\nabla w - \beta)\cdot(\nabla v - \delta) = \int_\Omega f v \qquad (v, \delta) \in V_0.$$

   Setzen Sie $\Omega = (0,1)^2$, $f = 1$ und $t = 0.1$ bzw. $t = 0.01$. Verwenden Sie als Randbedingungen

   (a) $w = \beta_x = \beta_y = 0$ auf $\partial\Omega$
   (b) $w = 0$ auf $\partial\Omega$
   (c) gemischte Randbedingungen Ihrer Wahl

   Visualisieren Sie w und die Komponenten von β. Zeigen Sie $\nabla w - \beta \to 0$ in L_2 für $t \to 0$. Welches Variationsproblem erwarten Sie für $w^0 = \lim_{t\to 0} w(t)$? (Konvergenz muss nicht bewiesen werden)

   Die Definition von Produkträumen und Verwendung der Komponenten entnehmen Sie dem Beispiel *Navier Stokes Equation* .

5. (bis 23. Nov.) Erweitern Sie MyLittleNGSolve um bilineare Viereckselemente. Teil 1 bis 16. Nov: Compilieren Sie MyLittleNGSolve, und führen Sie simple.py aus. Informationen dazu finden Sie auf der ngsolve-docu Seite und bei Ihrem Übungsleiter.