2. Übung Numerik von partiellen Differentialgleichungen - stationäre Probleme
19. Oktober 2018

1. Sei V ein Hilbertraum, f eine stetige Linearform und A eine stetige, symmetrische und elliptische Bilinearform. Sei u die Lösung des Variationsproblems
$$A(u,v) = f(v).$$
Zeigen Sie, dass für u
$$\sup_{v\neq 0} \frac{f(v)}{\|v\|_A} = \|u\|_A$$
gilt. Das Supremum wird für $v = u$ angenommen.

2. Sei V ein Hilbertraum und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, elliptische (mit α_1) und stetige (mit α_2) Bilinearform. Des Weiteren sei $X = V \times V$, sowie
$$B : \begin{cases} X \times X \to \mathbb{R} \\ ((u_1,u_2),(v_1,v_2)) \mapsto a(u_1,v_1) + a(u_1,v_2) + a(u_2,v_2) \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass B elliptisch ist und geben Sie eine Elliptizitätskonstante an. Sei $X_N \subset X$ ein linearer Teilraum. Lässt sich die Elliptizität von B auf X_N übertragen?

3. Wie Aufgabe 2. Sei $b : V \times V \to \mathbb{R}$ eine weitere stetige (mit β_2) Bilinearform. Jetzt sei
$$B : X \times X \to \mathbb{R} : \ ((u_1,u_2),(v_1,v_2)) \mapsto a(u_1,v_1) + b(u_1,v_2) + a(u_2,v_2)$$
Zeigen Sie die $\inf - \sup$ Stabilität von B (Konstante = ?). Geben Sie mögliche Teilräume $X_N \subset X$ an, sodass auch das diskrete Problem $\inf - \sup$-stabil ist. Geben Sie ein Beispiel an, für das das Variationsproblem auf $X_N \subset X$ nicht lösbar ist.

4. Seien X, Y Hilberträume mit gemeinsamer Vektorraum-Struktur. Auf dem Summenraum $X + Y := \{z = x + y : x \in X \ y \in Y\}$ sei
$$\|z\|_{X+Y} := \inf_{\substack{z=x+y \\ x\in X,\ y\in Y}} \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2}.$$
Zeigen Sie, dass die Norm $\|\cdot\|_{X+Y}$ ein Skalarprodukt induziert. Hinweis: Parallelogrammlemma.

5. Sei $\Omega = (0,1)^2$, und $\Gamma_b, \Gamma_r, \Gamma_t$ und Γ_l unterer, rechter, oberer und linker Rand. Lösen Sie $-\Delta u = f := x$ auf Ω, homogene Dirichlet Randbedingungen links und rechts, und homogene Neumann Randbedingungen unten und oben mittels FEM ($p = 1,2,3$). Berechnen Sie die Wärmeflüsse durch linken und rechten Rand
$$W_l = -\int_{\Gamma_l} \frac{\partial u}{\partial n} \qquad \text{und} \qquad W_r = -\int_{\Gamma_r} \frac{\partial u}{\partial n}$$
und $W_l + W_r$. Plotten Sie die Fehler für eine Folge von Netzen.

   Berechnen Sie die Integrale über zwei Varianten:

(a) numerische Integration, wobei Sie $\frac{\partial u}{\partial x}$ in den von Ihnen gewählten Integrationspunkten auswerten

(b) über die `Integrate( ...., BND, region_wise=True)` Funktion. Dazu müssen Sie zuerst $\frac{\partial u}{\partial x}$ in eine weitere H^1-gridfunction `dudx` interpolieren (mittels `dudx.Set(grad(u)[0])`. Warum wohl ?

6. Wie Bsp 5. Zeigen Sie zunächst für die Lösung u und eine beliebige H^1 Funktion w:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w - \int_\Omega f w = \int_{\Gamma_l \cup \Gamma_r} \frac{\partial u}{\partial n} w$$

Bestimmen Sie die Flüsse über diese Gleichung. Definieren Sie dazu eine `GridFunction` w, und setzen Sie diese so dass sie links bzw. rechts die Werte 1 bzw. 0 annimmt.

Berechnen Sie dann die linke Seite

(a) durch Berechnung der Integrale

(b) durch Matrix-Vektor Operationen