学院______ 姓名______ 学号______ 任课教师______ 考场教室______ 座位号______

密封线以内答题无效

成绩构成比例：平时成绩___50___%，期末成绩___50___%

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	合计
得分									

一、选择题 （每小题 3 分，共 15 分）

1．设事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)>0$， $P(B)>0$，则下列选项正确的是(D)

（A） $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容； （B） $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$；

（C） $P(AB)=P(A)P(B)$； （D） $P(A-B)=P(A)$.

2. 一种零件的加工由两道工序完成，第一道工序、第二道工序的废品率分别为 p 和 q，设两道工序的工作是独立的，则该零件的合格品率是(C)

（A） $1-p-q$；（B） $1-pq$； （C） $1-p-q+pq$；（D） $(1-p)+(1-q)$.

3. 设离散型随机变量 X 的分布律为： $P(X=k)=b\lambda^k\ (k=1,2\cdots)$, 且 $b>0$，则 λ 为(A)

（A） $\dfrac{1}{b+1}$； （B） $\dfrac{1}{b-1}$； （C） $b+1$； （D）大于零的任意实数.

4. 下列四种分布中，具备可加性的是(A)

（A）泊松分布； （B）0-1 分布； （C）指数分布； （D）均匀分布.

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$， $Y=-2X+3$, 则 Y 的概率密度为(B)

（A） $-\dfrac{1}{2}f(-\dfrac{y-3}{2})$； （B） $\dfrac{1}{2}f(-\dfrac{y-3}{2})$；

（C） $-\dfrac{1}{2}f(-\dfrac{y+3}{2})$； （D） $\dfrac{1}{2}f(-\dfrac{y+3}{2})$.

二、填空题 （每小题 3 分，共 15 分）

1.设 A、B 为随机事件，$P(B)=0.8$，$P(B-A)=0.2$，当 A 与 B 独立时，$P(B|(A\cup B))=$_____.

2.将 3 个小球随机放入 3 个盒子中（球与盒均可区分）， 则每个盒子都有球的概率为________.

3.设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $P\{X=0\}=\dfrac{1}{3}$，则 $\lambda=$________.

4.设随机变量 $X\sim N(3,\sigma^2)$，且 $P\{X<0\}=0.1$，则 $P\{3<X<6\}=$_______.

5.设随机变量 X 和 Y 独立，均服从参数为 1 的指数分布，则 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f(z)=$_______.

填空答案：1. $\dfrac{16}{19}\approx 0.8421$， 2. $\dfrac{2}{9}$， 3. $\ln 3$， 4. 0.4， 5. $f(z)=\begin{cases} ze^{-z}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$

三、简答题 （每小题 10 分，共 40 分）

1. 将 A、B、C 三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为 0.8，而输出为其他两个字母的概率均为 0.1。今将字母 $AAAA$，$BBBB$，$CCCC$ 之一输入信道，设输入 $AAAA$，$BBBB$，$CCCC$ 的概率分别为 0.5，0.4，0.1。已知输出为 $ABCA$，问输入的是 $AAAA$ 的概率是多少？（设信道传输每个字母的工作是相互独立的）。

解：设 A_1,A_2,A_3 分别表示输入 $AAAA$，$BBBB$，$CCCC$ 的事件，$\widetilde{B}$ 表示输出为 $ABCA$ 的事件。 1

D

由贝叶斯公式得：$P(A_1|\widetilde{B})=\dfrac{P(A_1)P(\widetilde{B}|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(\widetilde{B}|A_i)}$ 3

$P(A_1)=0.5, P(A_2)=0.4, P(A_3)=0.1$ $P(\widetilde{B}|A_1)=0.8\times0.1\times0.1\times0.8=0.0064$

$P(\widetilde{B}|A_2)=0.1\times0.8\times0.1\times0.1=0.0008$ $P(\widetilde{B}|A_3)=0.1\times0.1\times0.8\times0.1=0.0008$ 4

$$P(A_1|\widetilde{B})=\frac{0.5\times0.0064}{0.5\times0.0064+0.0008\times0.4+0.0008\times0.1}=\frac{8}{9}$$ 2

2. 在区间（0，1）中随机地取两个数 X、Y，求事件“两数之和小于 $\dfrac{6}{5}$”的概率。

解：由题意知：X、Y 均服从区间（0，1）上的均匀分布，故

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases},\quad f(y)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

由于 X、Y 相互独立，

所以 $$f(x,y)=f(x)f(y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

故 $$P\left\{X+Y<\frac{6}{5}\right\}=\frac{17}{25}.$$

3. 将长度为 1 的均匀木棒先随机折成两段，其中一段长度记为 X，再把剩下的木棒随机折成两段，记其中一段长度为 Y，分别求 X 和 Y 的概率密度 $f_X(x)$、$f_Y(y)$。

解：（1）由题意知, X 的服从区间（0，1）上的均匀分布，所以

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（2）当 0<x<1 时，给定 $X=x$ 条件下，随机变量 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<y<1-x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

所以 (X, Y) 的联合概率密度为：

$$f(x,y)=f(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<1, 0<y<1-x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{1-y}\frac{1}{1-x}dx, & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

4. 设随机变量 X 的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0\le x\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，求 $Y=X^2$ 的概率密度 $f_Y(y)$。

解：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$，

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $y>4$ 时，$F_Y(y)=1$

当 $0\le y\le 4$ 时，$F_Y(y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=P(0\le X\le\sqrt{y})=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{4}y$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0\le y\le 4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

四、计算题 （每小题 15 分，共 30 分）

1. 设(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}4(1-x)y & 0<x<1,0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，

（1）求X的边缘概率密度$f_x(x)$，Y的边缘概率密度$f_y(y)$；

（2）判断X与Y是否相互独立；　（3）计算$P\{X+Y\le 1\}$.

解：当$0<x<1$时，$f_x(x)=\int_0^1 4(1-x)ydy=4(1-x)[\frac{1}{2}y^2]_0^1=2(1-x)$

所以：　$f_X(x)=\begin{cases}2(1-x) & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

当$0<y<1$时，$f_y(y)=\int_0^1 4(1-x)ydx=4y[x-\frac{1}{2}x^2]_0^1=2y$

所以：$f_Y(x)=\begin{cases}2y & 0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

（2）$\because$ 所有的$x,y\in(-\infty,+\infty)$，对于$f(x,y)=f_x(x)f_y(y)$都成立

$\therefore$ X 与 Y 互相独立

（3）　$P\{X+Y\le 1\}=4\int_0^1(1-x)dx\int_0^{-x+1}ydy$

$=2[x-\frac{1}{2}x^2-x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4]_0^1=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

2.设随机变量X和Y相互独立，均服从$B(1,p)(0<p<1)$。令$Z=\begin{cases}1, & 若X+Y为偶数\\ 0, & 若X+Y为奇数\end{cases}$。

（1）求Z的分布律;（2）求$(X，Z)$的联合分布律;（3）p取何值时X和Z独立。

解 〔1〕求Z的分布律;

$$P(Z=0)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)=2p(1-p)$$

$$P(Z=1)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)=p^2+(1-p)^2=2p^2-2p+1$$

〔2〕(X,Z) 的联合分布律：

$X \backslash Z$	0	1	
0	$p(1-p)$	$(1-p)^2$	$1-p$
1	$p(1-p)$	p^2	p
	$2p(1-p)$	$p^2+(1-p)^2$	

〔3〕$2p(1-p)(1-p)=p(1-p)$　可得　$p=0.5$，

(X,Z) 的联合分布律：

$X \backslash Z$	0	1	
0	0.25	0.25	0.5
1	0.25	0.25	0.5
	0.5	0.5	

联合分布律等于边缘分布律的乘积，X 和 Z 独立