



交乘项的介绍与应用

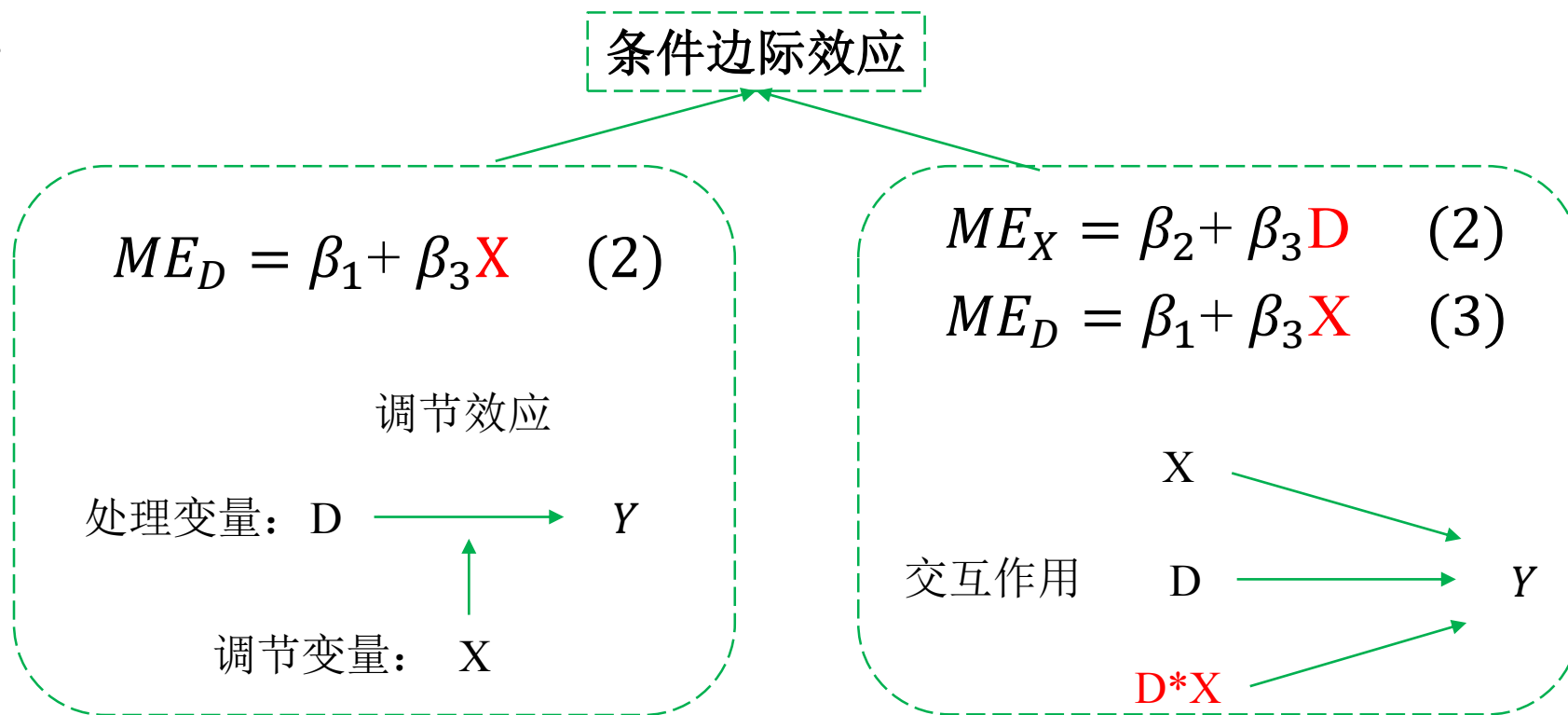
任建武 杨雄飞 吴建利

交乘项的介绍

什么是交乘项：

$$Y = \mu + \beta_1 D + \beta_2 X + \beta_3 \textcolor{red}{D*X} + \beta_4 Z + \epsilon \quad (1)$$

交乘项的作用：



交乘项的介绍

注意事项:

(1) 交乘项的所有构成项通常都需要放入回归中。

$$Y = \mu + \beta_1 D + \beta_2 X + \beta_3 D * X + \beta_4 Z + \epsilon \quad (1)$$

特殊情况:

$$Y = \mu + \alpha_1 X + \alpha_2 X * D + \alpha_3 (\neg X) * D + \alpha_4 Z + \epsilon \quad (1a)$$

- (1a) 中, 若加入D, 存在严重的多重共线性, 因为 $X * D + (\neg X) * D = D$ 。
- 实际上, $\alpha_2 - \alpha_3 = \beta_3$ 。

交乘项的介绍

注意事项:

(2) 构成项的系数不应解释为无条件的边际效应。

$$ME_D = \beta_1 + \beta_3 X \quad (2)$$

- β_1 : 其他条件不变时, 当 $X=0$ 时, 平均来说, X 增加一单位, Y 变化 β_1 个单位。
- 若 X 不能等于0, 要想使得系数有意义, 则可以考虑对变量进行中心化。

交乘项的介绍

中心化问题

$$Y = \mu + \beta_1 D + \beta_2 X + \beta_3 (X - \bar{X})D + \epsilon \quad (1b)$$

$$Y = \mu + \beta_1 D + \beta_2 X + \beta_3 (D - \bar{D})(X - \bar{X}) + \epsilon \quad (1c)$$

$$Y = \mu + \beta_1 (D - \bar{D}) + \beta_2 (X - \bar{X}) + \beta_3 (D - \bar{D})(X - \bar{X}) + \epsilon \quad (1d)$$

条件边际效应

$$ME_D = \beta_1 + \beta_3 (X - \bar{X})$$



$$Y = \mu + (\beta_1 - \beta_3 \bar{X}) D + \beta_2 X + \beta_3 XD + \epsilon \quad (1b)$$

$$Y = \mu + \beta_3 \bar{D} \bar{X} + (\beta_1 - \beta_3 \bar{X}) D + (\beta_2 - \beta_3 \bar{D}) X + \beta_3 XD + \epsilon \quad (1c)$$

$$Y = \mu + \beta_1 \bar{D} + \beta_2 \bar{X} + \beta_3 \bar{D} \bar{X} + (\beta_1 - \beta_3 \bar{X}) D + (\beta_2 - \beta_3 \bar{D}) X + \beta_3 XD + \epsilon \quad (1d)$$

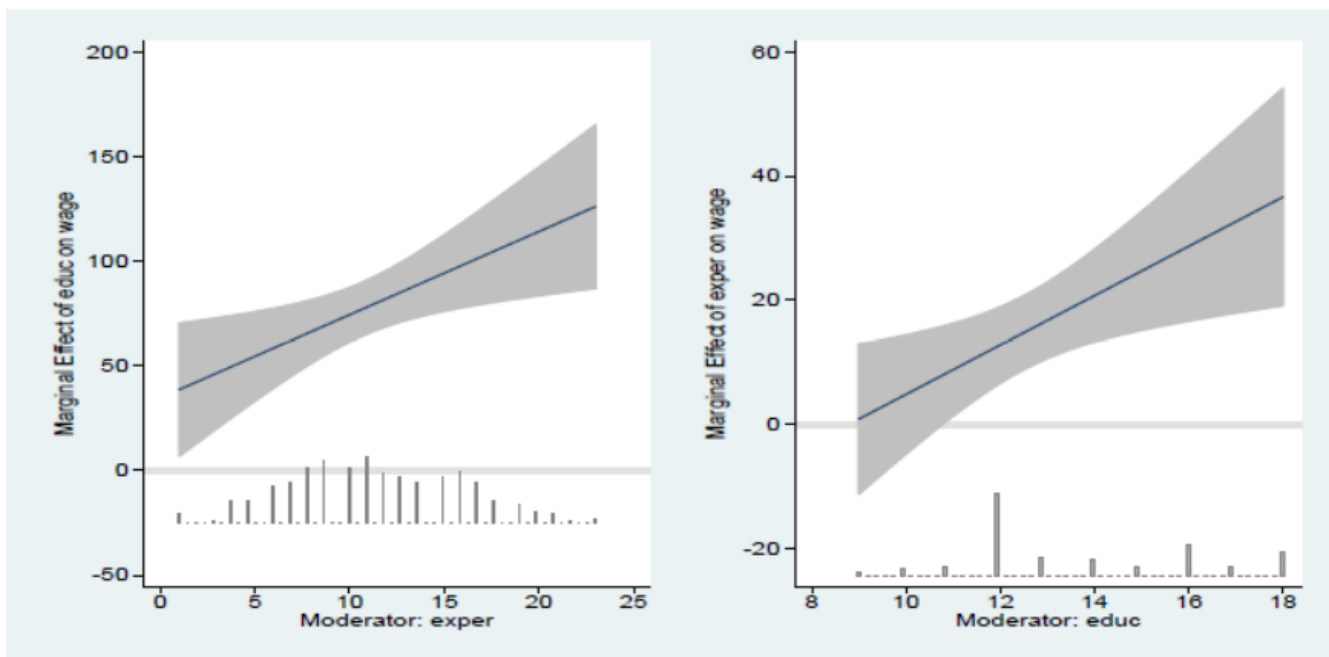
交乘项的介绍

注意事项:

(3) 应计算整体的条件边际效应和置信区间

$$Y = \mu + \beta_1 D + \beta_2 X + \beta_3 D * X + \beta_4 Z + \epsilon \quad (1)$$

$$ME_D = \beta_1 + \beta_3 X \quad (2)$$



交乘项的介绍

注意事项:

(4) 隐含的假设: 线性交互作用假设

$$Y = \mu + \beta_1 D + \beta_2 X + \beta_3 D * X + \beta_4 Z + \epsilon \quad (1)$$

$$ME_D = \beta_1 + \beta_3 X \quad (2)$$

$$\frac{\partial ME_D}{\partial X} = \beta_3$$

线性条件效应

- β_3 : 其他条件不变, 平均而言, D每增加一个单位, X对Y的边际效应发生单位变化 β_3 个单位。
- 实际上, D对X的边际效应的影响, 在X的整个定义域内不变, 均为常数。

$$Y = \mu + \beta_1 D + \beta_2 X^2 + \beta_3 D * X^2 + \beta_4 Z + \epsilon \quad (1e)$$

$$ME_D = \beta_1 + \beta_3 X^2 \quad (2e)$$

$$\frac{\partial ME_D}{\partial X} = 2\beta_3 X$$

非线性条件效应

- D对X的边际效应的影响, 在X的整个定义域内是变化的。

交乘项的介绍

注意事项:

(5) 调节变量的共同支持问题

二值变量的处理效应:

$$\begin{aligned} Eff(d_1, d_2) &= Y(D = d_1 | X, Z) - Y(D = d_2 | X, Z) \\ &= (\mu + \eta X + \alpha d_1 + \beta d_1 X) - (\mu + \eta X + \alpha d_2 + \beta d_2 X) \\ &= \alpha(d_1 - d_2) + \beta(d_1 - d_2)X \end{aligned}$$

- 首先，如果存在非线性或非单调的影响，或者 **X 或 D 的分布有偏**，那么线性假设就无法成立。
- 其次，为了计算处理变量在给定调节变量 X_0 的边际效应，在任意给定 $X = X_0$ ，需要满足：(1) 有足够数量的样本点，它们的 X 值接近于 X_0 。(2) 在 X_0 处的处理变量 D 是有变化的。
- 否则，**条件边际效应的估计就是以函数形式对没有数据或极少量数据的区域的过度外推或内插，是脆弱的并且依赖于模型。**

交乘项的介绍

注意事项总结：



无论假定是线性或者非线性条件效应：

- ✓ （1）交乘项的所有构成项都需要放入回归中。
- ✓ （2）构成项的系数应解释为有条件边际效应。
- ✓ （3）应计算整体的条件边际效应和置信区间

若假定是线性条件效应：

- ✓ （4）论证和检验线性条件效应
- ✓ （5）检验共同支持问题，在有充分的共同支持的数据区域计算边际效应。

交乘项的应用

检验线性条件效应假设和共同支持条件：数据可视化

- 第一步，将原始数据按 X 进行分组，画出 $Y-D$ 的散点图。如果 X 是类别变量，那么直接分组；如果 X 是连续变量，那么按照分位数等分成低中高三组。
- 第二步，检查 Y 与 X 在各组中的关系是否为线性。首先，在散点图上进行线性回归拟合；其次，进行 **LOESS 拟合**。如果真实模型是线性的，那么两条线应非常接近；反之，当真实模型是非线性的，两条线走势有明显差异。最后，对比同一条拟合线在不同分组中的走势。若走势不同，说明存在潜在的交互项的作用。
- 第三步，检验共同支持条件。在散点图上叠加 X 分布的箱型分布图。散点图本身也提供了 X 分布的信息。如果 X 在数据区间内都有分布而且比较均匀，比如 25 分位点到 75 分位点几乎占据整个区域，那么满足共同支持条件；反之， X 集中在某个区间，在另外的区域数据很少或没有观测值，则不满足共同支持条件。
- 第四步，将原始数据按 D 进行分组，画出 $Y-X$ 的散点图，重复上面的步骤.....

交乘项的应用

检验线性条件效应假设和共同支持条件：统计检验

一、箱体估计：

$$G_1 = \begin{cases} 1 & X < \delta_{1/3} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad G_2 = \begin{cases} 1 & X \in [\delta_{1/3}, \delta_{2/3}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad G_3 = \begin{cases} 1 & X \geq \delta_{2/3} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$Y = \sum_{j=1}^3 \left\{ \mu_j + \alpha_j D + \eta_j (X - x_j) + \beta_j (X - x_j) D \right\} G_j + Z\gamma + \epsilon \quad ME(x_j) = \alpha_j$$

箱体估计优点：

- (1) 放松了线性交互作用假设。
- (2) 是在调节变量的共同支持处计算的某一点的条件边际效应。
- (3) 任何软件都可估计该方程。
- (4) 它是标准线性交互模型的一种特殊形式，可用于检验线性交互作用假设。

$$ME(x_j) = \alpha_j = \alpha + \beta_j x_j = \alpha + \beta x_j.$$

$$\hat{\alpha}_j - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_j) \xrightarrow{p} 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

交乘项的应用

检验线性交互作用假设和共同支持条件：统计检验

二、核估计：

$$\begin{aligned} \left(\hat{\mu}(x_0), \hat{\alpha}(x_0), \hat{\eta}(x_0), \hat{\beta}(x_0), \hat{\gamma}(x_0) \right) &= \underset{\tilde{\mu}, \tilde{\alpha}, \tilde{\eta}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}}{\operatorname{argmin}} L(\tilde{\mu}, \tilde{\alpha}, \tilde{\eta}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) \\ L &= \sum_i^N \left\{ \left[Y_i - \tilde{\mu} - \tilde{\alpha}D_i - \tilde{\eta}(X_i - x_0) - \tilde{\beta}D_i(X_i - x_0) - \tilde{\gamma}Z_i \right]^2 K \left(\frac{X_i - x_0}{h} \right) \right\}, \end{aligned}$$

非参数方法，可用于非线性交互作用估计

交乘项的应用

四种类型数据：

第一种：处理变量是二值变量，调节变量是连续变量

$$Y_i = 5 - 4X_i - 9D_i + 3D_iX_i + Z_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, 200.$$

in which Y_i is the outcome for unit i , the moderator is $X_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(3, 1)$, $Z_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(3, 1)$, and the error term is $\epsilon_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 4)$. Both samples share the same sets of X_i , Z_i and ϵ_i , but in **sample1**, the treatment indicator is $D_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Bernoulli}(0.5)$,

第二种：处理变量是连续变量，调节变量是连续变量

the treatment indicator is $D_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(3, 1)$

两者都是： $ME_D = -9 + 3X$.

交乘项的应用

四种类型数据：

第三种：非线性条件效应，处理变量是二值变量，调节变量是连续变量

$$Y_i = 2.5 - X_i^2 - 5D_i + 2D_iX_i^2 + Z_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, 200.$$

Y_i is the outcome, the moderator is $X_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{U}(-3, 3)$, the treatment indicator is $D_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Bernoulli}(0.5)$, one covariate is $Z_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(3, 1)$, and the error term is $\varepsilon_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 4)$. The marginal effect of D on Y therefore is

$$ME_D = -5 + 2X^2.$$

交乘项的应用

四种类型数据：

第四种：非线性条件效应，面板数据，处理变量是二值变量，调节变量是连续变量，具有固定效应

$$Y_{it} = 2.5 - X_{it}^2 - 5D_{it} + 2D_{it}X_{it}^2 + Z_{it} + \alpha_i + \xi_t + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, 500.$$

in which $X_{it} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{U}(-3, 3)$, $D_{it} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Bernoulli}(0.5)$, $Z_{it} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(3, 1)$, $\varepsilon_{it} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 4)$, $\alpha_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 400)$ and $\xi_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$. The marginal effect of D on Y therefore is the same as in **sample3**:

$$ME_D = -5 + 2X^2.$$

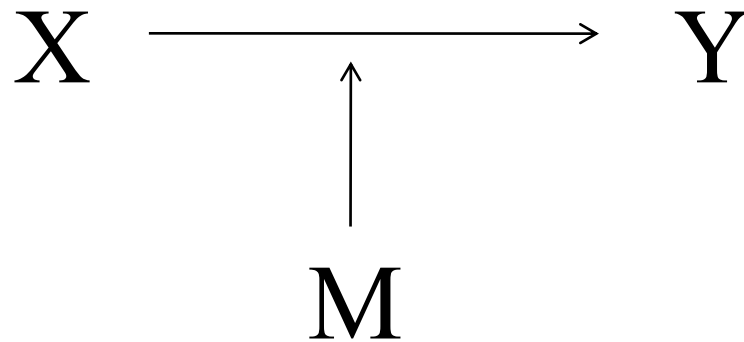
关于交乘项的简要介绍

吴建利

- 为什么使用交乘项
- 交乘项的主要类型及解释
- 文献中使用交乘项普遍存在的问题
- 交乘项的局限性
- 交乘项的拓展

- 解释变量对被解释变量的影响方向和程度受到某一个变量 M 的影响

- 当自变量和因变量的相关很弱，或相关研究的结果不一致时，最好考察调节作用。如性别、家庭社会经济地位。



用公式表达即：

$$Y = aX + bM + cXM + e \quad (1)$$

a: X的主效应

b: M的主效应

c: M对X与Y关系的调节作用

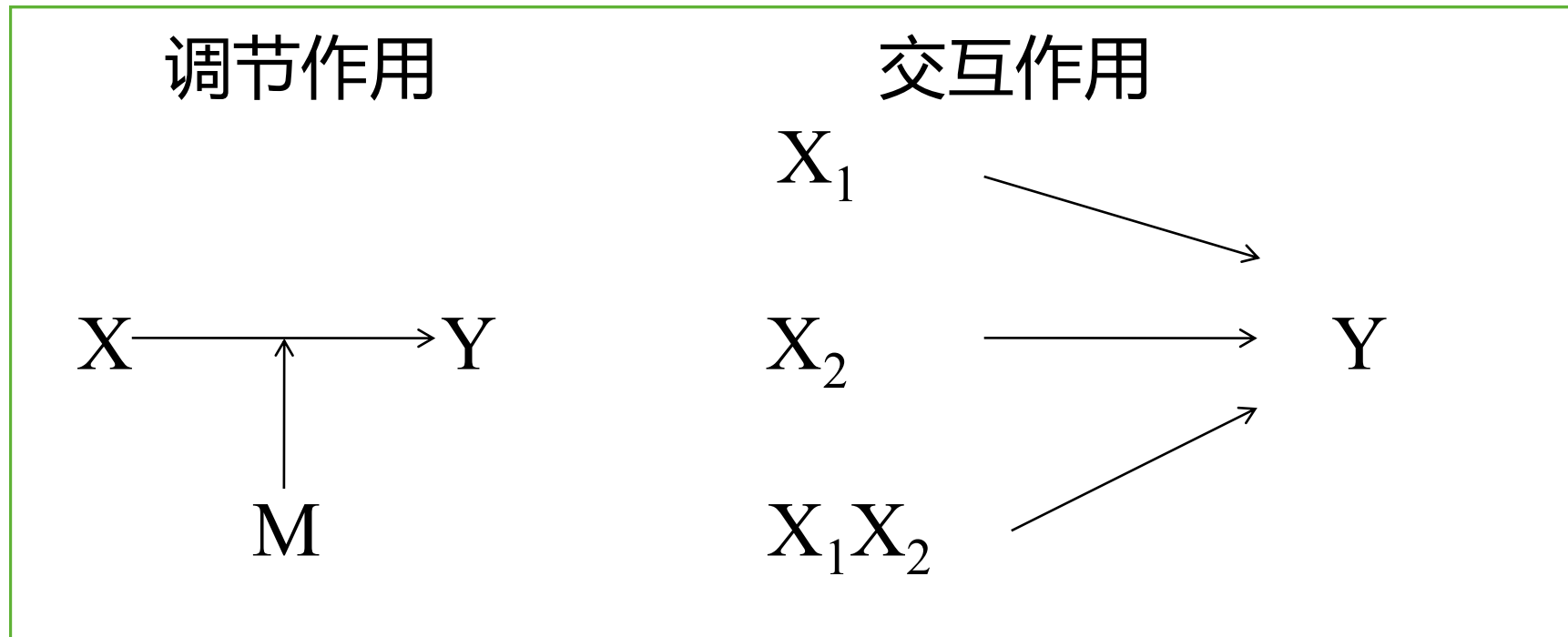
调节变量（M）的定义：

- 如果变量Y与变量X的关系是变量M的函数，称M为调节变量。
- 调节变量影响自变量和因变量之间关系的方向和/或强度。
- 调节作用描述的是X和Y之间的关系（What is the relationship）。

交互项与交乘项的差异：

但在概念上，两者是有区别的。在交互作用分析中， X 与 M 的地位是对称的，即可以互换。而在调节作用分析中，哪个是自变量，哪个是调节变量是很明确的，即不能互换。

交互项与交乘项的差异：



➤ 交乘变量的数据类型

- 交乘变量都为连续变量
- 交乘变量都为离散变量
- 一个离散变量，一个连续变量

➤ 中心化

- 仅交乘项中心化
- 交乘项及主要变量都中心化

交乘變量的數據類型：

讓我們先回顧一個沒有交互效果 (interaction effects) 的迴歸如下：

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad (1)$$

其中, y 為被解釋變數, x_1 與 x_2 為解釋變數。我們以 x_1 為例, 令 y 對 x_1 取變動為：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \beta_1 \quad (2)$$

所以, 其他情況不變下, x_1 (假設為連續的變數) 每額外增加一單位, y 平均會增加 β_1 單位 (implicitly evaluated at $x_2 = \bar{x}_2$, the mean value of x_2).¹ 該模型中, 下式說明 x_1 對 y 的邊際效果只由其係數 β_1 之正負、大小來衡量, 完全不受另外一個解釋變數 x_2 之影響：

$$\frac{\Delta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x_1} \right)}{\Delta x_2} = \frac{\Delta \beta_1}{\Delta x_2} = 0 \quad (3)$$

交乘項的主要類型及解釋

什麼時候需要交互 (interaction) 項呢？若一個變數 x_1 對被解釋變數 y 之效果可能會受到其他變數 x_2 之影響時，這時我們可以考慮使用含交互項之迴歸。現在，讓我們考慮一個簡單但典型的交互效果模型如下：

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \underbrace{x_1}_{\text{主要項}} + \alpha_2 \cdot \underbrace{x_1 x_2}_{\text{交互項}} + \alpha_3 \cdot \underbrace{x_2}_{\text{主要項}} + u \quad (5)$$

其中， y 為被解釋變數， x_1 與 x_2 為解釋變數 (主要項, main terms)，而兩個主要項的相乘項 $x_1 x_2$ 即為交互項 (interaction term)。此時， x_1 與 x_2 對 y 之邊際效果分別可寫成：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 \quad (6)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_2} = \alpha_3 + \alpha_2 x_1 \quad (7)$$

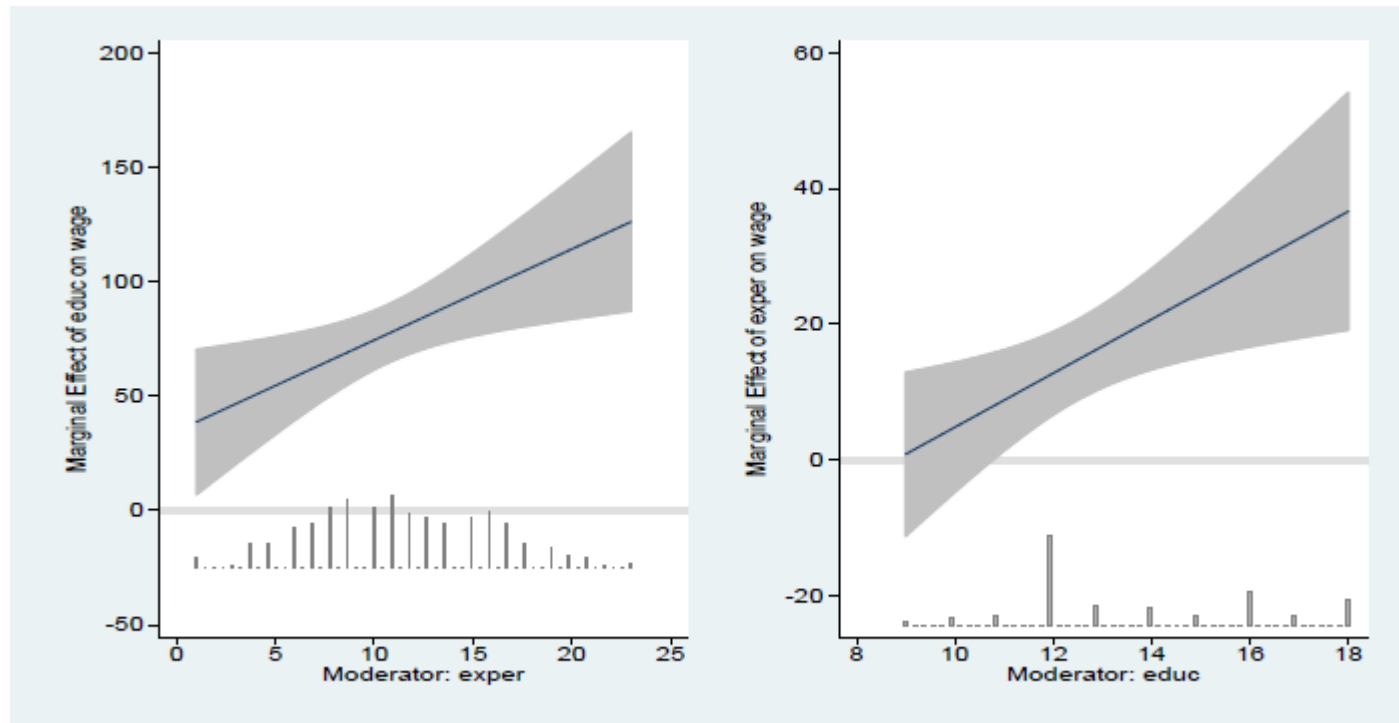
交乘項的主要類型及解釋

從 (6) 式可以發現, 此時 x_1 對 y 的邊際效果為 $\alpha_1 + \alpha_2 x_2$, 而下式說明該邊際效果會受到另一個解釋變數 x_2 之影響, 除非 ($\alpha_2 = 0$):

$$\frac{\Delta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x_1} \right)}{\Delta x_2} = \frac{\Delta(\alpha_1 + \alpha_2 x_2)}{\Delta x_2} = \alpha_2 \quad (8)$$

例如, 若 $\alpha_2 > 0$, 則 x_1 對 y 的影響效果會隨著 x_2 的値之增加而增加; 反之, 若 $\alpha_2 < 0$, 則 x_1 對 y 的影響效果會隨著 x_2 的値之增加而降低。由於該交互效果模型中, x_1 與 x_2 存在著對稱之情況, 所以所有對 x_1 效果之說明 (解釋、分析與檢定等), 都可適用於第 (7) 式 x_2 之情況。

交乘项的主要类型及解释



“*interflex*” 命令 (Xu et al., 2017) “help interflex”
“*margins*” 命令 “help margins”

交乘項的主要類型及解釋

接著，我們考慮兩個主要項的解釋變數，一個是連續的 (continuous)、一個是離散的 (discrete) 的情況。底下的例子中，black 為一虛擬變數，若一人為黑人，則其值為 1，否則為 0。

$$\text{wage} = \alpha_0 + \alpha_1 \text{educ} + \alpha_2 (\text{educ} \times \text{black}) + \alpha_3 \text{black} + \alpha_4 \text{married} + u \quad (17)$$

- educ 對 wage 的邊際效果 (ME_e) 如下：

$$\begin{aligned} \text{ME}_e = \frac{\Delta \text{wage}}{\Delta \text{educ}} &= \alpha_1 + \alpha_2 \text{black} \\ &= \begin{cases} \alpha_1 & \text{if black} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \text{if black} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

交乘項的主要類型及解釋

而對應之標準誤為:

$$\begin{aligned} se(\text{ME}_e) &= \sqrt{V(\alpha_1 + \alpha_2 \text{black})} \\ &= \sqrt{V(\alpha_1) + \text{black}^2 V(\alpha_2) + 2 \text{black} \text{Cov}(\alpha_1, \alpha_2)} \\ &= \begin{cases} \sqrt{V(\alpha_1)}, & \text{if black} = 0 \\ \sqrt{V(\alpha_1) + V(\alpha_2) + 2 \text{Cov}(\alpha_1, \alpha_2)}, & \text{if black} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- black 對 wage 的邊際效果 (ME_b) 如下:

$$\text{ME}_b = \frac{\Delta \text{wage}}{\Delta \text{black}} = \alpha_1 + \alpha_2 \text{educ}$$

而對應之標準誤為:

$$\begin{aligned} se(\text{ME}_b) &= \sqrt{V(\alpha_1 + \alpha_2 \text{educ})} \\ &= \sqrt{V(\alpha_1) + \text{educ}^2 V(\alpha_2) + 2 \text{educ} \text{Cov}(\alpha_1, \alpha_2)} \end{aligned}$$

交乘項的主要類型及解釋

最後我們考慮兩個主要項的解釋變數都是離散的 (discrete) 情況。底下的例子中, `black` 為一虛擬變數, 若一人為黑人, 則其值為 1, 否則為 0; `south` 亦為一虛擬變數, 若一人居住於南方, 則其值為 1, 否則為 0。

$$\text{wage} = \alpha_0 + \alpha_1 \text{black} + \alpha_2 (\text{black} \times \text{south}) + \alpha_3 \text{south} + \alpha_4 \text{educ} + u$$

`black` 對 `wage` 的邊際效果 (ME_b) 如下 (`south` 之分析完全相同):

$$\begin{aligned} ME_b = \frac{\Delta \text{wage}}{\Delta \text{black}} &= \alpha_1 + \alpha_2 \text{south} \\ &= \begin{cases} \alpha_1 & \text{if south} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \text{if south} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

交乘项的主要类型及解释

而對應之標準誤為:

$$\begin{aligned} se(\mathbf{ME}_b) &= \sqrt{V(\alpha_1 + \alpha_2 \text{south})} \\ &= \sqrt{V(\alpha_1) + \text{south}^2 V(\alpha_2) + 2\text{south} Cov(\alpha_1, \alpha_2)} \\ &= \begin{cases} \sqrt{V(\alpha_1)} & \text{if south} = 0 \\ \sqrt{V(\alpha_1) + V(\alpha_2) + 2Cov(\alpha_1, \alpha_2)} & \text{if south} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

中心化:

中心化: 如果想要讓交互項迴歸的**主要項之係數有意義** (就像沒交叉項之情況), 可考慮將交叉項中心化 (centering, 變數減去自己的平均數) 如:

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \gamma_3 x_2 + u \quad (13)$$

而且我們可以很簡單證明此式與 (5) 式有一對一之關係, 其與 (5) 式有完全一樣的配適度 (R^2), 而且會得到完全一樣的 $\hat{\alpha}_2$ 估計值, 也就是 $\hat{\gamma}_2 = \hat{\alpha}_2$ 。此外,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \gamma_1 + \gamma_2 (x_2 - \bar{x}_2)$$

所以, x_1 係數 γ_1 之解釋為: **其乃是當 $x_2 = \bar{x}_2$ 時**, 若 x_1 每額外增加一單位, y 平均會增加 γ_1 單位。**這與無交叉項迴歸之 (2) 式中 x_1 係數 β_1 解釋是相近的!**

交乘項的主要類型及解釋

至於主要項是否也要中心化，其實並不重要。因為我們可以輕易證明：

$$y = \gamma'_0 + \gamma_1(x_1 - \bar{x}_1) + \gamma_2(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \gamma_3(x_2 - \bar{x}_2) + u \quad (14)$$

除了常數項之外，其餘斜率項係數與 (13) 完全一樣。所以，就如同 Kam and Franzese (2003, p.3) 所說：

centering “alters nothing important statistically and nothing at all substantively.”

- 只對交互項中心化：

$$\begin{aligned} \text{wage} = & \gamma_0 + \gamma_1 \text{educ} + \gamma_2 [(\text{educ} - \overline{\text{educ}}) \times (\text{exper} - \overline{\text{exper}})] \\ & + \gamma_3 \text{exper} + \gamma_4 \text{married} + u \end{aligned}$$

交乘项的主要类型及解释

- 同時對主要項與交互項中心化:

$$\begin{aligned} \text{wage} = & \gamma'_0 + \gamma_1(\text{educ} - \overline{\text{educ}}) \\ & + \gamma_2 [(\text{educ} - \overline{\text{educ}}) \times (\text{exper} - \overline{\text{exper}})] \\ & + \gamma_3(\text{exper} - \overline{\text{exper}}) + \gamma_4 \text{married} + u \end{aligned}$$

文献中使用交乘项普遍存在的问题

- 中心化问题
- 在使用交乘项的经验方程中未将交乘项的组成变量单独引入
- 有关交乘项的系数解读有误 (Brambor et al., 2006)
- 引入交乘项的模型设定有误 (线性&非线性)
- 调节变量缺少共同支撑 (Hainmueller et al., 2019)

(<https://bbs.pinggu.org/thread-7248797-1-1.html>)

- 交乘项对机制验证的解释并不可行
- 引入交乘项可能会造成多重共线性问题
- 引入交乘项后还是需要考虑内生性问题

交乘项的局限性

	调节变量M	中介变量M
研究目的	说明X何时影响Y或何时影响较大	说明X如何影响Y
考虑前提	X对Y的影响时强时弱	X对Y的影响较强且稳定
典型模型	$Y = aX + bM + cXM + e$	$M = aX + e_2$ $Y = c'X + bM + e_3$
M在模型中的位置	X、M在Y前面，M可以在X前面	M在X之后、Y之前
M的功能	影响Y和X之间关系的方向（正或负）和强弱	代表一种机制，X通过它影响Y
M与X、Y的关系	M与X、Y的相关可以显著或不显著	M与X、Y的相关都显著
效应	回归系数c	回归系数ab
效应检验	c是否等于0	ab是否等于0

- 交乘项在Logit和Probit模型中的应用（“*inteff*”命令——“help inteff”，Norton et al., 2004）
- 非线性模型中的交乘项（倒“U”型和“U”型，Xu et al., 2017; Law et al., 2018）
- 非线性模型中的交乘项（+固定效应）

谢谢大家