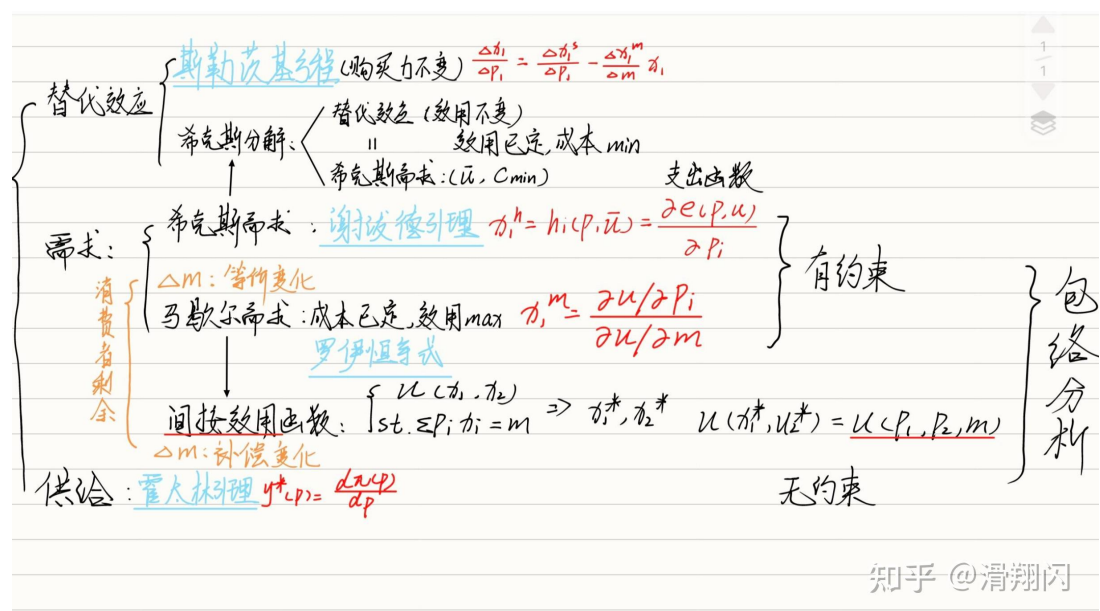


范里安微观经济补充：罗伊、霍太林、谢泼德

《平新乔微观经济学十八讲》直接使用了上面三者作为课后试题的计算方法，但是《微观经济学：现代观点》（范里安 [1]）中并未提到这部分知识点（数学上感觉平新乔门槛挺高的），因此在此补充记录。

《平新乔微观经济学十八讲》 [2] 在以下附件中（来自 z-library）

总体理解框架



- 谢泼德引理*（Shephard's lemma）给定生产函数数量，成本最小化；
- 罗伊恒等式（Roy's identity）给定预算，效用最大化；
- 霍特林引理*（Hotelling's lemma）是无约束利润函数。

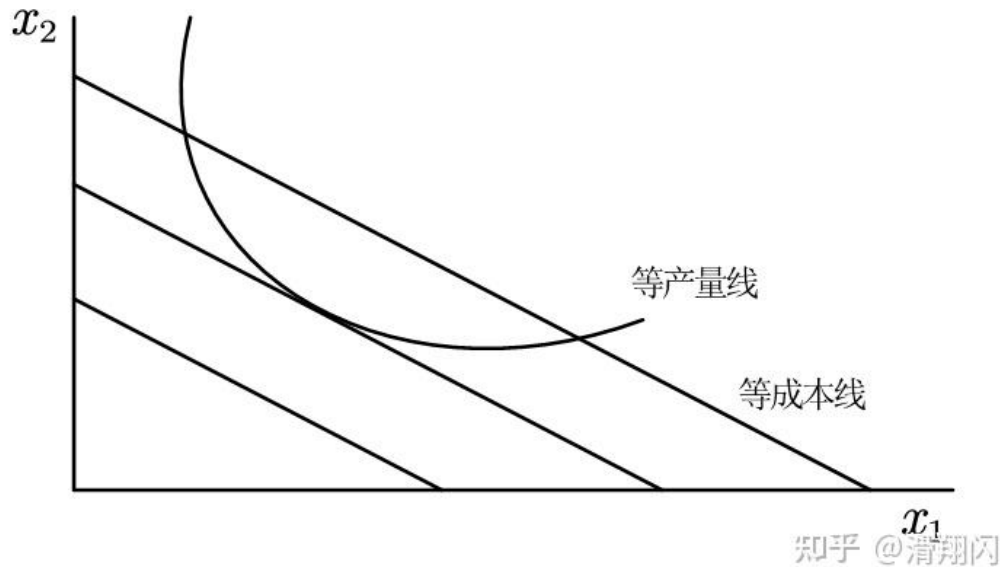
他们都是包络问题的分析。

一、谢泼德引理（Shephard's lemma）

生产理论，成本最小化

给定生产函数数量，求成本最小

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n w_i x_i \\ \text{st. } \bar{y} = f(x_1, x_2 \cdots x_n) \end{aligned}$$



我们往往构造 [拉格朗日方程](#) 求解： $\mathcal{L} = \sum_i^n w_i x_i - \lambda[\bar{y} - f(x_1, x_2 \cdots x_n)]$

对 x_i 和 λ 求偏导等于 0，最后解出最优产量投入 x_i^* ，带入成本函数，我们就得到了最小成本 $\sum_i^n w_i x_i^*$ 。

范里安教材中常用的几何求解方法为：

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{MP_1(x_1^*, x_2^*)}{MP_2(x_1^*, x_2^*)} = -\frac{w_1}{w_2}$$

谢泼德引理就是拉格朗日法过程的简化。对于成本函数 对要素价格 求 偏导，方程解 被称为 “[希克斯需求函数](#)”（最小支出下的最优商品束）。

证明过程：

对于红色部分，我们之前的拉格朗日方程有

把 代入替换，原式变为

同时，条件有给定产量函数数值（是常数）因此实际上，对式子 求导为 0。

等式成立。

消费理论，同理，

要素价格变为商品价格，成本函数变成支出函数。

给定价格效用，最小成本问题的需求 的解，我们把其叫做 “希克斯需求函数”。

：给定的支出函数。

使用条件：可微，。

应用举例

- 总成本函数为：
- （1）利用谢泼德引理计算 和 的要素需求函数
 - （2）根据（1）的结论计算潜在生产函数

（1）

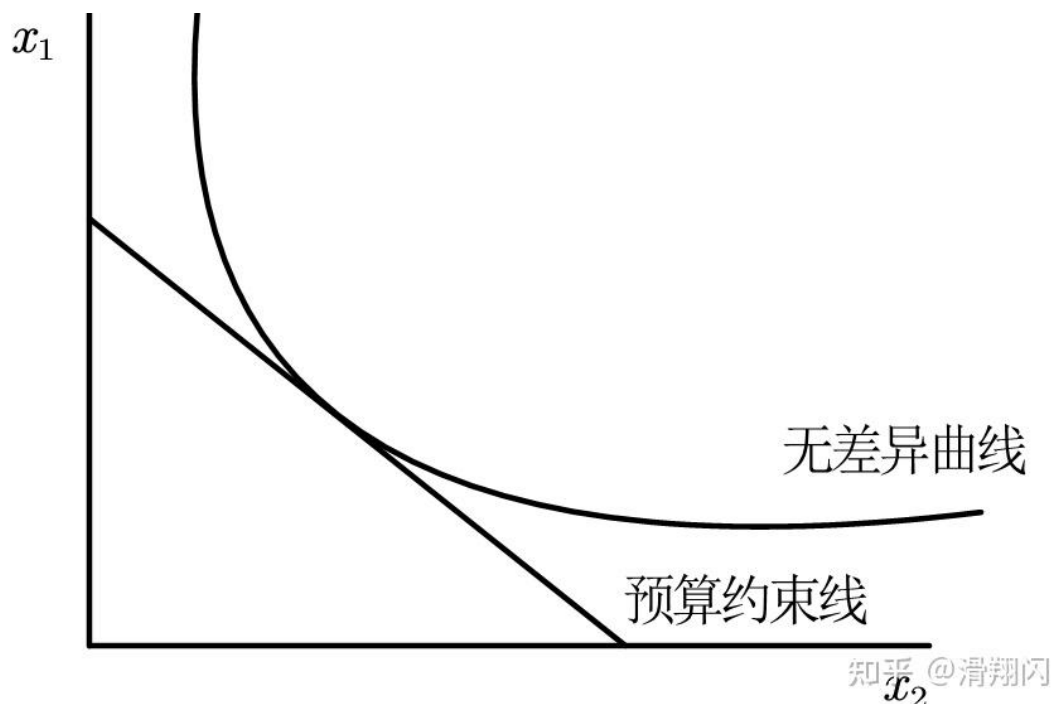
（2）根据（1）的结果消除，

（）

二、罗伊恒等式（ Roy's identity ）

消费理论, 效用最大化

给定预算约束线，求效用最大化



范里安中常用的几何求解方法为：

间接效用函数：满足预算约束时的最大效用

：商品价格，：工资

则商品需求数量的解 也就是[马歇尔需求函数](#)（商品价格与需求的函数）。（中的 m 表示的是马歇尔需求函数的意思，同理，中的 h 是希克斯需求函数。）

证明过程：

先放一个答主

[@谭惟君](#)

的纯文字说明，我觉得解释的非常好。

[怎样理解高级微观经济学里的罗伊恒等式？](#)

一单位价格的变化 效用最大可能取值的变化

下面是数理证明：

拉格朗日函数为，对 求 偏导

对于拉格朗日函数，我们对预算上限（这里指收入）求导

如何理解 ——它是影子价格。

当我们改变约束条件 里的 的值时，也就是产生 的变化，目标函数 真正被改变的值是 。因此我们说 衡量了对应要素的改变对于真正目标函数的变化，被叫做 “影子价格（真实价格）” 。

由此我们得到：

同理，如果我们研究 的变化，可以得到

联立，，得到罗伊恒等式。

应用举例

平新乔《微观经济学十八讲》第 16 讲 “一般均衡与福利经济学的两个基本原理”
第 3 题
考虑两个消费者，两种商品的经济，消费者效用禀赋如下。
求发现 [瓦尔拉斯均衡](#)+

消费者 1 的马歇尔需求：

消费者 2，使用罗伊恒等式 得到：

均衡时，市场出清 解得..... 略

三、霍特林引理（ Hotelling's lemma ）

谢泼德引理和罗伊恒等式都是由约束条件下的包络问题，霍特林引理则是无约束情况下的包络问题。

生产理论，利润最大化

给定利润函数

：生产要素价格，：厂商供给函数, 为净供给量。

范里安里这类题先判断是完全竞争还是非完全竞争、短期、长期、要素、商品市场。

霍特林引理为：

证明过程：

对于一阶最大化条件为：

利润函数对求导：证明完毕。

应用举例

平新乔《微观经济学十八讲》第七讲 “要素需求函数、成本函数、利润函数与供给函数”
第一题

已知生产函数为求利润函数，并用两种方法求供给函数。

利润函数：

供给函数：

使用

普通方法，分别求偏导解出，带入利润函数，答案相同。

四、补充

参考数理经济学的基本方法（蒋中一），这几个定理其实就是基于包络分析求出间接函数。

将间接函数代入这类问题的一阶条件消除参数，就会得到范里安中常见的图形解。

给定成本，利润最大化；给定利润，成本最小化。两者互为对偶问题，函数结果相同，但包络分析下的参数互为倒数。

参考

- ^ 范里安还是很体贴，没用啥复杂的数学，甚至直接在《成本最小化》章节里面说自己不会考 Cobb-Douglas 对应成本，不过到了中国就开考而且更近一步了
- ^ 讲义名声在外，不过我还没有看完
- ^ 顺便一提，对于这类条件问题，成本最小化就是利润最大化，问题可以互相转化