高级宏观经济学

- 本次习题课希望实现的目标
  - 对已经懂的同学，通过习题讲解复习巩固
  - 对于还没学懂的同学，扫除一些理解障碍
  - 对于理解困难的同学，学会一定的背题技巧
- 重点题目范围
  - 要达到熟练默写的程度！

    Solow模型：1、4、5、8
    Ramsey模型：1、2、4、5
    OLG：1、2
    AK：总计两题
    产品多样性：总计一题
- Solow模型
  - 基本概念
    - 区分宏观经济学中的变量和参量
    - 变量都是时间的函数，只是写法上简化了

      A,K,L,……=A(t),K(t),L(t)……
    - 熟悉各种边际：MPK、MPL及各种弹性：资本产出弹性，劳动产出弹性，替代弹性
    - 变量的增长率近似等于ln变量
  - 基本假设
    - 规模报酬不变（可以转化为集约形式）
    - 边际报酬递减（生产函数一阶导数大于0，二阶导数小于0）
    - 稻田条件（生产函数图形是我们常见的样子，动态资本方程线有唯一交点）
    - 必要性条件（单一要素无法生产）
    - 储蓄率S外生
  - 资本动态方程
    - 牢记这个关系，（人均）资本的变化=（人均）资本积累-（人均）资本消耗

      $$\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k$$
  - 动态无效率

    当出现过度储蓄时，此时如果降低储蓄率会导致每一时期的人福利得到改善（消费增加），这种情况被称为动态无效率。
    - 动态无效率与计划者问题息息相关，若竞争性均衡无法通过自身扭正动态无效率问题，那么计划者参与经济调控就是必要之举。

- 稳态、平衡增长路径和转移动态
  - 稳态（steady state）：指体系的各变量的增长率都为0时的状态，可能不唯一。
  - 平衡增长路径（balanced growth path）：指体系的各变量的增长率都为常数的状态，可能不唯一。
  - 转移动态（transitional dynamics）：指体系的各变量的增长率不为常数时的状态。
  - 一个体系处于稳态，必处于平衡增长路径，反之则未必。当时间为无穷大时体系能到达平衡增长路径的体系的时间路径收敛（convergence of time path），反之则称为发散(divergence)。收敛的体系的均衡是动态稳定的（dynamic stability）。当体系的初始状态不是恰处于平衡增长路径时，若体系是收敛的，体系会逐渐朝某个平衡增长路径移动，此移动过程为转移动态。当一个本处于平衡增长路径的体系由于某一外生扰动而偏离该路径时，若体系是收敛的，且平衡增长路径是唯一的（即不存在多重均衡），则体系会逐渐回归原来的平衡增长路径，此回归过程亦为转移动态。
  - 可以把稳态和平衡增长路径视为长期（long run）概念，而把转移动态视为短期（short run）概念。
- 转移动态与收敛速度
  - 两条曲线差值越大，收敛速度越快，具体收敛速度的定义和公式参看讲义

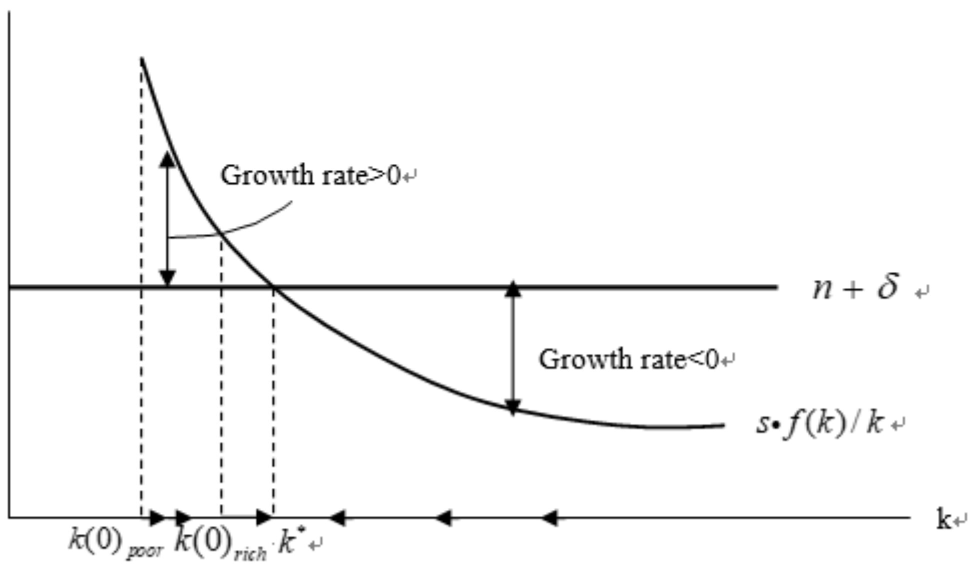
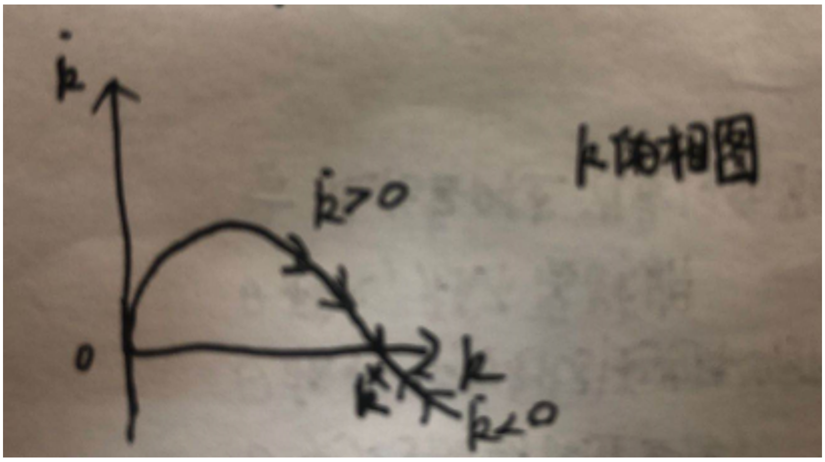


图4：资本的转移动态行为

- 相位图
  - 以k的相位图为例：在k点为正的时候，会使k不断增加，在k点为负时，会使k不断减少，k点为0，则k达到稳定不动的状态，即稳态。



- Ramsey模型
  - 分散均衡
    - 生产者
      - 决定了工资、利率

        $$f'(\hat{k}) = r + \delta$$

        $$\frac{\partial Y}{\partial L} = \left[f(\hat{k}) - \hat{k} f'(\hat{k}) \right] e^{xt} = w$$

    - 消费者
      - 由这组优化问题解出消费的欧拉方程

        $$\max U = \int_0^\infty u(c) e^{nt} e^{-\rho t} dt$$

        $$s.t. \quad \dot{a} = w + ra - c - na$$

        $$\lim_{t\to\infty} \{a(t) \exp\left[-\int_0^t [r(v) - n] dv \right]\} \geq 0$$

      - CRRA效用函数，跨期替代弹性即1/θ，值越大跨期消费选择越容易，值越小越不愿意跨期替代。

        $$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

    - 均衡
      - 资本变动方程

        $$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta)\hat{k}$$

      - 消费的欧拉方程

        $$\dot{\hat{c}} / \hat{c} = \frac{\dot{c}}{c} - x = \frac{1}{\theta}\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x \right]$$

      - 横截性条件

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\hat{k}\exp\left[-\int_0^t(f'(\hat{k})-\delta-x-n)dv\right]\right\}=0$$

- 由横截性条件推出

$$0<f'-\delta-x-n$$

- 再结合消费欧拉方程等于0的情况推出

$$\rho>n+(1-\theta)x$$

- 相位图
  - c^点=0的曲线和k^点=0的曲线交点决定了均衡的k^*

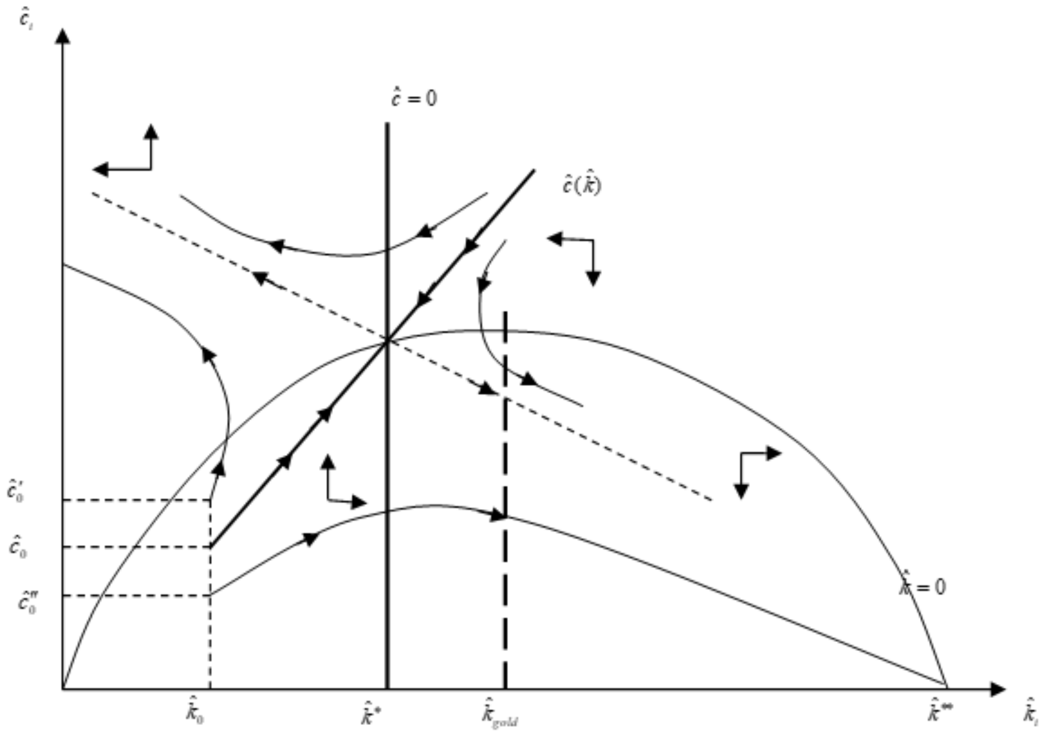


图 1 :Ramsey 模型的相

  - k^点和c^点分界线由方程组决定

$$\hat{c}=f(\hat{k})-(x+n+\delta)\hat{k}$$

$$f'(\hat{k})=\delta+\rho+\theta x$$

  - 例子：如果ρ降低，则只影响c^点，右边下降，左边也要下降，而f(k)的二阶导小于0，f'(k)单减，则要更大的k，所以右移。

- 计划者问题
  - 主要区别是所受约束条件是总量资源约束

$$\dot{K}=F-C-\delta K=F-C-\delta K$$

  - 一般化为人均形式即变成了

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\hat{k}$$

- OLG模型
  - 预算约束

    $$c_{1t} + s_t = w_t$$

    $$c_{2t+1} = (1+r_{t+1})s_t$$

  - 效用函数

    $$U_t = u(c_{1t}) + \frac{1}{1+\rho}u(c_{2t+1})$$

    对数效用函数情况下，利率变动对现在消费没有影响，替代效应与收入效应恰好抵消。

  - 稳态：因为OLG模型的稳态存在是有条件的，较为复杂，满足条件的稳态同solow

    $$K_{t+1} - K_t = F(K_t, L_t) - \delta K_t - C_t$$

    $$c^* = f(k^*) - (n+\delta)k^*$$

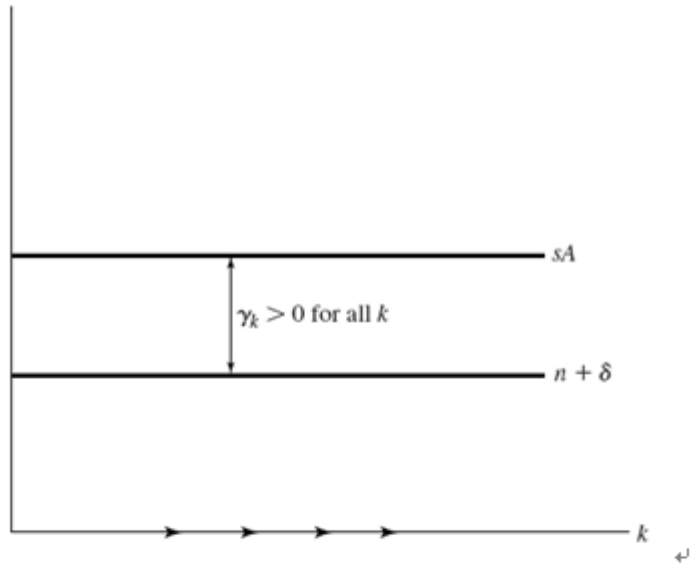
  - 动态无效率
    - 人均消费/劳均消费（两者差一个常数项，是一致的，一般分析后者）

      $$c_t = \frac{C_t}{L_t}$$

    - 如果稳态值k大于kgold，则经济处于动态无效率区域
- AK模型
  - solow模型内生增长最终会停滞的原因是资本边际回报递减，AK模型设定为资本边际回报不变

    $$f' = f/k = A$$

  - 内生持续增长的充分必要条件是sf'(k)>(n+δ)



- 扩大产品多样性模型
  - 消费者
    - 效用函数，跟前同，只是不考虑人口增长
    - 家庭资产约束

      $$d(Assets)/dt = wL + r(Assets) - C$$

    - 消费欧拉方程（与之前没变化），此时r是内生决定的，也是该模型做文章的地方

      $$\dot{C}/C = \dot{c}/c = \frac{1}{\theta}(r-\rho)$$

  - 最终产品厂商（完全竞争）
    - k变成了中间产品xij，对每一种投入是边际产品递减的，而对所有投入规模报酬不变，随着N增大，边际产出递减趋势被阻止

      $$Y_i = AL_i^{1-\alpha}\sum_{j=1}^{N}(x_{ij})^{\alpha}$$

    - 对中间产品的需求，由利润最大化问题解出（要素价格等于边际产出）

      $$x_{ij} = L_i(A\alpha/p_j)^{1/(1-\alpha)}$$

  - 中间产品厂商（垄断）
    - 前述两个参与者和创新成本无关，因此如果题目条件没有对他们的设定进行改变，结果可直接使用
    - 首先要确定研发产品的现值（终于出现了我们要找的r），然而，现值取决于瞬时利润

$$V(t)=\int_t^{\infty}\pi_j(v)e^{-\bar{r}(t,v)(v-t)}dv$$

- 找瞬时利润，需要解出瞬时利润最大化的解，确定中间品价格，垄断厂商是根据需求曲线定价

$$\pi_j(v)=\left[p_j(v)-1\right]x_j(v)$$

- 总需求

$$x_j(v)=\sum_i x_{ij}(v)=\left[A\alpha/p_j(v)\right]^{1/(1-\alpha)}\sum_i L_i=L\sum_i\left[A\alpha/p_j(v)\right]^{1/(1-\alpha)}$$

- 得到垄断价格

$$p_j(v)=\frac{1}{\alpha}\equiv p>1$$

- 再得到总需求，以及X、Y

$$x_j=A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)}L$$

$$X=Nx_j=A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)}LN$$

$$Y=AL^{1-\alpha}X^{\alpha}N^{1-\alpha}=A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}LN$$

- 得到瞬时利润和现值（收益）

$$V(t)=LA^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{2/(1-\alpha)}\int_t^{\infty}e^{-\bar{r}(t,v)(v-t)}dv$$

- 找到了创新的收益，我们就要找到创新的成本（基准模型设定为常数）
- 令V(t)=η，先对现值函数两边同时对t求导（该形式为一般）

$$r(t)=\frac{\pi}{V(t)}+\frac{\dot{V}}{V(t)}$$

- 然后利用V(t)=η找到V点，V(t)，代入解出r

- 均衡
  - 家庭资产总值等于所有研发的价值

$$d(assets)/dt=\eta\dot{N}$$

  - 得到在扩大产品多样性中的宏观等式：产出用来消费、生产和创新（具有一般性）

$$\eta\dot{N}=Y-C-X$$

  - 把r代入消费的欧拉方程得到增长率，可以进一步讨论动态

$$\dot{N} = \gamma N.$$

Solow 模型

1、CES 生产函数为$Y = A\left[K^{\psi} + L^{\psi}\right]^{1/\psi}$，其中$A$为不变的效率参数。（1）求替代弹性；（2）这个生产函数满足哪些新古典性质？不满足哪些新古典性质？（3）在 Solow 增长模型中，如果生产函数是上述的 CES 形式，描述人均资本的动态行为并求稳态人均资本。

2、技术进步形式与增长稳态（Barro，2005）。生产函数形式为 CES：

$$Y = D(t)\left[[B(t)K]^{\psi} + [A(t)L]^{\psi}\right]^{1/\psi}$$

其中ψ为非 0 常数参数，$D(t)$、$B(t)$、$A(t)$为不同形式的技术进步，各自增长率为常数，依次记为x_D、x_B、x_A，技术的初始水平都假设为 1。假设人口为常数并正规化为 1。资本积累方程为：

$$\dot{K} = Y - C - \delta K$$

其中常数δ为折旧率。

（1）证明：稳态（稳态被定义为所有变量以不变但可能不相同的速率增长）时产出、资本和消费的增长率相同。

（2）假定$x_B = x_A = 0$，证明稳态时$x_D = 0$。

3、Solow 模型中引入政府支出。考虑无技术进步的基本 Solow 模型，现在总需求分为消费、投资和政府支出三部分：

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t)$$

其中$G(t)$为政府支出，假定$G(t) = \sigma Y(t)$

（1）消费仍假设为总产出固定比例（即$C(t) = mY(t)$，其中m为外生参数）合理吗？试讨论之。如果不合理应当如何修改关于消费与总产出关系的假设。

（2）假定政府支出部分来自于私人消费，从而使得$C(t) = (m - \lambda\sigma)Y(t)$，其中$\lambda \in [0,1]$。此时，更高政府支出对均衡有何影响？

（3）假设政府消费部分被用于投资，因此总投资为：

$$I(t) = (1 - m - (1-\lambda)\sigma + \sigma\phi)Y(t)$$

证明：稳态人均资本存量随着政府支出增加而提高。这一结论合理吗？解释之。

（4）政府投资于基础设施。假设政府支出中有一定比例投资于基础设施，从而使得生产函数为：$F(K, L, \varphi G)$，其中φG为基础设施投资。生产函数对三种投资规模报酬不变。说明这种情况下政府支出增加对问题人均资本存量的影响。

4、Solow 模型中的自然资源。假设 Solow 模型中的生产函数为（其余假设如基本模型）：

$$Y(K, L, Z) = L^{\beta} K^{\alpha} Z^{1-\alpha-\beta}, \quad \beta + \alpha < 1$$

其中Z为固定不变的土地数量。
（1）计算无人口增长时的稳态产出，并证明该稳态时全局稳定的。
（2）假定人口增长率为n，当$t \to \infty$时人均资本存量如何？土地边际收益和工资率如何？
（3）假设人口增长率为n，劳动增进型外生技术进步速度为g，证明存在稳态并计算稳态增长率。
（4）接上一小问。土地存量不变这一事实是否意味着持久增长是不可能的？直观解释之。
5、欧洲移民危机与 Solow 模型。目前欧洲正面临二战以来最严重的移民危机，数以万计的非法移民涌向欧洲各国。我们在 Solow 模型下讨论这一问题。
（1）如果移民是一次性涌入的，画图分析这对于人均资本、人均产出、人均消费以及总量产出时间路径的影响。
（2）推导稳态有效单位人均产出关于人口增长率的弹性。如果资本产出弹性为 1/3，技术增长率为 2%，折旧率为 3%，人口增长率由 2%提高到 3%将会使得有效单位人均产出降低多少？

6、假设 Solow 模型生产函数中引入人力资本：$Y = K^{\alpha} H^{\beta} (AL)^{1-\alpha-\beta}$，其中$H$为人力资本。

（1）假设产出即可用于投资物质资本，又可用于投资人力资本。假定总储蓄外生。如果两种投资回报相同，均衡时储蓄在两种资本存量之间如何分配？
（2）推导资本动态方程。
（3）推导收敛系数。

7、假设 Solow 模型生产函数中引入人力资本：$Y = K^{\alpha} H^{\beta} (AL)^{1-\alpha-\beta}$，其中$H$为人力资本。

假设物质资本和人力资本投资占总产出比重分别为外生常数s_k、s_h。推导收敛系数。

8、有劳动增进型外生技术进步 Solow 模型中，假设劳动和资本均安其边际产品给付报酬：

$$w = \partial F(K, AL) / \partial L$$

$$r = \partial F(K, AL) / \partial K - \delta$$

（1）证明$w = A(f(k) - kf'(k))$

（2）证明$wL + rK = F - \delta K$
（3）计算稳态时工资率和利率增长率。
（4）假设经济初始位于资本存量低于稳态水平处，随着时间推移，工资率和利率将如何变化？

Ramsey 模型

1、假设有 N 个同质厂商，单个厂商生产函数为$Y=F(K,AL)$，生产函数满足新古典假设，K 为资本投入，AL 为劳动投入。

（1）考虑每个企业以最小成本生产单位产出问题。证明有效单位劳动平均资本存量k 的成本最小化水平唯一确定并独立于产出Y，所有厂商选择相同的k。

（2）证明：N 个成本最小化的同质厂商的总产出等于具有相同生产函数的一个单一厂商利用 N 个厂商拥有的全部劳动和资本所生产的产出。

2、生产率下降与储蓄。考虑一个处于稳态的 Ramsey 经济（基本假设如讲义基本模型），假设生产率突然一次永久性下降。

（1）写出稳态条件，画出初始的相位图。

（2）生产率下降如何影响两条分界线？画出说明之。

（3）在变动时刻，消费如何变动。

（4）找出生产率的边际变化对正处在稳态上的产出中储蓄份额产生的影响的表达式。能判断影响正负吗？

3、Ramsey 模型中的资本税。考虑计划者框架下的折旧率为 0 的处于稳态的 Ramsey 经济（其他基本假设如讲义基本模型）。假设政府突然在某时刻对资本真实利率（资本收入）以税率τ 征税，因此家庭面对的真实利率为$r=(1-\tau)f'$。假设政府税收收入一次总付性地返还给家庭因而投资决策不变，征税是未预料到的。

（1）征税如何影响两条分界线？

（2）在征税时刻经济如何对征税做出反应？征税后的动态行为是什么？

（3）新的稳态上的资本和消费相对于原来稳态时发生了怎样的变化？

（4）证明稳态储蓄率对税率是递减的。

（5）如果税收没有被退还给家庭，而是被用于政府购买，并且政府购买既不影响消费者效用又不影响企业生产率，（1）、（2）两问答案是否发生变化？如果变化，怎样变化？

4、Ramsey 模型中的政府。考虑计划者框架下的折旧率为 0 的处于稳态的 Ramsey 经济（其他基本假设如讲义基本模型）。假设政府购买与私人消费完全替代，因此瞬时效用函数为$u(c+G)$，效用函数 CRRA 型。经济初始位于稳态。分析政府购买暂时性增加对消费、资本和利率路径的影响。

5、考虑一个 Ramsey 模型的变形，假设瞬时效用函数为 Stone-Geary 偏好$u(c)=\dfrac{(c-\gamma)^{1-\theta}-1}{1-\theta}$，其中$\gamma$ 为一个大于 0 的常数，有外生技术进步而无人口增长。

（1）解释效用函数。

（2）描述经济的均衡。稳态存在吗？为什么？

（3）推导确保标准横截性条件成立的参数条件。

（4）刻画该经济的转移动态行为。

6、考虑一个 Ramsey 模型的变形，其中消费者瞬时效用函数为$u(c,1-l(t))$，其中 $0<l(t)<1$为劳动供给，$1-l(t)$为闲暇。在对称均衡中就业$L(t)=l(t)$，假定生产函数为劳动增进型技术进步新古典函数，技术进步率为g。

（1）建立消费者与生产者优化问题。

（2）建立消费者现值（Current Value）汉密尔顿函数，求解消费者优化一阶条件（注意：包括了消费和闲暇或劳动供给的权衡）。

（3）建立计划者现值（Current Value）汉密尔顿函数，求解优化一阶条件。

T1

按照基本 OLG 模型的假设与描述，给定 CRRA 型效用函数与 C-D 型生产函数，请回答如下问题：（参考讲义与课件）

1. 求解消费和人均资本存量的动态方程。

2. 结合相位图分析稳态的三种情况。

3. 动态无效率是否存在？原因是什么？

T2

基本的 OLG 模型：

个体存活两期，t 期出生的人的数量为 L_t，且有 $L_t=(1+n)L_{t-1}$。瞬时（单期）效用函数为对数型且没有贴现，即个体效用函数为：

$U_t=\ln(c_{1t})+\ln(c_{2t+1})$

经济的生产方面的假设为：每个人在出生时赋予 A 单位的单一产品，该产品可被用于消费或贮存。被贮存的每单位物品可在随后时期获得 x 单位产品。

假设在初始时期即 0 时期，除了 L_0 个各自拥有 A 单位产品的年轻人外，还有 $\frac{1}{1+n}L_0$ 个老年人只在 0 期生活。这些老人每人被赋予数量为 Z 的产品，他们的效用就是最初期的消费 c_{20}。

（1）描述该经济的分散均衡。

（2）考虑如下情形：假设当事人的资源禀赋中用于贮存的比例为 f_t，且它随时间不变，则在这样的路径上，作为 f 的函数的人均总消费（总消费等于所有年轻人的消费加上所有老年人的消费）是什么？如果 $x<1+n$，最大化人均（或劳均）消费的 f 值是多少？此时分散经济是否是帕累托有效的？如果不是，计划者该如何改进才能提高福利？

1、考虑生产函数 $Y=AK+BL$，其中 A、B 为正的常数。

（1）这个生产函数是新古典的吗？如果不是，满足新古典的哪些条件，违反了哪些条件？

（2）写出集约型生产函数。人均资本的边际产品和平均产品是多少？

（3）如果经济在 Solow 框架下运行，即储蓄率是固定的常数 s，并假定人口增长率和资本折旧率分别为常数 n、δ。写出人均资本动态方程。在何种情况下，该模型有一个人均资本不增长的稳态？在何种情况下该模型呈现内生增长？

2015年高宏作业答案

一，说明IES与EMU在近似意义上互为倒数

设效用函数为$U(c_t)$，根据定义：EMU=$-\frac{c_t U^{"}(c_t)}{U^{'}(c_t)}$， IES=$-(\frac{\partial(U^{'}(c_t)\text{的变化率})}{\partial(c_t\text{的变化率})})^{-1}$

取两个时点t<s，$\mathrm{s}=\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t}$，相应的消费水平为$c_s$，$c_t$，$c_s=c_t+\varepsilon$。

$$\mathrm{IES}^{-1}=-\frac{\partial\{\ln[U^{'}(c_s)/U^{'}(c_t)]\}}{\partial\{\ln[c_s/c_t]\}}=-\frac{\partial\{\ln[U^{'}(c_s)/U^{'}(c_t)]\}}{\partial\varepsilon}\bullet(\frac{\partial\{\ln[c_s/c_t]\}}{\partial\varepsilon})^{-1}$$

将$U^{'}(c_s)$以c_t为中心展开：

$$U^{'}(c_s)\approx U^{'}(c_t)+U^{"}(c_t)\bullet(c_s-c_t)=U^{'}(c_t)+U^{"}(c_t)\varepsilon$$

$$\frac{U^{'}(c_s)}{U^{'}(c_t)}=1+\frac{U^{"}(c_t)}{U^{'}(c_t)}\bullet\varepsilon$$

$$\ln(\frac{U^{'}(c_s)}{U^{'}(c_t)})\approx\ln(1+\frac{U^{"}(c_t)}{U^{'}(c_t)}\bullet\varepsilon)\approx\frac{U^{"}(c_t)}{U^{'}(c_t)}\bullet\varepsilon$$

$$\ln(\frac{c_s}{c_t})=\ln(1+\frac{\varepsilon}{c_t})\approx\frac{\varepsilon}{c_t}$$

$$\mathrm{IES}^{-1}=-\left.\frac{U^{"}(c_t)}{U^{'}(c_t)}\bullet\varepsilon\middle/(\frac{\varepsilon}{c_t})\right.=EMU$$

二，建立L函数

$$\mathrm{L}=\sum_{\mathrm{t}=0}^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{t}}U(c_t)+\lambda_t[f(k_t)-c_t-(1+n)k_{t+1}+(1-\delta)k_t]$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_t}=0\Rightarrow\beta^t U^{'}(c_t)-\lambda_t=0\qquad t=0,1\cdots T①$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}}=0\Rightarrow-\lambda_{\mathrm{t}}(1+n)+\lambda_{t+1}[f'(k+1)+(1-\delta)]=0\quad t=0,1\cdots T-1②$$

对于②式，由于$K_{T+1}\ge 0$，所以应用 K-T 条件得：$\frac{\partial L}{\partial K_{T+1}}\le 0$，且$K_T\bullet\frac{\partial L}{\partial K_{T+1}}=0$

$-\lambda_T(1+n)\le 0$且$\beta^T\bullet\lambda_T(1+n)\bullet K_{T+1}=0$

由①和②得：$U^{'}(c_t)\bullet(1+n)=\beta\bullet U^{'}(c_{t+1})[f^{'}(k_{t+1})+(1-\delta)]$

变分法作业：求极值曲线

1、$V[y]=\int_0^T(t^2+\dot{y}^2)dt$，且$y(0)=1\ y(1)=2$

2、$\max V[y]=\int_0^T(t^2+\dot{y}^2)dt$，求在下列情况下的极值曲线（$y(0)=4$）：（1）$T=2$，$y_T$可变；（2）$T=2$，$y_T\ge 3$；（3）$y_T=5$，$T$可变。

最优控制作业：

3、证明自控问题中 H 函数值与t无关。

4、求最优路径：$\max\int_0^4 3y dt$

$s.t.\quad \dot{y}=y+u$

$y(0)=5$，$y(4)$自由，$u\in[0,2]$

变分法：

第1题：

$F=t^2+\dot{y}^2$

$F_y=0$

$F_{\dot{y}}=2\dot{y}$

$\frac{dF_{\dot{y}}}{dt}=2\ddot{y}$

$0=2\ddot{y}$

$y=ct+c_1$

c和c_1为积分常数。有初始点和终结点的取值得到这两个常数都是1，即：

$y^*(t)=t+1$

2、

由上题可知，$y=ct+c_1$，且由$y(0)=4$得到，$y=ct+4$。

（1）横截性条件为$F_{\dot{y}}=2\dot{y}=0$。由$y=ct+4$得到$c=0$，所以$y^*(t)=4$。

（2）横截性条件为（假设为最大化问题）：

$F_{\dot{y}}=2\dot{y}\le 0$，$y_T\ge 3$，$2\dot{y}(y_T-3)=0$

由此得到$c=0$或$c=-1/2$。显而易见前者所得目标值大于后者，所以$c=0$，即$y^*(t)=4$。

3、横截性条件为

$[F-\dot{y}F_{\dot{y}}]_{t=T}=0$

由 $y=ct+4$ 得到 $\dot{y}=c$，$F_{\dot{y}}=2\dot{y}=2c$，代入上式得到 $t^2=c^2$，再由 $y_T=cT+4=5$得到$c=T^*=1$，即$y^*(t)=t+1$。

最优控制作业：

3、

我们要说明$\frac{dH}{dt}=0$。对汉密尔顿函数全微分：

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial H}{\partial u}\dot{u}+\frac{\partial H}{\partial \lambda}\dot{\lambda}$$

右边第一项为0，这是由于问题是自控的；根据优化的一阶条件$\frac{\partial H}{\partial u}=0$。同时有，$\frac{\partial H}{\partial y}=-\dot{\lambda}$，$\frac{\partial H}{\partial \lambda}=\dot{y}$，所以上式右边第二与第四项互为相反数。从而$\frac{dH}{dt}=0$。

4、

$H=3y+\lambda(y+u)=(3+\lambda)y+\lambda u$

当$\lambda>0$时，$u=2$；$\lambda<0$，$u=0$

由$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial y}=-(3+\lambda)$，解微分方程并由横截性条件$\lambda(4)=0$得：

$\lambda^*(t)=3(e^{4-t}-1)$

λ是减函数，但是在$[0,4)$时间区间内，$\lambda>0$，从而$u^*(t)=2$。在期末时点上，$\lambda=0$，控制变量可以任意取值，状态变量不受影响。

由 $\dot{y}=y+u=y+2$，解该微分方程并利用初始条件得到y^*（略）。

Solow 模型

1、CES 生产函数为$Y=A\left[K^{\psi}+L^{\psi}\right]^{1/\psi}$，其中 A 为不变的效率参数。(1）求替代弹性;（2）这个生产函数满足哪些新古典性质？不满足哪些新古典性质？（3）在 Solow 增长模型中，如果生产函数是上述的 CES 形式，描述人均资本的动态行为并求稳态人均资本。

参考答案：

（1）

替代弹性为：

$$\delta=\frac{\Delta(K/L)/(K/L)}{\Delta(MPL/MPK)/(MPL/MPK)}$$
$$=\frac{\ln(K/L)}{\ln(MPL/MPK)}$$

由CES生产函数得到$MPL/MPK=(K/L)^{1-\psi}$，所以：

$$\delta=\frac{1}{1-\psi}$$

（2）由生产函数的一次齐次性，得到相应的集约型生产函数为：

$$y=f(k)=A[k^{\psi}+1]^{1/\psi}$$

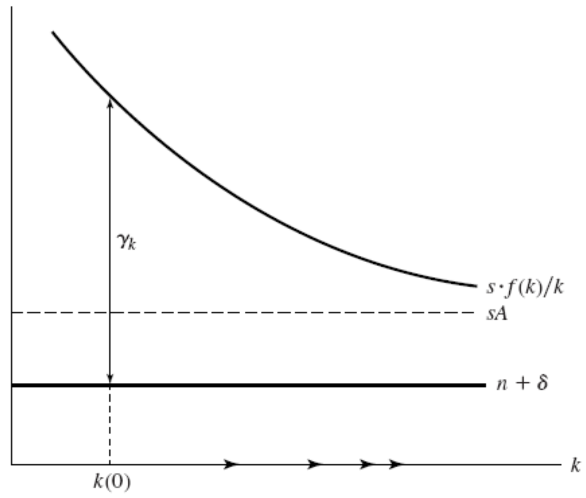
$$f'(k)=Ak^{\psi-1}[k^{\psi}+1]^{1/\psi-1}$$

当$k\to 0$时，$f'(k)\to\infty$；

$$\lim_{k\to\infty}f'(k)=\lim_{k\to\infty}f/k=A$$

不满足稻田条件和必要性条件。

（3）$\dfrac{\dot{k}}{k}=\dfrac{sA[k^{\psi}+1]^{1/\psi}}{k}-(n+\delta)$



假定 $0<\psi<1$，如上图为 $sA>n+\delta$ 时的情形，这时稳态资本以常率 $sA-(n+\delta)$ 增长。

但是如果 $sA<n+\delta$，则由资本动态方程 $0=\dfrac{sA[k^{\psi}+1]^{1/\psi}}{k}-(n+\delta)$ 可以求出稳态资本存量，这时稳态资本不变。

2、技术进步形式与增长稳态（Barro，2005）。生产函数形式为 CES：

$$Y=D(t)\left[[B(t)K]^{\psi}+[A(t)L]^{\psi}\right]^{1/\psi}$$

其中 ψ 为非 0 常数参数，$D(t)$、$B(t)$、$A(t)$ 为不同形式的技术进步，各自增长率为常数，依次记为 x_D、x_B、x_A，技术的初始水平都假设为 1。假设人口为常数并正规化为 1。资本积累方程为：

$$\dot{K}=Y-C-\delta K$$

其中常数 δ 为折旧率。

（1）证明：稳态（稳态被定义为所有变量以不变但可能不相同的速率增长）时产出、资本和消费的增长率相同。

（2）假定 $x_B=x_A=0$，证明稳态时 $x_D=0$。

参考答案：

（1）由 $\dot{K}=Y-C-\delta K$ 得到：

$$\gamma_K=\dot{K}/K=Y/K-C/K-\delta$$

$$\gamma_K+\delta=Y/K-C/K$$

上式左边为常数，要使右边为常数必须使得 K 与 Y（以及 C）的增长率相等，从而得证。

（2）将生产函数两边先取对数再对时间求导得到：

$$\gamma_Y = x_D + \frac{[K_0 e^{\gamma_K t}]^{\psi}}{1+[K_0 e^{\gamma_K t}]^{\psi}} \gamma_K$$

上式左边为常数，要使右边与时间无关，γ_K 必须为 0。

3、Solow 模型中引入政府支出。考虑无技术进步的基本 Solow 模型，现在总需求分为消费、投资和政府支出三部分：

$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t)$

其中 $G(t)$ 为政府支出，假定 $G(t) = \sigma Y(t)$

（1）消费仍假设为总产出固定比例（即 $C(t) = mY(t)$，其中 m 为外生参数）合理吗？试讨论之。如果不合理应当如何修改关于消费与总产出关系的假设。

（2）假定政府支出部分来自于私人消费，从而使得 $C(t) = (m - \lambda\sigma)Y(t)$，其中 $\lambda \in [0,1]$。此时，更高政府支出对均衡有何影响？

（3）假设政府支出部分被用于投资，因此总投资为：

$I(t) = (1 - m - (1-\lambda)\sigma + \sigma\phi)Y(t)$

证明：稳态人均资本存量随着政府支出增加而提高。这一结论合理吗？解释之。

（4）政府投资于基础设施。假设政府支出中有一定比例投资于基础设施，从而使得生产函数为：$F(K, L, \varphi G)$，其中 φG 为基础设施投资。生产函数对三种投入规模报酬不变。说明这种情况下政府支出增加对稳态人均资本存量的影响。

参考答案：

（1）不是很合理，应该是税后收入的固定比例，如下问。

（2）$\dot{K} = I - \delta K = (1 - m - \sigma(1-\lambda))Y - \delta K$

$\dot{k} = (1 - m - \sigma(1-\lambda)) f(k) - (\delta + n)k$

σ 描述了政府支出。

σ 越大，上式右侧分母越小分式值越大，所有稳态资本存量越小。直观上看，σ 越大，在初始资本存量相同情况下，使得趋于均衡的时间路径上每一时点的资本存量变小。两种思路证明这一点，其一是假定生产函数是 C-D 型，求出连续时间的资本存量解析解。其二是把时间弄成离散形式，这样资本动态方程为：

$(1+n)k(t+1) = (1 - m - \sigma(1-\lambda)) f(k(t)) + (1-\delta)k(t)$　　　　（1）

假设初始资本存量 $k(0)$ 相同，考虑两种情形，一种情形的政府支出更高 $\sigma < \sigma'$，我们要证明的是对于所有的时间 $t > 0$，

$k_{\sigma}(t) > k_{\sigma'}(t)$　　　　（2）

第一期时从（1）式来看，（2）式是成立的。对于 $t \geq 1$，有：

$$
\begin{aligned}
&(1+n)k_{\sigma}(t+1)=(1-m-\sigma(1-\lambda))f(k_{\sigma}(t))+(1-\delta)k_{\sigma}(t)\\
&>(1-m-\sigma(1-\lambda))f(k_{\sigma'}(t))+(1-\delta)k_{\sigma'}(t)\\
&>(1-m-\sigma'(1-\lambda))f(k_{\sigma'}(t))+(1-\delta)k_{\sigma'}(t)\\
&=(1+n)k_{\sigma'}(t)
\end{aligned}
$$

稳态时 $\dot{k}=0$，即

$$f(k^*)/k^*=\frac{(\delta+n)}{1-m-\sigma(1-\lambda)} \qquad (3)$$

（3）和上一问类似，上面的稳态资本存量（3）式变为：

$$f(k^*)/k^*=\frac{(\delta+n)}{1-m-\sigma(1-\lambda-\phi)} \qquad (4)$$

当 $\phi>1-\lambda$ 时，（4）式可知稳态资本存量随着 σ 增加而增加。这表明，政府支出中用于公共投资所占比例如果高过更高税率所致的私人储蓄减少量，稳态资本存量随着政府支出增加而增加。这不是很合理，因为当政府储蓄倾向较高（ϕ 较高）以及公共消费因较高 λ 而对税收做出下降更多的反应这两个假设都不是很合理。

（4）这时公共投资没有进入 I 中，所以，资本存量动态方程如（2）问，稳态时有：

$$f(k^*,\varphi g^*)/k^*=\frac{(\delta+n)}{1-m-\sigma(1-\lambda)} \qquad (3)$$

$$g^*=\sigma f(k^*,\varphi g^*) \qquad (6)$$

以上两式联合可以解出稳态资本存量和稳态政府支出。现在，政府支出对私人稳态投资有两种影响，其一如上所示会减少投资资源从而降低稳态资本存量，其二由于公共基础设施投资能提高企业效率从而投资增加，直观上看，由于生产函数中基础设施必不可少性质，所以当基础设施较少时，例如政府支出为 0 附近，政府支出会提高稳态资本存量。

4、Solow 模型中的自然资源。假设 Solow 模型中的生产函数为（其余假设如基本模型）：

$$Y(K,L,Z)=L^{\beta}K^{\alpha}Z^{1-\alpha-\beta}, \quad \beta+\alpha<1$$

其中 Z 为固定不变的土地数量。

（1）计算无人口增长时的稳态产出，并证明该稳态时全局稳定的。

（2）假定人口增长率为 n，当 $t\to\infty$ 时人均资本存量如何？土地边际收益和工资率如何？

（3）假设人口增长率为 n，劳动增进型外生技术进步速度为 g，证明存在稳态并计算稳态增长率。

（4）接上一小问。土地存量不变这一事实是否意味着持久增长是不可能的？直观解释之。

参考答案：

（1） 由总量资本动态方程

$$\dot{K}=sF-\delta K \qquad (1)$$

得到人均量资本动态方程：

$$\dot{k}=sf-\delta k=sk^{\alpha}z^{1-\alpha-\beta}-\delta k \qquad (2)$$

稳态时资本存量不变，由此得到稳态资本存量：

$$k^{*}=\left(\frac{sz^{1-\alpha-\beta}}{\delta}\right)^{1/(1-\alpha)} \qquad (3)$$

稳态产出：

$$y^{*}=z^{(1-\alpha-\beta)/(1-\alpha)}\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \qquad (4)$$

要证明该稳态的全局稳定性，由（2）式有：

$$g(k)=\dot{k}/k=sk^{\alpha-1}z^{1-\alpha-\beta}-\delta \qquad (5)$$

$g(k)$ 是 k 的减函数，稳态时 $g(k)=0$，所以资本存量低于稳态水平时 $g(k)>0$，高于稳态水平时 $g(k)<0$，这意味着前者时资本存量增加，后者时资本存量减少，从而无论从何处开始均将趋于这个唯一的稳态值。

（2）

$$\dot{z}/z=-n \qquad (6)$$

$$\dot{k}=sk^{\alpha}z^{1-\alpha-\beta}-(\delta+n)k \qquad (7)$$

由（6）式可知 $\lim\limits_{t\to\infty}z=0$，将这一结果带入（7）式并 $\dot{k}=0$ 可得稳态时人均资本存量、人均土地量为 0。

可以证明，从任何初始位置开始，均将趋于这一稳态。证明思路：先解出人均土地量时间路径，将之代入（7）式可以解出人均资本存量时间路径的解析解：

$$k(t)=\left\{\begin{array}{l}[k(0)^{(1-\alpha)}-\dfrac{s(1-\alpha)z(0)^{1-\alpha-\beta}}{n\beta+(1-\alpha)\delta}]\exp(-(1-\alpha)(n+\delta)t)\\+\dfrac{s(1-\alpha)z(0)^{1-\alpha-\beta}}{n\beta+(1-\alpha)\delta}\exp(-n(1-\alpha-\beta)t)\end{array}\right\}^{1/(1-\alpha)}$$

上式可以看出人均资本存量趋于 0。而总量资本存量趋于无穷：

$$\lim_{t\to\infty}K=\left\{\begin{array}{l}[k(0)^{(1-\alpha)}-\dfrac{s(1-\alpha)z(0)^{1-\alpha-\beta}}{n\beta+(1-\alpha)\delta}]\exp(-(1-\alpha)\delta t)\\+\dfrac{s(1-\alpha)z(0)^{1-\alpha-\beta}}{n\beta+(1-\alpha)\delta}\exp(n\beta t)\end{array}\right\}^{1/(1-\alpha)} \qquad L(0)=\infty$$

总量产出也趋于无穷。土地收益等于价格：

$$p^{z}=(1-\alpha-\beta)L^{\beta}K^{\alpha}Z^{-\alpha-\beta}$$

土地总收益是产出的固定比例。
工资率趋于 0：

$$w = \beta k^{\alpha} z^{(1-\alpha-\beta)}$$

直观来看，土地越来越稀缺，劳动者越来越多。

（3）假定技术进步是劳动增进型。有总量资本动态方程得到：

$$g_K \equiv \dot{K}/K = sY/K - \delta \qquad （8）$$

如果 K 增长率为常数，则 Y 的增长率也是该常数。由生产函数得到：

$$g_Y \equiv \dot{Y}/Y = \alpha g_K + \beta(n+g) \qquad （9）$$

要证明 g_K 收敛到常数，只要证明 $\dot{g}_K = 0$（证明过程略。从（8）式开始对时间求导，用到（8）（9）式即可得到）
从（9）式求出稳态增长率为：

$$g_K = g_Y = \frac{\beta(n+g)}{1-\alpha}$$

（4）人均产出增长率为：

$$g_y = \frac{\beta(n+g)}{1-\alpha} - n$$

因此，只要技术进步足够快 $g > \frac{1-\alpha-\beta}{\beta} n$，就有持续的人均产出增长。直观来看，技术进步足够快，抵消了土地不变的负面影响，就可以产生持续增长。

5、欧洲移民危机与 Solow 模型。目前欧洲正面临二战以来最严重的移民危机，数以万计的非法移民涌向欧洲各国。我们在 Solow 模型下讨论这一问题。
（1）如果移民是一次性涌入的，画图分析这对于人均资本、人均产出、人均消费以及总量产出时间路径的影响。
（2）推导稳态有效单位人均产出关于人口增长率的弹性。如果资本产出弹性为 1/3，技术增长率为 2%，折旧率为 3%，人口增长率由 2%提高到 3%将会使得有效单位人均产出降低多少？
参考答案：
（1）假设初始经济处于稳态，没有技术进步，移民涌入后人口增长率不变（隐含假设新涌入人口增长率与原来人口相同）。人口突然意外增加使得人均资本存量下降偏离稳态，尔后逐渐恢复到原稳态。人均资本存量、人均产出、人均消费变化时间路径类似，如下图 1 所示。在有正的人口增长率情况下，总量产出时间路径如下图 2（纵轴变量取对数。有技术进步时人均产出、人均资本存量、人均消费时间路径与这个图类似）。两图中横轴为时间，竖直虚线处为人口突然涌入的时间，另一虚线为渐近线。

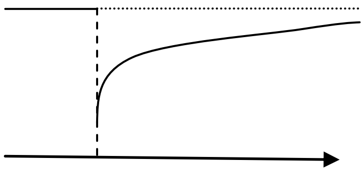


图 1：人均资本等时间路径

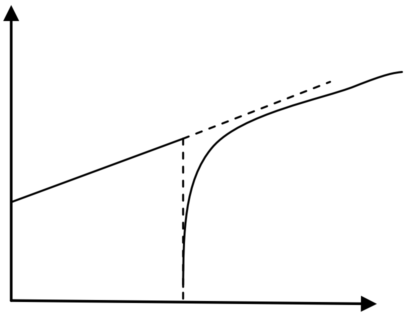


图 2：无技术进步的总量（纵轴变量取对数时斜率为人口增长率）或有技术进步时的人均量的时间路径（纵轴变量取对数时斜率为技术进步速度）

（2）

$$\frac{\partial \hat{y}^*}{\partial n}\frac{n}{\hat{y}^*}=f'(\hat{k}^*)\frac{\partial \hat{k}^*}{\partial n}\frac{n}{\hat{y}^*}=f'(\hat{k}^*)\frac{\hat{k}^*}{sf'(\hat{k}^*)-(n+x+\delta)}\frac{n}{\hat{y}^*}$$
$$=\frac{f'(\hat{k}^*)\hat{k}^*}{(n+x+\delta)f'(\hat{k}^*)\hat{k}^*/f'(\hat{k}^*)-(n+x+\delta)}\frac{n}{\hat{y}^*}$$
$$=\frac{n}{(n+x+\delta)}\frac{f'(\hat{k}^*)\hat{k}^*/f'(\hat{k}^*)}{f'(\hat{k}^*)\hat{k}^*/f'(\hat{k}^*)-1}$$

第三个等号用到了稳态条件，第二个等号用到了稳态条件对人口增长率求导，式中 $f'(\hat{k}^*)\hat{k}^*/f'(\hat{k}^*)$ 为资本产出弹性。将题中已知参数代入计算出稳态人均产出对人口增长率的弹性值，其中人口增长率取两点的中间值 0.025，计算得到：

$$\frac{\partial \hat{y}^*}{\partial n}\frac{n}{\hat{y}^*}=\frac{0.025}{0.025+0.02+0.03}\frac{1/3}{1/3-1}=-0.16$$

人口增长率增加了 50%，产出下降 8%左右。

6、假设 Solow 模型生产函数中引入人力资本：$Y=K^{\alpha}H^{\beta}(AL)^{1-\alpha-\beta}$，其中 H 为人力资本。

（1）假设产出即可用于投资物质资本，又可用于投资人力资本。假定总储蓄外生。如果两种投资回报相同，均衡时储蓄在两种资本存量之间如何分配？

（2）推导资本动态方程。

（3）推导收敛系数。

参考答案：

（1）两种资本净回报相同，意味着如果两者折旧率相同则它们的边际产品相等。由此得到

$H/K=\hat{h}/\hat{k}=\beta/\alpha$ （1）

（2）

首先生产函数化成集约形式：

$\hat{y}=f(\hat{k},\hat{h})=\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\beta}$

$\dot{\hat{k}}+\dot{\hat{h}}=sf-(n+\delta+x)(\hat{k}+\hat{h})$ （2）

（3）将（1）式的关系代入（2）式：

$\dot{\hat{k}}=sA\hat{k}^{\alpha+\beta}-(n+\delta+x)\hat{k}$

其中 A 是一个常数，剩下推导形如讲义中（15）/(16)式。得到收敛速度为 $(1-\alpha-\beta)(n+\delta+x)$

7、假设 Solow 模型生产函数中引入人力资本：$Y=K^{\alpha}H^{\beta}(AL)^{1-\alpha-\beta}$，其中 H 为人力资本。

假设物质资本和人力资本投资占总产出比重分别为外生常数 s_k、s_h。推导收敛系数。

参考答案：

首先生产函数化成集约形式：

$\hat{y}=f(\hat{k},\hat{h})=\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\beta}$

$\dot{\hat{y}}/\hat{y}=\alpha\dot{\hat{k}}/\hat{k}+\beta\dot{\hat{h}}/\hat{h}$

由资本动态方程有：

$\dot{\hat{k}}/\hat{k}=s_k f/\hat{k}-(n+\delta+x)$

$\dot{\hat{h}}/\hat{h}=s_h f/\hat{h}-(n+\delta+x)\hat{h}$

所以：

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{y}}/\hat{y}&=\alpha\dot{\hat{k}}/\hat{k}+\beta\dot{\hat{h}}/\hat{h}\\
&=\alpha(s_k\hat{k}^{\alpha-1}\hat{h}^{\beta}-(n+\delta+x))+\beta(s_h\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\beta-1}-(n+\delta+x))\\
&=\alpha(s_k e^{-(1-\alpha)\ln\hat{k}}e^{\beta\ln\hat{h}}-(n+\delta+x))+\beta(s_h e^{\alpha\ln\hat{k}}e^{-(1-\beta)\ln\hat{h}}-(n+\delta+x))
\end{aligned}
$$

上式围绕稳态进行一阶对数线性近似，并用到稳态条件，得到：

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{y}}/\hat{y}&=-(1-\alpha-\beta)(n+\delta+x)[\alpha(\ln\hat{k}-\ln\hat{k}^{*})+\beta(\ln\hat{h}-\ln\hat{h})]\\
&=-(1-\alpha-\beta)(n+\delta+x)(\ln\hat{y}-\ln\hat{y}^{*})
\end{aligned}
$$

所以收敛速度为 $(1-\alpha-\beta)(n+\delta+x)$

8、有劳动增进型外生技术进步 Solow 模型中，假设劳动和资本均安其边际产品给付报酬：

$w = \partial F(K, AL) / \partial L$
$r = \partial F(K, AL) / \partial K - \delta$
（1）证明 $w = A(f(k) - kf'(k))$
（2）证明 $wL + rK = F - \delta K$
（3）计算稳态时工资率和利率增长率。
（4）假设经济初始位于资本存量低于稳态水平处，随着时间推移，工资率和利率将如何变化？

参考答案：
（1） 首先生产函数化成集约形式：

$\hat{y} = f(\hat{k})$

$Y = ALf(K / AL)$

$w = \partial Y / \partial L = ALf'[-K / AL^2] + Af = A(f(\hat{k}) - kf'(\hat{k}))$

（2）$Y_K = \dfrac{\partial(ALf(K / AL))}{\partial K} = ALf' \bullet (1 / AL) = f'$
$r = f' - \delta$

$wL + rK = LA(f(\hat{k}) - kf'(\hat{k})) + K(f' - \delta)$
$= ALf - \delta K = F - \delta K$

（3）由工资率和利率表达式可知工资率稳态增长率为技术进步率 x，利率增长率为 0。

（4）$\dot{w} / w = \dot{A} / A + \dfrac{-\hat{k}\dot{\hat{k}}f''}{f(\hat{k}) - kf'(\hat{k})} = x + \dfrac{-\hat{k}\dot{\hat{k}}f''}{f(\hat{k}) - kf'(\hat{k})}$

因为 f'' 为负，所以上式在初始位于资本存量低于稳态水平时为正。

$\dot{r} / r = \dfrac{\dot{\hat{k}}f''}{f' - \delta}$

上式为负。

Ramsey 模型

1、假设有 N 个同质厂商，单个厂商生产函数为 $Y = F(K, AL)$，生产函数满足新古典假设，K 为资本投入，AL 为劳动投入。

（1）考虑每个企业以最小成本生产单位产出问题。证明有效单位劳动平均资本存量 k 的成本最小化水平唯一确定并独立于产出 Y，所有厂商选择相同的 $\hat{k}$。

（2）证明：N 个成本最小化的同质厂商的总产出等于具有相同生产函数的一个单一厂商利用 N 个厂商拥有的全部劳动和资本所生产的产出。

参考答案：

（1）每单位有效劳动投入工资率为 w，每个工人工资为 wA。企业最小化问题为：

$$\min(wAL + RK)$$

$$s.t.\ Y = ALf(\hat{k})$$

解这个优化问题得到：

$$R / w = \frac{f'}{f - \hat{k}f'}$$

即资本与劳动边际产品之比等于两种要素价格之比。该式右侧对资本存量严格单调，所以它潜在确定了一个最优资本存量的选择。并从该式可以看出，$\hat{k}$ 的选择与 Y 无关，也就是说无论多大规模的企业都是选择这样的 $\hat{k}$，所有厂商选择相同的 $\hat{k}$。

（2）由于每个厂商拥有相同的 $\hat{k}$ 和技术，所以，N 个成本最小化厂商的总产量关系式为：

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i = \sum_{i=1}^{N} AL_i f(\hat{k}) = Af(\hat{k})\sum_{i=1}^{N} L_i = Af(\hat{k})\bar{L}$$

$\bar{L}$ 为总的就业人数，从上式右端来看，它可以表示一个企业拥有全部劳动和资本所生产的产出。

2、生产率下降与储蓄。考虑一个处于稳态的 Ramsey 经济（基本假设如讲义基本模型），假设生产率突然一次永久性下降。

（1）写出稳态条件，画出初始的相位图。

（2）生产率下降如何影响两条分界线？画出说明之。

（3）在变动时刻，消费如何变动。

（4）找出生产率的边际变化对正处在稳态上的产出中储蓄份额产生的影响的表达式。能判断影响正负吗？

参考答案：

（1）

均衡时有：

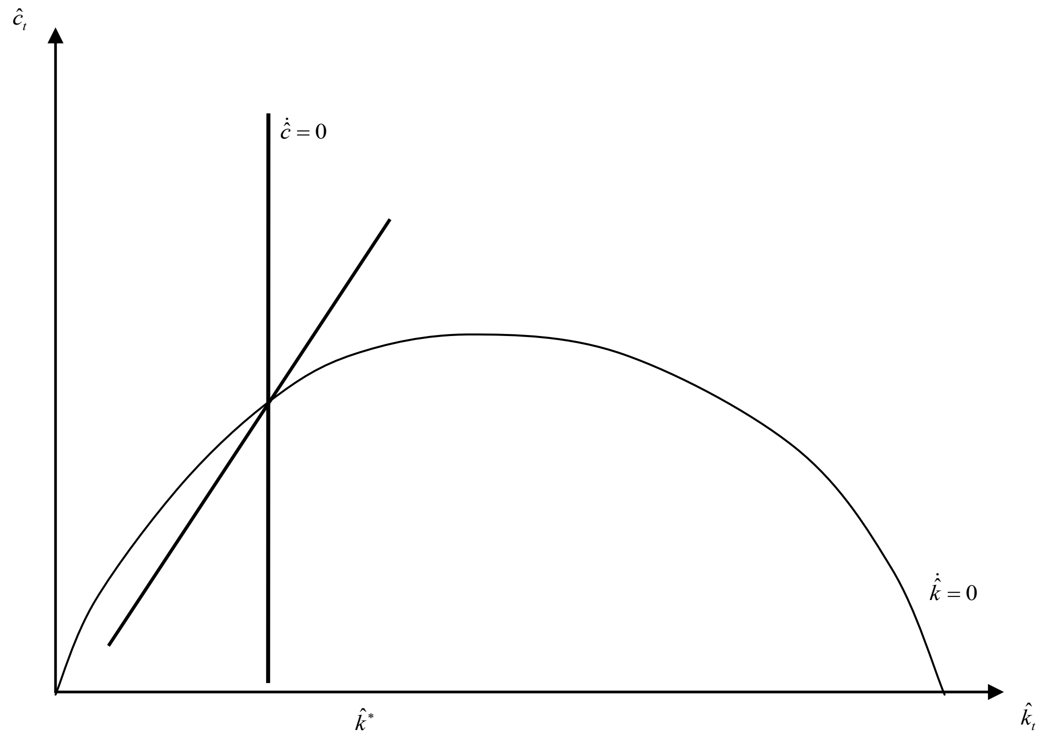
$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\hat{k}$$

$$\dot{\hat{c}}/\hat{c} = \frac{1}{\theta}\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x\right]$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\hat{k}\exp\left[-\int_0^t (f'(\hat{k}) - \delta - x - n)dv\right]\right\} = 0$$

稳态时有：

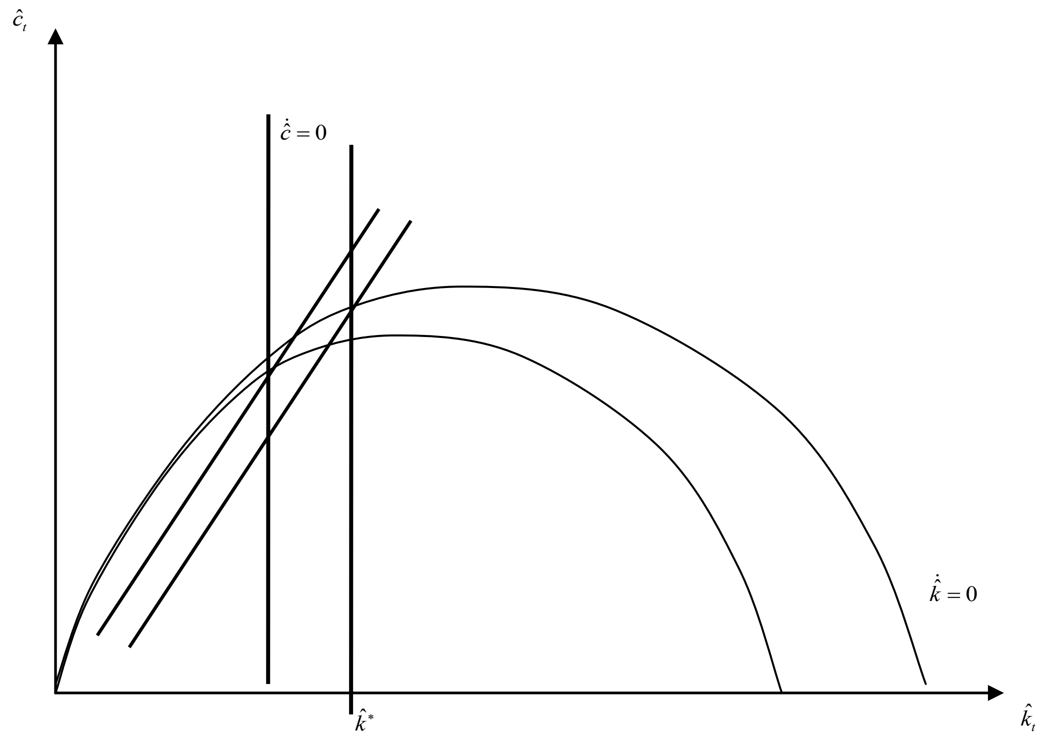
$$\begin{cases} f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\hat{k} = 0 \\ f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x = 0 \end{cases}$$



初始处于稳态，是在两条分界线交点处。

（2）

由稳态条件可知，两分界线均向右，如图。



（3）由于资本存量是由历史投资确定，生产率变化也来不及改变技术水平，所以变化初始

时有效单位人均资本存量不变，而消费必须及时跳变到新的稳定臂。但是无法确定消费是增是减还是不变，因为无法确定新的稳定臂与原稳定臂的相对位置，一切皆有可能，取决于模型参数。

（4）均衡时储蓄率为：

$$s=\frac{f-\hat{c}}{f}=\frac{(n+x+\delta)\hat{k}^*}{f(\hat{k}^*)}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{(n+x+\delta)[f(\hat{k}^*)-\hat{k}^*f'(\hat{k}^*)](\frac{\partial \hat{k}^*}{\partial x})+\hat{k}^*f(\hat{k}^*)}{[f(\hat{k}^*)]^2}$$

稳态资本存量由下式确定：

$$f'(\hat{k}^*)-\delta-\rho-\theta x=0$$

由此求出 $\frac{\partial \hat{k}^*}{\partial x}=\theta/f''(\hat{k}^*)<0$

这样有：

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{(n+x+\delta)[f(\hat{k}^*)-\hat{k}^*f'(\hat{k}^*)]\theta+f''(\hat{k}^*)\hat{k}^*f(\hat{k}^*)}{[f(\hat{k}^*)]^2f''(\hat{k}^*)}$$

上式中分母为负，分子第一部分为正，第二部分为负，整体无法判断。直观来看，技术更为先进，投资机会增加，储蓄增加，但是另一方面，技术进步使得产出增加，消费增加，因而储蓄率不定。

3、Ramsey 模型中的资本税。考虑竞争性均衡框架下的折旧率为 0 的处于稳态的 Ramsey 经济（其他基本假设如讲义基本模型）。假设政府突然在某时刻对资本真实利率（资本收入）以税率 τ 征税，因此家庭面对的真实利率为 $r=(1-\tau)f'$。假设政府税收收入一次总付性地返还给家庭因而投资决策不变，征税是未预料到的。

（1）征税如何影响两条分界线？

（2）在征税时刻经济如何对征税做出反应？征税后的动态行为是什么？

（3）新的稳态上的资本和消费相对于原来稳态时发生了怎样的变化？

（4）证明稳态储蓄率对税率是递减的。

（5）如果税收没有被退还给家庭，而是被用于政府购买，并且政府购买既不影响消费者效用又不影响企业生产率，（1）、（2）两问答案是否发生变化？如果变化，怎样变化？

参考答案：

（1）家庭投资决策没变，因而（忽略了折旧率）：

$$\dot{\hat{k}}=f(\hat{k})-\hat{c}-(x+n)\hat{k} \qquad (1)$$

这一分界线不变。

家庭的消费欧拉方程为（忽略了折旧率）：

$$\dot{\hat{c}}/\hat{c}=\frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)f'(\hat{k})-\rho-\theta x\right] \qquad (2)$$

这一分界线左移。图略。

（2）征税时刻资本存量来不及变化，而消费立刻向上跳到新的稳定臂，后者是因为投资不划算，因而减少储蓄增加消费。此后，资本存量和消费逐渐减少直至新的稳态。

（3）由于税收扭曲所致，资本存量和消费减少了。

（4）储蓄率为：

$$s=\frac{f-\hat{c}}{f}=\frac{(n+x+\delta)\hat{k}^*}{f(\hat{k}^*)}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \tau}=\frac{(n+x)}{f(\hat{k}^*)}\frac{\partial \hat{k}^*}{\partial \tau}[1-\hat{k}^* f'(\hat{k}^*)/f(\hat{k}^*)]$$

$\hat{k}^* f'(\hat{k}^*)/f(\hat{k}^*)$ 为资本报酬份额，$1-\hat{k}^* f'(\hat{k}^*)/f(\hat{k}^*)>0$，$\frac{\partial \hat{k}^*}{\partial \tau}<0$，所以上式为负。问题得证。

（5）消费欧拉方程仍如（2）式，但是资本动态方程变成了（可以从消费者预算约束开始验证这一点）：

$$\dot{\hat{k}}=f(\hat{k})-\hat{c}-(x+n)\hat{k}-G$$

这时使得消费分界线左移，投资分界线下移。

均衡消费和投资均减少。

4、Ramsey 模型中的政府。考虑计划者框架下的折旧率为 0 的处于稳态的 Ramsey 经济（其他基本假设如讲义基本模型）。假设政府购买与私人消费完全替代，因此瞬时效用函数为 $u(c+G)$，效用函数 CRRA 型。经济初始位于稳态。分析政府购买暂时性增加对消费、资本和利率路径的影响。

参考答案：

目标函数为：

$$\max U=\int_0^\infty \frac{(c+G)^{1-\theta}-1}{1-\theta}e^{nt}e^{-\rho t}dt$$

资源约束为：

$$\dot{\hat{k}}=f(\hat{k})-\hat{c}-(x+n+\delta)\hat{k}-G$$

$$\dot{\hat{c}}\Big/(\hat{c}+G)=\frac{1}{\theta}\left[f'(\hat{k})-\delta-\rho-\theta x\right]$$

政府购买增加，资本存量分界线下移，消费分界线不变，所以新的稳定臂下移，所以，在政府购买暂时性增加时，资本存量不变、利率不变，但是消费突然下降，而当政府购买恢复到原状态时，资本存量不变、利率不变，而消费突然增加到原稳定臂上。政府购买增加和私人消费相互替代，不会影响其他变量，唯一改变是国民储蓄中私人部分和政府部分。

5、考虑一个 Ramsey 模型的变形，假设瞬时效用函数为 Stone-Geary 偏好

$u(c)=\dfrac{(c-\gamma)^{1-\theta}-1}{1-\theta}$，其中 γ 为一个大于 0 的常数，有外生技术进步而无人口增长。

（1）解释效用函数。
（2）描述经济的均衡。稳态存在吗？为什么？
（3）推导确保标准横截性条件成立的参数条件。
（4）刻画该经济的转移动态行为。

参考答案：

（1）最低生存消费 γ

（2）消费欧拉方程：

$$\dot{c}/c=-\frac{1}{u''c/u'}(r-\rho)=\frac{c-\gamma}{\theta c}(r-\rho) \qquad (1)$$

如果我们按照通常方式得到下式：

$$\dot{\hat{k}}=f(\hat{k})-\hat{c}-(x+n+\delta)\hat{k} \qquad (2)$$

则前面（1）式中无法消除技术进步 $A(t)$ 项，反之亦是。所以，我们按照如下方式表述模型均衡（横截性条件忽略，生产者优化问题如讲义基本模型）：

$$\dot{c}/c=-\frac{1}{u''c/u'}(r-\rho)=\frac{c-\gamma}{\theta c}(r-\rho) \qquad (1)$$

$$\dot{\hat{k}}=f(\hat{k})-c/A-(x+\delta)\hat{k} \qquad (3)$$

$$\dot{A}=xA$$

这个动态系统描述了模型均衡，但是其中三个变量。

稳态不可能：由（3）式得到：

$$\dot{\hat{k}}/\hat{k}=f(\hat{k})/\hat{k}-c/(A\hat{k})-(x+\delta) \qquad (4)$$

如果存在稳态，产出与资本存量之比 $f(\hat{k})/\hat{k}$ 应为常数，$f(\hat{k})/\hat{k}$ 本身是单调的，所以这对应着一个常数的 $\hat{k}^*$。由（3）式得到：

$$c/A=f(\hat{k}^*)-(x+\delta)\hat{k}^*$$

因此稳态时上式左边也应为常数，即消费增长率等于技术进步率，但是后者是一个常数，而前者为：

$$\dot{c}/c=-\frac{1}{u''c/u'}(r-\rho)=\frac{c-\gamma}{\theta c}(f'-\delta-\rho)$$

当消费增长率为正时，上式不可能是常数，相互矛盾。

（3）$\rho > (1-\theta)x$

推导顺序和讲义中基本模型一样，唯一差别在于人口增长率等于 0 了。

（4）定义$m = c - \gamma$，$\hat{m} = m / A$，有：

$$\frac{\dot{\hat{m}}}{\hat{m}} = \frac{1}{\theta}\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x \right] \qquad (5)$$

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{m} - (x+\delta)\hat{k} - \frac{\gamma}{A} \qquad (6)$$

除了（6）式中尾巴项$-\frac{\gamma}{A}$外，上面系统（忽略了 TVC）与基本模型没什么不同，如果尾巴项$-\frac{\gamma}{A}$能消失，就能求出稳态。在渐近意义上，$\lim_{t\to\infty} -\frac{\gamma}{A} = 0$，所以存在一个渐近意义上的稳态。在（$\hat{k}$，$\hat{m}$）空间画相位图的话，（5）式确定的分界线精确等同于基本模型，（6）式确定的分界线渐近等同于基本模型，所以该模型的转移动态行为在渐近意义上等同于基本模型：收敛于渐近稳态。

6、考虑一个 Ramsey 模型的变形，其中消费者瞬时效用函数为$u(c, 1-l(t))$，其中$0 < l(t) < 1$为劳动供给，$1-l(t)$为闲暇。在对称均衡中就业$L(t) = l(t)$，假定生产函数为劳动增进型技术进步新古典函数，技术进步率为g。

（1）建立消费者与生产者优化问题。
（2）建立消费者现值（Current Value）汉密尔顿函数，求解消费者优化一阶条件（注意：包括了消费和闲暇或劳动供给的权衡）。
（3）建立计划者现值（Current Value）汉密尔顿函数，求解消费者（多余的字）优化一阶条件。
（4）证明：存在稳态时，效用函数必须为如下形式（似乎用到偏积分，暂时 hold 不住了，该小问删除）：

$$u(c, 1-l) = \begin{cases} \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} h(1-l), \theta \neq 1 \\ \ln c + h(1-l), \theta = 1 \end{cases}$$

其中函数$h'(.) > 0$。从收入效用和替代效用角度直观解释该效用函数。

参考答案：
（1）假设没有人口增长

$$\max U = \int_0^{\infty} u(c,1-l)e^{-\rho t}dt$$

$$s.t. \quad \dot{a} = wl + ra -$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\exp\left[-\int_0^t r(v)dv\right]\right\} \geq 0$$

（2） $H^c = u(c,1-l) + \mu(wl + ra - c)$

状态变量为人均财富，劳动投入、消费为控制变量，一阶条件：

$\frac{\partial H^c}{\partial c} = 0$，得到$u_c(c,1-l) = \mu$

$\frac{\partial H^c}{\partial l} = 0$，得到，$u_2(c,1-l) = \mu w$

$\frac{\partial H^c}{\partial a} = \rho\mu - \dot{\mu}$，得到$\dot{\mu}/\mu = \rho - r$

定义边际效用对消费的弹性$\varepsilon = -\frac{u_{cc}(c,1-l)\bullet c}{u_c(c,1-l)}$上面的一阶条件可以化为：

$$\varepsilon\frac{\dot{c}}{c} - \frac{u_{c2}\bullet\dot{l}}{u_c} = r - \rho \qquad （1）$$

$$u_2 = u_c w \qquad （2）$$

（1）式为跨期条件即为欧拉方程，（2）式为期内决策条件即为消费和闲暇或劳动供给的权衡。

(3)

$$\max U = \int_0^{\infty} u(c,1-l)e^{-\rho t}dt$$

$$\dot{k} = F(k, Al) - \delta k - c$$

$$H^c = u(c,1-l) + \mu(F(k,Al) - \delta k - c)$$

状态变量为人均资本存量k，控制变量如前问。

$\frac{\partial H^c}{\partial c} = 0$，得到$u_c(c,1-l) = \mu$

$\frac{\partial H^c}{\partial l} = 0$，得到，$u_2(c,1-l) = \mu AF_L$

$$\frac{\partial H^c}{\partial a}=\rho\mu-\dot{\mu}$$，得到 $\dot{\mu}/\mu=\rho+\delta-F_K$

$$\varepsilon\frac{\dot{c}}{c}-\frac{u_{c2}\bullet\dot{l}}{u_c}=F_K-\delta-\rho$$

$$u_2=u_c AF_L$$

显而易见，计划者问题与竞争性均衡两者是等价的。

（4） 稳态时人均资本、人均消费增长率相等，劳动投入比例 l 为常数、利率为常数。所以稳态时（1）式左侧减号后的项消失：

$$\varepsilon\frac{\dot{c}}{c}=r^*-\rho \qquad （3）$$

因为消费增长率为常数，所以 ε 与人均消费无关。

Solow 模型

4. (2)

$$z(t)=z(0)e^{-nt}$$

代入(7)式得到

$$\dot{k}=sk^{\alpha}\left[z(0)e^{-nt}\right]^{1-\alpha-\beta}-(\delta+n)k$$

设 $m=k^{1-\alpha}$, 则 $\dot{m}=(1-\alpha)k^{-\alpha}\dot{k}$

解微分方程： $\dot{m}=(1-\alpha)\cdot s\cdot z(0)^{1-\alpha-\beta}\cdot e^{-n(1-\alpha-\beta)t}-(1-\alpha)(\delta+n)m$

利用公式法：形如 $y'+p(x)y=q(x)$，通解公式为 $y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$，

其中常数 C 在本题中由初值确定。具体可参见讲义式(7)的推导。

可得答案中的 $k(t)$，即人均资本存量时间路径的解析解。

5. (1) 总量资本变化的时间路径有误。受到人口冲击后短期内由于劳动力供给突然增大，增长速度加快，总量变大，长期恢复稳态后，收入和资本总量增速继续保持人口增长率。

(2)

$$\frac{\partial\hat{y}^*}{\partial n}\frac{n}{\hat{y}^*}=f'(\hat{k}^*)\frac{\partial\hat{k}^*}{\partial n}\frac{n}{\hat{y}^*}=f'(\hat{k}^*)\frac{\hat{k}^*}{sf'(\hat{k}^*)-(n+x+\delta)}\frac{n}{\hat{y}^*}$$

$$=\frac{f'(\hat{k}^*)\hat{k}^*}{(n+x+\delta)\hat{k}^*f'(\hat{k}^*)/f(\hat{k}^*)-(n+x+\delta)}\frac{n}{\hat{y}^*}$$

$$=\frac{n}{n+x+\delta}\frac{\hat{k}^*f'(\hat{k}^*)/f(\hat{k}^*)}{\hat{k}^*f'(\hat{k}^*)/f(\hat{k}^*)-1}$$

$\hat{k}^*f'(\hat{k}^*)/f(\hat{k}^*)$ 为资本产出弹性。

8. (1) $w=\dfrac{\partial Y}{\partial L}=ALf'\left[-K/AL^2\right]+Af=A(f(\hat{k})-\hat{k}f'(\hat{k}))$

OLG 模型

1、个体存活两期，t 期出生的人的数量为 L_t，且有 $L_t=(1+n)L_{t-1}$。瞬时（单期）效用函数为对数型且没有贴现，即个体效用函数为：

$U_t=\ln(c_{1t})+\ln(c_{2t+1})$

经济的生产方面的假设为：每个人在出生时赋予 A 单位的单一产品，该产品可被用于消费或贮存。被贮存的每单位物品可在随后时期获得 x 单位产品。

假设在初始时期即 0 时期，除了 L_0 个各自拥有 A 单位产品的年轻人外，还有 $\frac{1}{1+n}L_0$ 个老年人只在 0 期生活。这些老人每人被赋予数量为 Z 的产品，他们的效用就是最初期的消费 c_{20}。

（1）描述该经济的分散均衡。

（2）考虑如下情形：假设当事人的资源禀赋中用于贮存的比例为 f_t，且它随时间不变，则在这样的路径上，作为 f 的函数的人均总消费（总消费等于所有年轻人的消费加上所有老年人的消费）是什么？如果 $x<1+n$，最大化人均（或劳均）消费的 f 值是多少？此时分散经济是否是帕累托有效的？如果不是，计划者该如何改进才能提高福利？

参考答案：

（1）

个体效用函数为：

$U_t=\ln(c_{1t})+\ln(c_{2t+1})$　　　　（1）

所受约束为：

$c_{1t}+F_t=A$　　　　（2）

$c_{2t+1}=xF_t$

F_t 为贮存的产品。

将（3）代入（2）得到跨期预算约束为：

$c_{1t}+c_{2t+1}/x=A$　　　　（4）

消费者效用最大化，由此建立拉格朗日函数为：

$$L = \ln(c_{1t}) + \ln(c_{2t+1}) + \lambda(A - c_{1t} - c_{2t+1} / x)$$

一阶条件为：

$$\lambda = 1 / c_{1t} \qquad （5）$$

$$\lambda / x = 1 / c_{2t+1} \qquad （6）$$

由此得到：

$$c_{2t+1} = xc_{1t} \qquad （7）$$

（7）代入（4）得到：

$$c_{1t} = A / 2 \qquad （8）$$

$$c_{2t+1} = xA / 2 \qquad （9）$$

（2）

如果年轻时贮存的收入禀赋的比例为 f ，则社会总消费为：

$$C_t = c_{1t}L_t + c_{2t}L_{t-1} = (1 - f)AL_t + fxAL_{t-1}$$

劳均消费为：

$$C_t / L_t = (1 - f)A + fxA/(1 + n) \qquad （10）$$

在 $x < 1 + n$ 时，使得上式最大化的 f 为 0。

分散经济中，消费者选择的 f 为 1/2，而最大化劳均消费时消费者选择的 f 为 0。分散经济不是帕累托最优的。在分散经济中，跨期交易是不可行的，所以个体在年轻时不得不贮存，因为贮存是唯一的在老年时获得消费的手段。即使贮存的收益 x 较低时也不得不如此。这时，如果存在一个计划者，计划者可以配置资源使得每一代人的消费都增加从而福利增加。在每一时期，如果计划者从年轻人那里拿来一个单位的产品给老年人，则每个老年人获得 $1 + n$ 个单位产品。由于 $x < 1 + n$ 这会产生一个比自己贮存更高的回报。具体来说，计划者如下操作：在每一时期，计划者将在分散经济中原来用于贮存的一般禀赋 $A / 2$ 给同期的老年人。这样，每一老年人在年轻时的消费仍是 $A / 2$，而在老年时的消费为 $(1 + n)A / 2$，

超过分散经济中老年时的消费。

2、接上题。假设 $x<1+n$，0 期生活老人每人除了被赋予数量为 Z 的产品，每个人还拥有 M 单位的可储存、可分割的商品——我们称之为货币，但是货币并不是效用的来源。

（1）考虑 t 时期出生的个人。设产品在 t 时期用货币表示的价格为 P_t，在 $t+1$ 时期用货币表示的价格为 P_{t+1}，因此个人可以用 1 单位的资源禀赋换取 P_t 单位的货币，并用此货币换取下一代人 P_t/P_{t+1} 单位禀赋。将这个人的行为表示成 P_t/P_{t+1} 的函数。

（2）证明存在一个满足 $P_{t+1}=P_t/(1+n)$（对于所有 $t\geq 0$）且没有存储的均衡，并用此证明“货币”的出现使得经济能达到黄金律水平。

（3）证明也存在一个满足 c（对于所有 $t\geq 0$）的均衡。

（4）解释为什么 $P_t=\infty$（对于所有 t）（这表示货币无价值）也是一个均衡。而且如果经济在某一时刻终止，则这是唯一均衡。为什么？

参考答案：

（1）个体效用函数为：

$$U_t=\ln(c_{1t})+\ln(c_{2t+1}) \qquad (1)$$

$$P_tC_{1t}=P_tA-P_tF_t-M_t^d \qquad (2)$$

$$P_{t+1}C_{2t+1}=P_{t+1}x_tF+M_t^d \qquad (3)$$

个人决策将禀赋用于储蓄和消费，并且选择存储与持有货币的储蓄方式。由于对数效用函数，储蓄回报率不影响存储决策，分离这两项决策：即如上题先决定储蓄一半：

$$c_{1t}=A/2 \qquad (4)$$

再决策如何储蓄，这取决于储蓄的回报率 x 与货币的总回报率 P_t/P_{t+1}，

情形 1：$x>P_t/P_{t+1}$

消费一半，存储剩余一半，不持有货币。$c_{1t}=A/2$，$F_t=A/2$，$M_t^d/P_t=0$，

$c_{2t+1}=xA/2$

情形 2：$x<P_t/P_{t+1}$

消费一半，不存储，剩余一半持有货币。$c_{1t}=A/2$，$F_t=0$，$M_t^d/P_t=A/2$，

$c_{2t+1}=(P_t/P_{t+1})A/2$

情形 3：$x=P_t/P_{t+1}$

消费一半，另一半存储与持有货币随意分配，令 $a\in[0,1]$，

$c_{1t}=A/2$，$F_t=(1-a)A/2$，$M_t^d/P_t=aA/2$，$c_{2t+1}=(P_t/P_{t+1})A/2=xA/2$

（2）每个人禀赋一半形式持有货币进行储蓄，下一期出售货币以新的价格换回禀赋：0 时刻每个老人有 M 单位货币，任意时期的货币实际需求为：$L_tA/2$，而货币实际供给 $L_0/(1+n)M_t/P_t=L_t/(1+n)^{t+1}$，由此得到：$P_t=2M/(A(1+n)^{t+1})$，同理有：$P_{t+1}=2M/(A(1+n)^{t+2})$，所以 $P_{t+1}=P_t/(1+n)$ 是一个均衡，并且它是有效的（见上题）。

（3）由于 $x=P_t/P_{t+1}$，货币回报与存储回报无差异，所以如第一小问中假设另一半存储与持有货币随意分配，令持有货币的比例为 $a\in[0,1]$，t 期总货币实际供求分别为：实际货币需求为：

$L_ta_tA/2$

实际货币供给为：

$L_0/(1+n)\bullet M/P_t=L_t/(1+n)^{t+1}\bullet M/P_t$

供求均衡得到：

$P_t=2M/[a_tA(1+n)^{t+1}]$

同理对于 t+1 期，有：

$P_{t+1}=2M/[a_{t+1}A(1+n)^{t+2}]$

联立这两式，可得：

$P_t/P_{t+1}=(1+n)a_{t+1}/a_t$

因此，$x=P_t/P_{t+1}$ 是任何满足 $a_{t+1}/a_t=x(1+n)$ 路径的均衡。

（4）这表示货币无价值，也是一均衡。年轻人相信货币下期无价值，当代人不会接受货币作为存储的替代物，这样年轻人不持有货币，老年人拥有一堆无价值的货币，货币供求相等均为 0，如果没有人相信下一代人会接受货币，这种均衡将一直持续下去。

如果在 T 期结束，这种情况将是唯一均。因为 T 期时年轻人不会出售禀赋换回货

币，而将消费所有的存储，老年人持有的货币无价值，因此在 T-1 期，老年人知道下一期货币无价值，他们也不会出售票赋换取货币，如此下去，从最初开始，将都没有人持有货币。

3、连续时间永葆青春模型。假设死亡的瞬时概率为 p，因此在 j 时出生的人在 $t \geq j$ 时还活着的概率为 $e^{-p(t-j)}$。假设存在一个这样的年金市场：保险公司给活着的人每期支付的年金 z 唯一依赖于她的资产持有量 $z(a)$，如果这个人死亡则资产归保险公司，保险市场自由进入。

t 时决策的消费者目标函数为：

$$E_t U = \int_t^{\infty} \ln[c(j,v)] \cdot e^{-(p+\rho)(v-t)} dv$$

其中 $c(j,v)$ 为 j 时出生的人在 $v \geq j$ 时的消费，ρ 仍然表示时间偏好。

（1）求年金 z 。

（2）求解消费者优化的欧拉方程。

（3）推测 TVC 的形式。

参考答案：

（1）保险公司的利润为：

$$\pi(a(t|j)|t,j) = pa(t|j) - z(a(t|j)|t,j)$$

其中 $z(a(t|\tau)|t,j)$ 为 j 时出生的个人在 t 时拥有财富 $a(t|j)$ 所得年金。自由进入条件使得保险公司利润为 0 得到年金为：

$$z(a(t|j)|t,j) = pa(t|j)$$

（2）消费者在任一时刻 t 的目标函数如题干所示，财富动态约束为（题干所示忽略了人口出生率，因此总人口以死亡率减少。如果加上人口出生率 n，总人口增长率为（n-p），但无论如何处理不影响欧拉方程）：

$$\dot{a}(t|j) = r(t)a(t|j) - c(t|j) + w(t) + z(a(t|\tau)|t,j)$$

$$= (r(t)+p)a(t|j) - c(t|j) + w(t)$$

仍然按照拉姆齐模型的求解方法，仍然可以得到欧拉方程为：

$$\frac{\dot{c}(t|j)}{c(t|j)} = r(t) - \rho$$

（3）从拉姆齐模型可以推测，这里的 TVC 将会形如：

$$\lim_{t\to\infty}\{a(t|j) \bullet \exp(-(\bar{r}(t,j)+p)\} = 0$$

其中 $\bar{r}(t,j)$ 为期间平均利率，定义见课件。

AK 模型

1、考虑生产函数 Y=AK+BL，其中 A、B 为正的常数。
（1）这个生产函数是新古典的吗？如果不是，满足新古典的哪些条件，违反了哪些条件？
（2）写出集约型生产函数。人均资本的边际产品和平均产品是多少？
（3）如果经济在 Solow 框架下运行，即储蓄率是固定的常数 s，并假定人口增长率和资本折旧率分别为常数 n、δ。写出人均资本动态方程。在何种情况下，该模型有一个人均资本不增长的稳态？在何种情况下该模型呈现内生增长？

参考答案：这题很简单，答案略。

3、知识外溢与内生增长。考虑外生储蓄率的 Romer（1986）模型。第 j 个企业的人均产出生产函数为：

$$y_{jt} = k_{jt}^{\alpha} A_t^{\eta}$$

其中 $0<\alpha<1$ 且 $A_t = A_0 \sum_{j=1}^{N} k_{jt} / N$（$N$ 为企业数量）。储蓄率、人口增长率和折旧率为常数。

（1）解释 $A_t = A_0 \sum_{j=1}^{N} k_{jt} / N$ 的含义。

（2）如果所有企业相同，推导整个经济的人均资本存量 k 的动态方程。

（3）图形表述模型的解：1）$\alpha+\eta<1$；2）$\alpha+\eta=1$；3）$\alpha+\eta>1$。

（4）考查上一小问中三种情况下储蓄率变化对长期增长的影响。
（5）假设经济突然遭到了地震破坏，损失了物质资本。分析这种一次性冲击对即时增长率、长期增长率的影响。与无冲击稳态相比，冲击发生后新的稳态的人均产出水平有何变化？这种冲击的影响是暂时性还是持久性的？
参考答案：

这题的应该是第 2 题。从总题中摘出来的，番号忘了改过来。

（1）

$$A_t = A_0 \sum_{j=1}^{N} k_{jt} / N$$

表示整个经济的平均资本存量。所以整个生产函数表示投资对整个经济有外部性，提高了其他企业的效率。

（2）如果所有企业完全相同，则它们的人均资本和整个经济的人均资本都一样，人均资本存量动态方程为：

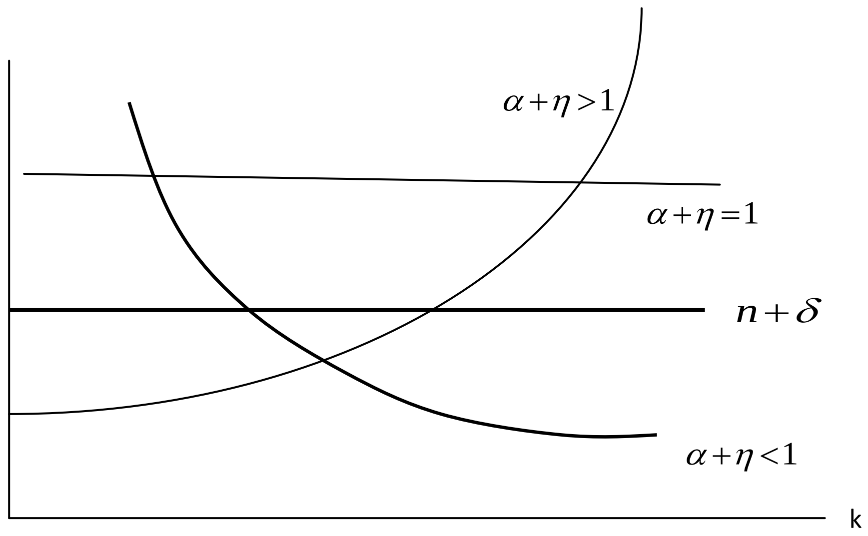
$$\dot{k} = sA_0^{\eta} k^{\alpha+\eta} - (n+\delta)k$$

从而有：

$$\dot{k} / k = sA_0^{\eta} k^{\alpha+\eta-1} - (n+\delta)$$

A_0 水平值不影响我们的关键推导，将它正规化为 1。

（3）



$\alpha+\eta<1$时是标准的新古典 Solow 模型情形，有稳态解。$\alpha+\eta>1$曲线与直线交点是不稳定的，如果初始位置在交点左侧，经济最终为 0 资本存量，必然 0 产出、0 消费。反之，如果经济初始位于交点右侧，人均资本存量爆炸性增加，增长率无限。当$\alpha+\eta=1$时，增长率为常数（假设为正）。此为内生增长。

（4）从上图可以看出，不会影响$\alpha+\eta<1$与$\alpha+\eta>1$时的长期增长率，但是提高了$\alpha+\eta=1$时的长期增长率。

（5）当$\alpha+\eta<1$时，资本存量减少会导致经济增长速度提高，直至最终处于稳态。当$\alpha+\eta>1$时，资本被破坏会降低即时的增长率。如果破坏后资本存量仍处于均衡点右侧，长期中增长率仍将无限。如果跑到了左侧，增长率为负，并最终经济停止。

当$\alpha+\eta=1$时，增长率不受影响。但是水平值的损失是补不回来的（相同时间内水平值低于资本未被破坏时），因此对人均产出的影响是长期的。

扩大产品多样性模型

1、（现代经济增长导论第十三章二十二题）我们课件中基本模型意味着创新可能性边界为 $\dot{N}=\frac{1}{\eta}Z$，其中 Z 为创新所投入资源，该式意味着投入 η 单位资源能生产出一种创新。如果将该创新可能性边界改为：$\dot{N}=\frac{1}{\eta}N^{-\phi}Z$，$\phi>0$，其他条件如基本模型。

（1）解释新的创新可能性边界的含义。

（2）描述创新的自由进入条件。

（3）说明没有人口增长经济将没有持续增长。

参考答案：

（1）新的创新可能性边界意味着投入资源为 Z 时出现 $\dot{N}$ 个创新，因此单个创新的成本为

$Z/\dot{N}=\eta N^{\phi}$

该式表明创新成本与已有创新有关，已有创新越多，新创新出现所需资源越多。导入我们将以中基本模型的轨道，设创新成本 $\eta(N)=\eta N^{\sigma}$（讲义中第二节为 $\eta(N)=\phi N^{\sigma}$，相差了一个常数字母，不影响结果，不好理解就将它改成将以中的形式即可）。

（2）自由进入条件仍是价值等于创新成本 $V(t)=\eta(N)$。除了创新成本现在不再是常数外，创新价值表达式仍为基本模型形式。

（3）我们仍然假设没有人口增长，由这个条件出发推导出长期增长率为 0（这一题已经告诉了大家原题来源，但是原题的参考书与我们不一样，基本模型有细微差别，导致很多表述不同，其中平衡增长路径利率为常数是平衡增长路径定义规定的，我们下面要推导出最终鞍点稳定时也有利率为常数。原题参考答案假设有人口增长，求出有人口增长时的经济增长率，最终从这个增长率表达式看出没有人口增长就没有持续增长，这也是一种证明思路。）仍由最终产品生产企业确定中间投入需求曲线：

$$x_j(v)=\sum_i x_{ij}(v)=\left[A\alpha/p_j(v)\right]^{1/(1-\alpha)}\sum_i L_i=L\sum_i\left[A\alpha/p_j(v)\right]^{1/(1-\alpha)}$$

（注意：如果假定有人口增长，从这个式子以后都要考虑人口增长率了，因为上式中 L 不再是常数。后面的结果仍可按照下面流程求解得出）。仍由研发企业利润最大化行为求出中间投入价格 $p_j(v)=\frac{1}{\alpha}\equiv p>1$，瞬时利润也仍如基本模型：

$$\pi_j(v)=\pi=LA^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{2/(1-\alpha)} \qquad (1)$$

推啊推，终于推到不一样的了。在对 $V(t)=\int_t^{\infty}\pi(v)e^{-\int_t^{v}r(w)dw}dv=\eta(N)$ 两边对时间求导时，得到：

$$r(t)=\frac{\pi}{\eta N^{\sigma}}+\sigma\frac{\dot{N}}{N}$$

结合消费者优化欧拉方程得到：

$$\frac{\dot{C}}{C}=\frac{1}{\theta}\left(\frac{\pi}{\eta N^{\sigma}}+\sigma\frac{\dot{N}}{N}\ \ \text{-}\rho\right) \qquad (2)$$

Y、C、X 的表达式（以 L、N 表达）如基本模型，由总资源约束得到：

$$\eta(N)\dot{N}=Y-C-X$$

由此得到：

$$\frac{\dot{N}}{N}=\frac{\varphi_1}{\eta}N^{-\sigma}-\frac{C}{\eta}N^{-(1+\sigma)} \qquad (3)$$

其中 $\varphi_1\equiv(1-\alpha^2)A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}L>0$ 为常数，将上式代入（2）得到：

$$\frac{\dot{C}}{C}=\frac{1}{\theta}\left\{(\frac{\pi}{\eta})N^{\sigma}+\sigma\left[(\frac{\varphi_1}{\eta})N^{\sigma}-\frac{C}{\eta}N^{-(1+\sigma)}\right]-\rho\right\} \qquad (4)$$

和基本 Ramsey 模型一样，（3）、（4）两式确定的动态系统是鞍点稳定的（稳态时 N 不变，利率不变），相位图见讲义第二节。鞍点稳定的结论表明长期中消费没有增长，从而人均消费和人均产出不会增长。