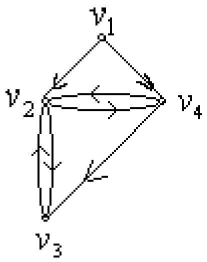
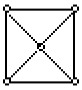
一、 填空 15% （每小题 3 分）

1、 n 阶完全图 K_n 的边数为 ____________________ 。

2、 右 图 

的邻接矩阵 A= ______________________________ 。

3、 图  的对偶图为 __________________________________ 。

4、 完全二叉树中，叶数为 n_t，则边数 m= ________________________________ 。

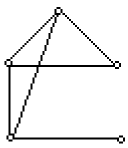
5、 设< {a,b,c}, * >为代数系统，* 运算如下：

第3题

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

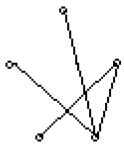
则它的幺元为 ___________ ；零元为 _________ ；

a、b、c 的逆元分别为 ____________________________________ 。

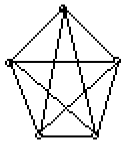


二、 选择 15% （每小题 3 分）

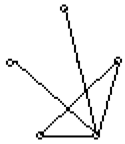
1、 图 相对于完全图的补图为（ ）。



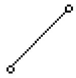
[A]



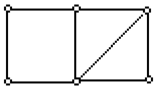
[B]



[C]



[D]

2、对图 G  则 $k(G), \lambda(G), \delta(G)$ 分别为（　　　　　）。

A、2、2、2；　B、1、1、2；　C、2、1、2；　D、1、2、2 。

3、一棵无向树 T 有 8 个顶点，4 度、3 度、2 度的分枝点各 1 个，其余顶点均为树叶，则 T 中有（　）片树叶。

A、3；　B、4；　C、5；　D、6

4、设<A，+，•>是代数系统，其中+，•为普通的加法和乘法，则 A=（　　　）时<A，+，•>是整环。

A、$\{x \mid x = 2n, n \in Z\}$；　B、$\{x \mid x = 2n+1, n \in Z\}$；

C、$\{x \mid x \geq 0, 且 x \in Z\}$；　D、$\{x \mid x = a + b\sqrt[4]{5},\quad a, b \in R\}$。

5、设 A={1，2，…，10 }，则下面定义的运算*关于 A 封闭的有（　　　　）。

A、 x*y=max(x ,y)；　B、x*y=质数 p 的个数使得 $x \leq p \leq y$；

C、x*y=gcd(x , y)；　(gcd (x ,y)表示 x 和 y 的最大公约数)；

D、x*y=lcm(x ,y)　（lcm(x ,y) 表示 x 和 y 的最小公倍数）。

三、　证明 45%

1、设 G 是（n,m）简单二部图，则 $m \leq \dfrac{n^2}{4}$。（8 分）

2、设 G 为具有 n 个结点的简单图，且 $m > \dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 则 G 是连通图。（8 分）

3、设 G 是阶数不小于 11 的简单图，则 G 或 $\overline{G}$ 中至少有一个是非平图。（14 分）

4、记“开”为 1，“关”为 0，反映电路规律的代数系统[{0，1}，+，•]的加法运算和乘法运算。如下：

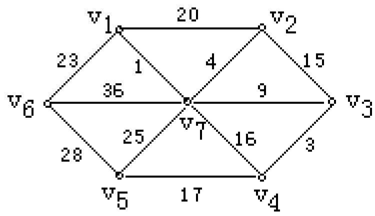
+	0	1
0	0	1
1	1	0

•	0	1
0	0	0
1	0	1

证明它是一个环，并且是一个域。（15 分）

四、 生成树及应用 10%

1、（10 分）如下图所示的赋权图表示某七个城市 $v_1,v_2,\Lambda\ ,v_7$ 及预先测算出它们之间的一些直接通信线路造价，试给出一个设计方案，使得各城市之间既能够通信而且总造价最小。



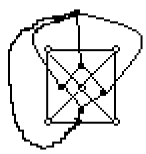
2、（10 分）构造 H、A、P、N、E、W、R、对应的前缀码，并画出与该前缀码对应的二叉树，写出英文短语 HAPPY NEW YEAR 的编码信息。

五、 5%

对于实数集合 R，在下表所列的二元远算是否具有左边一列中的性质，请在相应位上填写“Y”或“N”。

	Max	Min	+
可结合性			
可交换性			
存在幺元			
存在零元			

一、 填空 15%（每小题 3 分）

1、$\frac{1}{2}n(n-1)$ ；2、$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ；3、； 4、$2(n_t-1)$ ；5、a，c，a、b、没有

二、 选择 15%（每小题 3 分）

题目	1	2	3	4	5

答案	A	A	C	D	A，C

三、 证明 45%

1、（8 分）：设 G=（V，E），$V = X \cup Y$，$|X| = n_1$，$|Y| = n_2$，则$n_1 + n_2 = n$

对完全二部图有$m = n_1 \cdot n_2 = n_1(n - n_1) = -n_1^2 + n_1 n = -(n_1 - \frac{n}{2})^2 + \frac{n^2}{4}$

当$n_1 = \frac{n}{2}$时，完全二部图(n, m)的边数 m 有最大值$\frac{n^2}{4}$。

故对任意简单二部图(n, m)有$m \le \frac{n^2}{4}$。

2、（8 分）反证法：若 G 不连通，不妨设 G 可分成两个连通分支 G_1、G_2，假设 G_1 和 G_2 的顶点数分别为 n_1 和 n_2，显然$n_1 + n_2 = n$。

$\Theta\ n_1 \ge 1 \quad n_2 \ge 1 \quad \therefore n_1 \le n-1 \quad n_2 \le n-1$

$$\therefore m \le \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2} \le \frac{(n-1)(n_1+n_2-2)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

与假设矛盾。所以 G 连通。

3、（14 分）（1）当 n=11 时，$G \cup \overline{G} = K_{11}$ K_{11}边数$m' = \frac{11 \times 10}{2} = 55$条，因而必有$G$或$\overline{G}$的边数大于等于 28，不妨设 G 的边数$m \ge 28$，设 G 有 k 个连通分支，则 G 中必有回路。（否则 G 为 k 棵树构成的森林，每棵树的顶点数为 n_i，边数 m_i，则

$m_i = n_i - 1, i = 1 \Lambda\ k$，$\sum_{i=1}^{k} n_i = n = 11, \sum_{i=1}^{k} m_i = m$

$\therefore 28 \le m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k = 11 - k$ 矛盾）

下面用反证法证明 G 为非平面图。

假设 G 为平面图，由于 G 中有回路且 G 为简单图，因而回路长大于等于 3 。于是 G 的每个面至少由 g ($g \ge 3$)条边围成，由点、边、面数的关系$m \le \frac{g}{g-2}(n-k-1)$，得：

$$28 \le m \le \frac{g}{g-2}(11-k-1) \le \frac{3}{3-1}(11-(k+1)) \le 3(11-(1+1)) = 3\times 11 - 3\times 2 = 27$$

而 $28 \le 27$ 矛盾，所以 G 为非平面图。

（2）当 n>11 时，考虑 G 的具有 11 个顶点的子图 $G^{'}$，则 $G^{'}$ 或 $\overline{G}^{'}$ 必为非平面图。

如果 $G^{'}$ 为非平面图，则 G 为非平面图。

如果 $\overline{G}^{'}$ 为非平面图，则 $\overline{G}$ 为非平面图。

4、（15 分）

1）[{0，1}，+，•]是环

①[{0，1}，+]是交换群

乘：由“+”运算表知其封闭性。由于运算表的对称性知：+运算可交换。

群：（0+0）+0=0+（0+0）=0 ；（0+0）+1=0+（0+1）=1；

（0+1）+0=0+（1+0）=1 ；（0+1）+1=0+（1+1）=0；

（1+1）+1=1+（1+1）=0 ……

结合律成立。

幺：幺元为 0。

逆：0，1 逆元均为其本身。所以，<{0，1}，+>是 Abel 群。

②<{0，1}，• >是半群

乘：由“• ”运算表知封闭

群： (0 • 0) • 0=0 •（0 • 0）=0 ；（0 • 0）• 1=0 •（0 • 1）=1；

（0 • 1）• 0=0 •（1 • 0）=1 ；（0 • 1）• 1=0 •（1 • 1）=0；

（1 • 1）• 1=1 •（1 • 1）=0 ；…

③ • 对+的分配律

对 $\forall x, y \in \{0,1\}$

Ⅰ 0 •（x+y）=0=0+0=(0 • x)+(0 • y)

Ⅱ 1 •（x+y）

当 x=y (x+y)=0 则

$$1\cdot(x+y) = 1\cdot 0 = 0 = \begin{Bmatrix} 0+0 \\ 1+1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1\cdot 0)+(1\cdot 0) \\ (1\cdot 1)+(1\cdot 1) \end{Bmatrix} = (1\cdot x)+(1\cdot y)$$

当 $x \neq y$ （$x+y=1$）则

$$1\cdot(x+y)=1\cdot 1=1=\begin{Bmatrix}1+0\\0+1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}(1\cdot 1)+(1\cdot 0)\\(1\cdot 0)+(1\cdot 1)\end{Bmatrix}=(1\cdot x)+(1\cdot y)$$

所以 $\forall x,y,z\in\{0,1\}$ 均有 $z\cdot(x+y)=(z\cdot x)+(z\cdot y)$

同理可证：$(x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z)$

所以 • 对+ 是可分配的。

由①②③得，<{0，1}，+，• >是环。

（2）<{0，1}，+，• >是域

因为<{0，1}，+，• >是有限环，故只需证明是整环即可。

①乘交环： 由乘法运算表的对称性知，乘法可交换。

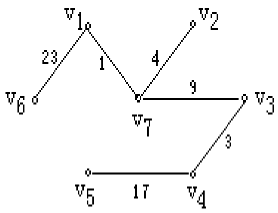
②含幺环：乘法的幺元是 1

③无零因子：1 • 1=1≠0

因此[{0，1}，+，•]是整环，故它是域。

四、**树的应用 20%**

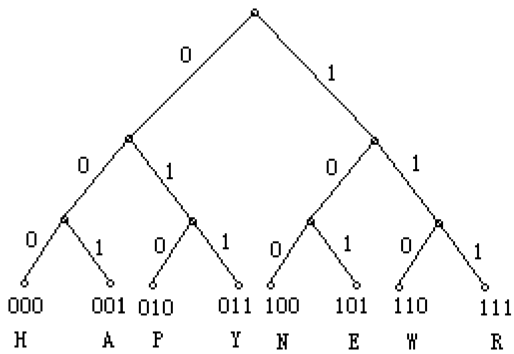
1、（10 分）解： 用库斯克（Kruskal）算法求产生的最优树。算法略。结果如图：



树权 C(T)=23+1+4+9+3+17=57 即为总造价

五、（10 分）

由二叉树知



H、A、P、Y、N、E、W、R 对应的编码分别为

000、001、010、011、100、101、110、111。

显然{000，001，010，011，100，101，110，111}为前缀码。

英文短语 HAPPY NEW YEAR 的编码信息为

000 001 010 010 011 100 101 001 001 101 001 111

六、5%

	Max	Min	+
可结合性	Y	Y	Y
可交换性	Y	Y	Y
存在幺元	N	N	Y
存在零元	N	N	N