第二章　　一阶逻辑

在命题逻辑中，我们把命题分析到简单命题为止，而简单命题是不再进行分析的基本元素，因此，当推理涉及到简单命题的内部结构时，命题逻辑是无能为力的。例如下面的推理：

所有的自然数都是实数，3 是自然数。所以，3 是实数。

根据数学方面的知识，我们知道这个推理是正确的。然而，在命题逻辑中，这个推理的正确性是无法证明的，这是因为上述推理中的三句话均是简单命题，且各不相同，如果把它们形式化为命题逻辑中的公式，以 p 表“所有的自然数都是实数”，以 q 表“3 是自然数”，以 r 表“3 是实数”，则推理可以写为：

$(p\wedge q)\Rightarrow r$

而 $(p\wedge q)\rightarrow r$ 是一个可满足式，可知这个推理无法在命题逻辑推理理论中得到证明。另外以 p 表“所有的自然数都是实数”，也很难体现自然数集 N 中的每一个数 0，1，2，3，…等等都是实数这一事实。

因此，为了能够进一步深入的研究推理，需要对简单命题做进一步的分析，将简单命题的结构分解为个体词、谓词、量词等，并讨论它们与推理之间的关系，这一部分的内容称为一阶逻辑（谓词逻辑）。

2.1　一阶逻辑的基本概念

首先我们将简单命题的结构分解成个体和谓词。

个体（客体） 我们讨论的对象。可以是具体的，也可以是抽象的。

个体域（论域） 个体所构成的非空集合。

全总个体域（无限域） 包含宇宙中一切事物的个体域。

谓词 在简单命题中，表示一个个体的性质或多个个体间的关系的词。

之所以称之为谓词，是因为谓词和个体词一起构成了简单命题中的主谓结构。如：

小王是学生。

3 是素数。

2 整除 6。

3 位于 2 与 5 之间。

上面这些简单命题中，小王、2、3、5、6 均是个体，“…是学生”，“…是素数”，“…整除…”，“…位于…与…之间”均是谓词。前两个谓词描述的是一个个体的性质，称为一元谓词；第三个表示两个个体之间的关系，称为二元谓词；第四个表示三个个体之间的关系，称为三元谓词。以此类推，我们将描述 n（$n\geqslant 2$）个个体之间关系的谓词称为 n 元谓词。通常用大写字母 F、G、H（可加下标）来表示谓词。如：

F 表示“…是学生”；

G 表示“…整除…”；

H 表示“…位于…与…之间”。

这时 F、G、H 表示的是具体的谓词，称为**谓词常元**，否则，称为**谓词变元**。显然，由于缺少主语，单独的一个谓词（即使是谓词常元）并不能构成一个完整的句子，必须以个体词取代“…”方能构成一个句子。通常我们用小写的英文字母 a、b、c（可加下标）等表示个体。这样，“小王是学生”可符号化为 F（a），其中 a 表示小王。若用 b 表示小李，则 F（b）就表示“小李是学生”。若用 c_1 表示 2，用 c_2 表示 6，则 G（c_1，c_2）就表示“2 整除 6”。这里，a、b、c_1、c_2 均是具体的个体，称为**个体常元**。一般的，我们用 F（x）表示“x 是学生”，其中的 x 称为**个体变元**（简称变元，亦称个体词）。类似的我们也可用 G（x，y）表示“x 整除 y”。

命题函数 由谓词符、变元符和联结词组成的符号串。

之所以称为命题函数，是因为通常情况下**命题函数不是命题**，一般只有谓词为常元并将其中的变元代以具体的个体后，才能构成命题。例如：G（x，y）：x 整除 y。 并不是命题，因为真值未定， 但 G（2，2）、G（2，6）以及 G（2，6）→ G（6，2）均是命题，前两个是真命题，第三个是假命题，它们不含个体变元亦称为 0 元谓词。

注意 a）多元谓词中变元的顺序不同，表示的意义也不同。如：G（x，y）表“x 整除 y”，而 G（y，x）表“y 整除 x”。

b） 在谓词逻辑中，┐、∧、∨、→、↔仍是联结词，其含义和用法与命题逻辑中的相同。

【例 2.1.1】 将下列语句形式化为谓词逻辑中的命题或命题函数。

（1）小王是二年级大学生。

（2）小王是李老师的学生。

（3）如果 x≤y 且 y≤x，则 x＝y。

解 （1）令：F（x）：x 是大学生；G（x）：x 是二年级的；a：小王。

则原句形式化为：F（a）∧G（a）。

（2） 令：F（x，y）：x 是 y 的学生；a：小王；b：李老师。

则原句形式化为：F（a，b）

（3） 令：L（x，y）：x≤y；E（x，y）：x＝y。

则原句形式化为：（L（x，y）∧L（y，x））→E（x，y）。

前两句在确知“小王”和“李老师”之后均是命题，第三句因为含有变元所以是命题函数。但实际上我们知道，只要将 x、y 限制在数的范围内，第三句是一个数学定理，是真命题，这就涉及到了个体域，在这个个体域中命题函数是真的，在那个个体域中又有可能是假的，这就需要对变量作“量化”。例如，“$x^2-4=0$”这句话不能确定其真伪，因为我们不知道 x 的取值。如果在这句话之前加上“当 x=1 时”或者“对于 x∈{-2，2}”或者“对某个整数 x”，则它就变成了一个真值确定的数学命题（第一句为假，后两句为真）。

事实上，在一般的简单命题中，常有一些表示数量的词语，诸如“所有的”，“有一些”等等，用来表示谓词中的变量取自论域中的全体或部分个体，例如下面的两个陈述句：

“对所有的 x∈D，论断 F（x）为真。”

“对某些 x∈D，论断 F（x）为真。”

在谓词逻辑中，我们用量词把它们形式化。

1. 全称量词 “∀”

用来表示个体域中的全体。表自然语言中的“所有的”，“任意的”，“每一个”等等。如：

“任意偶数均能被 2 整除”

句子可改写成：“在偶数集合中的任意的 x，x 能被 2 整除”。

取个体域为偶数集；用 F（x）表示“x 能被 2 整除”；用∀x 表示“任意的 x”。则原句形式化为：∀xF（x）。

注意 a）全称量词符∀总是与一个个体变元符共同出现的，如∀x，∀y …，x、y 称为∀的指导变元。

b）∀x 总是针对个体域而言的，∀xF（x）表示的是“在个体域中，任意的 x 均有 F 这个性质”，当明确了个体域和性质 F 后，这是一个可以确定真值的命题。

2. 存在量词 “∃”

用来表示论域中的部分个体。表自然语言中的“存在着一些”，“至少有一个”，“有”等等。如：

“我们班有人会开车”

句子可改写成：“在我们班有一些 x，x 会开车”

取个体域为“我们班的同学”，用 G（x）表示“x 会开车”；用∃x 表示“有些 x”。则原句形式化为：∃xG（x）。

注意　a）存在量词符∃总是与一个个体变元符共同出现的，如∃x，∃y …，x、y 称为∃的指导变元。

b）∃x 总是针对个体域而言的，∃xG（x）表示的是“在个体域中，至少有一个 x 具有 G 这个性质”，当明确了个体域和性质 G 后，这是一个可以确定真值的命题。

另外，在数学中经常要用到“存在唯一的”这样的词，它的符号化表示是“∃！”。当然，“存在唯一的”在形式化过程中完全可以用“∀和∃”以及适当的联结词表示（参见本章第 5 节例题 2.5.3）。

在以上的形式化过程中，我们均指定了个体域，这是必须的。因为不同的个体域，可能导致命题真值的不同，如：∀xF（x）是“任意的 x，x 能被 2 整除”的形式化，当个体域为“偶数集”时，∀xF（x）是真的，但当个体域为“整数集”时，∀xF（x）就是假的了。

为了统一起见，除非另作说明，我们均取个体域为全总个体域，这时由于个体的选取范围是一切事物，我们引入**特性谓词**来限制变元的变化范围。

【例 2.1.2】　在全总个体域中形式化下列命题：

（1）任意的偶数均能被 2 整除。

（2）我们班有人会开车。

解　（1）引入特性谓词：H（x）：x 是偶数。

“任意的偶数均能被 2 整除”的涵义是：全总个体域中有子集：偶数集，该子集中的每个元素均具有一种性质，世间万物，只要你属于这个子集，你就必然具有这种性质，所以是蕴含式。特性谓词以蕴含式的前件加入。则原句可形式化为：

$$\forall x（H（x）\rightarrow F（x））$$

（2）　引入特性谓词：W（x）：x 是我们班的人。

“我们班有人会开车”的涵义可以这样理解：在宇宙间的万物（全总个体域）中，有一个子集：我们班，还有另一个子集：会开车的人。强调的是既在我们班，又会开车的人，所以是两个子集的交集。特性谓词用合取项加入。则原句可形式化为：

$$\exists x（W（x）\wedge G（x））$$

【例 2.1.3】　将下列命题形式化为一阶逻辑中的命题：

（1）没有不犯错误的人。

（2）人总是要犯错误的。

解　设 M（x）：x 是人，F（x）：x 会犯错误。则原句形式化为：

（1）$\neg\exists x（M（x）\wedge\neg F（x））$

（2）$\forall x（M（x）\rightarrow F（x））$

【例 2.1.4】　将下列命题形式化为一阶逻辑中的命题：

（1）所有的病人都相信医生。

（2）有的病人相信所有的医生。

（3）有的病人不相信某些医生。

（4）所有的病人都相信某些医生。

解　设 F（x）：x 是病人，G（x）：x 是医生，H（x，y）：x 相信 y。

（1）本命题的意思是：对于每一个 x，如果 x 是病人，那末对于每一个 y，只要 y 是医生，x 就相信 y。因此，本命题符号化为：

$$\forall x（F（x）\rightarrow\forall y（G（y）\rightarrow H（x，y）））$$

或：$$\forall x\forall y（（F（x）\wedge G（y））\rightarrow H（x，y）$$

（2）本命题的意思是：存在着这样的 x，x 是病人且对于每一个 y，只要 y 是医生，x 就相信 y。因此，本命题符号为：

$$\exists x（F（x）\wedge\forall y（G（y）\rightarrow H（x，y）））。$$

（3） 本命题的意思是：存在着这样的 x 和 y，x 是病人，y 是医生，x 不相信 y。因此，本命题符号为：

$$\exists x \exists y（F（x）\wedge G（y）\wedge \neg H（x，y））。$$

或： $\exists x（F（x）\wedge \exists y（G（y）\wedge \neg H（x，y）））$。

（4）本命题的意思是：对于每个 x，如果 x 是病人，就存在着医生 y，使得 x 相信 y。因此，本命题符号为：

$$\forall x（F（x）\rightarrow \exists y（G（y）\wedge H（x，y）））。$$

【例 2.1.5】 将下列命题形式化为一阶逻辑中的命题：

（1）任意一个整数 x，均有另一个整数 y，使得 x+y 等于 0。

（2）存在这样的实数 x，它与任何实数 y 的乘积均为 y。

解 （1）设 Z（x）：x 是整数，E（x，y）：x = y，f（x，y）= x+y。则原句形式化为：

$$\forall x（Z（x）\rightarrow \exists y（Z（y）\wedge E（f（x，y），0）））$$

（3）设 R（x）：x 是实数，E（x，y）：x = y，g（x，y）= xy。则原句形式化为：

$$\exists x（R（x）\wedge \forall y（R（y）\rightarrow E（g（x，y），y）））$$

注意 在这两个命题中，“x 是整数”和“x 是实数”均表一个个体的性质，所以是一元谓词，“和等于 0”、“乘积为 y”均表两个个体间的关系，所以是二元谓词。但是，“x+y”和“x 与 y 的乘积”是两个数之间的运算，严格来讲不是二元谓词，我们用二元函数 f（x，y）、g（x，y）表之，因此，运算符也是一阶逻辑中的符号。不过，需要指出的是，“x 与 y 的和为 z”有时也可用一个三元谓词 F（x，y，z）来表示。

2.2 一阶逻辑公式及解释

上一节中我们在一阶逻辑中符号化得到的命题和命题函数就是一阶逻辑公式(谓词公式)。至此，在一阶逻辑中，我们已涉及到以下这些符号：

1. 个体变元符号：用小写的英文字母 x，y，z（或加下标）…等表示。
2. 个体常元符号：用小写的英文字母 a，b，c（或加下标）…等表示。
3. 运算符号：用小写的英文字母 f，g，h（或加下标）…等表示。
4. 谓词符号：用大写的英文字母 F，G，H（或加下标）…等表示。
5. 量词符号：$\forall$，$\exists$。
6. 联结词符号：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$。
7. 逗号和圆括号。

由上节例题可知，一个符号化的命题就是一串由这些符号所组成的表达式，但并不是任意一个由此类符号组成的表达式就对应于一个命题。所以要给出严格的定义。

定义 2.2.1 **项**的定义

(1)任何一个个体变元或个体常元是项；

(2)如果 f 是 n 元运算符，t_1，t_2，…，t_n 是项，则 f（t_1，t_2，…，t_n）是项；

(3)所有的项由且仅由有限次使用（1），（2）所生成。

例如，假设 h，f，g 分别是一元，二元和三元运算符，则 x，a，f（x，a），f（g（x，a，b），h（x））均是项，而 h（a，b）不是项，因为 h 是一元运算符，但 h（a，b）中 h 的后面跟了两个项，同样 g（x）也不是项（理由请读者自己考虑）。

定义 2.2.2 若 F 是 n 元谓词，t_1，t_2，…，t_n 是项，则 F（t_1，t_2，…，t_n）是**原子公式**。

由定义可知，原子公式是不含量词和联结词的单个谓词。同命题逻辑中的情况相似，这里也可以用联结词将原子公式复合成分子公式。（事实上我们已经这样做了）

定义 2.2.3 一阶逻辑中的合式公式（wff）的递归定义：

（1）原子公式是合式公式。

（2）若 F 是合式公式，则（$\neg$F）也是合式公式。

（3）若 F，G 均是合式公式，则（$F \wedge G$）、（$F \vee G$）、（$F \to G$）和（$F \leftrightarrow G$）也均是合式公式。

（4）若 F 是合式公式，x 是个体变元，则$\forall xF$、$\exists xF$ 也是合式公式。

（5）只有有限次按规则（1）—（4）构成的谓词公式才是合式公式。

注　有关谓词逻辑中合式公式的括号省略方法与命题逻辑相同。

在谓词公式中，形如$\forall x$ A（x）或$\exists x$ A（x）的部分叫做公式的 x **约束部分**，其中的 x 称量词的**指导变元**（作用元），而公式 A（x）称为量词的**辖域（作用域）**，换言之，量词的辖域乃是邻接其后的公式。

注意　这里的公式 A（x）泛指任意的谓词公式，且除非辖域部分是原子公式，否则应在公式的两侧加入圆括号。

在辖域中指导变元 x 的一切出现称为 x 在公式中的**约束出现**，且称 x 为**约束变元**（它受量词的约束），在公式中除约束变元以外所出现的变元称**自由出现**，且称 x 为**自由变元**。

【例 2.2.1】　考察下列公式中每个量词的辖域及每个变元的出现是约束的或自由的。

（1）$\forall x$（F（x）$\to \exists y$H（x，y））

（2）$\forall x$（F（x）$\to$G（x））$\vee$ $\forall x$（F（x）$\to$H（x））

（3）$\exists x$F（x）$\wedge$ G（x）

（4）$\forall x$（F（x）$\to \exists x$G（x，y））

解　（1）全称量词$\forall x$的辖域是（F（x）$\to \exists y$H（x，y）），其中 x 的两次出现均是受其约束的出现，是约束变元；存在量词$\exists y$ 的辖域是 H（x，y），其中 y 的出现是受其约束的，y 是约束变元。

（2）第一个全称量词$\forall x$ 的辖域是（F（x）$\to$G（x）），其中 x 的出现均是受其约束的，是约束变元；第二个全称量词$\forall x$ 的辖域是（F（x）$\to$H（x）），其中 x 的出现均是受其约束的出现，是约束变元。

（3）唯一的存在量词$\exists x$ 的辖域是 F（x），其中 x 的出现是约束出现，是约束变元；而 x 在整个公式中的第三次出现是在 G（x）中的出现，是自由出现，第三个 x 是自由变元。

（4）第一个全称量词$\forall x$ 的辖域是（F（x）$\to \exists x$G（x，y）），其中 F（x）中 x 的出现是受其约束的出现，是约束变元；第二个存在量词$\exists x$ 的辖域是 G（x，y），其中 x 的出现是受其约束的出现，是约束变元，y 的出现是自由出现，是自由变元。

由例题可见，在一个一阶逻辑公式中，某个个体变元（符）的出现可以既是约束的，又是自由的如（3）中的 x。另外，同一个变元（符）即使都是约束的，也可能是在不同的量词辖域中出现，如（2）、（4）中的 x。为了避免混淆，可对约束变元进行换名，使得一个变元（符）在一个公式中只以一种形式出现，并使每个量词的作用元不同。这样做时，为使得到的新公式与原公式等值，必须遵守下面的规则：

换名规则

（1）将量词的作用元及其辖域中所有受其约束同符号的变元用一个新的变元符替换；

（2）新的变元符是原公式中所没有出现过的。

【例 2.2.2】　对公式$\forall x$（F（x）$\to$G（x，y））$\wedge$ H（x，y）换名，下面的几种做法中哪个是正确的？

（1）$\forall z$（F（z）$\to$G（z，y））$\wedge$ H（x，y）

（2）$\forall y$（F（y）$\to$G（y，y））$\wedge$ H（x，y）

（3）$\forall z$（F（z）$\to$G（x，y））$\wedge$ H（x，y）

解　只有（1）是正确的。（2）的换名违反了规则（2），使得 G（x，y）中的 y 的出现改变了性质。（3）的换名违反了规则（1），使得 G（x，y）中的 x 的出现改变了性质。

对公式中自由出现的变元也可换取新的符号，称为代替，同样需要遵守规则：

代替规则

（1）将公式中所有同符号的自由变元符用新的变元符替换；

（2）新的变元符是原公式中所没有出现过的。

【例 2.2.3】 对公式$\forall x$（F（x）$\rightarrow$G（x，y））$\wedge$H（x，y）做代替，下面的几种做法中哪个是正确的？

（1）$\forall x$（F（x）$\rightarrow$G（x，y））$\wedge$H（z，y）

（2）$\forall x$（F（x）$\rightarrow$G（x，z））$\wedge$H（u，y）

（3）$\forall z$（F（z）$\rightarrow$G（x，y））$\wedge$H（y，y）

只有（1）是正确的。请读者自己做出分析。

定义 2.2.4 不含自由变元的公式称闭式。

如例 2.2.1 中的（1）、（2）两式均是闭式，而（3）不是闭式。事实上，仅就个体变元而言，自由变元才是真正的变元，而约束变元只在表面上是变元，实际上并不是真正意义上的变元。换言之，含有自由变元的公式在解释后仍是命题函数，还需赋值方成命题，而不含自由变元的闭式一旦给出**解释**就成了命题。

定义 2.2.5 一个解释 I 由以下四部分组成

（1）为个体域指定一个非空集合 D_I。

（2）为每个个体常元指定一个个体。

（3）为每个 n 元运算符指定 D_I 上的一个 n 元运算。

（4）为每个 n 元谓词符指定 D_I 上的一个 n 元谓词。

当个体域 D 为有穷集时

$\forall x$F（x）真值为 1，iff 对于每一个 $x\in D$，均有 F（x）真值为 1。

$\forall x$F（x）真值为 0，iff 至少有一个 $x_0\in D$，使得 F（x_0）真值为 0。

例如：“此次考试全班每个人都通过了”形式化为：$\forall x$F（x），其中，论域：全班的每个人；F（x）：x 通过了考试。此命题是否为真？只需拿来成绩册，看“张三、李四……通过否？”，若以 a_1 表“张三”，即求 F（a_1）的真值，若以 a_2 表“李四”，则求 F（a_2）的真值……，显然，当且仅当 F（a_1）、F（a_2）……等等的真值均为 1 时，$\forall x$F（x）的真值为 1，而若有一个 a_i，（j=1,2,⋯n）使得 F（a_i）的真值为 0，$\forall x$F（x）的真值就为 0。亦即：

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \ldots\ldots \wedge F(a_n)$$

当个体域 D 为有穷集时

$\exists x$G（x）的真值为 0，iff 对于每一个 $x\in D$，均有 G（x）真值为 0，

$\exists x$G（x）的真值为 1，iff 至少有一个 $x_0\in D$，使得 G（x_0）真值为 1，

例如：“此次考试班里有人没通过”形式化为：$\forall x$G（x），其中，论域：全班的每个人；G（x）：x 没通过考试。此命题是否为真？只需拿来成绩册，看“张三、李四……通过否？”，若以 a_1 表“张三”，即求 F（a_1）的真值，若以 a_2 表“李四”，则求 F（a_2）的真值……，显然，当且仅当 F（a_1）、F（a_2）……等等的真值至少有一个为 1 时，$\exists x$F（x）的真值为 1，而若每一个 a_j，（j=1,2,⋯n）G（a_i）的真值均为 0，则$\exists x$F（x）的真值就为 0。即：

$$\exists x G(x) \Leftrightarrow G(a_1) \vee G(a_2) \vee \ldots\ldots \vee G(a_n)$$

因此，**当解释 I 中的个体域 D 为有穷集时**，可先消量词再求真值。

【例 2.2.4】设解释 I 为：D_I={2，3}，f（2）=3，f（3）=2，F（2，2）= F（2，3）=0，F（3，2）= F（3，3）=1。在 I 下消去下列公式的量词并求真值。

（1）F（2，f（2））$\wedge$F（3，f（3））

（2）$\forall x\exists y$F（y，x）

（3）$\forall x$（F（x，f（x））$\rightarrow\forall y$F（f（x），f（y）））

解 （1）式中不含量词，所以直接求真值

$F(2, f(2)) \wedge F(3, f(3))$
$\Leftrightarrow F(2, 3) \wedge F(3, 2)$
$\Leftrightarrow 0 \wedge 1$
$\Leftrightarrow 0$
（2）$\forall x \exists y F(y, x)$
$\Leftrightarrow \forall x ((F(2, x) \vee F(3, x)))$
$\Leftrightarrow (F(2, 2) \vee F(3, 2)) \wedge (F(2, 3) \vee F(3, 3))$
$\Leftrightarrow (0 \vee 1) \wedge (0 \vee 1)$
$\Leftrightarrow 1 \wedge 1$
$\Leftrightarrow 1$
（3）$\forall x (F(x, f(x)) \to \forall y F(f(x), f(y)))$
$\Leftrightarrow (F(2,f(2)) \to \forall y F(f(2),f(y))) \wedge (F(3,f(3)) \to \forall y F(f(3),f(y)))$
$\Leftrightarrow (F(2,f(2)) \to (F(f(2),f(2)) \wedge F(f(2),f(3))))$
$\wedge (F(3,f(3)) \to (F(f(3),f(2)) \wedge F(f(3),f(3))))$
$\Leftrightarrow (F(2,3) \to (F(3,3) \wedge F(3,2))) \wedge (F(3,2) \to (F(2,3) \wedge F(2,2)))$
$\Leftrightarrow (0 \to (1 \wedge 1)) \wedge (1 \to (0 \wedge 0))$
$\Leftrightarrow (0 \to 1) \wedge (1 \to 0)$
$\Leftrightarrow 1 \wedge 0$
$\Leftrightarrow 0$

当解释 I 的个体域 D 为无穷集合时，我们可以通过读取公式的含义来获取真值。

【例 2.2.5】 设 f，g 均为二元运算符，E，L 均为二元谓词符，给定解释 I 如下：
个体域 D_I 为自然数集合，
$f(x, y) = x+y$， $g(x, y) = x \cdot y$， $a = 0$，
$E(x, y)$：$x = y$， $L(x, y)$：$x < y$。
求下列公式在解释 I 下的真值。
（1）$\forall x \exists y\, L(x, y)$
（2）$\forall x (E(f(x, a), x) \wedge L(g(x, a), a))$
（3）$\forall y (E(x, y) \vee L(x, y))$
（4）$E(f(x, a), g(x, a))$

解 （1）式中没有自由变元是闭式，在解释 I 下的意义是：对于每一个自然数 x，均存在着自然数 y，使得 $x < y$。显然这是一个真命题。

（2）式中也没有自由变元是闭式，在解释 I 下的意义是：对于每一个自然数 x，$x+0 = x$ 并且 $x \cdot 0 < 0$。由于 $0 < 0$ 不真，所以这是一个假命题。

（3）式中 x 是自由变元不是闭式，在解释 I 下的意义是：对于每一个自然数 y，$x = y$ 或者 $x < y$。由于 x 取 0 时，原式为真；x 取 1 时，原式为假，所以这是命题函数，而非命题。

（4）式中 x 是自由变元不是闭式，在解释 I 下的意义是：$x+0 = x \cdot 0$。由于 x 取 0 时，原式为真；x 非 0 时，原式为假，所以这是命题函数，而非命题。 #

如上所言，含有自由变元的公式在解释后仍是命题函数，还需对自由变元**赋值**方成命题。

定义 2.2.6 赋值 υ 是建立在解释 I 上的函数，且有：
（1）$\upsilon(x_i) = \bar{a}_i$ 即对自由变元 x_i 指派一个 D_I 中的个体 $\bar{a}_i$，
（2）$\upsilon(f(t_1, t_2, \cdots, t_n)) = \bar{f}_i(\upsilon(t_1), \upsilon(t_2), \cdots, \upsilon(t_n))$ 其中 $\bar{f}_i$ 是 I 对 f 的解释，t_i（$i=1, 2, \cdots, n$）是项。

【例 2.2.6】 设 f，g 为二元运算符，E，L 为二元谓词符，给定解释 I 及赋值 υ 如下：
个体域 D_I 为自然数集合，
$f(x, y) = x+y$， $g(x, y) = x \cdot y$， $a = 0$，
$E(x, y)$：$x = y$， $L(x, y)$：$x < y$。$\upsilon_1(x) = 0$， $\upsilon_2(x) = 1$
求下列公式在解释 I 和赋值分别为 υ_1，υ_2 下的真值。

（1）$\forall y$（E（x，y）$\vee$ L（x，y））

（2）E（f（x，a），g（x，a））

（3）$\forall x$E（g（x，a），a）

解　（1）式在解释 I 及赋值 υ_1 下的含义是：对于每个自然数 y，0 = y 或者 0 < y。即 0 是最小的自然数，这是真命题。（1）式在解释 I 及赋值 υ_2 下的含义是：对于每个自然数 y，1 = y 或者 1 < y。即 1 是最小的自然数，这是假命题。

⑵式在解释 I 及赋值 υ_1 下的含义是：0+0 = 0·0。这是真命题。（2）式在解释 I 及赋值 υ_2 下的含义是：1+0 = 1·0。这是假命题。

（3）式中不含自由变元，无需考虑赋值。在解释 I 下的意义是：对于每一个自然数 x，x·0 = 0。这是真命题。

定义 2.2.7　一阶逻辑公式的分类：

永真式（逻辑有效式）　在任何解释 I 及 I 的任何赋值下均为真的一阶公式；

永假式（矛盾式）　在任何解释 I 及 I 的任何赋值下均为假的一阶公式；

可满足式　至少有一种解释和一种赋值使其为真的一阶公式。

由定义可知，要判定一个公式 A 并不是永真式，只需找到一个解释 I 和 I 下的一个赋值 υ，使 A 在 I 和 υ 下为假；要判定一个公式 A 并不是永假式，只需找到一个解释 I 和 I 下的一个赋值 υ，使 A 在 I 和 υ 下为真；要判定一个公式 A 是可满足式，只需找到一个解释 I 和 I 下的一个赋值 υ，使 A 在 I 和 υ 下为真，再找到一个解释 I 和 I 下的一个赋值 υ，使 A 在 I 和 υ 下为假。

【例 2.2.7】讨论下列公式的类型

（1）$\forall x$ F（x）$\rightarrow$ $\exists x$ F（x）

（2）$\forall x \neg$G（x）$\wedge$ $\exists x$ G（x）

（3）$\forall x \exists y$F（x，y）$\rightarrow \exists y \forall x$F（x，y）

解　（1）公式$\forall x$ F（x）$\rightarrow$ $\exists x$ F（x）在任何解释 I 下的含义是：如果个体域 D_I 中的每个元素 x 均有性质 F，则 D_I 中的某些元素 x 必有性质 F。前件$\forall x$ F（x）为真时，后件$\exists x$ F（x）永远为真，所以公式$\forall x$ F（x）$\rightarrow$ $\exists x$ F（x）是永真式。

（2）公式$\forall x \neg$G（x）$\wedge$ $\exists x$ G（x）在任何解释下的含义是：个体域 D_I 中的每个元素 x 均不具有性质 G，且 D_I 中的某些元素 x 具有性质 G。这是两个互相矛盾的命题不可能同时成立，所以公式$\forall x \neg$G（x）$\wedge$ $\exists x$ G（x）是永假式。

（3）公式$\forall x \exists y$F（x，y）$\rightarrow \exists y \forall x$F（x，y）既不是永真式，也不是永假式。由于这是闭式，故无需考虑赋值，只要给出一个使其成真的解释和一个使其成假的解释即可。

①给定解释 I_1：D_{I_1} 为自然数集，F（x，y）：x < y。此时公式的前件$\forall x \exists y$F（x，y）表示"对于每个自然数 x，均有自然数 y 比 x 大"是真命题，而后件$\exists y \forall x$F（x，y）表示"存在着自然数 y 比每个自然数 x 均大"是假命题。因此， I 是使$\forall x \exists y$F（x，y）$\rightarrow \exists y \forall x$F（x，y）为假的解释。

②给定解释 I_2：D_{I_2} 为自然数集，F（x，y）：x > y。此时公式的前件$\forall x \exists y$F（x，y）表示"对于每个自然数 x，均有自然数 y 比 x 小"是假命题（x 为 0 时，y 不存在），因此， I_2 是使$\forall x \exists y$F（x，y）$\rightarrow \exists y \forall x$F（x，y）为真的解释。

定义 2.2.8　设 A（p_1，…，p_n）是含命题变元 p_1，…，p_n 的命题公式，B（B_1，…，B_n）是以一阶公式 B_1，…，B_n 分别代替 p_1，…，p_n 在 A 中的所有出现后得到的一阶公式，称 B 是 A 的一个代换实例。

例如，F（x）$\rightarrow$G（y），$\forall x$F（x）$\rightarrow \exists y$G（y）均是命题公式 $p \rightarrow q$ 的代换实例，也是 p 的代换实例。

定理 2.2.1　命题逻辑永真式的任何代换实例必是一阶逻辑的永真式（此时的永真式亦称重言式）。同样，命题逻辑永假式的任何代换实例必是一阶逻辑的永假式。

证明略。

定理 2.2.1.为我们提供了一大类一阶逻辑的有效式。因此，判断一个一阶逻辑公式是否是永真式或永假式，我们可以用定义 2.2.7（如例 2.2.7），有时也可以用其是否是命题逻辑的永真式或永假式的代换实例来判断。例如，作为命题逻辑永真式 $\neg p\vee p$ 的代换实例，$\neg$（$\forall x$F（x）$\rightarrow$G（y））$\vee$（$\forall x$F（x）$\rightarrow$G（y））是永真式。又如，通过下节的等值定律可知，例 2.2.7 中的（2）$\forall x\neg$G（x）$\wedge$ $\exists x$ G（x）实质上是命题逻辑永假式$\neg p\wedge p$ 的代换实例，所以是永假式。至此，由第一章的每一个命题逻辑等值式，我们可以得到相应的一阶逻辑等值式。

注意 一阶逻辑的永真式未必一定是命题逻辑永真式的代换实例，如由例 2.2.7 可知，$\forall x$ F（x）$\rightarrow$ $\exists x$ F（x）是永真式，但它只是命题公式 $p\rightarrow q$ 或者 p 的代换实例，而非命题逻辑永真式的代换实例。另外，一般来说，含自由变元的非闭式只有在作为命题逻辑永真式（永假式）的代换实例时，才能成为一阶逻辑中的永真式（永假式）。

2.3 等值演算和前束范式

定义 2.3.1 设 A 与 B 是一阶公式，若 $A\leftrightarrow B$ 是永真式，则称 A 与 B 等值，或称 A 与 B 逻辑等价，记作 $A\Leftrightarrow B$。

显然，$A\Leftrightarrow B$ 当且仅当在**任何**解释 I 下，A 与 B 有相同的真值。即：在 I 下，A 为真当且仅当 B 为真，或者，A 为假当且仅当 B 为假。同时，要证明两个公式不等值，只需找到一个解释 I，使得两个公式在 I 下，一个为真，另一个为假。

【例 2.3.1】 判断公式$\forall x\exists y$F（x,y）与公式$\exists y\forall x$F（x，y）是否等值。

解 直接观察是不等值的。由于两个公式均是闭式，所以只需给出一个解释 I，使其在 I 下一个为真，另一个为假。取解释 I：D 为鞋子的集合，F（x，y）：x 与 y 能配成一双。则在 I 下，$\forall x\exists y$F（x,y）表示“每一只鞋子均有另一只鞋子能与其配成一双”是真命题，而公式$\exists y\forall x$F（x，y）表示“有这样的鞋子能与任何一只鞋子配成一双”是假命题。因此，两个公式$\forall x\exists y$F（x,y）与$\exists y\forall x$F（x，y）不等值。

【例 2.3.2】 判断公式$\forall x F(x,y)\rightarrow(G(x)\vee\forall z F(z,y))$的类型。

解 根据换名规则知，$\forall x F(x,y)\rightarrow(G(x)\vee\forall z F(z,y))\Leftrightarrow \forall z F(z,y)\rightarrow(G(x)\vee\forall z F(z,y))$ 而右式是命题永真式 $p\rightarrow(q\vee p)$的代换实例，所以，此公式是永真式。

在上一节中我们提到，通过代换实例可以得到一大类永真式，从而得到一大类等值式。例如双重否定律，由 $p\Leftrightarrow\neg\neg p$，知 $p\leftrightarrow\neg\neg p$ 是永真式，则其代换实例$\forall x$F（x）$\leftrightarrow\neg\neg\forall$F（x）是永真式，故而$\forall$（X）$\Leftrightarrow\neg\neg\forall x$F（x）。这样，由第一章中的等值式可得一阶逻辑中的等值式。再用置换法则可做一阶逻辑中的等值演算。

下面我们给出一阶逻辑中关于量词的等值式。

量词转换律 （A（x）是任意一个一阶公式）

$\neg\forall x$A（x）$\Leftrightarrow$ $\exists x\neg$A（x） （1）

$\neg\exists x$A（x）$\Leftrightarrow$ $\forall x\neg$A（x） （2）

证明 （1）在任何解释 I 下，$\neg\forall x$A（x）表示“在个体域 D 中，并非所有的 x 都具有性质 A”； $\exists x\neg$A（x）表示“在个体域 D 中，至少有一个 x 不具有性质 A”两个命题的含义是一样的，因此它们同真或同假，它们是等值的。

（2）的证明留给读者。

注意 此定律又称量词否定等值式，但否定的不只是量词，而是被量化了的整个命题。当个体域取有穷集时，采取消量词的方法，得到的就是德•摩根律。

量词辖域扩缩律 （A（x）是任一一阶公式，B 是任一不含自由变量 x 的一阶公式）

$\forall x$A（x）$\wedge$ B $\Leftrightarrow$ $\forall x$（A（x）$\wedge$ B） （1）

$\forall x$A（x）$\vee$ B $\Leftrightarrow$ $\forall x$（A（x）$\vee$ B） （2）

$\exists x$A（x）$\wedge$ B $\Leftrightarrow$ $\exists x$（A（x）$\wedge$ B） （3）

$\exists xA(x) \vee B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \vee B)$　　　　　　　　　　　(4)

证明　(1) $\forall xA(x) \wedge B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \wedge B)$　在任何解释 I 和 I 中的任意赋值 υ 下

$\forall xA(x) \wedge B = 1$　当且仅当　$\forall xA(x) = 1$ 且 $B = 1$

当且仅当　$B=1$ 且 对于 D_I 中的每一个元素 c，$A(c)=1$

当且仅当　对于 D_I 中的每一个元素 c，$A(c) \wedge B = 1$

当且仅当　$\forall x(A(x) \wedge B) = 1$

(2) $\forall xA(x) \vee B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \vee B)$　在任何解释 I 和 I 中的任意赋值 υ 下

$\forall xA(x) \vee B = 0$　当且仅当　$\forall xA(x) = 0$ 且 $B = 0$

当且仅当　$B = 0$ 且 存在 D_I 中的元素 c 使得 $A(c) = 0$

当且仅当　存在 D_I 中的元素 c 使得 $A(c) \vee B = 0$

当且仅当　$\forall x(A(x) \vee B) = 0$

(3) $\exists xA(x) \wedge B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \wedge B)$

$\exists xA(x) \wedge B \Leftrightarrow \neg\neg(\exists xA(x) \wedge B)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\exists xA(x) \wedge B))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg\exists xA(x) \vee \neg B)$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x\neg A(x) \vee \neg B)$

$\Leftrightarrow \neg\forall x\neg A(x) \wedge B$

$\Leftrightarrow \exists x(A(x) \wedge B)$

(4) 式的证明留给读者

另外，下面的等值式也称作量词辖域的扩缩律

$\forall xA(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B)$　　　　　(5)

$B \rightarrow \forall xA(x) \Leftrightarrow \forall x(B \rightarrow A(x))$　　　　　(6)

$\exists xA(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B)$　　　　　(7)

$B \rightarrow \exists xA(x) \Leftrightarrow \exists x(B \rightarrow A(x))$　　　　　(8)

证明　(5) $\forall xA(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B)$

$\forall xA(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \neg\forall xA(x) \vee B$

$\Leftrightarrow \exists x\neg A(x) \vee B$

$\Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B)$

$\Leftrightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B)$

(6)(7)(8) 的证明留给读者。

量词分配律　(A(x)、B(x) 是任一一阶公式)

$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$　　　　　(1)

$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$　　　　　(2)

证明　(1) $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$

在任何解释 I 和 I 中的任意赋值 υ 下，$\forall x(A(x) \wedge B(x)) = 1$

当且仅当　对于 D_I 中的每一个元素 c，$A(c) \wedge B(c) = 1$

当且仅当　对于 D_I 中的每一个元素 c，$A(c) = 1$ 且 $B(c) = 1$

当且仅当　$\forall xA(x) = 1$ 且 $\forall xB(x) = 1$

当且仅当　$\forall xA(x) \wedge \forall xB(x) = 1$

(2) $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$

$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \neg\neg(\exists x(A(x) \vee B(x)))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x\neg(A(x) \vee B(x)))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x(\neg A(x) \wedge \neg B(x)))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x\neg A(x) \wedge \forall x\neg B(x))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg\exists x A(x) \wedge \neg\exists x B(x))$

$\Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$

注意　虽然一般情况下，$\wedge$与$\vee$是满足对偶律的，但在量词分配律上对偶定理并不成立。

即：　　$\forall x(A(x) \vee B(x)) \not\Leftrightarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$

$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \not\Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

证明　给定解释 I：D_I：自然数集，A（x）：x 是奇数，B（x）：x 是偶数。

在 I 下，$\forall x(A(x) \vee B(x))$ 意为“所有的自然数，或是奇数，或是偶数”是真命题，$\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ 意为“所有的自然数是奇数，或者所有的自然数是偶数”是假命题。因此，$\forall x(A(x) \vee B(x))$ 与 $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ 不等值。而

$\exists x(A(x) \wedge B(x))$ 意为“存在着自然数 x，x 既是奇数又是偶数”显然这是一个假命题，$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ 意为“有自然数是奇数并且也有自然数是偶数”是真命题，因此，$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ 与 $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ 不等值。　　　　证毕

【例 2.3.3】证明下列等值式

（1）$\neg\forall x(F(x) \to G(x)) \Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$

（2）$\neg\exists x\forall y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x,y)) \Leftrightarrow \forall x\exists y((F(x) \wedge G(y)) \to H(x,y))$

证明　（1）$\neg\forall x(F(x) \to G(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\neg(F(x) \to G(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\neg(\neg F(x) \vee G(x))$

$\Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$

（2）$\neg\exists x\forall y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x\exists y\neg(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x\exists y(\neg(F(x) \wedge G(y)) \vee H(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x\exists y((F(x) \wedge G(y)) \to H(x,y))$　　　　证毕

在命题逻辑中，我们介绍过析取范式和合取范式，利用它们可将命题公式表示为统一的形式，为我们讨论问题提供了方便。下面我们介绍一阶逻辑中的范式概念：前束范式。

定义 2.3.2　设 A 为一阶公式，若 A 具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_kx_kB$$

则称 A 为前束范式。其中 Q_i（$1 \le i \le k$）是量词符$\forall$或$\exists$，x_i（$1 \le i \le k$）是变元符，B 是不含量词的公式。

例如，$\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$，$\forall x\exists y((F(x) \wedge G(y)) \to H(x,y))$ 等公式均是前束范式。$\neg\exists x\forall y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x,y))$，$\forall x(F(x) \to \exists y(G(y) \wedge H(x, y)))$，$\exists x\forall y(F(x) \vee G(y)) \to H(x, y, z)$ 等都不是前束范式。

在一阶逻辑推理中，需要将公式化成前束范式形式，这总是可以办到的。即任何一个一阶公式均可等值演算成前束范式，化归过程如下：

（1）消去除$\neg$、$\wedge$、$\vee$之外的联结词，

（2）将否定符$\neg$移到量词符后，

（3）换名使各变元不同名，

（4）扩大辖域使所有量词处在最前面。

说明 1　化归过程需遵守置换规则和换名规则（也可用代替规则），

说明 2　过程（1）是为了方便的使用量词辖域扩缩律（1）~（4），当然也可以直接使用量词辖域扩缩律（5）~（8）。由此可知，公式的前束范式形式并不唯一。

【例 2.3.4】　将下面公式化成前束范式。

（1）$\forall x(F(x) \vee \forall yG(y, z) \to \neg\forall zH(x, z))$

（2）$\neg\forall x(F(x) \to \forall y(F(y) \to F(f(x, y)))) \wedge \neg\exists y(G(x, y) \to F(y))$

解　（1）$\forall x((F(x) \vee \forall yG(y, z)) \to \neg\forall zH(x, z))$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg(F(x) \vee \forall yG(y, z)) \vee \exists z\neg H(x, z))$

$\Leftrightarrow \forall x((\neg F(x) \wedge \neg\forall yG(y, z)) \vee \exists z\neg H(x, z))$

$\Leftrightarrow \forall x((\neg F(x) \wedge \exists y \neg G(y, z)) \vee \exists z \neg H(x, z))$

$\Leftrightarrow \forall x((\neg F(x) \wedge \exists y \neg G(y, z)) \vee \exists t \neg H(x, t))$

$\Leftrightarrow \forall x \exists y \exists t((\neg F(x) \wedge \neg G(y, z)) \vee \neg H(x, t))$

（2）$\neg \forall x(F(x) \rightarrow \forall y(F(y) \rightarrow F(f(x, y)))) \wedge \neg \exists y(G(x, y) \rightarrow F(y))$

$\Leftrightarrow \neg \forall x(\neg F(x) \vee \forall y(\neg F(y) \vee F(f(x, y)))) \wedge \neg \exists y(\neg G(x, y) \vee F(y))$

$\Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg \forall y(\neg F(y) \vee F(f(x, y)))) \wedge \forall y(G(x, y) \wedge \neg F(y))$

$\Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \exists y(F(y) \wedge \neg F(f(x, y)))) \wedge \forall y(G(x, y) \wedge \neg F(y))$

$\Leftrightarrow \exists t(F(t) \wedge \exists y(F(y) \wedge \neg F(f(t, y)))) \wedge \forall z(G(x, z) \wedge \neg F(z))$

$\Leftrightarrow \exists t \exists y \forall z(F(t) \wedge F(y) \wedge \neg F(f(t, y)) \wedge G(x, z) \wedge \neg F(z))$

2.4　一阶逻辑推理理论

在一阶逻辑中，由前提 A_1，A_2，…，A_n 推出结论 B 的形式结构仍然是 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$ 如果此式是永真式，则称由前提 A_1，A_2，…，A_n 推出结论 B 的推理正确，记作 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$ 或者 A_1，A_2，…，$A_n \Rightarrow B$，否则称推理不正确。

由于谓词演算是在命题演算的基础上，进一步扩大了谓词与量词的功能，因此容易想到，命题演算中有关推理演绎的规则基本上适用于谓词演算，既在命题逻辑中的各项推理规则在一阶逻辑推理中仍然适用，当然也会有不少只适用于谓词演算的概念与规则。（下面规则中的符号“$A \vDash B$”意为“由 A 形式地可推出 B”）

全称量词消去规则（简称 UI 规则）

$\forall x \forall(x) \vDash A(t)$　　　$\forall x A(x) \vDash A(c)$

规则成立的条件：

（1）t 是任意个体变项，c 是某个个体常项。用哪一个，需视具体情况而定。

（2）A（t）（或 A（c））中约束变元个数与 A（x）中约束变元个数相同。

全称量词引入规则（简称 UG 规则）

$A(t) \vDash \forall x A(x)$

规则成立的条件：

（1）A（t）中的 t 是自由变元。

（2）x 不在 A（t）中自由出现。

存在量词引入规则（简称 EG 规则）

$A(c) \vDash \exists x A(x)$

规则成立的条件：

（1）c 是特定的个体常元，

（2）x 不在 A（c）中自由出现。

存在量词消去规则（简称 EI 规则）

$\exists x A(x) \vDash A(c)$

规则成立的条件：

（1）c 是特定的个体常元。

（2）∃xA（x）是闭式。

（3）c 不在 A（x）中出现。（事实上，c 不能在前提和前面整个推理过程中出现。）

特别需要注意的是，使用这些规则的条件非常重要，如在使用过程中违反了这些条件就可能导致错误的结论。

【例 2.4.1】证明推理“所有的自然数均是实数，3 是自然数，因此，3 是实数。”正确。

解　设 N（x）：x 是自然数。 R（x）：x 是实数。 则推理形式化为：

$\forall x(N(x) \rightarrow R(x))$，$N(3) \Rightarrow R(3)$

证明　（1）$\forall x(N(x) \rightarrow R(x))$　　　　前提引入

（2）N（3）$\to$R（3）　　（1）UI
（3）N（3）　　前提引入
（4）R（3）　　（2）（3）假言推理

证毕

【例 2.4.2】构造下面推理的证明

前提　$\forall$x（F（x）$\to$（G（x）$\wedge$H（x）））, $\exists$x（F（x）$\wedge$P（x））

结论　$\exists$x（P（x）$\wedge$H（x））

解　（1）$\forall$x（F（x）$\to$（G（x）$\wedge$H（x）））　　前提引入
（2）$\exists$x（F（x）$\wedge$P（x））　　前提引入
（3）F（c）$\wedge$P（c）　　（2）EI
（4）F（c）$\to$（G（c）$\wedge$H（c））　　（1）UI
（5）F（c）　　（3）化简
（6）G（c）$\wedge$H（c）　　（4）（5）假言推理
（7）P（c）　　（3）化简
（8）H（c）　　（6）化简
（9）P（c）$\wedge$H（c）　　（7）（8）合取引入
（10）$\exists$x（P（x）$\wedge$H（x））　　（9）EG

证毕

◆ **想一想**，在上述推理的过程中，（3）、（4）两个步骤可否颠倒次序？如果颠倒了次序，则违反了哪一条规则成立的第几个条件？

【例 2.4.3】　设前提　$\forall$x$\exists$yF（x，y）　下面推理是否正确？

（1）$\forall$x$\exists$yF（x，y）　　前提引入
（2）$\exists$yF（y，y）　　（1）UI

解　$\forall$x$\exists$yF（x，y）$\Rightarrow$ $\exists$yF（y，y）的推理并不正确。如果给定解释 I：个体域为实数集，F（x，y）：x > y。则 $\forall$x$\exists$yF（x，y）意为“对于每个实数 x，均存在着比之更小的实数 y”这是一个真命题。而 $\exists$yF（y，y）意为“存在着比自己小的实数”是假命题。之所以出现这样的错误，是违反了 UI 规则成立的条件（2）。

【例 2.4.4】　设前提　$\forall$x$\exists$yF（x，y）　下面推理是否正确？

（1）$\forall$x$\exists$yF（x，y）　　前提引入
（2）$\exists$yF（t，y）　　（1）UI
（3）F（t，c）　　（2）EI
（4）$\forall$xF（x，c）　　（3）UG
（5）$\exists$y $\forall$xF（x，y）　　（4）EG

解　$\forall$x$\exists$yF（x，y）$\Rightarrow$ $\exists$y$\forall$x F（x，y）的推理并不正确。取与例 2.4.3 相同的解释，则由 $\forall$x$\exists$yF（x，y）为真，而$\exists$y$\forall$x F（x，y）意为“存在着最小实数”是假命题，知推理不正确。之所以出现这样的错误，是第（3）步违反了 EI 规则成立的条件（2）。

【例 2.4.5】构造下面推理的证明

前提　$\forall$x（F（x）$\to$ G（x））

结论　$\forall$xF（x）$\to$ $\forall$xG（x）

分析　本题直接证明很困难，注意到结论部分是蕴涵式，应考虑用附加前提证明法。

证明　（1）$\forall$x（F（x）$\to$ G（x））　　前提引入
（2）$\forall$xF（x）　　附加前提引入
（3）F（t）　　（2）UI
（4）F（t）$\to$ G（t）　　（3）UI
（5）G（t）　　（3）（4）假言推理
（6）$\forall$xG（x）　　（5）UG
（7）$\forall$xF（x）$\to$ $\forall$xG（x）　　CP

【例 2.4.6】构造下面推理的证明

前提 $\forall x(F(x)\to G(x))$

结论 $\forall x(\exists y(F(y)\wedge H(x,y))\to\exists z(G(z)\wedge H(x,z)))$

分析 本题直接证明会感到无从下手，而由于结论并非蕴涵式（$\forall x$ 的辖域是其后整个公式），附加证明法也不适用，此时我们应考虑归缪法。

证明

(1) $\neg\forall x(\exists y(F(y)\wedge H(x,y))\to\exists z(G(z)\wedge H(x,z)))$	否定结论引入
(2) $\exists x\neg(\exists y(F(y)\wedge H(x,y))\to\exists z(G(z)\wedge H(x,z)))$	(1) 置换
(3) $\neg(\exists y(F(y)\wedge H(a,y))\to\exists z(G(z)\wedge H(a,z)))$	(2) EI
(4) $\exists y(F(y)\wedge H(a,y))\wedge\neg\exists z(G(z)\wedge H(a,z))$	(3) 置换
(5) $\exists y(F(y)\wedge H(a,y))$	(4) 化简
(6) $F(b)\wedge H(a,b)$	(5) EI
(7) $F(b)$	(6) 化简
(8) $\forall x(F(x)\to G(x))$	前提引入
(9) $F(b)\to G(b)$	(8) UI
(10) $G(b)$	(7)(9) 假言推理
(11) $\neg\exists z(G(z)\wedge H(a,z))$	(3) 化简
(12) $\forall z(\neg G(z)\vee\neg H(a,z))$	(11) 置换
(13) $\neg G(b)\vee\neg H(a,b)$	(12) UI
(14) $H(a,b)$	(6) 化简
(15) $\neg\neg H(a,b)$	(14) 置换
(16) $\neg G(b)$	(13)(15) 析取三段论
(17) $G(b)\wedge\neg G(b)$	(10)(16) 合取引入

因此，推理正确。

2.5 例题选解

【例 2.5.1】 在高等数学中极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 定义为：任给小正数ε，则存在正数δ，使得当 $0<|x-a|<\varepsilon$ 时，恒有 $|f(x)-b|<\delta$ 成立。

将上述定义用一阶逻辑公式表示。

分析 因为高等数学中的极限概念是在实数范围内给出的，所以不妨设定个体域为实数域。观察整个定义，只有一种"小于"关系，这应当用一个二元谓词表示；而"差的绝对值"是一个运算，应当用运算符表示。

解 设 $L(x,y)$：$x<y$。 $g(x,y)$：$|x-y|$。则定义可表示为：

$\forall\varepsilon(L(0,\varepsilon)\to\exists\delta(L(0,\delta)\wedge\forall x((L(0,g(x,a))\wedge L(g(x,a),\delta))\to L(g(f(x),b),\varepsilon))))$。

【例 2.5.2】 在一阶逻辑中符号化自然数的三条公理。

（1）每个数都有唯一的一个数是它的后继数。

（2）没有一个数使 0 为它的后继数。

（3）每个不等于 0 的数都有唯一的一个数是它的直接先行者。

分析 在符号化命题的过程中，设定谓词尽可能少是一个原则。注意到"x 是 y 的后继数"与"y 是 x 的直接先行者"含义相同，所以可用一个谓词表示。

解 设 $N(x)$：x 是自然数。$F(x,y)$：x 是 y 的后继数。$G(x,y)$：$x=y$。则

（1）$\forall x(N(x)\to\exists!\,y(N(y)\wedge F(y,x)))$。

（2）$\neg\exists x(N(x)\wedge F(0,x))$

（3）$\forall x$（（N（x）$\wedge\neg$G（x，1））$\rightarrow\exists$！y（N（y）$\wedge$F（x，y）））

【例 2.5.3】 将符号∃！xF（x）表达成仅用量词∀和∃的形式。

分析 ∃！xF（x）的意思是：有唯一的 x 具有性质 F。即：有 x 具有性质 F，且若还有 y 也具有性质 F，则必有 x = y。所以：

解 ∃！xF（x）$\Leftrightarrow\exists$x（F（x）$\wedge\forall$y（F（y）$\rightarrow$ x = y））

【例 2.5.4】 设个体域为 {a，b，c}，消去下列公式中的量词。

（1）$\forall$xF（x）$\wedge$ $\exists$y G（y）

（2）$\forall$x$\exists$y（F（x）$\wedge$ G（y））

（3）$\forall$x$\exists$y（F（x，y）$\rightarrow$G（y，x））

解 （1）$\forall$xF（x）$\vee$ $\exists$y G（y）

$\Leftrightarrow$（F（a）$\wedge$F（b）$\wedge$F（c））$\wedge$（F（a）$\vee$F（b）$\vee$F（c））

（2）$\forall$x$\exists$y（F（x）$\wedge$ G（y））

$\Leftrightarrow$ $\exists$y（F（a）$\wedge$G（y））$\wedge$ $\exists$y（F（b）$\wedge$G（y））$\wedge\exists$y（F（c）$\wedge$G（y））

$\Leftrightarrow$（（F（a）$\wedge$G（a））$\vee$（F（a）$\wedge$G（b））$\vee$（F（a）$\wedge$G（c）））$\wedge$

（（F（b）$\wedge$G（a））$\vee$（F（b）$\wedge$G（b））$\vee$（F（b）$\wedge$G（c）））$\wedge$

（（F（c）$\wedge$G（a））$\vee$ （F（c）$\wedge$G（b））$\vee$（F（c）$\wedge$G（c）））

（3）$\forall$x$\exists$y（F（x,y）$\rightarrow$G（y,x））

$\Leftrightarrow$ $\exists$y（F（a,y）$\rightarrow$G（y,a））$\wedge\exists$y（F（b,y）$\rightarrow$G（y,b））$\wedge\exists$y（F（c,y）$\rightarrow$G（y,c））

$\Leftrightarrow$（（F（a,a）$\rightarrow$G（a,a））$\vee$（F（a,b）$\rightarrow$G（b,a））$\vee$（F（a,c）$\rightarrow$G（c,a））$\wedge$

（（F（b,a）$\rightarrow$G（a,b））$\vee$（F（b,b）$\rightarrow$G（b,b））$\vee$（F（b,c）$\rightarrow$G（c,b））$\wedge$

（（F（c,a）$\rightarrow$G（a,c））$\vee$（F（c,b）$\rightarrow$G（b,c））$\vee$（F（c,c）$\rightarrow$G（c,c））

事实上，对于公式（2），我们可以先利用量词辖域的扩缩律将辖域缩小，化成与其等值的公式$\forall$xF（x）$\wedge$ $\exists$y G（y），再消量词，这正是公式（1），则消量词变得非常简单。不过并非所有公式都可以缩小辖域，例如本题中的公式（3），只能按照规则做。

【例 2.5.5】 构造下面推理的证明

前提 $\forall$xF（x）$\vee$ $\forall$xG（x）

结论 $\forall$x（F（x）$\vee$ G（x））

证明

（1）$\forall$xF（x）$\vee$ $\forall$xG（x）	前提引入
（2）$\forall$x$\forall$y（F（x）$\vee$ G（y））	（1）置换
（3）$\forall$y（F（t）$\vee$ G（y））	（2）UI
（4）F（t）$\vee$ G（t）	（3）UI
（5）$\forall$x（F（x）$\vee$ G（x））	（4）UG

注意 证明中的第（2）步不能直接用全称量词消去规则 UI，因为$\forall$xF（x）$\vee$ $\forall$xG（x）并不具有$\forall$xA（x）的形式，只有将其化成前束范式的形式方可使用全称量词消去规则。因为前束范式$\forall$x$\forall$y（F（x）$\vee$ G（y））与$\forall$xF（x）$\vee$ $\forall$xG（x）是等值的，所以第（2）步用的是置换规则。另外，由此例可知，虽然全称量词$\forall$x 对析取运算$\vee$ 的分配律不成立，但成立蕴涵式 $\forall$xF（x）$\vee$ $\forall$xG（x）$\Rightarrow$ $\forall$x（F（x）$\vee$ G（x））。

【例 2.5.6】 在谓词逻辑推理系统中构造下面推理的证明。

没有不守信用的人是可以信赖的。有些可以信赖的人是受过教育的人。因此，有些受过教育的人是守信用的。

解 设 M（x）：x 是人，F（x）：x 守信用，G（x）：x 可信赖，H（x）：x 受过教育。

前提：$\neg\exists$x（M（x）$\wedge\neg$F（x）$\wedge$G（x）），$\exists$x（M（x）$\wedge$G（x）$\wedge$H（x））

结论：$\exists$x（M（x）$\wedge$H（x）$\wedge$F（x））

证明：

（1）$\neg\exists$x（M（x）$\wedge\neg$F（x）$\wedge$G（x））	前提引入
（2）$\forall$x$\neg$（M（x）$\wedge\neg$F（x）$\wedge$G（x））	（1）置换
（3）$\exists$x（M（x）$\wedge$G（x）$\wedge$H（x））	前提引入
（4）M（c）$\wedge$G（c）$\wedge$H（c）	（3）EI

（5）¬（M（c）∧¬F（c）∧G（c））　　（2）UI
（6）¬M（c）∨F（c）∨¬G（c）　　（5）置换
（7）M（c）　　（4）化简
（8）F（c）∨¬G（c）　　（7）（6）析取三段论
（9）G（c）　　（4）化简
（10）F（c）　　（8）（9）析取三段论
（11）H（c）　　（4）化简
（12）M（c）∧H（c）∧F（c）　　（7）（11）（10）合取
（13）∃x（M（x）∧H（x）∧F（x））　　（12）EG

因此，推理正确。

习题二

1．在一阶逻辑中将下列命题符号化。

（1）天下乌鸦一般黑。
（2）世上没有不散的宴席。
（3）闪光的未必是金子。
（4）有不是奇数的素数。
（5）有且仅有一个偶素数。（提示：参见下面第 4 题（8））
（6）猫是动物，但并非所有的动物都是猫。
（7）骆驼都比马大。
（8）有的骆驼比所有的马都大。
（9）所有的骆驼都比某些马大。
（10）有的骆驼比某些马大。

2．取个体域为实数集 R，函数 f 在点 a 处连续的定义是：f 在 a 点连续，当且仅当对每一个小正数ε，都存在正数δ，使得对所有的 x，若|x – a| < δ，则 |f（x）– f（a）| < ε。把上述定义用符号的形式表示。

3．在整数集中，确定下列命题的真值，运算“·”是普通乘法。

（1）∀x∃y（x·y = 0）
（2）∀x∃y（x·y = 1）
（3）∃y∀x（x·y = 0）
（4）∃y∀x（x·y = x）
（5）∀x∀y（x·y = y·x）
（6）∃x∃y（x·y = 1）

4．给定谓词如下，试将下列命题译成自然语言。

P（x）：x 是素数。E（x）：x 是偶数。O（x）：x 是奇数。D（x，y）：x 整除 y。

（1）E（2）∧ P（2）
（2）∀x（D（2，x）→ E（x））
（3）∃x（¬E（x）∧ D（x，6））
（4）∀x（¬E（x）→ ¬D（2，x））
（5）∀x（E（x）→ ∀y（D（x，y）→ E（y）））
（6）∀x（O（x）→ ∀y（P（y）→ ¬D（x，y）））
（7）∀x（P（x）→∃y（E（y）∧D（x，y）））
（8）∃x（E（x）∧ P（x）∧ ¬∃y（E（y）∧ P（y）∧ x≠y））

5． 指出下面公式中的变量是约束的，还是自由的，并指出量词的辖域。

（1）∀x（F（x）∧ G（x））→∀x（F（x）∧ H（x））
（2）∀xF（x）∧（∃xG（x）∨（∀xF（x）→ G（x）））

（3）$\forall x$（（F（x）$\wedge$G（x，y））$\to$（$\forall x$F（x）$\wedge$ R（x，y，z）））

（4）$\exists x\forall y$F（x，y，z）$\leftrightarrow$ $\forall y\exists x$F（x，y，z）

6．设个体域 D = {a，b，c}，消去下列各式中的量词。

（1）$\exists x$F（x）$\to$ $\forall y$F（y）

（2）$\exists x$（$\neg$F（x）$\vee$ $\forall y$G（y））

（3）$\forall x\forall y$（F（x）$\to$ G（y））

（4）$\exists x\forall y$F（x，y，z）

7．求下列公式在解释 I 下的真值。

（1）$\forall x$（F（x）$\vee$ G（x）），解释 I：个体域 D={1，2}；F（x）：x=1；G（x）x=2。

（2）$\forall x$（p$\to$Q（x））$\vee$ R（a），解释 I：个体域 D={–2，3，6}；p：1<2；Q（x）：x$\le$3，R（x）：x>5；a：5。

8． 给定解释 I 和 I 中赋值ν 如下：

个体域 D 为实数集，E（x，y）：x=y，G（x，y）：x>y，N（x）：x 是自然数，

f（x，y）= x–y，g（x，y）= x+y，h（x，y）= x • y

ν（x）= 1，ν（y）= –2。a=0

求下列公式在解释 I 和赋值ν下的真值。

（1）$\forall x\forall y$E（g（x，y），g（y，x））

（2）N（x）$\wedge\forall y$（N（y）$\to$（G（y，x）$\vee$E（y，x）））

（3）$\forall y\exists z$E（h（y，z），x）

（4）$\forall x\forall y$E（h（f（x，y），g（x，y）），f（h（x，x），h（y，y）））

（5）E（g（x，g（x，y）），a）

9． 判断下列公式的类型，并说明理由。

（1）$\exists x F(x)\to\forall x F(x)$

（2）$\neg$（$F(x)\to(\forall x G(x,y)\to F(x))$）

（3）$F(x)\to(\forall x G(x,y)\to F(y))$

（4）$\forall x F(x)\to(\forall t F(t)\vee H(y))$

10．证明量词转换律（2）　　$\neg\exists x$A（x）$\Leftrightarrow$ $\forall x\neg$A（x）

11．证明辖域扩缩律（4）　　$\exists x$A（x）$\vee$ B $\Leftrightarrow$ $\exists x$（A（x）$\vee$ B）

12．证明辖域扩缩律　（6） B $\to\forall x$A（x）$\Leftrightarrow$ $\forall x$（B $\to$ A（x））

（7） $\exists x$A（x）$\to$ B $\Leftrightarrow$ $\forall x$（A（x）$\to$ B）

（8） B $\to\exists x$A（x）$\Leftrightarrow$ $\exists x$（B $\to$ A（x））

13．用等值演算证明下列等值式。

（1）$\exists x$（F（x）$\to$G（x））$\Leftrightarrow\forall y$F（y）$\to\exists z$G（z）

（2）$\exists x\exists y$（F（x）$\to$G（y））$\Leftrightarrow\forall x$F（x）$\to\exists y$G（y）

（3）$\forall x$（$\neg$F（x）$\wedge$G（x））$\Leftrightarrow\neg$（$\forall x$G（x）$\to\exists x$F（x））

（4）$\forall x\forall y((F(x,y)\wedge F(y,x))\to G(x,y)) \Leftrightarrow \forall x\forall y((F(x,y)\wedge\neg G(x,y))\to\neg F(y,x))$

14．将下列公式化成与之等值的前束范式。

（1）$\forall x$（F（x）$\to\exists y$G（x，y））

（2）（$\exists x$F（x）$\vee\exists x$G（x））$\to\forall x$（F（x）$\vee$G（x））

（3）$\forall x$F（x）$\to\exists x$（$\forall y$G（x，y）$\vee\forall y$H（x，y，z））

（4）（$\neg\exists x$F（x）$\vee\forall y$G（y））$\wedge$（F（x）$\to\forall z$H（z））

15．构造下列推理的证明：

（1）前提：$\exists x$ F（x）$\wedge$ $\forall x$ G（x）

结论：$\exists x$（F（x）$\wedge$ G（x））

（2）前提：$\forall x$（F（x）$\vee$G（x））

结论：$\forall x$F（x）$\vee\exists x$G（x）（提示：用附加前提法或归缪法证明）

（3）前提：$\forall x$（F（x）$\to$G（x））

结论：$\forall x\forall y（F（y）\wedge H（x，y））\rightarrow \exists x（G（x）\wedge H（x，x））$

（4）前提：$\neg\forall x\, F（x）$，$\forall x（（\neg F（x）\vee G（x））\rightarrow H（x））$

结论：$\exists x\, H（x）$

（5）前提：$\exists x\, F（x）\rightarrow \forall x（（F（x）\vee G（x））\rightarrow R（x））$，$\exists x\, F（x）$，$\exists x\, G（x）$

结论：$\exists x\exists y（R（x）\wedge R（y））$

（6）前提：$\forall x（\exists y（S（x，y）\wedge M（y））\rightarrow \exists z（P（z）\wedge R（x，z）））$

结论：$\neg\exists z\, P（z）\rightarrow \forall x\forall y（S（x，y）\rightarrow \neg M（y））$

16．在一阶逻辑中构造下列推理的证明。

（1）有理数都是实数。有的有理数是整数。因此，有的实数是整数。

（2）所有的有理数都是实数。所有的无理数也都是实数。任何虚数都不是实数。所以，虚数既非有理数也非无理数。

（3）不存在不能表示成分数的有理数。无理数都不能表示成分数。所以，无理数都不是有理数。

17．在一阶逻辑中构造下列推理的证明。

（1）有些病人相信所有的医生。所有的病人都不相信骗子。因此，所有的医生都不是骗子。

（2）任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车。每个人或者喜欢乘汽车，或者喜欢骑自行车。有的人不爱骑自行车。因此有的人不爱步行。