《离散数学》练习题

一、填空题

1．设 A={∅，{∅}}，则幂集 P（A）= $\{\Phi,\{\Phi\},\{\{\Phi\}\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\}$ 。

笛卡尔积 A× A = $\{<\Phi,\Phi>,<\Phi,\{\Phi\}>,<\{\Phi\},\Phi>,<\{\Phi\},\{\Phi\}>\}$

2．设 A={x | x 是单词“MATHEMATICS”中的字母}，A 的基数 |A| = 8 。

3．设 A、B 是集合。|A|=m, |B|=n, m≤n。则 A 到 B 不同的二元关系有 2^{mn} 个； A 到 B 不同的映射有 n^m 个；A 到 B 不同的单射有 n(n-1)(n-2)…(n-m+1)个；A 到 B 不同的双射有 m! 个。

4. 集合 A={1,2,3}上的关系 R = {<1,2>,<2,1>,<1,1>,<2,2>,<1,3>,<2,3>},则定义域 DomR= 1,2}.且 R 具有 传递 性 。

5．设 f 和 g 均是实数集合上的函数，且 f(x) = x^2-2, g(n) = 2x+1,则复合函数

f∘g = $<x,2x^2-3>$；取 A={-1，0，1}，则 f（A）= {-1,-2} ；取 B=[0，1]，则 f（B）= [-2,-1]；

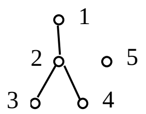
f 的性质是 不单不满 映射；g 的性质是 双 映射。

6．设 R=｛＜1,2＞,＜2,3＞,＜4,5＞｝和 S=｛＜3,2＞,＜4,3＞,＜5,1＞｝ $R\circ S=$ {<2,2>,<4,1>} 。

7．R 被称为是集合 A 上的一个偏序关系，如果 R 满足 自反 性、 反对称 性和 传递 性。

8．集合 A={1,2,3}的划分为{{1,2},{3}},则其对应的等价关系 R = {<1,2>,<2,1>∪I_A 。

9．集合 A={1,2,3}上既是等价关系又是偏序关系的是 I_A 。

10. 偏序关系 R 的哈斯图：  ，则 R = {<3,2>,<2,1>,<3,1>,<4,2>,<4,1>}∪I_A 。

11．|A|=3, 则 A 上可定义 5 个等价关系， 19 个偏序关系。

二、单项选择题

1．设 A={∅,{1,2}}，下列各式中错误的是（　　）。

A：∅⊆A；　B：∅∈A；　C：{1，2}⊂A；　D：{{1，2}}⊂A

2. 设 A、B、C 为任意集合，∅是空集，E 是全集，下列命题中正确的是（　　）。

A：若 A－B= A，则 B = ∅；　　B：若 A－B= ∅，则 A = B；

C：若~A∪B = E，则 A⊆B；　　D：若 A∪B= A∪C，则 B= C。

3．设集合 A={a,b,c}上有下列关系，则其中既不对称又不反对称的是（　　）

A：{<a,b>,<a,a>,<c,b>}；　　B: ∅

C：{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,a>}　　D：{<a,b>,<b,a>,<b,b>}

4．设集合 A={a，b，c}中有下列关系，则其中不具有传递性的是（　　）。

A：　{<a,b>,<a,a>}；　　B：　{<a,a>,<a,b>,<c,a>,<c,b>}；

C：　{　}；　　D：　{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,c>}

5．设 A、B 均是有穷集合，则是由 A 到 B 存在单射的必要条件是（　　）。

A：　|A| ≤ |B|；　B：|A| ≥ |B|；　C：|A| = |B|；　D：|A| 与 |B|无关。

6．设 A、B 均是有穷集合，则|A| ≥ |B|是由 A 到 B 存在满射的（　　）

A：充分条件　B：必要条件　C：充要条件　D：既非充分也非必要条件

7．设 A={a,b,c}，则下列集合族中是集合 A 的划分的是（　　）

A：{{b,c},{c}}　B：{∅,{b},{a,c}}　C：{{a,b},c}　D：{{a},{b,c}}

8．下列关系中能构成函数的是（　　）。

A：　{<x,y> | x,y ∈ N, x+y = 10}；　B：　{<x,y> | x,y ∈ Z, |x| = y }；

C： $\{<x,y> \mid x,y \in Z, x = |y|\}$； D： $\{<x,y> \mid x,y \in Z, |x| = |y|\}$。

9．设 N 为自然数集，函数 F：$N \to N \times N$，$F(n) = <n, 2n>$是( )

A：是满射，不是单射 B：是单射，不是满射 C：双射 D：是非单非满映射

10． $R = \{<1,4>,<2,3>,<3,1>,<4,1>,<4,3>\}$，则**不会**在 t(R)中出现的元素是 （ ）

A： <1,2> B： <1,1> C：<1,3> D： <1,4>

答案：CCCDA BDBBA

三、给定<u>**自然数**</u>子集 $A=\{1,2,7,8\}$, $B=\{x \mid x^2<50\}$, $C=\{x \mid x$ 可被 3 整除，$1\le x \le 30\}$，

列举 B 和 C，并求 $B-(A\cup C)$，$A\oplus B$

$A=\{1,2,7,8\}$. $B=\{0,1,2,\cdots,7\}$. $\cancel{C=\{30,27,24,\cdots,3\}}$.

$C=\{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$.

$B-(A\cup C)$

$=\{0,\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},4,5,\cancel{6},\cancel{7}\}=\{0,4,5,\cancel{6}\}$.

$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)=\{0,1,2,\cdots,8\}-\{1,2,7\}$.

$=\{0,3,4,5,6,8\}$

四、设二元关系 $R = \{<a,b>,<\{a\},b>,<\{\varnothing\},\{\varnothing\}>,<\varnothing,\{\varnothing\}>\}$，求 R^{-1} 和 $R\circ R$

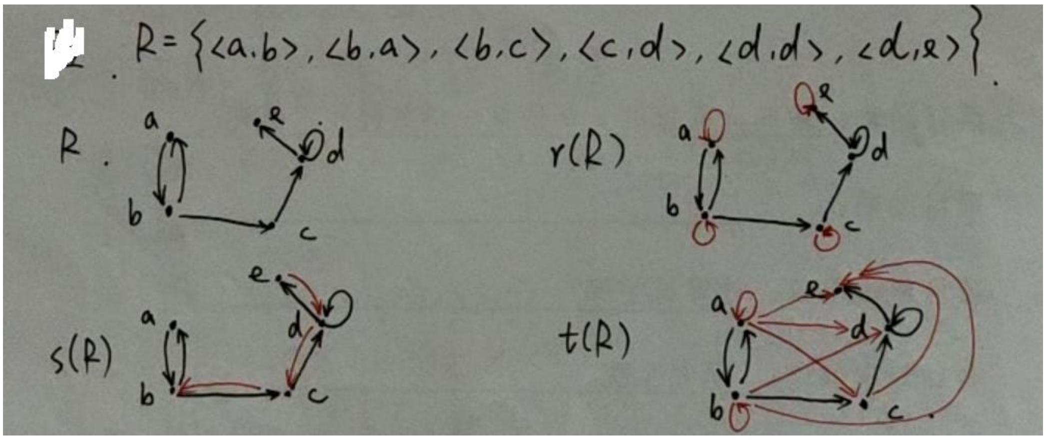
$R=\{<a,b>,<\{a\},b>,<\{\phi\},\{\phi\}>,<\phi,\{\phi\}>\}$.

$R^{-1}=\{<b,a>,<b,\{a\}>,<\{\phi\},\{\phi\}>,<\{\phi\},\phi>\}$.

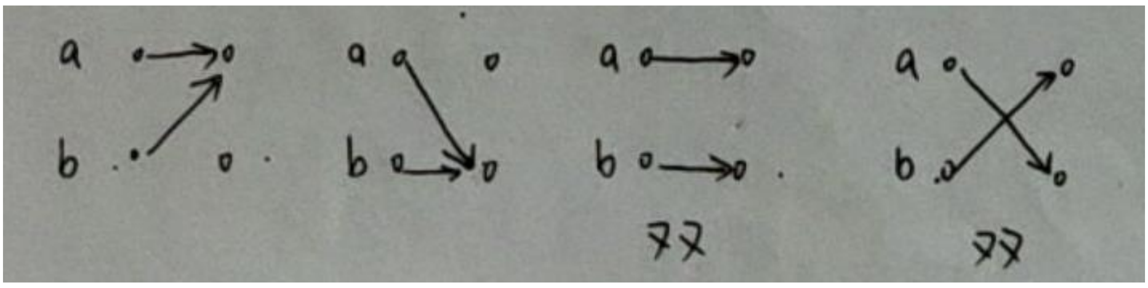
$R\circ R=\{<\{\phi\},\{\phi\}>,<\phi,\{\phi\}>\}$.

五、设 R 是集合 A={a,b,c,d}上的二元关系，R={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,d>,<d,e>}

分别画出：R、 r（R）、s（R）、t（R）的关系图。



六、A ={a,b}列出 A 到 A 的所有不同映射，并指出哪个是双射。



七、设 R 是集合 A={1,2,3,…,8}上的二元关系，R={<x,y>| $x, y \in A \wedge x \equiv y(\bmod 4)$ }，其中 $x \equiv y(\bmod 4)$ 的含义是 x-y 可以被 4 整除。

（1）画出此关系的关系图

（2）支持每个元素的等价类

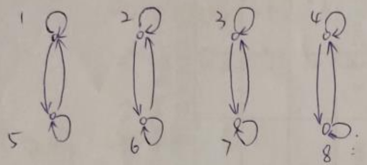
（3）求出商集 A/R

七. A={1,2,3,4,5,6,7,8}.

$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\equiv y(\bmod 4)\}$.

$=\{\langle 5,1\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 7,3\rangle,\langle 8,4\rangle,$

$\langle 1,5\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,7\rangle,\langle 4,8\rangle\}\cup I_A$.



关系图.

a[1]=a[5]={1,5}.

a[2]=a[6]={2,6}.

a[3]=a[7]={3,7}.

a[4]=a[8]={4,8}.

A/R={{1,5},{2,6},{3,7},{4,8}}.

八、A={2,3,4,5,6,12,24}，A 上的关系 R 为整除。

（1）画出此偏序集的哈斯图。

（2）指出此偏序集的最大元，最小元，极大元，极小元

（3）指出子集{4，6}的上界、上确界，下界、下确界。

$R=\{\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,12\rangle,\langle 2,24\rangle,$

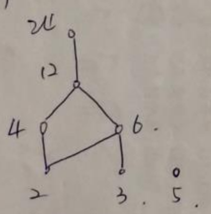
$\langle 3,6\rangle,\langle 3,12\rangle,\langle 3,24\rangle,$

$\langle 4,12\rangle,\langle 4,24\rangle,$

$\langle 6,12\rangle,\langle 6,24\rangle,$

$\langle 12,24\rangle\}\cup I_A$.

(1)



哈斯图.

(2) 偏序集中.

最大元：无. 最小元：无.

极大元：{24,5}. 极小元：{2,3,5}

(3) {4,6}中.

上界：{12,24}. 上确界：{12}.

下界：{2}. 下确界：{2}

九、证明题

（1）设 A、B、C 是三个集合，证明 A–（B∩C）=（A–B）∪（A–C）

（2）R、S 均是集合 A 上的二元关系，证明：Ran（R∩S）$\subseteq$ Ran (R)∩Ran(S）

（3）设 R 是集合 X 中的等价关系，试证明： R∘R 亦为等价关系。

九.(1). 证明 $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

证明: 设任意 $x\in(A-(B\cap C))$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in(B\cap C))$.

$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\wedge x\in C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(\neg x\in B\vee\neg x\in C)$.

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge\neg x\in B)\vee(x\in A\wedge\neg x\in C)$.

$\Leftrightarrow x\in(A-B)\vee x\in(A-C)$.

$\Leftrightarrow x\in((A-B)\cup(A-C))$.

∴ ______

(2). R.S是A上二元关系. 证明 $Ran(R\cap S)\subseteq Ran(R)\cap Ran(S)$.

证明: 设任意 $y\in Ran(R\cap S)$.

存在x, 使得 $\langle x,y\rangle\in R\cap S$.

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in S$.

$\Rightarrow y\in Ran(R)\wedge y\in Ran(S)$.

$\Leftrightarrow y\in(Ran(R)\cap Ran(S))$

(3) R是集合X中二等价关系. 试明 $R\circ R$ 亦为等价 (自反、对称、传递).

证明. ① ∵R自反. ∴任意 $x\in X$. 有 $\langle x,x\rangle\in R$.

∴ $\langle x,x\rangle\in R\circ R$. ∴ $R\circ R$ 自反.

② 设任意 $x,y\in X$. 且 $x\neq y$.

如果 $\langle x,y\rangle\in R\circ R$. 则存在z. 使得 $\langle x,z\rangle\in R$, $\langle z,y\rangle\in R$.

∵R对称. ∴ $\langle z,x\rangle\in R$. 且 $\langle y,z\rangle\in R$.

∴ $\langle y,x\rangle\in R\circ R$. ∴ $R\circ R$ 对称.

③ 设任意 $x,y,z\in X$.

如果 $\langle x,y\rangle\in R\circ R$, 则存在 $a\in X$. $\langle x,a\rangle\in R$, $\langle a,y\rangle\in R$.

$\langle y,z\rangle\in R\circ R$, $b\in X$, $\langle y,b\rangle\in R$, $\langle b,z\rangle\in R$.

∵R传递 $\langle x,b\rangle\in R$. ∴ $\langle x,z\rangle\in R\circ R$. ∴ $R\circ R$ 传递.