一、 判断正误 20% （每小题 2 分）

1、设 A，B， C 是任意三个集合。

（1）若 A∈B 且 B⊆C，则 A∈C。 （ ）

（2）若 A⊆B 且 B∈C，则 A∈C。 （ ）

（3）若 A∈B 且 B⊄C，则 A∉C。 （ ）

（4）$A\cup(B\oplus C)=(A\cup B)\oplus(A\cup C)$。 （ ）

（5）(A⊕B)×C=(A×C) ⊕ (B×C) 。 （ ）

2、可能有某种关系，既是对称的，又是反对称的。（ ）

3、若平面图共有 v 个结点，e 条边和 r 个面，则 v-e+r=2。（ ）

4、任何有向图中各结点入度之和等于边数。（ ）

5、代数系统中一个元素若有左逆元，则该元素一定也有右逆元。（ ）

6、任何一个循环群必定是阿贝尔群。（ ）

二、 8%

将谓词公式$((\exists x)P(x)\vee(\forall y)Q(y))\rightarrow(\forall y)R(y)$化为前束析取范式与前束合取范式。

三、 8%

设集合 A＝{a,b,c,d,e}上的关系 R＝{<a,b>,<b,c>,<b,d>,<d,e>}写出它的关系矩阵和关系图，并用矩阵运算方法求出 R 的传递闭包。

四、10%

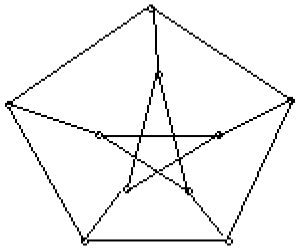
设 ⟨G,∗⟩ 是一个群，证明：若对任意的 $a,b\in G$，都有 $a^3*b^3=(a*b)^3$，$a^4*b^4=(a*b)^4, a^5*b^5=(a*b)^5$，则⟨G,∗⟩是一个阿贝尔群。

五、8%

根据库拉托夫斯基定理，证明下图为非平面图，要求用两种证法。

法（1）是找出与 $K_{3,3}$ 在 2 度结点内同构的子图。

法（2）是找出与 K_5 在 2 度结点内同构的子图。



六、10%

证明：每个结点的度数至少为 2 的图必包含一个回路。

七、12%

用C P规则证明：

1、$(S \wedge Q) \to R, \neg R \vee P, \neg P \Rightarrow S \to \neg Q$

2、$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$

八、12%

用推理规则证明下式：

前提：$(\exists x)P(x) \to \forall x((P(x) \vee Q(x)) \to R(x)), (\exists x)P(x), (\exists x)Q(x)$

结论：$(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge R(y))$

九、12%

若集合 X ＝ {（0，2），（1，2），（2，4），（3，4），（5，6），……}

$R = \{<<x_1, y_1>, <x_2, y_2>> | x_1 + y_2 = x_2 + y_1\}$

1、证明 R 是 X 上的等价关系。

2、求出 X 关于 R 的商集。

一、填空 20%（每小题 2 分）

<table>
<tr><td rowspan="2">题目</td><td colspan="5">1</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">6</td></tr>
<tr><td>（1）</td><td>（2）</td><td>（3）</td><td>（4）</td><td>（5）</td></tr>
</table>

答案	Y	N	N	N	Y	Y	N	Y	N	Y

二、**8%**

$$((\exists x)(P(x)\vee(\forall yQ(y))\rightarrow(\forall y)R(y)$$
$$\Leftrightarrow \neg((\exists xP(x)\vee(\forall yQ(y))\vee(\forall y)R(y)$$
$$\Leftrightarrow (\neg(\exists x)P(x)\wedge\neg(\forall y)(Q(y))\vee(\forall y)R(y)$$
$$\Leftrightarrow ((\forall x)\neg P(x)\wedge(\exists y\neg Q(y))\vee(\forall y)R(y)$$
$$\Leftrightarrow ((\forall x)\neg P(x)\wedge(\exists y\neg Q(y))\vee(\forall z)R(z)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)((\neg P(x)\wedge\neg Q(y))\vee R(z))$$

前束析取范式

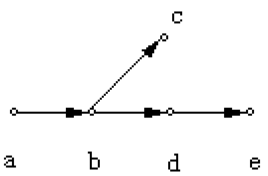
$$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)((\neg P(x)\vee R(z))\wedge(\neg Q(y)\vee R(z))$$

前束合取范式

三、**8%**

关系矩阵：$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

关系图：



传递闭包：$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=\bigcup_{i=1}^{5}R^i$

$$M_{R^2}=M_R\circ M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{R^3}=M_{R^2}\circ M_R=\begin{pmatrix}0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{R^4}=M_{R^3}\circ M_R=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=M_{R^5}$$

$$\therefore M_{R^1}+M_{R^2}+M_{R^3}+M_{R^4}+M_{R^5}=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

t (R)={< a , b > , < a, c> , < a, d> , < a ,e > , < b , c > , < b , d > , < b , e > , < d , e > }。

四、10%

证明：对<G,*>中任意元素 a 和 b

$\because a^3*b^3=(a*b)^3, \therefore a^{-1}*(a^3*b^3)*b^{-1}=a^{-1}*(a*b)^3*b^{-1}$，即$a^2*b^2=(a*b)^2$

同理:由$a^4*b^4=(a*b)^4$　可得$a^3*b^3=(b*a)^3$

由$a^5*b^5=(a*b)^5$　可得$a^4*b^4=(b*a)^4$

因此$(a^3*b^3)*(b*a)=(b*a)^4=a^4*b^4$ 即 $b^4*a=a*b^4$

同样可得$(a^2*b^2)*(b*a)=(b*a)^3=a^3*b^3$ 即 $b^3*a=a*b^3$

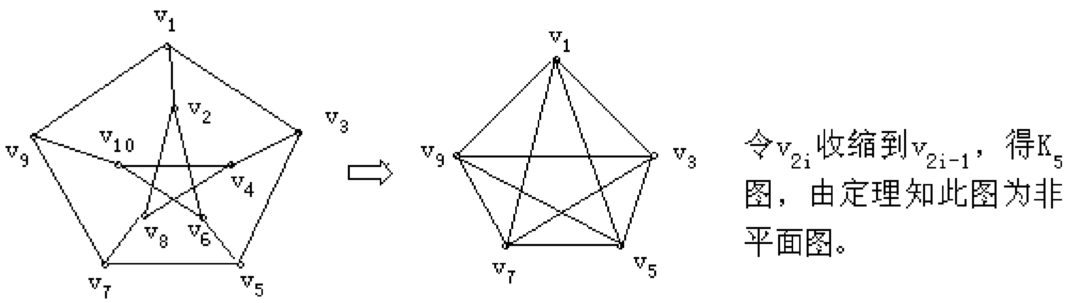
由于$(a*b)*b^3=a*b^4=b^4*a=b*(b^3*a)=b*(a*b^3)=(b*a)*b^3$

故 $a*b=b*a$

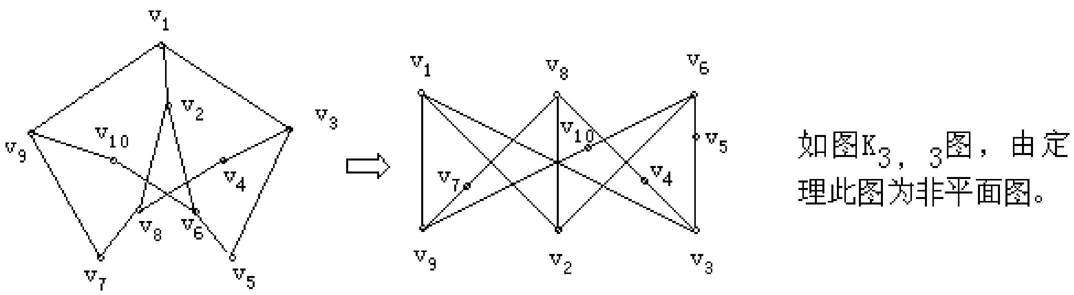
所以<G,*>是阿贝尔群

五、8%

法一：



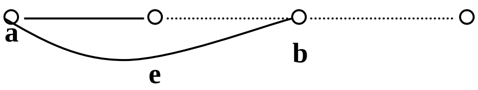
法二：



六、10%

证明:设 L 是图 G 中最长路的一条，设其长度为 m，这条路的一个端点设为 a，考察 G 中与 a 关联的那些边，这些边中任何一条边的另一端必在 L 上，否则，将这个结点加进 L 中就得一条更长的路。

若 G 中每个结点度数至少为 2，则 a 也要关联于一条不在 L 上的边 e，若 e 是环，则 e 本身就是回路，否则，边 e 的另一端点 b（与 a 不同的点）在 L 上，而连通 L 中 a 到 b 的子路与边 e 组成一个回路。



七、12%（每小题 6 分）

1、

①$\neg P$	P
②$\neg R \vee P$	P
③$\neg R$	T①②I
④$(S \wedge Q) \to R$	P
⑤$\neg R \to \neg(S \wedge R)$	T④E
⑥$\neg(S \wedge Q)$	T③⑤I
⑦$\neg S \vee \neg Q$	T⑥E
⑧S	P(附加前提)
⑨$\neg Q$	T⑦⑧I
⑩$S \to \neg Q$	CP

2、

①$(\exists x)P(x)$	P（附加前提）
②$P(e)$	ES①
③$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	P
④$P(e) \to Q(e)$	US③
⑤$Q(e)$	T②④I
⑥$(\exists x)Q(x)$	EG⑤
⑦$(\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$	CP

八、12%

⑴$(\exists x)P(x) \to (\forall x)((P(x) \vee Q(x)) \to R(x))$ P

⑵ $(\exists x)P(x)$ P

⑶ $(\forall x)((P(x)\vee Q(x))\to R(x))$ T⑴⑵I

⑷ $P(e)$ ES⑵

⑸ $(\exists x)Q(x)$ P

⑹ $Q(d)$ ES⑸

⑺ $(P(d)\vee Q(d))\to R(d)$ US⑶

⑻ $Q(d)\vee P(d)$ T⑹I

⑼ $R(d)$ T⑺⑻I

⑽ $P(e)\wedge R(d)$ T⑷⑼I

⑾ $(\exists y)(P(e)\wedge R(y))$ EG⑽

⑿ $(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge R(y))$ EG⑾

九、12%

（1）自反性：$\forall(x,y)\in X$,由于$x+y=x+y$,故$<(x,y),(x,y)>\in R$

(2) 对称性：$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X$,当$<(x_1,y_1),(x_2,y_2)>\in R$时

即$x_1+y_2=x_2+y_1$ 亦 $x_2+y_1=x_1+y_2$有$<(x_2,y_2),(x_1,y_1)>\in R$

（3）传递性：$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in X$,

当$<(x_1,y_1),(x_2,y_2)>\in R,<(x_2,y_2),(x_3,y_3)>\in R$时

即$\begin{cases}x_1+y_2=x_2+y_1\\x_2+y_3=x_3+y_2\end{cases}$相加化简得$x_1+y_3=x_3+y_1$故$<(x_1,y_1),(x_3,y_3)>\in R$

由等价关系的定义知 R 是 X 上的等价关系。

2、$X/R=\{[<0,2>]_R,[<1,2>]_R\}$