

# 《离散数学》练习题

——数理逻辑

## 一、填空题

1. 设  $p$ : 我上课;  $q$ : 我玩游戏。则“我不会上课玩游戏。”符号化为\_\_\_\_\_。
2. 命题“如果地球倒转, 则我们能回到唐朝。”的真值为\_\_\_\_\_。
3. 设  $F(x)$ :  $x$  是狗;  $G(x)$ :  $x$  是宠物。则“有的狗是宠物, 但不是所有的狗都是宠物。”的符号化为\_\_\_\_\_。
4.  $A$  是含  $p$ 、 $q$ 、 $r$ 、 $s$  四个命题变元的公式, 其极小项  $m_6$  = \_\_\_\_\_; 极大项  $M_7$  = \_\_\_\_\_。若  $A$  是可满足式, 则其主析取范式中所含极小项的个数为 \_\_\_\_\_; 其主合取范式中所含极大项的个数为 \_\_\_\_\_。
5. 公式  $\forall x \exists y (F(x) \wedge G(x, y)) \rightarrow \forall y F(y)$  中, 量词  $\forall x$  的辖域是 \_\_\_\_\_, 此公式的类型为 \_\_\_\_\_ (永真式, 永假式, 非永真可满足式)。
6. 公式  $A = \neg (p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$  的对偶式  $A^* =$  \_\_\_\_\_。
7. 推理规则  $A, \neg A \vee B \Rightarrow B$  称为 \_\_\_\_\_ 规则。
8.  $\forall x F(x, y) \wedge \exists x G(x)$  的前束范式为 \_\_\_\_\_。

## 二、单项选择题

1. 下列语句中不是命题的是 ( )  
A: 2050 年人类将移居火星。      B:  $x = 5$       C: 明天考试。      D: 我不会开车。
2. 设  $p$ : 我过了英语四级。  $q$ : 我考研。  $r$ : 我找工作。 命题“如果我过了英语四级, 我就考研, 否则, 我去找工作。”的形式化表达为 ( )。  
A:  $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$ ;      B:  $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$ ;      C:  $p \rightarrow (q \vee r)$ ;      D:  $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$ 。
3. 下列公式中, 是关于  $p$ 、 $q$ 、 $r$  的主析取范式的公式是 ( )。  
A:  $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$ ;      B:  $p \wedge \neg q \wedge \neg r$ ;  
C:  $p \vee \neg q \vee \neg r$ ;      D:  $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (r \wedge q \wedge \neg p)$
4. 设  $p$ : 我做作业。  $q$ : 我睡觉。 则下列语句中能形式化为  $p \rightarrow q$  的语句是 ( )。  
A: 只有做完作业, 我才睡觉。      B: 只要做完作业, 我就睡觉。  
C: 我不睡觉, 除非我做完了作业。      D: 除非我做完了作业, 否则我不睡觉。
5. 下列公式中有三个是等值的, 与其他公式不等值的是 ( )。  
A:  $\neg (p \leftrightarrow q)$ ;      B:  $(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$ ;  
C:  $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ ;      D:  $\neg (p \rightarrow q) \wedge \neg (q \rightarrow p)$ 。
6. 下面联结词集合中不是全功能集的是 ( )。  
A:  $\{\neg, \wedge\}$ ;      B:  $\{\neg, \vee\}$ ;      C:  $\{\neg, \rightarrow\}$ ;      D:  $\{\wedge, \vee\}$ 。
7. 由  $n$  个命题变元组成的不等值的公式的个数为 ( )  
A:  $2n$       B:  $2^n$       C:  $n^2$       D:  $2^{2^n}$
8.  $B$  是与  $x$  无关的公式, 下列命题中真值为 0 的是 ( )。  
A:  $\forall x (F(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge B$ ;      B:  $\exists x (F(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x F(x) \wedge B$ ;  
C:  $\exists x (B \rightarrow F(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x F(x)$ ;      D:  $\forall x (F(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x F(x) \rightarrow B$ 。
9. 取个体域为整数集合,  $\cdot$  是普通乘法, 则下列公式中为假命题的是 ( )。  
A:  $\forall x \exists y (x \cdot y = 1)$ ;      B:  $\exists x \forall y (x \cdot y = y)$ ;  
C:  $\forall x \exists y (x \cdot y = x)$ ;      D:  $\exists x \forall y (x \cdot y = 0)$ 。

10.  $\forall x(F(x,y) \wedge G(y,z)) \rightarrow F(x,y)$  是 ( )。
- A: 命题公式;      B: 闭式;      C: 一阶逻辑公式      D: 前束范式。
11. 下面一阶公式是前束范式的是 ( )
- A:  $\forall x \exists y \forall z (F(x,y) \rightarrow G(z))$       B:  $\neg \forall x \exists y F(x,y)$   
 C:  $\forall x \exists y \forall x (F(x,y) \wedge H(x,y))$       D:  $\forall x(F(x,y) \wedge G(y,z)) \rightarrow F(x,y)$
12. 令  $F(x)$ :  $x$  是火车。  $G(x)$ :  $x$  是轮船。  $H(x, y)$ :  $x$  比  $y$  跑得快。可将命题“所有的火车都比某些轮船跑的快”符号化为 ( )。
- A:  $\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \rightarrow H(x,y)))$ ;      B:  $\forall x (F(x) \wedge \exists y (G(y) \rightarrow H(x,y)))$ ;  
 C:  $\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge H(x,y)))$ ;      D:  $\forall x (F(x) \wedge \exists y (G(y) \wedge H(x,y)))$ 。
13. 在公式  $\forall x F(x,y) \rightarrow \exists y G(x,y)$  中, 变元  $x$  是 ( )。
- A: 自由变元      B: 约束变元  
 C: 既是自由变元, 又是约束变元;      D: 既不是自由变元, 又不是约束变元。
14.  $\forall x (F(x) \vee G(x))$  ( )  $\forall x F(x) \vee \forall x G(x)$ 。
- A: = ;      B:  $\Rightarrow$  ;      C:  $\Leftarrow$  ;      D:  $\Leftrightarrow$
15. 下列式子中, 不是推理规则的是 ( )
- A:  $(A \rightarrow B), \neg B \models \neg A$  ;      B:  $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \models (A \leftrightarrow C)$   
 C:  $A, B \models (A \wedge B)$ ;      D:  $A \models (A \vee B)$
16. 皇帝不是穷人, 在守财奴之中也有穷人, 所以, 有一些\_\_\_\_\_并不是\_\_\_\_\_。  
 填在\_\_\_\_\_上的正确答案是 ( )。
- A: 皇帝, 皇帝      B: 守财奴, 守财奴      C: 守财奴, 皇帝      D: 皇帝, 守财奴

三、画出公式  $((p \vee q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow q)) \wedge \neg q$  的真值表, 并说明公式的类型。

四、求公式  $(q \leftrightarrow \neg p) \rightarrow r$  的主析取范式和主合取范式。

五、设个体域  $D=\{a,b\}$ ,  $A=\forall x (F(x) \rightarrow \exists x G(x,y))$  求  $A$  的不带量词的等价式。

六、求公式  $p \vee (q \leftrightarrow \neg r)$  的仅含联结词  $\neg, \wedge$  的等值式。

七、求公式  $\neg \forall x (F(x) \rightarrow \exists x G(x,y)) \vee \exists x H(x,y)$  的前束范式。

八、下面推理有错误, 请重新书写出全部正确的推理过程和有效结论。

- |   |              |
|---|--------------|
| (1) $\forall x F(x) \wedge \neg \forall x G(x)$ | 前提引入         |
| (2) $\forall x F(x)$                            | (1) 化简       |
| (3) $F(t)$                                      | (2) UI 规则    |
| (4) $\neg \forall x G(x)$                       | (1) 化简       |
| (5) $\neg G(t)$                                 | (4) UI 规则    |
| (6) $F(t) \wedge \neg G(t)$                     | (2) (5) 合取引入 |
| (7) $\forall x (F(x) \wedge \neg G(x))$         | (6) UG 规则    |

九、先符号化下面的推理, 再用构造证明法证明之:

(1) 如果天气很热并且他不去上课, 他必去游泳; 如果他去上课, 他不会穿拖鞋; 今天天气很热; 他穿着拖鞋; 所以, 他去游泳。

(2) 有些学生相信所有的老师, 任何一个学生都不相信骗子。所以, 老师都不是骗子。