《离散数学》阶段练习

一、填空题

1．设A是非空集合，$P(A)$是其幂集，则代数系统$\langle P(A),\cup\rangle$中，$\cup$运算的幺元是$\underline{\varnothing}$，零元是$\underline{A}$.

2．设G是n阶群，S是其m阶子群，则m与n必有关系：$\underline{m|n}$.

3．设$\langle G,*\rangle$为无限循环群，且$G=\langle a\rangle$，则$\langle G,*\rangle$同构于$\underline{\langle Z,+\rangle}$群.

4．设Z是整数集合，Z上的二元运算$\circ$定义为：$\forall x,y\in Z,x\circ y=x+y-3$，则群$\langle Z,\circ\rangle$中的单位元为$\underline{3}$；零元为<u>没有</u>；$x^{-1}=\underline{6-x}$.

5．三元对称群S_3的子群$\{(1),(12)\}$的左陪集划分为$\underline{\{\{(1),(12)\},\{(13),(132)\},\{(23),(123)\}\}}$；右陪集划分为$\underline{\{\{(1),(12)\},\{(13),(123)\},\{(23),(132)\}\}}$.

6．8元置换$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&1&8&6&5&2&3&7\end{pmatrix}$的轮换表示为$\underline{(1462)(387)}$.

7．$\langle A,\le\rangle$是格，$\forall a,b,c\in A$均有分配不等式：$\underline{a\wedge(b\vee c)\ge(a\wedge b)\vee(a\wedge c)}$.

8．$\langle L,\wedge,\vee\rangle$是模格，充分必要条件是L中不含与五角子格同构的子格.

9．$\langle A,\wedge,\vee\rangle$是有限布尔代数，则必有$\underline{|A|=2^n}$.（$|A|$是集合$A$的基数）

10．$A=\{a,b,c,d\}$，布尔代数$\langle P(A),\cap,\cup\rangle$的原子集合为$\underline{\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}}$.

11．$\langle L,|\rangle$是布尔代数，L是30的因子集合，则30的布尔表达式$=\underline{2\vee3\vee5}$.

12．$\langle L,|\rangle$是有界格，L是24的因子集合，则3的补元是$\underline{8}$.

13．$A=\{a,b,c,d\}$，$P(A)$是其幂集，则布尔代数$\langle P(A),\cap,\cup,'\rangle$的原子是$\underline{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}}$.

14．满足<u>含幺、可交换和无零因子</u>的环为整环.

二、选择题

1．在实数集合R上，下列定义的运算中不可交换的只有（D）

A：$a*b=a+b-2$；　B：$a*b=\max\{a,b\}$　C：$a*b=|a-b|$；　D：$a*b=a+2b$

2．$+$是整数集Z上的普通加法，下列集合中能成$\langle Z,+\rangle$的子代数的是（D）

A：$\{-1,0,1\}$　B：$\{2n+1\,|\,n\in Z\}$　C：$\{3n+1\,|\,n\in Z\}$　D：$\{2n\,|\,n\in Z\}$

3．代数系统$\langle A,*\rangle$的零元素θ的定义是(D)

A：$\forall x \in A, \exists \theta \in A, x * \theta = \theta * x = x$　　　B：$\forall x \in A, \exists \theta \in A, x * \theta = \theta * x = \theta$

C：$\exists \theta \in A, \forall x \in A, x * \theta = \theta * x = x$　　　D：$\exists \theta \in A, \forall x \in A, x * \theta = \theta * x = \theta$

4．设G是一个6阶群，则下面命题中肯定为假的是（D）

A：G中含有1阶子群　B：G中含有2阶子群　C：G中含有3阶子群　D：G中含有4阶子群

5．A是集合，*是定义在A上的二元运算中，则$\langle A, * \rangle$只有可能成为（A）

A：群；　　B：环；　　C：域；　　D：格

6．设$\langle A, \oplus, * \rangle$是环，则下列说法不正确的是（D）

A：$\langle A, \oplus \rangle$是交换群；B：$\langle A, * \rangle$是半群；C：*对$\oplus$是可分配的；　D：$\oplus$对*是可分配的

7．设$\langle A, +, \bullet \rangle$是域，则下列说法不正确的是（C）

A：$\langle A, +, \bullet \rangle$必是交换环　　　B：$\langle A, +, \bullet \rangle$必是含幺环

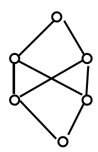
C：$\langle A, +, \bullet \rangle$必是含零因子环　　　D：$\langle A, +, \bullet \rangle$必是整环

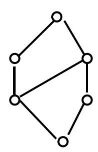
8．$\langle L, \wedge, \vee \rangle$是格，$\forall a, b, c \in L$，下面式子中不成立的是（B）

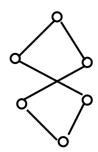
A：$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$　　　B：$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

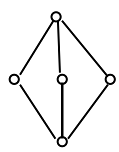
C：$a \vee ((a \vee b \vee c) \wedge a) = a$　　　D：$a \wedge (b \vee c) = (b \vee c) \wedge a$

9．下列各哈斯图中，不是格的是（A）


A


B


C


D

10．设$\langle A, \oplus, * \rangle$是域，$|A| > 1$，则下列说法不正确的是（B）

A．$\langle A, \oplus \rangle$是交换群　　　B．$\langle A, * \rangle$是交换群

C．*对$\oplus$是可分配的　　　D．$\langle A, \oplus, * \rangle$是环

11．下列集合关于整除关系构成的偏序集中构不成格的是 (B)

A. $L = \{1, 2, 3, 6, 12\}$　　　B. $L = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

C. $L = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$　　　D. $L = \{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n \mid n \in Z^+\}$

三、$G=\langle a\rangle$ 是 14 阶循环群，分别写出 G 的所有生成元和所有子群，以及所有非平凡子群的左陪集划分。

答案：

生成元：$a,a^3,a^5,a^9,a^{11},a^{13}$；

子群：$\langle e\rangle,\langle a\rangle,\langle a^2\rangle,\langle a^7\rangle$；

非平凡子群：

$\langle a^2\rangle$；对应的左陪集划分：$\{\{a^2,a^4,a^6,a^8,a^{10},a^{12},a^{14}\},\{a,a^3,a^5,a^7,a^9,a^{11},a^{13}\}\}$；

$\langle a^7\rangle$；对应的左陪集划分：$\{\{a,a^8\},\{a^2,a^9\},\{a^3,a^{10}\},\{a^4,a^{11}\},\{a^5,a^{12}\},\{a^6,a^{13}\},\{a^7,a^{14}\}\}$.

四、设 $G=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$，$\forall x,y\in G,x*y=(x+y)\bmod 8$，+是普通加法。

（1）构造 $\langle G,*\rangle$ 运算表；

（2）写明运算的幺元，4 和 6 元素的逆元；

（3）计算群的阶，4 和 6 元素的阶；

（4）写出 G 的所有生成元和所有子群；

（5）写出所有非平凡子群的左陪集划分.

答案：

（1）

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

（2）幺元：0；

$4^{-1}=4$，$6^{-1}=2$；

（3）$|G|=8$；

$|4|=2$，$|6|=4$；

（4）生成元：$1,3,5,7$；

子群：$\langle\{0\},*\rangle$，$\langle\{0,1,2,3,4,5,6,7\},*\rangle$，

$\langle\{0,2,4,6\},*\rangle$，$\langle\{0,4\},*\rangle$；

（5）非平凡子群：$\langle\{0,2,4,6\},*\rangle$，对应的左陪集划分：$\{\{0,2,4,6\},\{1,3,5,7\}\}$；$\langle\{0,4\},*\rangle$，对应的左陪集划分：$\{\{0,4\},\{1,5\},\{2,6\},\{3,7\}\}$.

五、在整数集 Z 上定义运算*：$\forall a,b\in Z, a*b=a+b-2$，问：$\langle Z,*\rangle$ 是什么代数系统？（半群、独异点、群、环、域）

答案：

半群	独异点	群	环	域
是	是	是	不是	不是

证明：

①显然*运算封闭；

②$\because \begin{cases}(a*b)*c=(a+b-2)*c=(a+b-2)+c-2=a+b+c-4\\ a*(b*c)=a*(b+c-2)=a+(b+c-2)-2=a+b+c-4\end{cases}$，$\therefore$ *运算满足结合律；

③$\because \begin{cases}a*2=a+2-2=a\\ 2*a=2+a-2=a\end{cases}$，$\therefore 2$ 为*运算的幺元；

④$\because \begin{cases}a*(4-a)=a+4-a-2=2\\ (4-a)*a=4-a+a-2=2\end{cases}$，$\therefore$任意元素均有逆元；

综上：$\langle Z,*\rangle$ 是半群、独异点、群.

六、设有 $\{1,2,3,4,5\}$ 的置换如下：$\alpha=(123), \beta=(45), \gamma=(15)(24), \delta=(13)(45)$，试求 $\alpha\circ\beta, \alpha\circ\beta\circ\gamma, \delta^{-1}$，并解方程 $\alpha\circ x=\beta, y\circ\gamma=\delta$.

答案：

由题可得：

$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&5&4\end{pmatrix}, \gamma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}, \delta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&5&4\end{pmatrix}$；

$\therefore a\circ\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}=(123)(45)$；

$a\circ\beta\circ\gamma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&5&1&2\end{pmatrix}=(14)(235)$；

$\delta^{-1}=\begin{pmatrix}3&2&1&5&4\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}=(31)(54)$；

$\alpha\circ x=\beta\Rightarrow x=\alpha^{-1}\circ\beta=\begin{pmatrix}2&3&1&4&5\\1&2&3&5&4\end{pmatrix}=(213)(45)$；

$y\circ\gamma=\delta\Rightarrow y=\delta\circ\gamma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix}=(13524)$.

七、设$\langle A,\le\rangle$是分配格，$a,b\in A$，且$a<b$，证明$f(x)=(x\vee a)\wedge b$是一个从A到B的同态映射，其中$B=\{x\mid x\in A,a\le x\le b\}$.

答案：

①先证$f(x)\in B$，即$a\le(x\vee a)\wedge b\le b$：

$$\because\begin{cases}(x\vee a)\wedge b\le b\\(x\vee a)\wedge b=(x\wedge b)\vee(a\wedge b)=(x\wedge b)\vee a\ge a\end{cases}$$

$\therefore a\le(x\vee a)\wedge b\le b$，即$f(x)\in B$.

②再证$\forall x,y\in A$，有$\begin{cases}f(x\vee y)=f(x)\vee f(y)\\f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)\end{cases}$：

$$\because\begin{cases}f(x\vee y)=(x\vee y\vee a)\wedge b=((x\vee a)\vee(y\vee a))\wedge b=((x\vee a)\wedge b)\vee((y\vee a)\wedge b)=f(x)\vee f(y)\\f(x\wedge y)=((x\wedge y)\vee a)\wedge b=(x\vee a)\wedge(y\vee a)\wedge b=((x\vee a)\wedge b)\wedge((y\vee a)\wedge b)=f(x)\wedge f(y)\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}f(x\vee y)=f(x)\vee f(y)\\f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)\end{cases}$$

综上：$f(x)=(x\vee a)\wedge b$是一个从A到B的同态映射.

八、G是群，e是单位元，证明：

（1）如果$\forall x\in G$均有$x^2=e$，则G为交换群.

（2）如果G是非交换群，则必存在着非单位元$a,b\in G$且$a\ne b$，使得$ab=ba$.

答案：

（1）$\forall a,b\in G$，

$$\because\begin{cases}a^2=b^2=e\\(ab)(ab)=(ab)^2=e\end{cases}\Rightarrow a^2b^2=(aa)(bb)=e=(ab)(ab)$$

$\therefore ab=ba$，故G为交换群.

（2）$\because G$是非交换群，$\therefore\exists x\in G$，使得$x^2\ne e$，即$x^{-1}\ne x$；

不妨设$x^{-1}=y$，则有$xy=yx=e(y\ne x)$；

即存在非单位元$a,b\in G$且$a\ne b$，使得$ab=ba$得证.

九、设 f 是群 $\langle G_1,*\rangle$ 到群 $\langle G_2,\circ\rangle$ 的同态，证明：同态像 $\langle f(G_1),\circ\rangle$ 是 $\langle G_2,\circ\rangle$ 的一个子群；同态核 $\langle K,*\rangle$ 是 $\langle G_1,*\rangle$ 的一个子群.

答案：

（1）$\forall a,b\in f(G_1)$，至少存在 $x,y\in G_1$，使得 $f(x)=a,f(y)=b$，

有 $a\circ b^{-1}=f(x)\circ(f(y))^{-1}=f(x*y^{-1})\in f(G_1)$，$\therefore\langle f(G_1),\circ\rangle$ 是 $\langle G_2,\circ\rangle$ 的一个子群.

（2）$\forall A,B\in K$，有 $f(A)=f(B)=e$，

$\because f(A*B^{-1})=f(A)\circ(f(B))^{-1}=e\circ e^{-1}=e$，$\therefore A*B^{-1}\in K$，$\therefore\langle K,*\rangle$ 是 $\langle G_1,*\rangle$ 的一个子群.

十、格 $\langle L,|\rangle$，$L=\{1,2,4,5,8,10,40\}$，关系是整除.

（1）画出格的 Hasse 图；

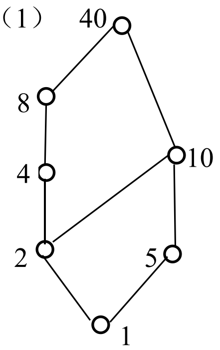
（2）画出 $\langle L,|\rangle$ 的所有非同构的四元子格和五元子格；

（3）指出各子格是否是分配格，是否是有补格；

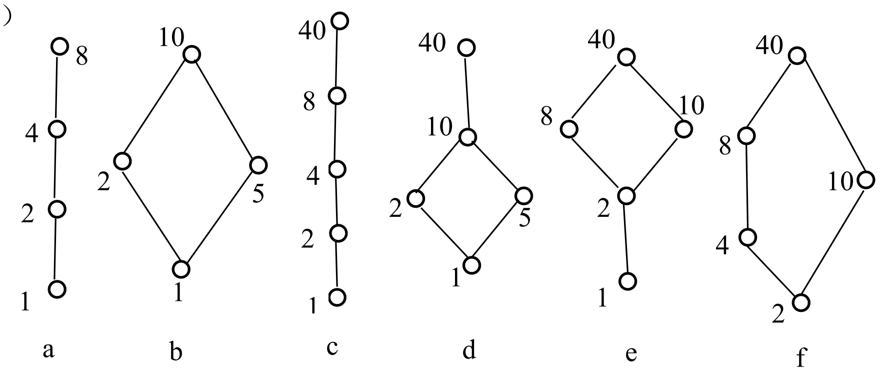
（4）上面各子格中有布尔代数吗？若有，指出原子.

答案：

（1）



（2）



（3）是分配格的：a，b，c，d，e；是有补格的：b，f；

（4）是布尔代数的：b；其原子为：2、5.

十一、设$\langle G,*\rangle$是一个群，常元$a\in G$. 定义：$\forall x,y\in G, x\circ y=x*a*y$. 证明：$\langle G,\circ\rangle$也是群.

答案：

①显然$\circ$运算封闭；

②$\because (x\circ y)\circ z=(x*a*y)*a*z=x*a*(y*a*z)=x\circ(y\circ z)$，$\therefore \circ$运算满足结合律；

③$\because \langle G,*\rangle$是群，$\therefore a$必可逆，$\therefore \begin{cases} x\circ a^{-1}=x*a*a^{-1}=x \\ a^{-1}\circ x=a^{-1}*a*x=x \end{cases}$，$\therefore a^{-1}$为$\circ$运算的幺元；

④$\because \begin{cases} x\circ(a^{-1}*x^{-1}*a^{-1})=x*a*(a^{-1}*x^{-1}*a^{-1})=a^{-1} \\ (a^{-1}*x^{-1}*a^{-1})\circ x=(a^{-1}*x^{-1}*a^{-1})*a*x=a^{-1} \end{cases}$，$\therefore a^{-1}*x^{-1}*a^{-1}$为$x$的逆元；

综上：$\circ$运算封闭、满足结合律、有幺元且每个元素都可逆，因此$\langle G,\circ\rangle$是群.

十二、对格L中任意元素a,b,c，证明：

（1）$((a\wedge b)\vee(a\wedge c))\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c))=a\wedge b$；

（2）若$a\le c$，则$a\vee(b\wedge c)\le(a\vee b)\wedge c$.

答案：

（1）

$$\because \begin{cases} ((a\wedge b)\vee(a\wedge c))\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c))\le(a\wedge(b\vee c))\wedge(b\wedge(a\vee c))=(a\wedge(a\vee c))\wedge(b\wedge(b\vee c))=a\wedge b \\ ((a\wedge b)\vee(a\wedge c))\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c))\ge(a\wedge b)\vee((a\wedge c)\wedge(b\wedge c))=(a\wedge b)\vee((a\wedge b)\wedge c)=a\wedge b \end{cases}$$

$\therefore ((a\wedge b)\vee(a\wedge c))\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c))=a\wedge b$.

（2）

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a\le a\vee b \\ a\le c \end{array}\right\}\Rightarrow a\le(a\vee b)\wedge c \\ \left.\begin{array}{l} b\wedge c\le b\le a\vee b \\ b\wedge c\le c \end{array}\right\}\Rightarrow b\wedge c\le(a\vee b)\wedge c \end{array}\right\}\Rightarrow a\vee(b\wedge c)\le(a\vee b)\wedge c$$

十三、设φ是$\langle R,+\rangle$到$\langle R^{+},\bullet\rangle$的映射，其中$+,\bullet$分别是实数上的加法和乘法运算，且$\varphi:R\to R^{+}$，$\varphi(x)=e^{x}$.

（1）证明φ是同态映射；

（2）请写出同态像和同态核K；

（3）证明$\langle K,+\rangle$是$\langle R,+\rangle$的一个子群.

答案：

（1）$\forall x,y\in R$，有$\varphi(x+y)=e^{x+y}=e^{x}\bullet e^{y}=\varphi(x)\bullet\varphi(y)$，$\therefore\varphi$是同态映射.

（2）同态像：$\{e^{x}\mid x\in R\}$；同态核：$\{0\}$.

（3）$\because K=\{0\}$，显然$0+0^{-1}=0\in K$，$\therefore\langle K,+\rangle$是$\langle R,+\rangle$的子群.

十四、设f是$V_1=\langle S,*\rangle$到$V_2=\langle T,\circ\rangle$的满同态映射，（$*,\circ$均为二元运算），证明：

（1）当运算$*$满足结合律时，T也满足结合律；

（2）如果$\langle S,*\rangle$关于$*$有幺元e，那么$f(e)$是$\langle T,\circ\rangle$中关于$\circ$的幺元.

答案：

（1）$\because f$满射，$\therefore\forall A,B,C\in T,\exists a,b,c\in S,s.t.A=f(a),B=f(b),C=f(c)$，

$\therefore(A\circ B)\circ C=(f(a)\circ f(b))\circ f(c)=f(a*b)\circ f(c)=f[(a*b)*c]$

$=f[a*(b*c)]=f(a)\circ(f(b)\circ f(c))=A\circ(B\circ C)$

$\therefore T$满足结合律.

（2）$\because f$满射，$\therefore\forall y\in T,\exists x\in S,s.t.y=f(x)$，

$$\therefore\begin{cases}y\circ f(e)=f(x)\circ f(e)=f(x*e)=f(x)=y\\ f(e)\circ y=f(e)\circ f(x)=f(e*x)=f(x)=y\end{cases}$$

$\therefore f(e)$是$\langle T,\circ\rangle$中关于$\circ$的幺元.

十五、 设$\langle L,\wedge,\vee\rangle$是有补分配格，证明：对$L$中任意元素$a,b$，有

（1）$(a\wedge b)'=a'\vee b'$；

（2）$(a\vee b)'=a'\wedge b'$.

答案：

（1）$\begin{cases}(a\wedge b)\wedge(a'\vee b')=((a\wedge b)\wedge a')\vee((a\wedge b)\wedge b')=0\\(a\wedge b)\vee(a'\vee b')=(a\vee(a'\vee b'))\vee(b\vee(a'\vee b'))=1\end{cases}\Rightarrow(a\wedge b)'=a'\vee b'$

（2）$\begin{cases}(a\vee b)\wedge(a'\wedge b')=(a\wedge(a'\wedge b'))\vee(b\wedge(a'\wedge b'))=0\\(a\vee b)\vee(a'\wedge b')=((a\vee b)\vee a')\wedge((a\vee b)\vee b')=1\end{cases}\Rightarrow(a\vee b)'=a'\wedge b'$

十六、 分别举出具有下列性质的群的一个实例

（1）只有一个子群；

（2）只有两个子群；

（3）只有三个子群；

（4）有无穷多个子群；

（5）非交换群.

答案：

（1）$\langle Z_1,\oplus\rangle$；

（2）$\langle Z_2,\oplus\rangle$；

（3）$\langle Z_6,\oplus\rangle$；

（4）$\langle R,+\rangle$；

（5）$\langle A_n,\bullet\rangle$. 其中$A_n$为$n$阶可逆矩阵（$n\geq 2$），$\bullet$为矩阵乘法.