第四章 二元关系和函数

关系和函数是数学中的最重要的两个概念。在计算机科学的各个分支中，关系和函数也是应用得极为广泛的概念。人与人之间有父子、兄弟、师生关系；两数之间有大于、等于、小于关系；元素与集合之间有属于关系；计算机科学中程序间的调用关系。集合论为刻画这种联系提供了一种数学模型——关系，它仍然是一个集合，以那种具有联系的对象组合为其成员。例如，在关系数据库模型中，每个数据库都是一个关系。计算机程序的输入和输出构成一个二元关系。对于一个确定性程序来说，输出是输入的函数。在各种计算机程序设计语言中，关系和函数都是必不可少的概念。可以说，在计算机科学和技术中，关系和函数无处不在，几乎找不到能够离开它们的地方。

集合论中的关系研究，并不以个别的关系为主要对象，而是关注关系的一般特性、关系的分类等。本章用集合论的观点讨论关系和函数，将它们定义为某种特殊类型的集合。首先把关系的概念加以形式化，然后讨论关系的矩阵和关系图的表示。在计算机表达关系和确定关系的各种性质时，关系矩阵甚为有用。继之，阐述了关系的各种性质以及某些重要的关系，最后讨论了集合的大小问题。二元关系是指两个客体之间的关系。本章主要讨论二元关系和函数。

4.1 序偶与笛卡尔积

定义 4.1.1 （有序对(或序偶)， ordered pairs) 由两个元素 x 和 y （允许 $x=y$ ）按一定次序排列组成的二元组记作$<x, y>$，其中 x 是它的第一元素， y 是它的第二元素。注意，第一、二元素未必不同。

如平面直角坐标系中的任意一点坐标（x, y）均是序偶，而全体这种实数对的集合 $\{(x, y) \mid x\in R \wedge y\in R\}$就表示整个平面。

有序对$<x, y>$ 具有以下性质：

（1） 当 $x \neq y$ 时，$<x, y>\neq<y, x>$ 。

（2） $<x, y>=<u, v>$ 的充要条件是 $x=u$ 且 $y=v$ 。

（3） $<x, x>$也是序偶。

这些性质是二元集 $\{x, y\}$ 所不具备的。例如当 $x\neq y$ 时有$\{x, y\}=\{y, x\}$， 原因是有序对中的元素是有序的，而集合中的元素是无序的。再例如 $\{x, x\}=\{x\}$ 因为集合元素是互异的。

由性质（2）可推出 $<x, y>=<y, x>$的充要条件是 $x= y$ 。

有序对的概念可以进一步推广到多元有序组。

定义 4.1.2 n 元有序组 若 $n\in N$ 且 $n>1$,，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个元素，则 n 元组$<x_1,x_2,\cdots,x_n>$定义为

当 n=2 时，二元组是有序对$<x_1,x_2>$,

当 $n\neq2$ 时，$<x_1,x_2,\cdots,x_n>=<<x_1,x_2,\cdots x_{n-1}>, x_n>$

本质上, n 元有序组依然是序偶。

n元有序组有如下性质：

$<x_1,x_2,\cdots x_i, \cdots,x_n>=<y_1,y_2,\cdots y_i\cdots y_n>$的充要条件是 $x_1= y_1, x_2>= y_2, \cdots, x_i=y_i, \cdots, x_n=y_n$,

前面提到，一个序偶$<x, y>$ 的两个元素可来自不同的集合，若第一元素取自集合 A, 第二元素取自集合 B，则由 A,B 中的元素，可得若干个序偶，这些序偶构成的集合，描绘出集

合 A 与 B 的一种特征，称为笛卡尔乘积。其具体定义如下：

定义 4.1.3 设 A, B 为集合，用 A 中元素为第一元素，B 中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合称为**集合 A 和 B 的笛卡儿积(Cartesian product)**，又称作直积，记作 A x B 。

A 和 B 的笛卡儿积的符号化表示为

$A\times B=\{<x,y> \mid x\in A\wedge y\in B\}$

定义 4.1.4 n 阶笛卡儿积(Cartesian product) 若 $n\in N$，且 $n>1$，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个集合，它们的 n 阶笛卡儿积记作 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，并定义为:

$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{<x_1,x_2,\cdots,x_n>|x_1\in A_1\wedge x_2\in A_2,\cdots, x_n\in A_n\}$

当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 简记为 A^n

例 4.1.1 设 $A=\{1,2\}$，$B=\{a,b,c\}$，$C=\{\varnothing\}$，R 为实数集，则

（1） $A\times B=\{<1,a>，<1,b>，<1,c>，<2,a>，<2,b>，<2,c>\}$

$B\times A=\{<a,1>，<b,1>，<c,1>，<a,2>，<b,2>，<c,2>\}$

$\varnothing\times A=\varnothing$

（2）$A\times B\times C=(A\times B)\times C=\{<1,a,\varnothing>，<1,b,\varnothing>，<1,c,\varnothing>，<2,a,\varnothing>，<2,b,\varnothing>，<2,c,\varnothing>\}$

$A\times(B\times C)=\{<1,<a,\varnothing>>，<1,<b,\varnothing>>，<1,<c,\varnothing>>，<2,<a,\varnothing>>，<2,<b,\varnothing>>，<2,<c,\varnothing>>\}$

（3）$A^2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$

(4) $B^2=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>,<b,c>,<c,a>,<c,b>,<c,c>\}$

（5）$R^2=\{<x,y>\mid x,y$ 是实数$\}$，R^2 为笛卡儿平面。显然 R^3 为三维笛卡儿空间.

显然 $A\times B$ 与 $B\times A$ 所含元素的个数相同（A,B 是有限集合），但 $A\times B\neq B\times A$.

定理 4.1.1 若 A,B 是有穷集合，则有

$$|A\times B|=|A|\bullet|B| \text{(•为数乘运算)}$$

该定理由排列组合的知识不难证明.

定理 4.1.2 对任意有限集合 $A_1,\cdots,A_n$，有:

$$|A_1\times\cdots\times A_n|=|A_1|\bullet\cdots\bullet|A_n| \quad \text{(•为数乘运算)}$$

这是十分直观的，可用归纳法证明之。

定理 4.1.3 笛卡儿积与∪, ∩，~运算的性质 对任意的集合 A,B 和 C，

（1） $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

（2） $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

（3） $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

（4） $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

（5） $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

（6） $(B-C)\times A=(B\times A)-(C\times A)$

证明： 我们仅证明（1）和（5），其余完全类似。

（1）对任意 x，y，有

$$\begin{aligned}<x,y>\in A\times(B\cup C) &\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cup C)\\ &\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)\\ &\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\\ &\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B\vee<x,y>\in A\times C\\ &\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)\end{aligned}$$

（5）设$\langle x, y\rangle$为$A\times(B - C)$中任一序偶，那么$x\in A$，$y\in B$，$y\notin C$，从而$\langle x,y\rangle\in A\times B$，$\langle x, y\rangle\notin A\times C$，即$\langle x, y\rangle\in A\times B - A\times C$，$A\times(B - C)\subseteq(A\times B) - (A\times C)$得证。另一方面，设$\langle x, y\rangle$为$(A\times B) - (A\times C)$中任一序偶，那么$\langle x, y\rangle\in A\times B$，$\langle x, y\rangle\notin A\times C$，从而$x\in A$，$y\in B$，$y\notin C$（否则由于$x\in A$，$\langle x, y\rangle\in A\times C$），故可知$y\in B - C$，$\langle x, y\rangle\in A\times(B - C)$，于是$(A\times B) - (A\times C)\subseteq A\times(B - C)$得证。

这就完成了$A\times(B - C) = (A\times B) - (A\times C)$的证明。

证毕

定理 4.1.4 笛卡儿积与$\subseteq$运算的性质 1 对任意的集合 A,B 和 C，若$C\neq\varnothing$，则

$$(A\subseteq B)\Leftrightarrow(A\times C\subseteq B\times C)\Leftrightarrow(C\times A\subseteq C\times B)$$

该定理中的条件$C\neq\varnothing$是必须的，否则不能由$A\times C\subseteq B\times C$或$C\times A\subseteq C\times B$推出$A\subseteq B$。

定理 4.1.5 笛卡儿积与$\subseteq$运算的性质 2 对任意的集合 A,B,C 和 D，

$$(A\times B\subseteq C\times D) \Leftarrow (A\subseteq C\wedge B\subseteq D)$$

这两个定理留给读者自己完成证明。

定理 4. 1.6 对任意非空集合 A，B，有

$$(A\times B)\subseteq P(P(A\cup B))$$

证明：设$\langle x,y\rangle$为 A×B 中任一序偶，即$x\in A$，$y\in B$。现需证

$$\langle x,y\rangle = \{\{x\},\{x,y\}\}\in P(P(A\cup B))$$

由于$x\in A$,故$\{x\}\in P(A\cup B)$；又由于$x\in A$，$y\in B$，故$\{x,y\}\in P(A\cup B)$。因此，

$$\{\{x\},\{x,y\}\}\subseteq P(A\cup B)$$

即$\{\{x\},\{x,y\}\}\in P(P(A\cup B))$。

事实上，结论对 A，B 为空集时也真。

证毕

4.2 关系及表示

关系是客观世界存在的普遍现象，它描述了事物之间存在的某种联系。例如人类集合中的父子、兄弟、同学、同乡等；两个实数间的大于、小于、等于关系；集合中两条直线的平行、垂直等等。集合间的包含，元素与集合的属于……都是关系在各个领域中的具体表现，表述两个个体之间的关系，称为二元关系；表示三个以上个体之间的关系，称为多元关系。我们主要讨论二元关系。

我们常用符号 R 表示关系，如个体 a 与 b 之间存在关系 R，则记作 aRb, 或$\langle a,b\rangle\in R$，否则 a $\overline{R}$ b 或$\langle a,b\rangle\notin R$。R 只是关系的一种表示符号，至于是什么关系，需要时需注明。同时关系并不限于同一类事物之间，也存在于不同物体之间。如，旅客住店，张、王、李、赵四人，1，2，3 号房间，张住 1 号，李住 1 号，王住 2 号，赵住 3 号。若分别以 a,b，c,d 表示四人，R 表示住宿关系，则有$R=\{\langle a,1\rangle,\langle c,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle d,3\rangle\}$。因此我们看到住宿关系 R 是序偶的集合。

本节主要介绍关系的基本概念以及关系的表示方法。

定义 4.2.1 任何序偶的集合，确定了一个二元关系，并称该集合为一个二元关系，记作 R 。二元关系也简称关系。对于二元关系 R，如果$\langle x,y\rangle\in R$，也可记作 xRy。

定义并不要求 R 中的元素$\langle x, y\rangle$ 中的 x,y 取自哪个个体域。因此，R={<2,a><u,狗><钱币，思想>}也是一个二元关系。因为它符合关系的定义，但是无意义，显然对毫无意义的关

系的研究也无甚意义。若规定关系 R 中序偶$<x,y>$ 的 $x\in A, y\in B$，如上面的住店关系，这样的序偶构成的关系 R，称为从 A 到 B 的一个二元关系，由 $A\times B$ 的定义知，从 A 到 B 的任何二元关系，均是 $A\times B$ 的子集，因此有下面的定义。

定义 4. 2. 2 R 称为集合 A_1，A_2，…，A_{n-1} 到 A_n 上的 n 元关系（n-array relations）,如果 R 是 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_{n-1}\times A_n$ 的一个子集。当 $A_1=A_2=\cdots=A_{n-1}=A_n$ 时，也称 R 为 A 上 n 元关系。当 n = 2 时，称 R 为 A_1 到 A_2 的二元关系。n 元关系也可视为 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_{n-1}$ 到 A_n 的二元关系。

由于关系是集合（只是以序偶为元素)，因此，所有集合规定方式均适用于关系的确定。

当 A,B 均是有限集合时，因为$|A\times B|=|A|\bullet|B|$,而其子集的个数恰是幂集 $P(A\times B)$的元素个数,$|P(A\times B)|=2^{|A|\bullet|B|}$,所以由 A 到 B 共有 $2^{|A|\bullet|B|}$ 个不同的二元关系。

下面介绍一些特殊的二元关系。设 R 是 A 到 B 的二元关系

$\varnothing\subseteq A\times B$, 称 $\varnothing$ 为 A 到 B 的**空关系。**

$A\times B\subseteq A\times B$ ，称 $A\times B$ 为 A 到 B 的**全域关系。**

$I_A=\{<x, x>\mid x\in A\}$,称为 A 上**恒等关系。**

若 A 是实数集合或其子集，R 是 A 上的二元关系，可定义下面几种常见的二元关系：

若 $R=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\wedge x\le y\}$，则称 R 为**小于等于关系，**常记为≤。

若 $R=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\wedge x|y\}$，则称 R 为**整除关系**，常记为 |,其中 x|y 是 x 整除 y。

若 A 是任意集合，R 是 A 上的二元关系，下面的关系也常见：

若 $R=\{<x,y>|x\in P(A)\wedge y\in p(B)\wedge x\subseteq y\}$，则称 R 为**包含关系，**常记为⊆

若 $R=\{<x,y>|x\in P(A)\wedge y\in p(B)\wedge x\subset y\}$，则称 R 为**真包含关系，**常记为⊂

定义 4.2.3 设 R 是 A 到 B 的二元关系。

（1）用 xRy 表示 $<x,y>\in R$，意为 x，y 有 R 关系（为使可读性好，我们将分别场合使用这两种表达方式中的某一种)。$x\overline{R}y$ 表示$<x,y>\notin R$。

（2）由$<x,y>\in R$ 的所有 x 组成的集合称为关系 R 的**定义域**（domain）记作 Dom R，即

$$\mathrm{Dom}\,R=\{x\mid x\in A\wedge\exists y(y\in A\ \wedge<x,y>\in R)\}$$

（3）由$<x,y>\in R$ 的所有 y 组成的集合称为关系 R 的**值域**（range)，记作 Ran R，即

$$\mathrm{Ran}\,R=\{y\mid y\in B\wedge\exists x(x\in A\wedge<x,y>\in R)\}$$

（4）R 的定义域和值域的并集称为 R 的**域**，记作 FldR。形式化表示为：

$$\mathrm{Fld}R=\mathrm{Dom}R\cup\mathrm{Ran}R$$

一般地，若 R 是 A 到 B 的二元关系，有 Dom R⊆A, Ran R⊆B

例 4.2.1 设 A＝{1，2，3，4，5，6}，B＝{a ,b ，c, d}，

R＝{<2,a>，<2,b>，<3, b>，<4 c>，<6,c>}

那么如图 4.2.1 所示：

Dom R＝{2，3，4，6}， Ran R＝ {a , b ,c}

FldR={2，3，4，6, a , b ,c}

各箭头分别表示 2Ra，2Rb，3Rb，4Rc，6Rc。

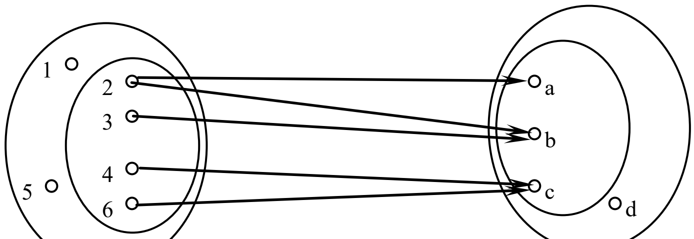


图 4.2.1

在此引入关系的表示法：

因为关系是一种特殊的集合，所以关系仍然能使用集合的

表示方法。如集合的列举法和描述法。除此之外，有限集合的二元关系亦可用图形来表示，这就是关系图。

定义 4.2.4 设集合 $A=\{x_1,x_2,\cdots, x_m\}$到 $B=\{y_1,y_2,\cdots, y_m\}$上的一个二元关系为 R,以集合 A、B 中的元素为顶点，在图中用“∘”表示顶点。若 x_iRy_j,则可自顶点 x_i 向顶点 y_j 引有向边$<x_i, y_j>$, 其箭头指向 y_j.用这种方法画出的图称为**关系图**（graph of relation）。

如图 4.2.1 就表示了例 4.2.1 中的关系 R。

如关系 R 是定义在一个集合 A 上，即 $R\subseteq A\times A$.我们只需要画出集合 A 中的每个元素即可。起点和终点重合的有向边称为**环**（loop）

例 4.2.2 求集合 A =｛1 , 2 , 3 , 4 ｝上的恒等关系、空关系、全关系和小于关系的关系图。

解：恒等关系 $I_A=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>\}$

空关系 $\varnothing=\{\ \}$

全关系

$A\times A=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<1,2>,<2,1>,<3,1>,<4,1>,<1,3>,<2,3>,<3,2>,$
$<4,2>,<1,4>,<2,4>,<3,4>,<4,3>\}$

小于关系 $L_A=\{<1,2>,<1,3>,<2,3>,<1,4>,<2,4>,<3,4>\}$

其关系图分别见图 4.2.2、图 4.2.3、图 4.2.4、图 4.2.5。

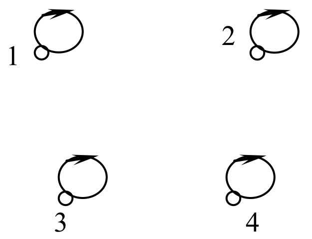


图 4.2.2

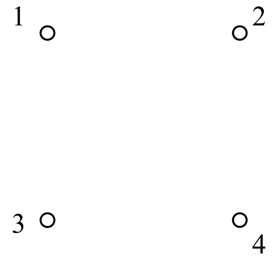


图 4.2.3

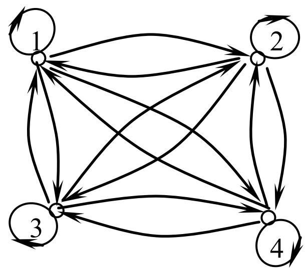


图 4.2.4

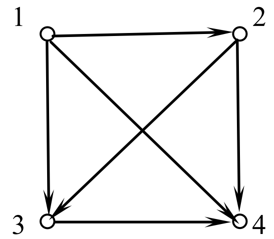


图 4.2.5

当 A 中元素的次序标定后，对于任何关系 R，R 的关系图与 R 的集合表达式是可以唯一相互确定的。我们也可看出关系图直观清晰，是分析关系性质的方便形式，但是对它不便于进行运算。关系还有一种便于运算的表示形式，称为关系矩阵（matrix of relation）。

定义 4.2.5 设 $R \subseteq A \times B$，$A = \{a_1, \cdots, a_m\}$，$B = \{b_1, \cdots, b_n\}$，那么 R 的关系矩阵 M_R 为一 $m \times n$ 矩阵，它的第 i , j 分量 r_{ij} 只取值 0 或 1，而

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ 当且仅当 } a_i R b_j \\ 0 \text{ 当且仅当 } a_i \overline{R} b_j \end{cases}$$

例如，图 4.2.1 所示关系 R 的关系矩阵为；

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

例 4.2.2 中的图 4.2.2，图 4.2.3，图 4.2.4，图 4.2.5，所示关系的关系矩阵分别是

$$M_{I_A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{\phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{A\times A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\qquad M_{L_A}=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

关系 R 的集合表达式与 R 的关系矩阵也可以唯一相互确定的，因此 R 的集合表达式、关系图、关系矩阵三者均可以唯一相互确定的。并且它们各有各的特点，可以根据不同的需要选用不同的表达方式。

4.3　关系的运算

A 到 B 的二元关系 R 是 A×B 的子集，亦即关系是序偶的集合。故在同一集合上的关系，可以进行集合的所有运算。作为集合对关系作并、交、差、补运算是理所当然的，但为了运算结果作为关系的意义更明确，我们也要求运算对象应有相同的域，从而运算结果是同一域间的关系。同前所述，这一要求也不是本质的。因此，在讨论关系运算时，我们有时忽略它们的域。

定义 4.3.1 设 R 和 S 为 A 到 B 的二元关系，其并、交、差、补运算定义如下：

$R\cup S=\{\langle x,y\rangle \mid xRy \vee xSy\}$

$R\cap S=\{\langle x,y\rangle \mid xRy \wedge xSy\}$

$R-S=\{\langle x,y\rangle \mid xRy \wedge \neg\, xSy\}$

$\sim R=A\times B-R=\{\langle x,y\rangle \mid \neg\, xRy\}$

例4.3.1　设 A={1,2,3,4}，若 $R=\{\langle x,y\rangle \mid (x-y)/2$ 是整数, $x, y\in A\}$ $S=\{\langle x,y\rangle \mid (x-y)/3$ 是正整数, $x, y\in A\}$

求　$R\cup S$ ，$R\cap S$ ，　$S-R$，$\sim R$ ，$R\oplus S$

解　$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

$S=\{\langle 4,1\rangle\}$

$R\cup S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$

$R\cap S=\varnothing$

$S-R=S=\{\langle 4,1\rangle\}$

$\sim R=A\times A-R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,3\rangle\}$

$R\oplus S=(R\cup S)-(R\cap S)$

$=R\cup S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$

以上是一个集合上两个不同的关系的运算结果仍是 A 上的一个关系。问题是在一个 n 元集合上，可有多少个不同的二元关系？

因为$|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $|P(A\times A)|=2^{n^2}$　所以共有2^{n^2}个不同的二元关系。

作为这个结论的推广，我们有：若$|A|=n,|B|=m$,则 A 到 B 有 2^{mn} 个不同的二元关系。

当然，集合的并、交、差、补运算诸性质对关系运算也成立。需要注意的是，作为关系时，补运算是对全关系而言的，并不是对于全集 E 而言的。

关系并、交、差、补的矩阵可如下方法求取：

$M_{R\cup S} = M_R \vee M_S$（矩阵对应分量作逻辑析取运算）

$M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S$（矩阵对应分量作逻辑合取运算）

$M_{R-S} = M_{R\cap\sim S} = M_R \wedge M_{\sim S}$

$M_{\sim S} = \sim (M_S)$（矩阵各分量作逻辑非运算）

由于关系是序偶的集合，所以它不同于一般的集合。除了可以进行集合的一般运算，还有自身所特有的一些运算，它们更为重要。

定义 4.3.2 设 R 是 A 到 B 的关系，R 的**逆关系或逆**（converse）是 B 到 A 的关系，记为 R^{-1}，规定为

$$R^{-1} = \{<y,x> \mid xRy\}$$

由定义很显然，对任意 $x\in A$, $y\in B$，

$$xRy \Leftrightarrow y R^{-1} x$$

若 M_R 为 R 的关系矩阵，那么

$$M_{R^{-1}} = M_R'$$（M’表示矩阵 M 的转置矩阵）

例 4.3.2 $I_A^{-1} = I_A$, $\varnothing^{-1} = \varnothing$, $(A\times B)^{-1} = B\times A$; $\leq$ 关系的逆是 $\geq$ 关系。

逆关系有下列性质。

定理 4.3.1 设 R 和 S 都是 A 到 B 上的二元关系，那么

（1） $(R^{-1})^{-1} = R$

（2） $(\sim R)^{-1} = \sim (R^{-1})$ （$A\times B$ 为全关系)

（3） $(R\cap S)^{-1} = R^{-1}\cap S^{-1}$ ，$(R\cup S)^{-1} = R^{-1}\cup S^{-1}$ ，$(R-S)^{-1} = R^{-1}-S^{-1}$

（4） $R\subseteq S$ 当且仅当 $R^{-1}\subseteq S^{-1}$

(5) $Dom(R^{-1})=Ran(R)$

(6) $Ran(R^{-1})=Dom(R)$

(7) $\varnothing^{-1}=\varnothing$

(8) $(A\times B)^{-1}=B\times A$

证明 这里仅证明（2）和（3）的第三式，其余证明留给读者。

对任意 $x\in A$, $y\in B$

$$\begin{aligned}<x,y>\in(\sim R)^{-1} &\Leftrightarrow <y,x>\in(\sim R)\\ &\Leftrightarrow \neg(<y,x>\in R)\\ &\Leftrightarrow \neg(<x,y>\in R^{-1})\\ &\Leftrightarrow <x,y>\in \sim(R^{-1})\end{aligned}$$

因此 $(\sim R)^{-1} = \sim (R^{-1})$ 。

（3）我们仅证 $(R-S)^{-1} = R^{-1}-S^{-1}$

对任意 $x\in A$, $y\in B$,

$$\begin{aligned}<x,y>\in(R-S)^{-1} &\Leftrightarrow <y,x>\in R-S\\ &\Leftrightarrow <y,x>\in R \wedge <y,x>\notin S\\ &\Leftrightarrow <x,y>\in R^{-1} \wedge <x,y>\notin S^{-1}\\ &\Leftrightarrow <x,y>\in R^{-1}-S^{-1}\end{aligned}$$

因此, $(R-S)^{-1} = R^{-1}-S^{-1}$

证毕

复合运算是最为重要的关系运算。

定义 4.3.3 设 R 为 A 到 B 的二元关系，S 为 B 到 C 的二元关系，那么 $R\circ S$ 为 A 到 C 的二元关系，称为关系 R 与 S 的**复合**（compositions），定义为

$$R\circ S= \{<x,z> \mid x\in A \wedge z\in C \wedge \exists y(y\in B \wedge xRy \wedge yRz)\}$$

这里“∘”称为复合运算。$R\circ R$ 也记为 R^2。

例 4.3.3 设 R 表示父子关系，即 $<x,y>\in R$ 说明 x 是 y 的父亲，$R\circ R$ 就表示祖孙关系。

例 4.3.4 设 R 表示朋友关系，S 表示直接后门关系，$R\circ S$ 就表示间接后门关系。

例4.3.5 设 $A=\{0,1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，$C=\{1,3,5\}$，$R\subseteq A\times B$，$S\subseteq B\times C$ 且

$R=\{<1,2>,<2,4>,<3,4>,<5,6>\}$，$S=\{<2,l>,<2,5>,<6,3>\}$

求 $R\circ S$

解 $R\circ S=\{<l,l>,<1,5>,<5,3>\}\subseteq A\times C$

用图表示 $R\circ S$：如图 4.3.1.

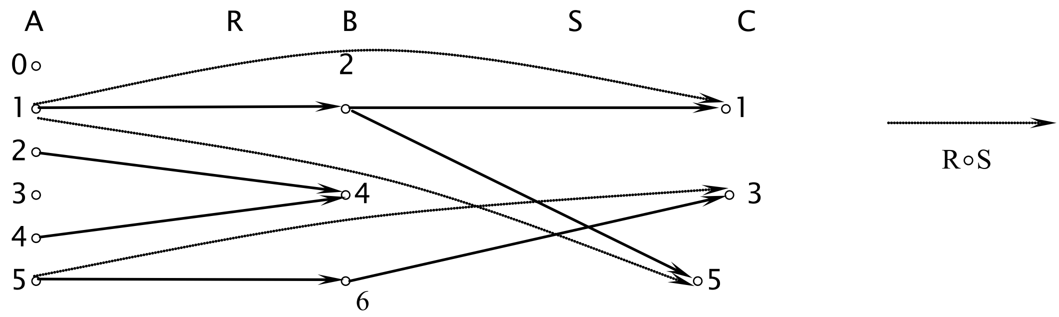


图 4.3.1

例 4.3.6 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，R，S 均为 A 上二元关系，且

$R=\{<x,y>\mid x+y=4\}=\{<0,4>,<4,0>,<1,3>,<3,1>,<2,2>\}$

$S=\{<x,y>\mid y-x=1\}=\{<0,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>\}$

求 $R\circ S$，$S\circ R$，$R\circ R$，$S\circ S$，$(R\circ S)\circ R$，$R\circ(S\circ R)$

解 $R\circ S=\{<4,l>,<1,4>,<3,2>,<2,3>\}=\{<x,z>\mid x+z=5\}$

$S\circ R=\{<0,3>,<1,2>,<2,1>,<3,0>\}=\{<x,z>\mid x+z=3\}$

$R\circ R=\{<0,0>,<4,4>,<1,1>,<3,3>,<2,2>\}=\{<x,z>\mid x-z=0\}$

$S\circ S=\{<0,2>,<1,3>,<2,4>\}=\{<x,z>\mid z-x=2\}$

$(R\circ S)\circ R=\{<4,3>,<1,0>,<3,2>,<2,1>\}$

$R\circ(S\circ R)=\{<4,3>,<3,2>,<2,1>,<1,0>\}$

从上例已可看出，一般地 $R\circ S\neq S\circ R$。

复合运算的性质由下面两个定理介绍。

定理 4.3.2 设 I_A，I_B 为集合 A，B 上的恒等关系，$R\subseteq A\times B$，那么

（1） $I_A\circ R=R\circ I_B=R$

（2） $\varnothing\circ R=R\circ\varnothing=\varnothing$

证明 （1）为证 $I_A\circ R\subseteq R$，设 $\forall<x,y>\in I_A\circ R$，

$<x,y>\in I_A\circ R\Leftrightarrow\exists u(u\in A\wedge<x,u>\in I_A\wedge<u,y>\in R)$

$\Rightarrow\exists u(u\in A\wedge x=u\wedge<u,y>\in R)$

$\Rightarrow<x,y>\in R$

所以 $I_A\circ R\subseteq R$ 得证。

下证 $R\subseteq I_A\circ R$，设 $<x,y>\in R$，

$<x,x>\in I_A\wedge<x,y>\in R\Rightarrow<x,y>\in I_A\circ R$

所以 $R\subseteq I_A\circ R$ 得证。

因此 $I_A\circ R=R$。同理可证 $R=R\circ I_B$。

（2）显然 $\varnothing\subseteq\varnothing\circ R$，下证 $\varnothing\circ R\subseteq\varnothing$，$\forall<x,y>\in\varnothing\circ R$

$<x,y>\in\varnothing\circ R\Rightarrow\exists u(u\in A\wedge<x,u>\in\varnothing\wedge<u,y>\in R)$

$\Rightarrow<x,u>\in\varnothing$

说明命题的前件为假，整个蕴含式为真，所以 $\varnothing\circ R\subseteq\varnothing$

因此 $\varnothing\circ R=\varnothing$。同理可证 $R\circ\varnothing=\varnothing$

定理 4.3.3 设 R，S，T 均为 A 上二元关系，那么

（1） $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$

（2） $(S\cup T)\circ R=(S\circ R)\cup(T\circ R)$

（3） $R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$

（4） $(S\cap T)\circ R\subseteq(S\circ R)\cap(T\circ R)$

（5） $R\circ(S\circ T)=(R\circ S)\circ T$

（6） $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$

证明 我们仅证明（1），（4），（5），另外三式的证明留给读者完成。

（1）对任意 $x, y\in A$,

$$\begin{aligned}<x,y>\in R\circ(S\cup T) &\Leftrightarrow \exists u(<x,u>\in R\wedge<u,y>\in S\cup T)\\ &\Leftrightarrow \exists u(<x,u>\in R\wedge(<u,y>\in S\vee<u,y>\in T))\\ &\Leftrightarrow \exists u((<x,u>\in R\wedge<u,y>\in S)\vee(<x,u>\in R\wedge<u,y>\in T))\\ &\Leftrightarrow \exists u(<x,u>\in R\wedge<u,y>\in S)\vee\exists u(<x,u>\in R\wedge<u,y>\in T)\\ &\Leftrightarrow <x,y>\in R\circ S\vee<x,y>\in R\circ T\\ &\Leftrightarrow <x,y>\in R\circ S\cup R\circ T\end{aligned}$$

故 $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$

（4）对任意 $x,y\in A$

$$\begin{aligned}<x,y>\in(S\cap T)\circ R &\Leftrightarrow \exists u(<x,u>\in(S\cap T)\wedge<u,y>\in R)\\ &\Leftrightarrow \exists u(<x,u>\in S\wedge<x,u>\in T\wedge<u,y>\in R)\\ &\Leftrightarrow \exists u(<x,u>\in S\wedge<u,y>\in R\wedge<x,u>\in T\wedge<u,y>\in R)\\ &\Rightarrow \exists u(<x,u>\in S\wedge<u,y>\in R)\wedge\exists u(<x,u>\in T\wedge<u,y>\in R)\\ &\Leftrightarrow <x,y>\in(S\circ R)\wedge<x,y>\in(T\circ R)\\ &\Leftrightarrow <x,y>\in(S\circ R)\cap(T\circ R)\end{aligned}$$

故 $(S\cap T)\circ R\subseteq(S\circ R)\cap(T\circ R)$ 。

（5）对任意 $x,y\in A$,

$$\begin{aligned}<x,y>\in R\circ(S\circ T) &\Leftrightarrow \exists u(<x,u>\in R\wedge<u,y>\in S\circ T)\\ &\Leftrightarrow \exists u(<x,u>\in R\wedge\exists v(<u,v>\in S\wedge<v,y>\in T))\\ &\Leftrightarrow \exists v\exists u(<x,u>\in R\wedge<u,v>\in S\wedge<v,y>\in T)\\ &\Leftrightarrow \exists v(\exists u(<x,u>\in R\wedge<u,v>\in S)\wedge<v,y>\in T)\\ &\Leftrightarrow \exists v(<x,v>\in R\circ S\wedge<v,y>\in T)\\ &\Leftrightarrow <x,y>\in(R\circ S)\circ T\end{aligned}$$

注意 （3），（4）两式中的 $\subseteq$ 不能改为 $=$ ，因为存在量词对合取连接词不可分配。例如在(3)式中令 $R=\{<a,b>,<a,c>\}$，$S=\{<b,d>\}$，$T=\{<c,d>\}$ 时，$R\circ(S\cap T)=R\circ\varnothing=\varnothing$，而 $(R\circ S)\cap(R\circ T)=\{<a,d>\}$。

关于复合运算的关系矩阵有下列结果。

设 A 是有限集合，$|A|=n$。关系 R 和 S 都是 A 上的关系，R 和 S 的关系矩阵

$$M_R=[r_{ij}] \quad 和 \quad M_S=[s_{ij}]$$

都是 $n\times n$ 的方阵。于是 R 与 S 的复合 $R\circ S$ 的关系矩阵 可以用下述的矩阵逻辑乘计算（类似于矩阵乘法）得到，记作 $M_{R\circ S}=M_R\cdot M_S=[t_{ij}]_{n\times n}$，其各分量 t_{ij} 可采用下式求取

其中

$$t_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n} r_{ik}s_{kj} \qquad (i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots n)$$

这里，$\bigvee_{k=1}^{n} f(k)=f(1)\vee f(2)\vee\cdots f(n)$

$\vee$**为真值析取运算。**$\bullet$ 乘与普通矩阵乘的不同在于，各分量计算中用 $\bigvee_{k=1}^{n}$ 代替 $\sum_{k=1}^{n}$ 。

例如，例 4.3.6 中 R∘S 的关系矩阵为

$$M_{R\circ S}=\begin{bmatrix}00001\\00010\\00100\\01000\\10000\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}01000\\00100\\00010\\00001\\00000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}00000\\00001\\00010\\00100\\01000\end{bmatrix}$$

定义 4.3.4 设 R 是 A 上的关系，n 个 R 的复合称为 R 的 n 次**幂**。

由于关系复合运算有结合律，因此用“幂”表示集合上关系对自身的复合是适当的，

$R^n=\underbrace{R\circ\cdots\circ R}$，规定 $R^0=I_A$（R 为 A 上二元关系）。R^n 满足下列性质。

定理 4.3.4 设 R 为 A 上二元关系，m，n 为自然数，那么

（1） $R^{n+1}=R^n\circ R=R\circ R^n=R^m\circ R^{n-m+1}$

(2) $R^m\circ R^n=R^{m+n}$

（3）$(R^m)^n=R^{mn}$

(4) $(R^{-1})^n=(R^n)^{-1}$

可把 m 看作参数，对 n 进行归纳，不再赘述。

例 4.3.7 设 A={0,1,2,3,4},R={<0,0>,<0,1>,<1,3>,<2,4>,<3,1>,<4,4>}，则

R^2={<0,0>,<0,1>,<0,3>,<1,1>,<2,4>,<3,3>,<4,4>}

R^3={<0,0>,<0,1>,<0,3>,<1,3>,<2,4>,<3,1>,<4,4>}

R^4={<0,0>,<0,1>,<0,3>,<1,1>,<2,4>,<3,3>,<4,4>}= R^2

R、R^2、R^3、R^4 的关系图如图 4.3.2 所示。

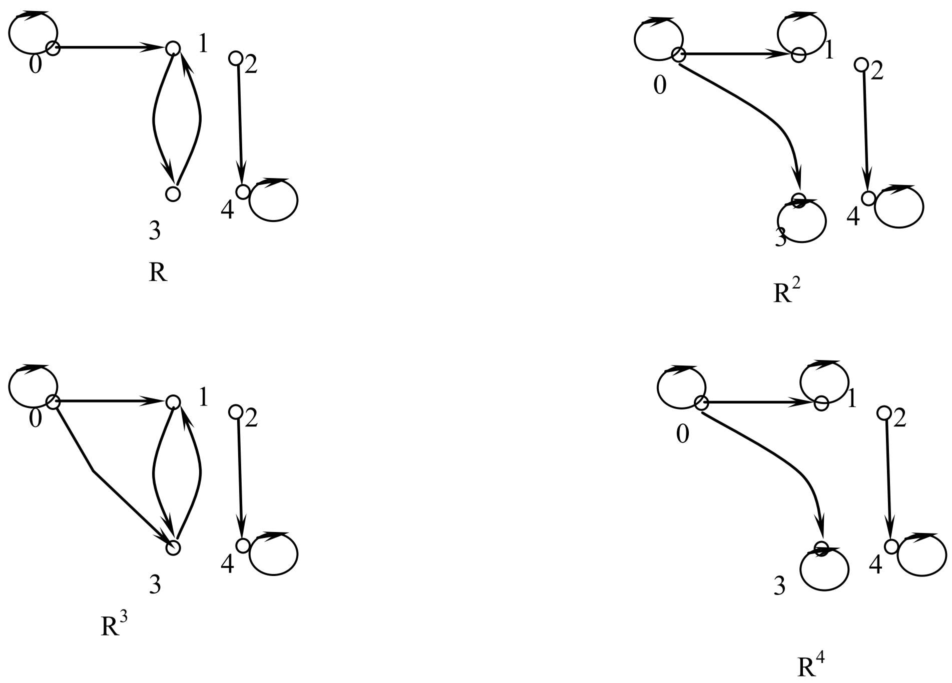


图 4.3.2

R、R^2、R^3、R^4 所对应的关系矩阵为

$$M=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad M^2=M\circ M==\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$M^3=M\circ M^2=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad M^4=M\circ M^3=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}=M^2$$

定理 4.3.5 设集合 A 的基数为 n , R 是 A 上二元关系，那么存在自然数 i,j 使得

$$R^i=R^j \quad (0\le i<j\le 2^{n^2})$$

证明 我们知道，当 $|A|=n$ 时，A 上不同二元关系共计 2^{n^2} 个,令 K= 2^{n^2} ，因此，在

R^0，R^1，R^2，⋯ ，R^K

这 K+l 个关系中，至少有两个是相同的（鸽巢原理)，即有 i，j（$0\le i<j\le 2^{n^2}$)，使 $R^i=R^j$ 。

证毕

定义 4. 3. 5 设 R 为集合 X 到集合 Y 的二元关系, A⊆X，则 A 在 R 下的**象** R[A] 为集合

R[A]={y|(∃x)(x∈A∧<x, y>∈R)}

集合在关系下的象的性质如下：

定理 4.3.6 R 是 X 到 Y 的关系和集合 A 、B，A⊆X， B⊆X，则

(1) R[A∪B]=R[A]∪R[B]

(2) R[∪A]= ∪{R[B]|B∈A}

(3) R[A∩B]⊆R[A]∩R[B]

(4) R[∩A]⊆ ∩{R[B]|B∈A} A≠∅

(5) R[A]−R[B]⊆R[A−B]

4.4 关 系 的 性 质

本节总假定关系是某一非空集合上的二元关系，这一假定不失一般性。因为任一 A 到 B 的关系 R，即 R⊆A×B, A×B ⊆(A∪B) × (A∪B)，所以关系 R 总可看成是 A∪B 上的关系，它与原关系 R 具有完全相同的序偶，对它的讨论代替对 R 的讨论无损于问题的本质。

定义 4.4.1 设 R 是 A 上的二元关系,即 R⊆A×A。

（1） 称 R 是**自反的**（reflexive)，如果对任意 x∈A，均有 xRx 。即

R 在 A 上是自反的当且仅当 ∀x(x∈A→xRx)

（2） 称 R 是**反自反的**（irreflexive）,如果对任意 x∈A，xRx 均不成立。即

R 在 A 上是反自反的当且仅当 ∀x(x∈A→┐xRx)

（3） 称 R 是**对称的**（Symmetic)，如果对任意 x∈A,y∈A，xRy 蕴含 yRx。即

R 在 A 上是对称的当且仅当 ∀x∀y(x∈A∧y∈A∧xRy→yRx)

（4） 称 R 是**反对称的**（antisymmetric）,如果对任意 x∈A,y∈A，xRy 且 yRx 蕴含 x＝y。即 R 在 A 上是反对称的当且仅当∀x∀y(x∈A∧y∈A∧xRy∧yRx→x = y)

反对称性的另一种等价的定义为

R 在 A 上是反对称的当且仅当$\forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\wedge x\neq y\rightarrow <y,x>\notin R)$。

（5） 称 R **是传递的**（transitive），如果对任意 $x\in A,y\in A,z\in A$，xRy 且 yRz 蕴含 xRz 。

即 R 在 A 上是传递的当且仅当 $\forall x\forall y\forall z(x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz\rightarrow xRz)$

例 4.4.1 设 A=｛a，b，c｝以下各关系 R_i（i=1，2，…，8）均为 A 上二元关系。

（1）R_1=｛<a，a>，<a，c>，<b，b>，<c，c>｝是自反的，而 R_2=｛<a，c>，<c，a>｝不是自反的，是反自反的。存在既不自反也不反自反的二元关系，例如 R_3=｛<a，a>｝。显然 A 上的 ∅ 关系是反自反的，不是自反的。可是值得注意的是，当 A=∅ 时（这时 A 上只有一个关系 ∅），A 上空关系既是自反的，又是反自反的，因为 A=∅ 使两者定义的前提总为假。

（2）R_4=｛<a，b>，<b，a>｝是对称的；R_5=｛<a，c>，<c，a>，<a，b>，<a，a>｝不是对称的； R_6=｛<a，b>，<a，c>｝是反对称的。其实 R_5 既不是对称的，也不是反对称的。特别有意思的是，存在既对称又反对称的二元关系，例如 A 上的恒等关系 I_A。

（3）R_7=｛<a，b>，<b，c>，<a，c>，<c，c>｝是传递的，但 R_7–｛<a，c>｝便不是传递的了。应当注意，A 上的空关系 ∅，R_8=｛<a，b>｝等是传递的，因为传递性定义的前提对它们而言均为假。

（4）任何非空集合上的空关系都是反自反、对称、反对称、传递的；其上的相等关系是自反、对称、反对称、传递的；其上的全关系是自反、对称、传递的。

(5) 三角形的相似关系、全等关系是自反、对称、传递的。

（6）正整数集合上的整除关系是自反、反对称、传递的；但整数集合上的整除关系只有传递性。

判断一个关系是否具有上述某种性质 ，除直接用定义，还有下面的充要条件。

定理 4.4.1 设 R 为集合 A 上二元关系即 $R\subseteq A\times A$，则：

（1） R 是自反的当且仅当 $I_A\subseteq R$ 。

（2） R 是反自反的当且仅当 $I_A\cap R=\varnothing$。

（3） R 是对称的当且仅当 $R=R^{-1}$ 。

（4） R 是反对称的当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$ 。

（5） R 是传递的当且仅当 $R\circ R\subseteq R$ 。

证明（1）先证必要性。因为 R 是自反的，设对任意的 $x,y\in A$,有$\langle x,y\rangle\in I_A\Rightarrow x\in A\wedge y\in A\wedge x=y\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R$ 。

再证充分性。任取 $x\in A$, 有$<x,x>\in I_A$,因为 $I_A\subseteq R$，所以$<x,x>\in R$, 因此 R 是自反的。

（2）先证必要性。用反证法。

假设 $R\cap I_A\neq\varnothing$,必存在$<x,y>\in R\cap I_A\Rightarrow<x,y>\in I_A$, 由于 I_A 是 A 上的恒等关系，从而有 x=y 所以$<x,x>\in R$,这与 R 在 A 上是反自反的相矛盾。

再证充分性。

任取 $x\in A$,则有

$x\in A\Rightarrow<x,x>\in I_A\Rightarrow<x,x>\notin R$(由于 $I_A\cap R=\varnothing$)

从而证明了 R 在 A 上是反自反的。

（3）先证必要性。设 R 对称，那么对任意 $x,y\in A$，有

$$<x,y>\in R\Leftrightarrow<y,x>\in R \quad \text{（因为 R 在 A 上对称）}$$
$$\Leftrightarrow<x,y>\in R^{-1}$$

故 $R=R^{-1}$。

再证充分性。任取$\langle x,y\rangle\in R$, 由 $R=R^{-1}$，所以

$$\langle x,y\rangle\in R\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R^{-1}$$
$$\Rightarrow\langle y,x\rangle\in R\text{ 。}$$

所以 R 在 A 上是对称的。

（4）先证必要性。设 R 反对称，那么对任意 $x,y\in A$，有

$$<x,y>\in R\cap R^{-1}\Leftrightarrow<x,y>\in R\wedge<x,y>\in R^{-1}$$
$$\Leftrightarrow<x,y>\in R\wedge<y,x>\in R$$

$\Rightarrow x=y$（R 反对称）

$\Leftrightarrow <x,y>\in I_A$

因此 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$ 。

再证充分性。设 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$ 。为证 R 反对称又设 $<x,y>\in R\wedge<y,x>\in R$,由 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$，有

$$
\begin{aligned}
<x,y>\in R\wedge<y,x>\in R &\Rightarrow <x,y>\in R\wedge<x,y>\in R^{-1}\\
&\Rightarrow <x,y>\in R\cap R^{-1}\\
&\Rightarrow <x,y>\in I_A,
\end{aligned}
$$

因而 $x=y$ 。所以 R 在 A 上是反对称的，得证。

（5）先证必要性。设 R 传递，那么对任意 $x,y\in A$，有

$$
\begin{aligned}
<x,y>\in R\circ R &\Leftrightarrow \exists u(u\in A\wedge<x,u>\in R\wedge<u,y>\in R)\\
&\Leftrightarrow \exists u(u\in A\wedge<x,y>\in R) \qquad \text{（R 是传递的）}\\
&\Leftrightarrow <x,y>\in R
\end{aligned}
$$

故 $R\circ R\subseteq R$ 。

再证充分性。设 $R\circ R\subseteq R$ 。为证 R 传递，设有 $<x,y>\in R,<y,z>\in R$ 。

$$
\begin{aligned}
<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R &\Rightarrow <x,z>\in R\circ R\\
&\Rightarrow <x,z>\in R \qquad (R\circ R\subseteq R)
\end{aligned}
$$

所以 R 在 A 上是传递性的，得证。 **证毕**

有限集合 A 上的二元关系 R 的基本性质与关系图、关系矩阵有怎样的联系呢？表 4.4.1 详解之。

表 4.4.1

关系性质	关系图特征	关系矩阵特性	集合表达式
自反性	每一结点处有一环	主对角线元素均为 1	$I_A\subseteq R$
反自反	每一结点处均无环	主对角线元素均为 0	$I_A\cap R=\varnothing$
对称性	两结点间的边成对出现（方向相反）	矩阵为对称矩阵	$R\subseteq R^{-1}$
反对称	没有方向相反的边成对出现	当分量 $c_{ij}=1(i\neq j)$ 时 $c_{ji}=0$	$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$
传递性	如果结点 $v_1,\cdots,v_n$ 间有边 $v_1v_2,\cdots,v_{n-1}v_n$，则必有边 v_1v_n	无	$R\circ R\subseteq R$

例4.4.2 设 R_i 是 $A=\{1,2,3\}$上的二元关系（如图 4.4.1 所示），判断它们各具有什么性质？并说明理由。

解 根据关系图的特征，我们可判断下列各关系具有的性质。

R_1 具有反自反性、对称性、反对称性、传递性。因为每一结点处均无环，既无双边又无单边。即无双边又无三角形。

R_2 具有自反性、对称性、反对称性、传递性。因为每一结点处有一环，既无双边又无单边，既无双边又无三角形。

R_3 具有自反性、对称性、传递性。因为每一结点处有一环，有边就有双边，有双边又有双环，有三角形就是向量三角形。

R_4 具有反对称性、传递性。 因为无双边，无三角形。

R_5 具有对称性。因为无单边。

R_6 具有反自反性、反对称性。因为每一结点处均无环，

R_7 具有自反性、传递性。因为每一结点处有一环，有三角形且是向量三角形。

R_8 具有反自反性、反对称性、传递性。因为每一结点处均无环，有三角形是向量三角形。

R_9 均不具备。

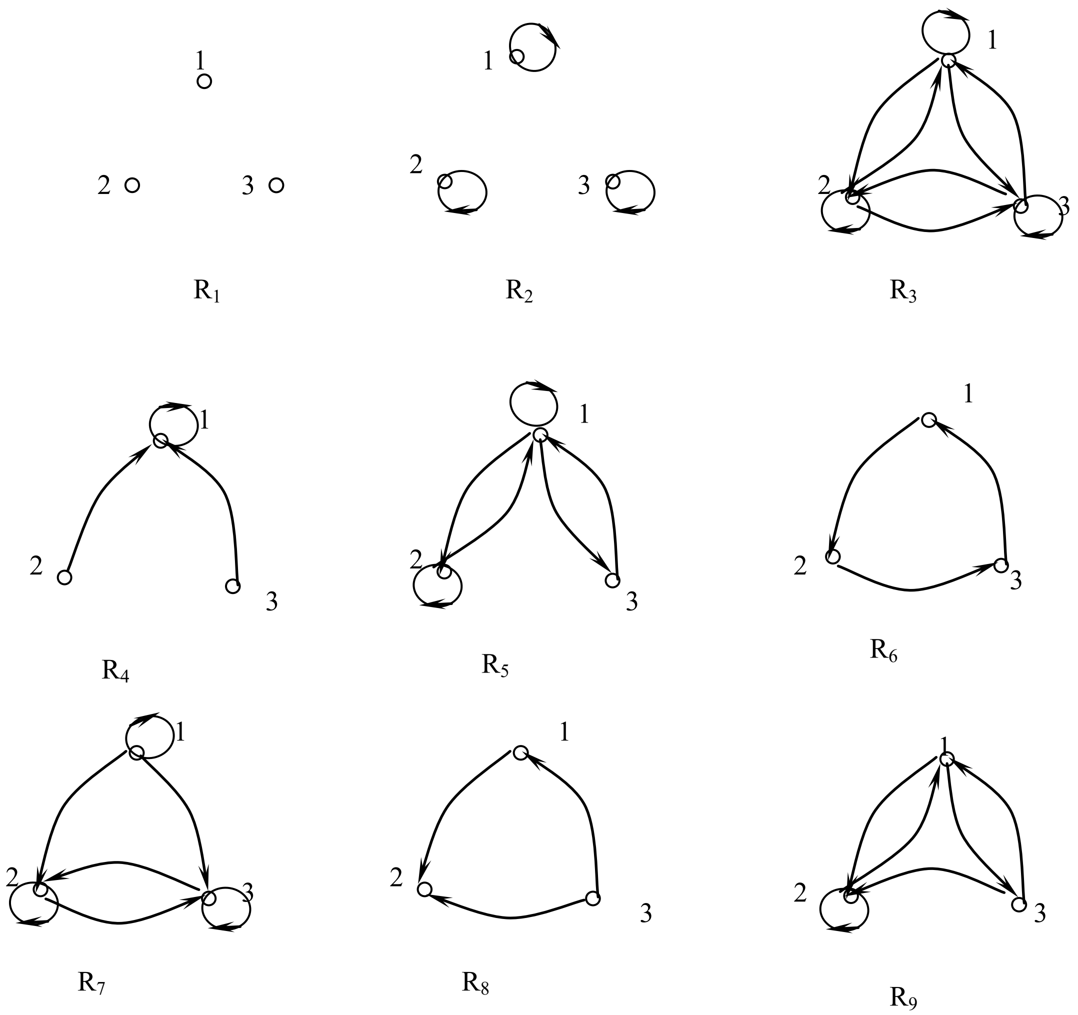


图 4.4.1

关系是序偶的集合，可作交、并、差、逆、复合运算。如果已知某些关系具有某一性质，经过关系运算后的结果是否仍具有这一性质，是一个令人关注的问题。如果是，我们称该性质对这一运算**封闭**。现在我们来讨论五大特性对基本运算的封闭性。

定理 4.4.2 设 R_1、R_2 是 A 上的自反关系，则 R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$、$R_1 \cup R_2$、$R_1 \circ R_2$ 也是 A 上的自反关系。

证明留给读者。

定理 4.4.3 设 R_1、R_2 是 A 上的对称关系，则 R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$、$R_1 \cup R_2$、$R_1 - R_2$ 也是 A 上的对称关系。

证明 仅证对称性对并运算均封闭。

设 R_1, R_2 对称。为证 $R_1 \cup R_2$ 对称，设任意 $<x, y> \in R_1 \cup R_2$，那么 $<x, y> \in R_1$ 或 $<x, y> \in R_2$。由 R_1，R_2 对称知 $<y, x> \in R_1$ 或 $<y, x> \in R_2$，从而 $<y, x> \in R_1 \cup R_2$。$R_1 \cup R_2$ 对称性得证。

证毕

定理 4.4.4 设 R_1、R_2 是 A 上的传递关系，则 R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$ 是 A 上的传递关系。但 $R_1 \cup R_2$ 不一定是传递的。

证明 （1）下证传递性对求逆运算封闭。

设 R_1 传递。要证 R_1^{-1} 传递。设有 $<x, y> \in R_1^{-1}$，$<y, z> \in R_1^{-1}$，

那么，$<y, x> \in R_1$，$<z, y> \in R_1$。根据 R_1 的传递性，可得 $<z, x> \in R_1$，即 $<x, z> \in R_1^{-1}$。因而 R_1^{-1} 在 A 上是传递的，得证。

（2）证传递性对交运算封闭。

设 R_1，R_2 传递。要证 $R_1 \cap R_2$ 传递。设有$<x, y> \in R_1 \cap R_2$, $<y, z> \in R_1 \cap R_2$,

那么$<x,y> \in R_1$, $<x,y> \in R_2$, $<y,z> \in R_1$, $<y,z> \in R_2$ 。由 R_1，R_2 传递，可知$<x,z> \in R_1$, $<x,z> \in R_2$, 从而$<x,z> \in R_1 \cap R_2$ 。故 $R_1 \cap R_2$ 在 A 上是传递的，得证。 **证毕**

定理 4.4.5 设 R_1、R_2 是 A 上的反对称关系，则 R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$、$R_1 - R_2$ 是 A 上的反对称关系。但 $R_1 \cup R_2$ 不一定是反对称的。

证明 仅证反对称性对差运算封闭。

设 R_1，R_2 反对称。为证 $R_1 - R_2$ 反对称，

设$<x,y> \in (R_1 - R_2)$且$<y,x> \in (R_1 - R_2)$,因而$<x,y> \in R_1$, $<y,x> \in R_1$,

从而由 R_1 的反对称性得 $x = y$。这就完成了 $R_1 - R_2$ 反对称的证明。

证毕

注 $R_1 - R_2$ 反对称与 R_2 反对称无关,只要 R_1 反对称, $R_1 - R_2$ 一定反对称。

定理 4.4.6 设 R_1、R_2 是 A 上的反自反关系，则 R_1^{-1}、$R_1 \cap R_2$、$R_1 \cup R_2$、、$R_1 - R_2$ 是 A 上的反自反关系。

证明留给读者。

我们举例说明反自反性、对称性、反对称性、传递性对合成运算均不封闭。

例 4.4. 3 $A=\{a,b,c\}$, 讨论在下列各种情况下 $R \circ S$ 具有的性质。

(1) $R=\{<a,b>\}$, $S=\{<b,a>\}$,R 、S 是反自反的。

(2) $R=\{<a,b>, <b,a>\}$, $S=\{<b,c>,<c,b>\}$ ，R 、S 是对称的。

(3) $R=\{<a,b>, <b,c>\}$, $S=\{<b,b>,<c,a>\}$ ，R 、S 是反对称的。

(4) $R=\{<a,b>, <b,c>, <a,c>\}$, $S=\{<b,a>,<b,c>,<c,a>\}$ ，R 、S 是传递的。

解 （1）$R \circ S=\{<a,a>\}$，所以 $R \circ S$ 不是反自反的。

（2） $R \circ S=\{<a,c>\}$，所以 $R \circ S$ 不是对称的。

（3）$R \circ S=\{<a,b>,<b,a>\}$，所以 $R \circ S$ 是对称的。

（4）$R \circ S=\{<a,a>,<a,c>,<b,a>\}$，因为$<b,a> \in R \circ S$,$<a,c> \in R \circ S$,但$<b,c> \notin R \circ S$ 所以 $R \circ S$ 不是传递的。

4.5 关 系 的 闭 包

闭包运算是关系运算中一种比较重要的特殊运算，它是对原关系的一种扩充，在实际应用中，有时会遇到这样的问题，给定了的某一关系并不具有某种性质，如要使其具有这一性质，就需要对原关系进行扩充，使原关系具有这种特性。而所进行的扩充又是“最小”的。这种关系的扩充就是对原关系的这一性质的闭包运算

定义 4. 5. 1 设 R 是非空集合 A 上的关系，如果 A 上有另一个关系 R’满足：

（1） R’是自反的（对称的或传递的）；

（2） $R \subseteq R'$；

（3） 对 A 上任何自反的（对称的或传递的）关系 R'', 若 $R \subseteq R''$，则有 $R' \subseteq R''$

则称关系 R’为 R 的自反（对称或传递）闭包。

一般将 R 的自反闭包记作 r(R) ，对称闭包记作 s(R) ，传递闭包记作 t(R) 。它们分别是具有自反性或对称性或传递性的 R 的″最小″超集合。也称 r，s，t 为闭包运算，它们作用于关系 R 后，分别产生包含 R 的、最小的具有自反性、对称性、传递性的二元关系。这三个闭包运算也可据下述定理来构造。

定理 4.5.1 设 R 是集合 A 上的二元关系，那么

（1）$r(R) = I_A \cup R$

（2）$s(R) = R \cup R^{-1}$

（3）$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$

证明

（1）$I_A\cup R$ 自反且 $R\subseteq I_A\cup R$ 是显然的。为证 $I_A\cup R$ 为自反闭包，还需证它的“最小性”。为此，令 R' 自反，且 $R\subseteq R'$，欲证 $I_A\cup R\subseteq R'$。由于 R' 自反，据定理 4.4.1，$I_A\subseteq R'$，连同 $R\subseteq R'$ 即得 $I_A\cup R\subseteq R'$。

（2）本式证明留给读者。

（3）首先 $R\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$ 是显然的。

为证 $\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$ 传递，设 $<x,y>\in\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$，$<y,z>\in\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$ 那么有正整数 j，k，使 $<x,y>\in R^j$，$<y,z>\in R^k$，于是有 $<x,z>\in R^j\circ R^k$，$R^j\circ R^k=R^{j+k}$，从而 $<x,z>\in\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$，$\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$ 的传递性得证。

最后，令 R' 传递，且 $R\subseteq R'$，需证 $\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i\subseteq R'$。为此只要证：对任意正整数 n，$R^n\subseteq R'$。对 n 归纳用以证明 $R^n\subseteq R'$。

n=1 时显然成立。

设 $R^k\subseteq R'$，欲证 $R^{k+1}\subseteq R'$。为此设 $<x,y>\in R^{k+1}$，那么有 u 使 $<x,u>\in R^k$, $<u,y>\in R$。据归纳假设及题设，知 $<x,u>\in R'$，$<u,y>\in R'$。但 R' 是传递的，因此 $<x,y>\in R'$。$R^{n+1}\subseteq R'$ 证毕，归纳完成。（3）式得证。　　证毕

例 4.5.1 设 $A=\{1, 2, 3\}$，$R_1=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>,<1,1>\}$，$R_2=\{<1,2>,<2,1>\}$，$R_3=\{<1,2>\}$，求它们的闭包。

解 $r(R_1)=I_A\cup R_1=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$

$s(R_1)=R_1\cup R_1^{-1}=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>,<3,1>,<1,1>\}$

$t(R_1)=\{<1,2>,<2,1>,<1,1>,<2,2>,<1,3>,<2,3>\}$

$r(R_2)=I_A\cup R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,1>\}$

$s(R_2)=R_2\cup R_2^{-1}=\{<1,2>,<2,1>\}=R_2$

$t(R_2)=\{<1,2>,<2,1>,<1,1>,<2,2>\}$

$r(R_3)=I_A\cup R_3=\{<1,2>,<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$

$s(R_3)=R_3\cup R_3^{-1}=\{<1,2>,<2,1>\}$

$t(R_3)=\{<1,2>\}=R_3$

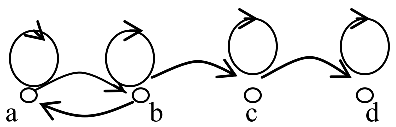
例 4.5.2 设 R 是集合 A={a，b，c，d}上的二元关系，R={<a,b>，<b,a>，<b,c>，<c,d>}求 R 的闭包： r（R）、s（R）、t（R）并画出对应的关系图。

解 r(R)={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>}

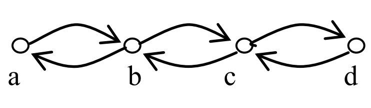
s(R)={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<c,b>,<d,c>}

t(R)={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<a,a>,<a,c>,<b,b>,<b,d>,<a,d>}

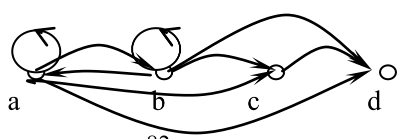
其对应的关系图分别如图 4.5.1 的(a)、(b)、(c)所示。



(a)



(b)



(c)

图 4.5.1

从以上讨论可以看出，传递闭包的求取是很复杂的。但是，当集合 A 为有限集时，A 上二元关系的传递闭包的求取便可大大简化。

推论 A 为非空有限集合，$|A|$=n。R 是 A 上的关系，则存在正整数 $k\le n$，使得

$t(R)=R^+=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^k$

证明 $R^+\subseteq t(R)$是显然的。

为证 $t(R)\subseteq R^+$，设$<x, y>\in t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$。那么可令 i_0 为“使$<x,y>\in R^i$的最小 i 值”。现证 $i_0\leqslant n$。若不然，有 i_0 (>n)个 A 中元素 $u_1,u_2,\cdots,u_{i0}(=y)$，使得 $xRu_1, u_1Ru_2,\cdots, u_{i0-1}Ry$（因$<x,y>\in R^{i_0}$）。然而 A 中只有 n 个不同元素，因此 i_0 这个元素中至少有两个是相同的（鸽巢原理），不妨设 $u_k=u_j$，而 k<j，于是由

$$xRu_1, u_1Ru_2,\cdots u_{k-1}Ru_k ,u_jRu_{j+1},\cdots\ u_{i0-1}Ry$$

可推出$<x,y>\in R^{i0-(j-k)}$，这与 i_0 的最小性矛盾。故 $i_0\leqslant n$，进而知$<x,y>\in \mathbf{R}^+$, $t(R)\subseteq \mathbf{R}^+$得证。所以 $t(R)=R^+$。 证毕

下列算法是求取 R^+的有效算法。

Warshall(沃夏尔) **算法：**设 R 为有限集 A 上的二元关系，|A| = n，M 为 R 的关系矩阵，可如下求取 R^+的关系矩阵 W。

（1）置 W 为 M。

（2）置 i = 1

（3）对所有 j，1≤j≤n，做

（a）如果 W[j,i] = 1，则对每一 k=1,2,⋯,n，置 W[j,k]为 W[j,k]∨W[i,k]，即当第 j 行、第 i 列为 1 时，对第 j 行每个分量重新置值，取其当前值与第 i 行的同列分量之析取。

（b）否则对下一 j 值进行（a)。

（4）置 i 为 i+1。

（5）若 i≤n，回到步骤（3)，否则停止。

例 4.5.3 设 A={1,2,3,4,}，R={<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,2>},则

R^2={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,4>,<3,2>,<4,3>}

R^3={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,2>,<3,3>,<4,4>}

R^4={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,3>,<3,4>,<4,2>}

因此 $R^+=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4$=

{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,2>,<2,3>,<2,4>,<3,2>,<3,3,>,<3,4>,<4,2>,<4,3>,<4,4>}。

现用 Warshall 算法求取 R^+。

显然，
$$M=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

以下使用 Warshall 算法求取 W。

(1) W 以 M 为初值。

（2）当 i=1 时，由于 W 中只有 W[1，1]=1，故需将第一行各元素与其本身作逻辑和，并把结果送第一行。即重新置值为 W[l,k]∨W[l,k] = W[1,k]，但 W 事实上无改变。

（3）当 i = 2 时，由于 W[l，2]＝W[4，2]=1，故需将第一行和第四行各分量重新置值为 W[1,k]∨W[2，k]和 W[4，k]∨W[2, k]；于是有：

$$W=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

（4）当 i = 3 时，由于 W[l，3]＝W[2，3]＝W[4，3]=1，故需将第一、二、四行各分量重新置值分别为 W[1，k]∨W[3, k]＝W[l，k];W[2，k]∨W[3，k]= W[2，k]; W[4，k]∨W[3，k]= W[3，k]。于是有：

$$W=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

（5）当 i＝4 时，由于 W[l，4]＝W[2, 4]= W[3,4]=W[4，4]=1，故需将第一、二、三、四行各分量重新置值分别为 W[1，k]∨W[4, k]＝W[l，k];W[2，k]∨W[4，k]= W[2，k]; W[3，k]∨W[4，k]= W[3，k];W[4，k]∨W[4，k] =W[4，k]，最终 W 为

$$W=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix},$$

故 R^+＝{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,2>,<2,3>,<2,4>,<3,2>,<3,3,>,<3,4>,<4,2>,<4,3>,<4,4>}。

下面几个定理给出了闭包的主要性质。

定理 4.5.2 设 R 是集合 A 上任一关系，那么

（1）R 自反当且仅当 R = r(R)。

（2）R 对称当且仅当 R = s(R)。

（3）R 传递当且仅当 R = t(R)。

证明 （1),（3）的证明留作练习，现证（2）

（2）的充分性由 s(R)定义立得。

为证必要性，设 R 对称, 那么 $R＝R^{-1}$（据定理 4. 4.1）。

另一方面，$s(R) = R∪R^{-1} = R∪R = R$，故 s(R) = R。

定理 4.5.3 对非空集合 A 上的关系 R_1、R_2 若 $R_1⊆R_2$，则

（1）$r(R_1) \subseteq r(R_2)$

（2）$s(R_1) \subseteq s(R_2)$

（3）$t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明 （1）和（2）的证明留作练习，仅证明（3）。

因为 $t(R_2)$传递，且 $t(R_2) \supseteq R_2$， 但 $R_1⊆R_2$，故

$$t(R_2) \supseteq R_1$$

因 $t(R_1)$是包含 R_1的最小传递关系，所以

$$t(R_1) \subseteq t(R_2)$$

证毕

定理 4.5.4 对非空集合 A 上的关系 R_1、R_2，则

（1） $r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$

（2） $s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$

（3） $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

证明 （1）和（2）留作练习，仅证明（3）。

（3）因为 $R_1∪R_2 \supseteq R_1$, 由定理 4. 5. 3 知，则

$$t(R_1∪R_2) \supseteq t(R_1)$$

同理 $t(R_1∪R_2) \supseteq t(R_2)$

所以 $t(R_1∪R_2) \supseteq t(R_1)∪t(R_2)$

证毕

定理 4.5.5 设 R 是集合 A 上任意二元关系，则

（1）如果 R 是自反的，那么 s(R)和 t(R)都是自反的。

（2）如果 R 是对称的，那么 r(R)和 t(R)都是对称的。

（3）如果 R 是传递的，那么 r(R)是传递的。

证明 （1）是显然的。

（2）由于 $r(R)^{-1}=(I_A\cup R)^{-1}=I_A^{-1}\cup R^{-1}=I_A\cup R=r(R)$,故 r(R)是对称的。

另外，由于对任意自然数 n，$(R^n)^{-1}=(R^{-1})^n$（据定理 4.3.4)），又由于 R 对称，故$(R^n)^{-1}=R^n$。因此，对任意$<x,y>\in t(R)$, 总有 i 使$<x,y>\in R^i$，从而$<y,x>\in(R^i)^{-1}=R^i$，即$<y,x>\in t(R)$。故 t(R)对称。

（3）本式证明留给读者。请注意，R 传递并不保证 s(R)传递。例如 R = {<a,b>}是传递的，但是 s(R) = {<a,b>,<b,a>}却不是传递的。

证毕

定理 4.5.6 设 R 为集合 A 上的任一二元关系，那么

（1）rs(R)＝sr(R)

（2）rt(R)＝tr(R)

（3）$st(R)\subseteq ts(R)$

证明 （1）
$$sr(R)=s(I_A\cup R)=I_A\cup R\cup(I_A\cup R)^{-1}$$
$$=I_A\cup R\cup R^{-1}=I_A\cup s(R)=rs(R)$$

（2）易证$(I_A\cup R)^n=I_A\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$ 对一切正整数 n 均成立（见本章习题 24），于是

$$tr(R)=t(I_A\cup R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(I_A\cup R)^i$$
$$=\bigcup_{i=1}^{\infty}\ (I_A\cup\bigcup_{j=1}^{\infty}R^j)$$
$$=I_A\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$$
$$=I_A\cup t(R)$$
$$=rt(R)$$

（3)由定理4.5.3 可知任一闭包运算Δ和任意二元关系R_1,R_2,如果$R_1\subseteq R_2$,那么$\Delta(R_1)\subseteq\Delta(R_2)$；又据闭包定义，对任意二元关系 R 有 $R\subseteq s(R)$，故 $t(R)\subseteq ts(R)$, $st(R)\subseteq sts(R)$。由于 ts(R)是对称的（据定理 4.5.5），由定理 4.5.2 知 sts(R)＝ts(R)。于是我们得到

$$st(R)\subseteq ts(R)$$

证毕

注意，（3）式中符号 $\subseteq$ 不能用等号 = 代替。例如 R = {<l，2>}时，st(R)={<1,2>，<2,1>},而 ts(R)＝{<1,2>,<2,1>,<1,1>,<2,2>}, $st(R)\neq ts(R)$。

例 4.5.4 设 R 是集合 X 上的二元关系，X={a,b,c}，R={<a,b>,<b,c>}

求 st (R)和 ts(R)， 并画出关系图。

解 t（R）={<a,b>,<b,c>,<a,c>},

st (R)={<a,b>,<b,c>,<a,c>,<b,a>,<c,b>,<c,a>}.

s (R) ={<a,b>,<b,c>,<b,a>,<c,b>},

ts (R)={<a,b>,<b,c>,<b,a>,<c,b>,<a,c>,<a,a>,<b,b>,<c,a>,<c,c>}.

其关系图分别如图 4.5.2 (a)、(b)所示。

(a) (b)

图 4.5.2

4.6 等价关系和划分

本节的目的就是要研究可用以对集合中元素进行分类的一种重要二元关系：等价关系。

定义 4.6.1 设 R 是非空集合 A 上的二元关系，如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的**等价关系（equivalent relation）**。

例 4.6.1

（1）人类集合中的“同龄”、“同乡”关系都是等价关系。

（2）三角形集合的相似关系、全等关系都是等价关系。

（3）住校学生的“同寝室关系”是等价关系。

（4）命题公式间的逻辑等价关系是等价关系。

（4）对任意集合 A，A 上的恒等关系 I_A 和全域关系 A×A 是等价关系。

例 4.6.2 设 A={1，2，3，4} 且 R={<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,4>, <4,3>, <3,3>, <4,4>}

我们易证 R 是一个等价关系。

例 4.6.3 整数集合 I 中的二元关系 R={<x,y>| m|(x - y),m∈I_+},其中|表示整除关系，证明 R 是等价关系。

证明 （1）∀x∈I, 因为 x-x=0，所以 m|(x-x), 因此<x,x>∈R,R 自反的；

（2）∀x,y∈I, 设<x,y>∈R, 则 m|(x - y),即 $\frac{x-y}{m}=k\in I$

由于 $\frac{y-x}{m}=-\frac{x-y}{m}=-k\in I$

故 <y,x>∈R, 所以 R 是对称的；

（3）∀x,y,z∈I,设<x,y>∈R 且<y,z>∈R

则 $\frac{x-y}{m}=k\in I$ $\qquad$ $\frac{y-z}{m}=l\in I$

因而 $\frac{x-z}{m}=\frac{x-y+y-z}{m}=k+l\in I$

故 $<x,z>\in R$ 所以 R 是传递的;

因此，R 是一个等价关系。

注意到 $\frac{x-y}{m}=k\in I$，即 x=km+y, 说明 x 与 y 除以 m 的余数是一样的。所以这个关系又称为 x 与 y 的模 m 的同余关系，x 与 y 模 m 相等关系。模 m 相等关系用符号“ $\equiv_m$”表示。

注意这里 A 集合可取整数 I 的任何子集，m 可以是任意的正整数。

定义 4.6.2 设 R 为集合 A 上的等价关系。对每一 a∈A，令 A 中所有与 a 等价的元素构成的集合记为$[a]_R$ 即形式化为

$[a]_R=\{x \mid x\in A \wedge xRa\}$，

称$[a]_R$ 为 a 的关于 R 所生成的**等价类**（equivalent class），简称 a 的等价类，简单地记为$[a]$，a 称为$[a]_R$的代表元素。

例 4.6.4 设 R 是 X={0,1,2,3,4}上的二元等价关系，R={<x,y>|x,y∈X 且(x-y)/2 是整数}

(1) 给出关系矩阵：(2) 画出关系图；(3) 求出等价类。

解 （1）R 的关系矩阵为

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

图 4.6.1

（2） R 的关系图见图 4.6.1 所示。

（3）$[0]_R=[2]_R=[4]_R=\{0，2，4\}$；$[1]_R=[3]_R=\{1，3\}$

从上述关系图可看出，等价类是关系图中互不相连的各个部分的顶点组成。

例 4.6.5 若在例 4.6.2 中取 m=4, 即设 R 为整数集上的 $\equiv_4$关系，它有四个不同的等价类；

$[0]=\{\cdots，-12,-8,-4,0,4，8, 12，\cdots\}=\{x \mid 4 \text{ 整除 } x\}$

$[1]=\{\cdots，-11,-7,-3,1,5,9,13，\cdots\}=\{x \mid 4 \text{ 除 } x \text{ 余 } 1\}$

$[2]=\{\cdots，-10,-6,-2,2,6,10,14，\cdots\}=\{x \mid 4 \text{ 除 } x \text{ 余 } 2\}$

$[3]=\{\cdots，-9,-5,-1,3,7,11,15，\cdots\}=\{x \mid 4 \text{ 除 } x \text{ 余 } 3\}$

下面几个定理介绍等价类的性质

定理 4.6.1 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，

（1）对任意的 a∈A, $[a]_R\neq\varnothing$，且$[a]_R\subseteq A$, $[a]_R$是 A 的非空子集。

（2）$\cup\{[a]|a\in A\}=A$ （ $\cup S$ 表示集合 S 中的元素做并运算所构成的集合)

证明 （1）对任意的 a∈A，因为 R 自反，aRa 所以恒有 $a\in[a]_R$。

(2)先证$\cup\{[a]|a\in A\}\subseteq A$

任取 x,有

$x\in\cup\{[a]|a\in A\}\Rightarrow\exists y(y\in A\wedge x\in[y])$

$\Rightarrow x\in A$ （因为$[y]\subseteq A$)

从而有$\cup\{[a]|a\in A\}\subseteq A$。

再证 $A\subseteq\cup\{[a]|a\in A\}$

任取 x,有

$x\in A\Rightarrow x\in[x]\wedge x\in A$

$\Rightarrow x\in\cup\{[a]|a\in A\}$

所以 $A\subseteq\cup\{[a]|a\in A\}$成立

因此 $\cup\{[a]|a\in A\}=A$

证毕

定理 4.6.2 设 R 是集合 A 上的等价关系，那么，对任意 a , b∈A，有

aRb 当且仅当$[a]_R=[b]_R$

证明 设 aRb。为证$[a]_R\subseteq[b]_R$，又设 $x\in[a]_R$ ，那么 xRa。又据 aRb 及 R 的传递性，

有 xRb，从而 $x\in[b]_R$。$[a]_R\subseteq[b]_R$ 得证。

同理可证 $[b]\subseteq[a]$。于是 $[b]=[a]$ 得证。

反之，设 $[a]_R=[b]_R$。由于 $a\in[a]_R$，故 $a\in[b]_R$，因而 aRb。

证毕

定理 4.6.3 设 R 是集合 A 上的等价关系，那么，对任意 a，b∈A，或者 $[a]_R=[b]_R$ 或者 $[a]_R\cap[b]_R=\varnothing$。

证明 设 $[a]_R\cap[b]_R\neq\varnothing$，那么有 $x\in[a]_R\cap[b]_R$，从而有 xRa，xRb。据 R 的对称性又有 aRx，xRb。再用 R 的传递性，得 aRb。由定理 4.6.2 知 $[a]_R=[b]_R$。

证毕

由定理 4.6.2、定理 4.6.3 知，对任何集合 A 上的等价关系 R，有对任何 a，b∈A，

$$aRb\Leftrightarrow[a]_R=[b]_R\Leftrightarrow[a]_R\cap[b]_R\neq\varnothing$$

关于等价类有下面十分显然的事实：

（1）对任何集合 A,I_A 有 $|A|$ 个不同的等价类，每个等价类都是单元素集。

（2）对任何集合 A，A×A 只有一个等价类 为 A（即每个元素的等价类全为 A）。

（3）同一等价类可以有不同的表示元素，或者说，不同的元素，可能有相同的等价类。

定义 4.6.3 当非空集合 A 的子集族 π（$\pi\subseteq P(A)$）满足下列条件时称为 A 的一个**划分**（partitions）：

（1）对任意 $B\in\pi$，$B\neq\varnothing$。

（2）对任意 $B\in\pi$，$B\subseteq A$。

（3）$\cup\pi=A$（其中 $\cup\pi$ 表示中 π 元素的并）。

（4）对任意 B，$B'\in\pi$，$B\neq B'$ 时，$B\cap B'=\varnothing$。

则称 π 中元素为划分的**划分块**。

例 4.6.6 设 A＝{0，1，2，3，4}，则

$\pi_1=\{\{1,3\},\{0,2,4\}\}$

$\pi_2=\{\{0,1,3\},\{2,4\}\}$

$\pi_3=\{\{3\},\{0,1,2,4\}\}$

$\pi_4=\{\{0,1,2,3,4\}\}$

均为 A 的划分，且 π_1 中的元素恰是例 4.6.3 的等价类。

定理 4.6.4 设 R 为集合 A 上的等价关系，那么 R 对应的 A 的划分是 $\{[x]_R\mid x\in A\}$。

该定理的证明留作练习。

定理 4.6.5 设 π 是集合 A 的一个划分，则如下定义的关系 R 为 A 上的等价关系：

$$R=\{<x,y>\mid\exists B(B\in\pi\wedge x\in B\wedge y\in B)\}$$

称 R 为 π 对应的等价关系。

证明是极为容易的，请读者自己完成。

定理 4.6.6 设 π 是集合 A 的划分，R 是 A 上等价关系，那么，对应 π 的等价关系为 R，当且仅当 R 对应的划分为 π。

证明 $A=\varnothing$ 时，只有 $\varnothing$ 划分和等价关系 $\varnothing$，结论显然成立。下文设 $A\neq\varnothing$。

先证必要性。设对应 π 的等价关系为 R，R 对应的划分为 π’，欲证 π = π’。为此对任一元素 a∈A，设 B，B’分别是 π，π’中含 a 的单元。那么，对 A 中任一元素 b，

$$\begin{aligned}b\in B&\Leftrightarrow aRb\ (\text{R 是对应的等价关系})\\&\Leftrightarrow b\in[a]_R\\&\Leftrightarrow b\in B'\ (\pi'\text{ 是 R 对应的划分})\end{aligned}$$

这就是说 B = B’。由于 a 是 A 中任意元素，故可断定 π = π’。

再证充分性。设 R 对应的划分为 π，π 对应的等价关系为 R’，欲证 R = R’。为此考虑 A 中任意元素 a，b，有

$$\begin{aligned}aRb&\Leftrightarrow b\in[a]_R\\&\Leftrightarrow\exists B(B\in\pi\wedge[a]_R=B\wedge b\in B)\quad(\pi\text{ 为 R 对应的划分})\end{aligned}$$

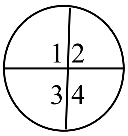
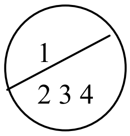
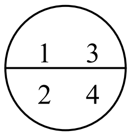
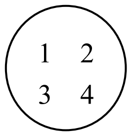
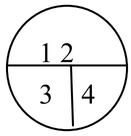
$\Leftrightarrow \exists B(B\in \pi \wedge a \in B\wedge b\in B)$

$\Leftrightarrow aR'b$（R'为π对应的等价关系）

故 R = R'。

例 4.6.7 设 A 是一个集合且|A|=4，则 A 上共有多少种不同的等价关系？

解：本题是利用划分与等价关系一一对应，用划分求等价关系。具体求解见表 4.6.1

4=1+1+1+1	4=1+3	4=2+2	4=4	4=1+1+2
1 种	C_4^1 种	$\frac{1}{2}C_4^2$ 种	1 种	C_4^2 种
				

合计：$1+C_4^1+\frac{1}{2}C_4^2+1+C_4^2$=1+4+9+1=15 种

定义 4.6.4 设 R 为集合 A 上的等价关系，那么称 A 的划分$\{[a]_R|a\in A\}$为 A 关于 R 的**商集**（quotient sets），记为 A/R。

例 4.6.8 设关系 R 是上例 4.6.2 中定义的，计算 A/R。

解 从该例子中，我们有

$[1]_R=\{1,2\}=[2]_R$, $[3]_R=\{3,4\}=[4]_R$。

所以 A/R={{1,2},{3,4}}。

例 4.6.9 在上例 4.6.3 中的等价关系中，我们可取 m=2。求 A/R?

解 由于 [0]={⋯，-6，-4，-2，0，2，4，6，8，⋯}即由偶整数组成因为他们整除 2 的余数是零。[1]={⋯，-5，-3，-1，1，3，5，7，⋯}即由奇整数组成因为他们整除 2 的余数是 1。因此 A/R 是由偶整数集合和奇整数集合组成的集合。

由上两个例子我们可归纳出对有穷集合 A 如何求 A/R 的步骤：

（1）对集合 A 中任意选一个元素 a 并计算 a 所在的等价类[a]。

（2）如果$[a]\neq A$，选另一个元素 b, $b\in A$ 且 $b\notin[a]$，我们计算[b]。

（3）如果 A 不与上面计算的所有等价类的并相等，则再 A 中选不在这些的等价类中的元素 x 且计算[x]。

（4）重复（3）直到集合 A 与所有等价类的并相等，则结束。

定义 4.6.5 设π_1，π_2为集合的两个划分。称π_1细分π_2，如果π_1的每一划分块都包含于π_2的某个划分快。π_1细分π_2表示为$\pi_1\leqslant\pi_2$。$\pi_1\leqslant\pi_2$且$\pi_1\neq\pi_2$，则表示为$\pi_1<\pi_2$，读作π_1真细分于π_2。

例 4.6.10（1）当 A = {a, b, c, d} 时，π_1= {{a, b} , {c} , {d}} 细分π_2 = {{a, b, c} , {d}}；π_3 = {{a}, {b}, {c}, {d}}细分所有划分。而所有划分均细分π_4 = {{a, b, c, d}}。并且，π_1真细分π_2, π_3真细分π_1。

定理 4.6.7 设 R_1，R_2 为集合 A 上的等价关系，π_1，π_2 分别是 R_1，R_2 所对应的划分，那么

$$R_1 \subseteq R_2 \text{ 当且仅当 } \pi_1 \leqslant \pi_2$$

证明 当 $A=\varnothing$ 时命题显然真。以下设 $A\neq\varnothing$。

先证必要性。设 $R_1\subseteq R_2$，B_1 为 π_1 中任一划分块，令 $B_1=[a]_{R1}$，$a\in A$。

考虑 $[a]_{R2}=B_2\in\pi_2$。对任一 $b\in B_1$，即 $b\in[a]_{R1}$，有 bR_1a，从而有 bR_2a（因 $R_1\subseteq R_2$），

故 $b\in[a]_{R2}=B_2$。这就是说 $B_1\subseteq B_2$，因而 $\pi_1\leqslant\pi_2$。

再证充分性。设 $\pi_1\leqslant\pi_2$，对任意 x,y，若 xR_1y，那么有 π_1 中划分块 $B_1=[x]_R$，使 x，$y\in B_1$。由于 $\pi_1\leqslant\pi_2$，故有 π_2 中划分块 B_2，使 $B_1\subseteq B_2$；从而 x，$y\in B_2$，即 x，y 属同一个 R_2 等价类。因此 xR_2y。至此我们证得 $R_1\subseteq R_2$。

证毕

本定理表明，越“小”(含有较少序偶)的等价关系对应越细的划分，反之亦然。很明白，最小的等价关系是相等关系，它对应于最细的划分（每一划分块恰含一个元素），最大的等价关系是全关系，它对应于最粗的划分（只有一个划分块）。

4.7 序 关 系

序关系是关系的一大类型，他们的共同点都是传递的，因此可根据这一特性比较集合中各元素的先后顺序，事物之间的次序常常是事物群体的重要特征，决定事物之间次序的还是事物间的关系。本节的目的则是要研究可用以对集合中元素进行排序的关系-----序关系。其中很重要的一类关系称作偏序关系。偏序的作用是用来排序（称偏序是因为 A 上的所有元素不一定都能按此关系排序，所以又称为半序、部分序）。

定义 4.7.1 设 R 是非空集合 A 上的二元关系，如果 R 是自反、反对称、传递的，称 R 为 A 上的偏序关系（partial ordered relations），记作≼。如果集合 A 上有偏序关系 R，则称 A 为偏序集（ordered sets），用序偶<A，R>表示之。若 $\langle x, y\rangle\in\preccurlyeq$，常记作 $x\preccurlyeq y$. 读作“x 小于或等于 y”，说明 x 在偏序上排在 y 的前面或者相同。

为简明起见，我们用记号≼表示一般的偏序关系，从而<A，≼>表示一般的偏序集。

注意　　这里的“小于或等于”不是指数的大小，　而是指在偏序关系中的顺序性。x 小于或等于 y 的含义是：按照这个序，x 排在 y 的前边或者 x 就是 y。根据不同偏序的定义，对偏序有着不同的解释。例如，正整数集合上的整除关系“|”为一偏序关系，$\langle I_+, |\rangle$ 为一偏序集，2|4（通常写为 $2\preccurlyeq4$）的含义是 2 整除 4，2 在整除关系上排在 4 的前面，也就是说 2 比 4 小。

例 4.7.1

（1）设 A 是集合 S 的子集为元素所构成的集合，包含关系“⊆”是 A 上的一个偏序关系，因此 $\langle A,\subseteq\rangle$ 是一个偏序集。

（2）实数集 R 上的“≤”即小于等于关系为一偏序关系，$\langle R, \leqslant\rangle$ 表示偏序集。实数集 R 上的“≧”即大于关系也是偏序关系，$\langle R,\geqq\rangle$ 也表示一个偏序集。$7\geqq6$，可以写作 $7\preccurlyeq6$，理解为在大于等于偏序关系中，7 排在 6 的前面，或说 7 比 6 大。

定义 4.7.2 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系，

（1）$\forall x, y\in A$，若 $x\preccurlyeq y$ 或 $y\preccurlyeq x$，则称 x 与 y 可比。

（2）$\forall x, y\in A$，若 $x\preccurlyeq y$ 且 $x\neq y$，则称 $x\prec y$，读作 x 小于 y。这里所说的小于是指在偏序中 x 排在 y 的前边。

由上面的定义可知，在具有偏序关系≼的集合 A 中任取两个元素 x 和 y，可能有下述几种情况发生：

$x\prec y$（或 $y\prec x$），$x=y$，x 与 y 不是可比的。

例如实数集合上的小于等于关系是偏序关系且任意两个数均是可比的。而正整数上的整除关系也是偏序关系，但不是任意两个数都可比，如 2 与 3 不可比。因为 2 不能整除 3。

我们可对偏序关系的关系图作简化。由于偏序关系自反，各结点处均有环，约定全部略

去。由于偏序关系反对称且传递，关系图中任何两个不同结点之间不可能有相互到达的边或通路，因此可约定边的向上方向为箭头方向，省略全部箭头。最后由于偏序关系具有传递性，我们还可将由传递关系可推定的边也省去。经过这种简化的具有偏序关系的关系图称为**哈斯（Hasse）图**。哈斯图既表示一个偏序关系，又表示一个偏序集。

例 4.7.2 表示集合{a,b}的幂集 P({a,b})上的子集包含关系的关系图，可如图 4.7.1 作简化。

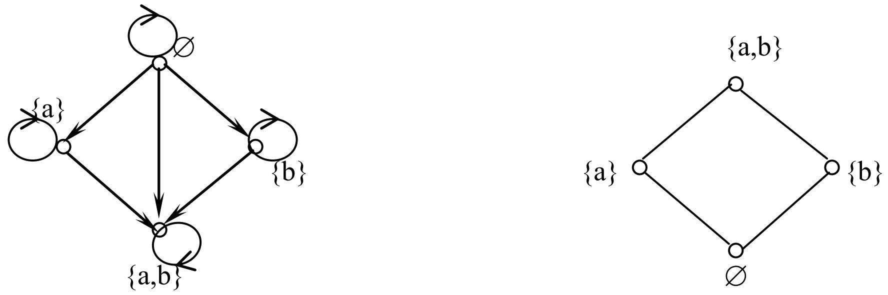


图 4.7.1

为了说明哈斯图的画法，首先定义“覆盖”的性质。

定义 4.7.3 设偏序集<A,≼>, 如果 x, y∈A, x≼y, x≠y, 且不存在元素 z∈A 使得 x≼z 且 z≼y ，则称 y 覆盖 x 。A 上的覆盖关系 cov A 定义为

cov A ={<x, y>|x∈A∧y∈A∧y 盖住 x}

例 4.7.3 设 A 是正整数 m=12 的因子的集合，并设≼为整除的关系，求 cov A

解 cov A={<1,2>,<1,3>,<2,4>,<2,6>,<3,6>,<4,12>,<6,12>}

例 4.7.4 在例 4.7.2 中，cov P({a,b})={<∅,{a}>,<∅,{b}>,<{a},{a,b}>,<{b},{a,b}>}

对于给定的偏序集<A,≼>，它的覆盖关系是唯一的，所以可用覆盖的性质画出偏序集合图，又称为哈斯图，其作图法为：

1、 以“∘”表示元素；

2、 若 x≺y,则 y 画在 x 的上层；

3、 若 y 覆盖 x，则连线；

4、 不可比的元素，可画在同一层。

例 4.7.5 画出下面几个偏序集的哈斯图：

（1） <S_8, |> , 其中 S_8 表示 8 的所有因子作元素构成的集合。

（2） <{2,3,6,12,24,36}, | >, 其中|是集合上的数之间的整除关系。

（3） <S_{30},|>，其中 S_{30} 表示 30 的所有因子作元素构成的集合。

解：先分别求出其覆盖。

（1） S_8={1，2，4，8}

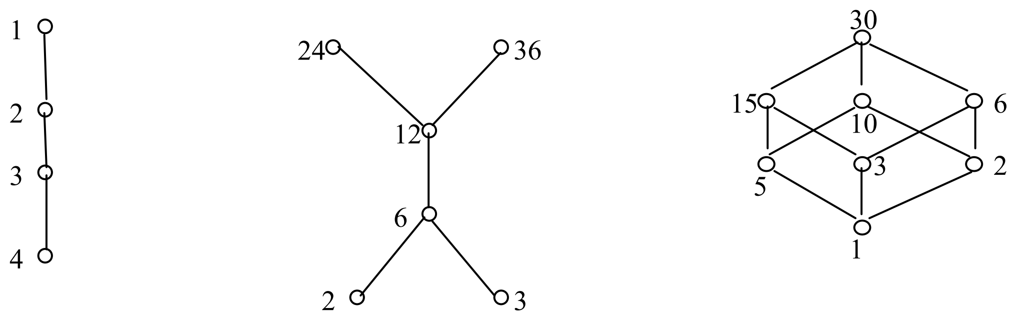
cov{ S_8}={<1,2>, <2,4>,<4,8>}

（2） cov{2,3,6,12,24,36}={<2,6>, <3,6>,<6,12>,<12,24>,<12, 36>}

（3） S_{30}={1，2，3，5，6，10，15，30}

cov S_{30}={<1,2>,<1,3>,<1,5><2,6>,<2,10><3,6>,<3,15>,<5,10>, <5,15>, <10,30>,<15,30>}

画出其哈斯图，见图 4.7.2 中（a)，（b)，（c）分别表示上述各偏序集。



(a) (b) (c)

图 4.7.2

例 4.7.6 由图 4.7.3 所示的哈斯图，写出对应的偏序关系、关系矩阵。

解：A={a,b,c,d,e}

偏序关系≼={<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<e,e>,
<c,a>,<c,b>,<d,c>,<d,a>,<d,b>}

关系矩阵 $M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

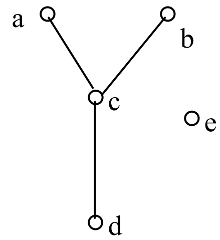


图 4.7.3

偏序集中链和反链的概念是十分重要的。

定义 4.7.4 设偏序集<A, ≼>，B⊆A

(1) 如果对任意的 x, y∈B，x 和 y 都是可比的，则称 B 为 A 上的**链（chain）**，B 中元素个数称为链的长度。

(2) 如果对任意的 x, y∈B，x 和 y 都不是可比的，则称 B 为 A 上的**反链（antichain）**，B 中元素个数称为反链的长度。

我们约定，若 A 的子集只有单个元素，则这个子集既是链又是反链。

例 4.7.7 图 4.7.4 中的哈斯图表示一偏序集，举例说明链及反链。

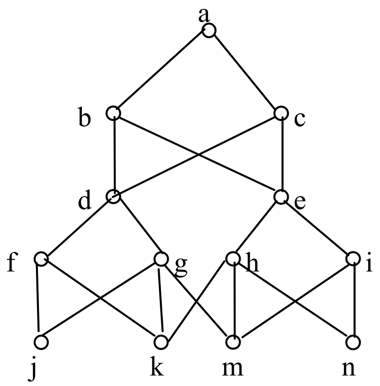


图 4. 7. 4

解：在图 4.7.4 的哈斯图中

长度为 5 的链有{a, c, e, h,m }，{a,b,e,i,n}等

长度为 4 的链有{b, d, g,m}，{c, e, h, k}，{c,d,f,j,}等

长度为 3 的链有{b, e,i}，{f,d,c},{n,i,e}等

长度为 2 的链有{d, f}，{m,h}等

长度为 1 的链有{m},{n}等。

长度为 4 的反链只有{b, c, d, e}和{n,m,k,i}

长度为 3 的反链有{j, k,i}，{f,g,e},{d,h,i}等

长度为 2 的反链有{d ,e}，{b, c}，{g,h},{f,e}等。

长度为 1 的反链有{a},{e}等

从例题 4.7.7 的哈斯图上可看出，在每个链中总可以从最高结点出发沿着覆盖方向遍历该链中所有结点。每个反链中任意两个结点间均无连线。

定义 4.7.5 设偏序集$\langle A,\preccurlyeq\rangle$，如果 A 是一个链，则称$\preccurlyeq$ 为 A 上的全序关系，或称线序关系。并称$\langle A,\preccurlyeq\rangle$为**全序集(totally ordered)**。

全序集$\langle A,\preccurlyeq\rangle$意味着对任意 x，y∈A,或者有 $x\preccurlyeq y$ 或者有 $y\preccurlyeq x$ 成立。

例如实数集合上的小于等于关系是偏序关系且任意两个数均是可比的,所以也是全序关系。

利用偏序关系可对有序集合中元素进行比较或排序。在哈斯图中，各元素都处在不同的层次上，有的元素的位置特殊，他们是偏序集合中的特殊元素，了解这些元素有助于我们对偏序集合的深入分析。

定义 4.7.6 设$\langle A,\preccurlyeq\rangle$为偏序集，$B\subseteq A$。

（1）如果 b∈B 且对每一 x∈B，$b\preccurlyeq x$，称 b 为 B 的**最小元（least element）**。即

$$b \text{ 为 B 的最小元} \Leftrightarrow b\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow b\preccurlyeq x)$$

（2）如果 b∈B，并且对每一 x∈B，$x\preccurlyeq b$，称 b 为 B 的**最大元（greatest element）**。即

$$b \text{ 为 B 的最大元} \Leftrightarrow b\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq b)$$

（3）如果 b∈B，并且没有 x∈B，x≠b，使得 $x\preccurlyeq b$，称 b 为 B 的**极小元（minimal element）**。即，

$$b \text{ 为 B 的极小元} \Leftrightarrow b\in B\wedge\neg\exists x(x\in B\wedge x\neq b\wedge x\preccurlyeq b)$$

（4）如果 b∈B，并且没有 x∈B，x≠b，使得 $b\preccurlyeq x$，称 b 为 B 的**极大元（maximal element）**。即

$$b \text{ 为 B 的极大元} \Leftrightarrow b\in B\wedge\neg\exists x(x\in B\wedge x\neq b\wedge b\preccurlyeq x)$$

从以上定义可以看出，最小元与极小元是不一样的。最小元是 B 中最小的元素，它与 B 中其它元素都可比；而极小元不一定与 B 中元素都可比，只要没有比它更小的元素，它就是极小元，同理最大元是 B 中最大的元素，它与 B 中其它元素都可比；而极大元不一定与 B 中元素都可比，只要没有比它更大的元素，它就是极大元。

例 4.7.8 偏序集$\langle\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},\ \preccurlyeq\rangle$，由图 4.7.5 中哈斯图给出。

（1）B={1, 2, 3, 5 }
B 的最大元为 5。
B 的极大元为 5。
B 的最小元为 1。
B 的极小元也为 1。
（2）B={ 2, 3, 4, 5, 6 ,7}
B 无最大元和最小元。
B 的极大元是 6,7；极小元是 2,3。
（3）B={4,5, 8 }
B 的最大元是 8，无最小元。
B 的极大元为 8，极小元为 4,5。
（4）B={ 4 , 5 }
B 无最大元，也无最小元。
B 的极大元是 4, 5，极小元也是 4,5。

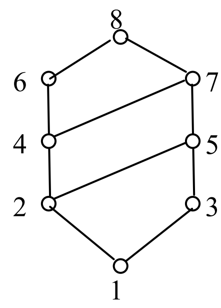


图 4.7.5

从例 4.7.8 中可知，最大元、最小元未必存在，若存在则必唯一。极大元、极小元虽存在，但却不唯一，它们之间不可比，并处在子集哈斯图的同一层次上，极大元在最高层，极小元在最低层。关于这些，有下面的定理。

定理 4.7.1 设$\langle A,\preccurlyeq\rangle$为偏序集，$B\subseteq A$。

（1）若 b 为 B 的最大（最小）元，则 b 为 B 的极大（极小）元。

（2）若 B 有最大（最小）元，则 B 的最大（最小）元唯一。

（3）若 B 为有限集，则 B 的极大元、极小元恒存在。

证明（1）由定义直接可得。

（2）设 b_1，b_2 为 B 的最大（最小）元，那么 $b_1\preccurlyeq b_2$ 且 $b_2\preccurlyeq b_1$。由$\preccurlyeq$的反对称性即得 $b_1=b_2$。所以 B 的最大（最小）元若存在，则唯一。

（3）设 B = { b_1,b_2 , …,b_n}，对 n 进行归纳。

当 n = 1 时，B 中仅有一个元素，它既是极大元，也是极小元。当 n = 2 时，设 B={ b_1,b_2 }。那么，$b_1 \preccurlyeq b_2$ 时 b_1 为极小元，b_2 为极大元；$b_2 \preccurlyeq b_1$ 时 b_2 为极小元，b_1 为极大元；$\neg\, b_1 \preccurlyeq b_2$ 且 $\neg\, b_2 \preccurlyeq b_1$ 时，b_1，b_2 同为极大元，也同为极小元。

设 n = k 时命题真。若 n = k+1，B = { b_1,b_2 , …,b_k,b_{k+1} }。据归纳假设，{ b_1,b_2 , …,b_k} 有极大元 b_i，极小元 b_j。考虑{b_i,b_{k+1}}，若 $b_i \preccurlyeq b_{k+1}$，b_{k+1} 显然是 B 的极大元；若 $b_{k+1} \preccurlyeq b_i$，或两者不可比较，则 b_i 是 B 的极大元。同理可证，b_j 或 b_{k+1} 是 B 的极小元。

归纳完成，（3）得证。

证毕

例 4.7.9 在例 4.7.5 中的（3）题中设子集 B={ 15 , 5, 6 }，则子集 B 的极大元：15, 6；极小元：5，6；无最大元；也无最小元。

在例 4.7.6 中，A 的极大元是 a，b,e；A 的极小元是 d,e； A 无最大元，也无最小元。

定理 4.7.2 偏序集的分解定理 设<A, ≼>为一有限的偏序集，且 A 中最长链的长度为 n，则将 A 中元素分成不相交的反链，反链个数至少是 n。即 A 有一划分，使划分有 n 个划分块，且每个划分块为一反链。

证明 对 n 进行归纳。

当 n=1 时，A 中没有任何两个不同元素有≼关系，因此 A 本身既为一链，又为一反链，因此划分{A}即满足要求。

设 n=k 时命题成立。现令 n=k+1。

设 M 为 A 中所有极大元素构成的集合。由于 A 为有限集，因此 M 必为一非空的反链（极大元之间是不可比较的）。考虑有序集<A-M，≼>，它不可能有长度为 n 的链（否则 A 中链的长度将超过 n，关于这一点请读者思考），因而<A-M，≼>中最长链的长度应当为 n-1=k。据归纳假设，A-M 有 k 个划分块的划分，且每个划分块为一反链。这 k 个反链连同反链 M，恰构成 A 的 k+1 个划分块组成的划分。所以归纳完成。

证毕

定理 4.7.3 设<A, ≼>为一偏序集，| A | = mn+1。那么，A 中或者存在一条长度为 m+1 的反链，或者存在一条长度为 n+1 的链。

证明 若 A 中链的长度不超过 n，那么据定理 4.7.2，A 中必有长度为 m+1 个划分块的反链，否则| A |≤mn。

定义 4.7.7 设<A, ≼>为偏序集，B ⊆ A。

（1）如果 a∈A，且对每一 x∈B，x≼a，称 a 为 B 的**上界**（**upper bound**）。即

a 为 B 的上界 ⇔ $a\in A \wedge \forall x(x\in B \rightarrow x \preccurlyeq a)$

（2）如果 a∈A，且对每一 x∈B，a≼x，a 称为 B 的**下界**（**lower bound**），即

a 为 B 的下界 ⇔ $a\in A \wedge \forall x(x\in B \rightarrow a \preccurlyeq x)$

（3）如果 C 是 B 的所有上界的集合即 C={y|y 是 B 的上界}，则 C 的最小元 a 称为 B 的**最小上界或上确界**（**least upper bound**）。

（4）如果 C 是 B 的所有下界的集合即 C={y|y 是 B 的下界}，则 C 的最大元 a 称为 B 的**最大下界或下确界**（**greatest lower bound**），

从以上定义可知。B 的最小元一定是 B 的下界，同时也是 B 的最大下界。同样地，B 的最大元一定是 B 的上界，同时也是 B 的最小上界。但反过来不一定正确，B 的下界不一定是 B 的最小元，因为它可能不是 B 中的元素。同样地，B 的上界也不一定是 B 的最大元。

例 4.7.10 设偏序集<A,≼>如图 4.7.4 所示，考虑集合 B = {h, i}，它有上界 j，k，但无最小上界；它有下界 f，g 等，但没有最大下界。当 B = { b, c, d, e}时，它有上界 h，i 等，无最小上界；它没有下界和最大下界。

再设偏序集<A,≼>如图 4.7.5 所示，

（1）当 B = { 2, 3, 4, 5, 7}时，B 有上界 7,8 ,下界 1；最小上界 7，最大下界 1 。

（2）当 B = { 2,5,4,6 }时，B 有上界 8，下界 2，1；最小上界 8，最大下界 2。

定理 4.7.4 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集，$B \subseteq A$。

（1）若 b 为 B 之最大元（最小元），则 b 必为 B 最小上界（最大下界）。

（2）若 b 为 B 之上（下）界，且 $b \in B$，则 b 必为 B 的最大（最小）元。

（3）如果 B 有最大下界（最小上界），则最大下界（最小上界）唯一。

证明极易，略。

注意，上、下界未必存在，存在时又未必唯一。即使在有上界、下界时，最小上界和最大下界也未必存在。

定义 4.7.8 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集，如果 A 的任何非空子集都有最小元，则称$\preccurlyeq$为良序关系（**well founded relation**），称$<A, \preccurlyeq>$为良序集(**well ordered set)**。

例 4.7.11 设 $I_n=\{1, 2, \cdots, n\}$及 $N=\{1, 2, 3, \cdots\}$，对于小于等于关系来说是良序集合，即$<I_n, \preccurlyeq>$是良序集合。

定理 4.7.5 一个良序集一定是全序集。

证明 设$<A, \preccurlyeq>$为良序集合，则对任意两个元素 $x, y \in A$ 可构成子集$\{x,y\}$,必存在最小元素，这个最小元素不是 x 就是 y，因此一定有 $x \preccurlyeq y$ 或 $y \preccurlyeq x$。所以$<A, \preccurlyeq>$为全序集合。

定理 4.7.6 一个有限的全序集一定是良序集。

证明 设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，令$<A, \preccurlyeq>$是全序集合。

用反证法，假定$<A, \preccurlyeq>$不是良序集合，则必存在一个非空子集 $B \subseteq A$，在 B 中不存在最小元素，由于 B 是一个有限集合，故一定可以找出两个元素 x 与 y 是无关的，由于$<A, \preccurlyeq>$ 是全序集，$x, y \in A$，所以 x, y 必有关系，得出矛盾，故$<A, \preccurlyeq>$必是良序集合。 **证毕**

上述结论对于无限的全序集合不一定成立。

例如，大于零小于 1 的全部实数，按大小次序关系是一个全序集合，但不是良序集合，因为集合本身就不存在最小元素。

定理 4.7.8 （**良序定理**）任意的集合都是可以良序化的。

4.8 函数的定义和性质

函数概念是最基本的数学概念之一，也是最重要的数学工具。初中数学中函数定义为“对自变量每一确定值都有一确定的值与之对应”的因变量；高中数学中函数又被定义为两集合元素之间的映射。现在，我们要把后一个定义作进一步的深化，用一个特殊关系来具体规定这一映射，称这个特殊关系为函数，因为关系是一个集合，从而又将函数作为集合来研究。离散结构之间的函数关系在计算机科学研究中也已显示出极其重要的意义。我们在讨论函数的一般特征时，总把注意力集中在离散结构之间的函数关系上，但这并不意味着这些讨论不适用于其它函数关系。

定义 4.8.1 设 X，Y 为集合，如果 f 为 X 到 Y 的关系（$f \subseteq X \times Y$），且对每一 $x \in X$，都有唯一的 $y \in Y$，使$<x,y> \in f$ 称 f 为 X 到 Y 的**函数**（**functions**），记为 $f: X \rightarrow Y$，。当 $X=X_1 \times \cdots \times X_n$ 时，称 f 为 n 元函数。函数也称映射（mapping）。

换言之，函数是特殊的关系，它满足

（1）函数的定义域是 X，而不能是 X 的某个真子集。

（2）若$<x,y> \in f$，$<x,y'> \in f$，则 $y = y'$（单值性）。

由于函数的第二个特性，人们常把$<x,y> \in f$ 或 xfy 这两种关系表示形式，在 f 为函数时改为 $y = f(x)$ 。这时称 x 为**自变元**，y 为函数在 x 处的**值**；也称 y 为 x 的**像点**，x 为 y 的**源点**。一个源点只能有唯一的像点，但不同的源点允许有共同的像点。注意，函数的上述表示形式不适用于一般关系。（因为一般关系不具有单值性）

从定义可知函数是作为关系定义的，并不限于实数。如计算机系统中的输入、输出就可以看作一个函数，每输入一组数据，得到唯一的结果。

例 4.8.1 设 $A=\{a, b\}$，$B=\{1, 2, 3\}$判断下列集合是否是 A 到 B 函数？

$F1=\{<a, 1>, <b, 2>\}$， $F2=\{<a, 1>, <b, 1>\}$，$F3=\{<a, 1>, <a, 2>\}$，$F4=\{<a, 3>\}$

解 F1,F2 是函数，F3,F4 不是函数，但若不强调是 A 到 B 函数，则 F4 是函数，其定义域为{a}.

例 4.8.2 下列关系中那些能够成函数？

（1）$\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in N, x+y<10\}$

（2）$\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in N, x+y=10\}$

（3）$\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in R, |x|=y\}$

（4）$\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in R, x=|y|\}$

（5）$\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in N, |x|=|y|\}$

解 只有（3）能构成函数。

由于函数归结为关系，因而函数的表示及运算可归结为集合的表示及运算，函数的相等的概念、包含概念，也便归结为关系相等的概念及包含概念。

定义 4.8.2 设 $f:A\to B$，$g:C\to D$，，如果 $A=C$，$B=D$，且对每一 $x\in A$，

$$f(x)=g(x)$$

称函数 f 等于 g, 记为 $f=g$。 如果 $A\subseteq C$，$B=D$，且对每一 $x\in A$，$f(x)=g(x)$ ，称函数 f 包含于 g，记为 $f\subseteq g$。

事实上，当不强调函数是定义在哪个集合上的时候，由于函数是序偶的集合（特殊的关系）。所以 $f=g$ 的充分必要条件是 $f\subseteq g$ 且 $g\subseteq f$ 。

例 4.8.3 设 $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2,3\}$。由 $A\to B$ 能生成多少个不同的函数？由 $B\to A$ 能生成多少个不同的函数？

解 设 $f_i: A\to B(i=1\cdots 9)$, $g_i: B\to A(i=1\cdots 8)$

$f_1=\{<a,1>,<b,1>\}$ $g_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,a>\}$

$f_2=\{<a,1>,<b,2>\}$ $g_2=\{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_3=\{<a,1>,<b,3>\}$ $g_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,a>\}$

$f_4=\{<a,2>,<b,1>\}$ $g_4=\{<1,a>,<2,b>,<3,b>\}$

$f_5=\{<a,2>,<b,2>\}$ $g_5=\{<1,b>,<2,a>,<3,a>\}$

$f_6=\{<a,2>,<b,3>\}$ $g_6=\{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_7=\{<a,3>,<b,1>\}$ $g_7=\{<1,b>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_8=\{<a,3>,<b,2>\}$ $g_8=\{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$

$f_9=\{<a,3>,<b,3>\}$

我们有下面的定理：

定理 4.8.1 设$|A|=m$，$|B|=n$，那么$\{f \mid f: A\to B\}$的基数为 n^m 。即共有 n^m 个 A 到 B 的函数。

证明 设 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$, $B=\{b_1,\cdots,b_n\}$，那么每一个 $f: A\to B$ 由一张如下的表来规定:

a	a_1	a_2	…	a_m
f(a)	b_{i1}	b_{i2}	…	b_{im}

其中 b_{i1}，b_{i2}，…，b_{im} 为取自 b_1，b_2，…，b_n 的允许元素重复的排列，这种排列总数为 n^m 个。因此，上述形式的表恰有 n^m 张，恰对应全部 n^m 个 A 到 B 的函数。

由于上述缘故，当 A,B 时有穷集合时，我们以 B^A 记所有 A 到 B 的全体函数的集合：$B^A=\{f|f: A\to B\}$，则$|B^A|=|B|^{|A|}$

特别地 A^A 表示 A 上函数的全体。目前在计算机科学中，也用 $A\to B$ 替代 B^A 。

例 4.8.3 中 $B^A=\{f1,f2,f3,\cdots,f9\}$，$|B^A|=9$ ，$A^B=\{g1,g2,g3,\cdots,g8\}$，$|A^B|=8$

该定理当 X 或 Y 中至少有一个集合是空集时，可分成下面两种情况：

（1） 当 $X=\varnothing$ 时，X 到 Y 的空关系为一函数，称为空函数即 $Y^X=\varnothing^\varnothing=\{\varnothing\}$。

（2） 当 $X\neq\varnothing$ 且 $Y=\varnothing$ 时，X 到 Y 的空关系不是一个函数即 $Y^X=\varnothing^X=\varnothing$。

关于函数有下列术语和记号。

定义 4.8.3 设 $f: X\to Y$，$A\subseteq X$，称 $f(A)$为 A 的**像（image）**，定义为

$$f(A)=\{y \mid \exists x(x\in A\wedge y=f(x))\}$$

显然，此时 f 为 X 到 Y 的函数，且 $f(\varnothing)=\varnothing$, $f(X)=Ran(f)$ 此时 f(X)称为函数的像, $f(\{x\})=\{f(x)\}$ $(x\in A)$。

在这里请注意区别函数值和像两个不同的概念。函数值 $f(x)\in Y$,而像 $f(A)\subseteq Y$.

关于像有下列性质。

定理 4.8.2 设 $f: X\rightarrow Y$，对任意 $A\subseteq X$，$B\subseteq X$，

（1）$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

（2）$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

（3）$f(A)-f(B)\subseteq f(A-B)$

证明 （1）对任一 $y\in Y$，有

$$\begin{aligned} y\in f(A\cup B) &\Leftrightarrow \exists x(x\in A\cup B\wedge y=f(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists x((x\in A\wedge y=f(x))\vee(x\in B\wedge y=f(x))) \\ &\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge y=f(x))\vee\exists x\,(x\in B\wedge y=f(x)) \\ &\Leftrightarrow y\in f(A)\vee y\in f(B) \\ &\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B) \end{aligned}$$

因此 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$ 。

（2），（3）的证明请读者完成。注意，（2），（3）中的包含符号不能用等号代替。我们举例说明。

例 4.8.4 设 $X=\{a,b,c,d\}$，$Y=\{1,2,3,4,5\}$，$f: X\rightarrow Y$, 如图 4.8.1 所示。那么，

$f(\{a\})=\{2\}$ ，$f(\{b\})=\{2\}$ ，$f(\{a\})\cap f(\{b\})=\{2\}$

$f(\{a\})-f(\{b\})=\varnothing$

$f(\{a\}\cap\{b\})=f(\varnothing)=\varnothing$,

$f(\{a\}-\{b\})=f(\{a\})=\{2\}$

$f(\{a\}\cap\{b\})\subset f(\{a\})\cap f(\{b\})$

$f(\{a\})-f(\{b\})\subset f(\{a\}-\{b\}$

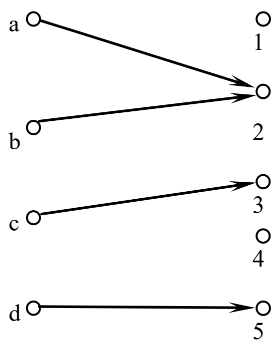


图 4.8.1

注意，$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$的写法是不适当的，因为这意味着 $f(x)\in f(A)\Leftrightarrow x\in A$ 但它是与 $f(A)$的定义不相符的，由 $f(x)\in f(A)$并不能确定 $x\in A$。上例中 $f(b)=2\in f(\{a\})$，但 $b\notin\{a\}$。

下面讨论函数的性质。

定义 4.8.4 给定函数 $f: X\rightarrow Y$，

(1)如果函数 f 的值域 ran f=Y，则称 $f: X\rightarrow Y$ 为满射函数（surjection），满射函数也称映上的函数。

(2)对于任意 $x_1,x_2\in X$, 若 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$, 或者 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$, 则称 f 为单射函数（injection）, 单射函数也称一对一的函数。

(3) $f: X\rightarrow Y$。如果它既是映上的映射，又是一对一的映射，则称 f 为双射函数（bijection），双射函数也称一一对应。

由定义不难看出，如果 $f: X\rightarrow Y$ 是满射的，则对于任意的 $y\in Y$, 都存在 $x\in X$,使得 $y=f(x)$; 如果 $f: X\rightarrow Y$ 是单射的，则对于任意的 $y\in \text{ran}\, f$, 都存在唯一的 $x\in X$,使得 $y=f(x)$。

图 4.8.2 说明了这三类函数之间的关系。注意，既非单射又非满射的函数是大量存在的。

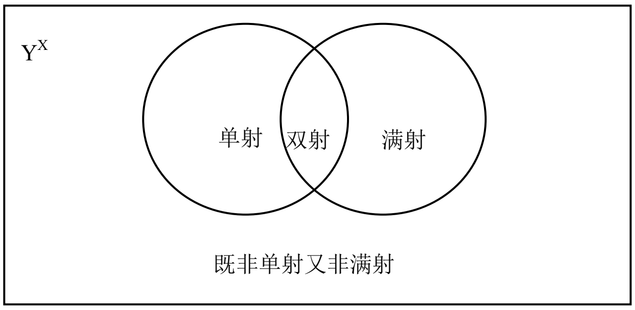


图 4.8.2

例 4.8.5 对于给定的 f 和集合 A，请判断 f 的性质并求 A 在 f 下的像 f(A)。

(1) $f: R \to R \quad f(x)=x. \quad A=\{8\}$

(2) $f: N \to N\times N \quad f(x)=<x,x+1>. \quad A=\{2,5\}$

(3) $f: Z \to N \quad f(x)=|x| \quad A=\{-1,2\}$

(4) $f: S \to R \quad f(x)=\dfrac{1}{x+1}. \quad S=[0,+\infty), \quad A=[0,7)$

解

（1）f 是双射　f(A)=f({8})={8}

(2)f 是单射　f(A)=f({2，5})={<2,3>,<5,6>}

(3) f 是满射　f(A)=f({-1，2})={1，2}

(4) f 是单射　f(A)=f([0,7))=（$\dfrac{1}{8}$，1]

定理 4.8.3 设 A, B 是有穷集合，|A|=|B|，则 f:A→B 是单射的充分必要条件是 f 是满射。

证明　先证必要性。设 f 是单射，则｜A｜=｜f(A)｜=｜B｜。

因为 f(A)⊆B，　而 B 是有穷集合，所以 f(A)=B.　　故 f 是满射。

再证充分性。设 f 是满射，则 f(A)=B

于是　｜A｜=｜f(A)｜=｜B｜。又因为 A 是有穷集合，所以 f 是单射。

注意：对于无限集合，该定理不成立。如设 f: Z→Z,f(x)=2x, 显然 f 是单射但不是满射。

下面定义一些常用的函数。

定义 4.8.5

（1）设 f: X→Y,如果存在 c∈Y 使得对所有的 x∈X 都有 f(x)=c，则称 f:X→Y 是常函数。

（2）任意集合 A 上的恒等关系 I_A 为一函数，常称为**恒等函数**，因为对任意 x∈A 都有 $I_A(x)=x$。

(3) 设<X,≼>,<Y,≼>为偏序集，f: X→Y,如果对任意的 $x_1,x_2\in X, x_1\prec x_2$,就有 $f(x_1)\preccurlyeq f(x_2)$,则称 f 为单调递增的；如果对任意的 $x_1,x_2\in X, x_1\prec x_2$,就有 $f(x_1)\prec f(x_2)$, 则称 f 为严格单调递增的。类似地也可以定义单调递减的和严格单调递减的函数。

(4) 设 A 为集合，对于 A 的任意的子集 A’，A’的特征函数 $\chi_{A'}$：A→{0，1}定义为

$$\chi_{A'}(a)=\begin{cases}1 & a\in A'\\ 0 & a\in A-A'\end{cases}$$

(5) 设 R 是 A 上的等价关系，令

g: A→A/R

∀a∈A, g(a)=[a],其中[a]是由 a 生成的等价类，则称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射。

我们都很熟悉实数集合 R 上的函数 f: R→R ,f(x)=x+1,　它是单调递增的和严格单调递增的，但它只是上面定义中的单调函数的特例。而在上面的定义中，单调函数可以定义于一般的偏序集合上。

例 4.8.6 给定偏序集<P({a,b}),R⊆>,<{0,1},≤>,其中 R⊆为集合的包含关系，≤为一般的小于或等于关系。令 f: P({a,b})→{0,1},

f(∅)=f({a})= f({b})=0, f({a,b})=1,则 f 是单调递增的，但不是严格单调递增的。

关于集合的特征函数:设 A 为集合，不难证明，A 的每一个子集 A’都对应于一个特征函数，不同的子集则对应于不同的特征函数。而自然映射 g 给定集合 A 和 A 上的等价关系 R，

就可以确定一个自然映射 g: A→A/R。

例 4.8.7 设 A={1,2,3,4},R={<1,2>,<2,1>}∪IA,求自然映射：g_1:A→A/ E_A g_2:A→A/R

解

$g_1(1)= g_1(2)= g_1(3)= g_1(4)=A$

$g_2(1)= g_2(2)= \{1,2\}$ $g_2(3)= \{3\}$ $g_2(4)= \{4\}$

注意到，$A/E_A =\{\{1,2,3,4\}\}=\{A\}$ $A/R=\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$

所以自然映射都是满射且只有等价关系取 I_A 时是双射。

双射函数无疑是最为重要的一类函数。作为例子，我们介绍一种常见的双射函数——置换。特别地若 A 是有穷集合，f 是 A 到 A 的单射函数，则必是双射，我们称为置换。

定义 4.8.6 设 A 为有限集，p：A→A 为一单射函数，那么称 p 为 A 上的置换（permutations）。当 |A|=n 时，称 p 为 n 次置换。

置换常用一种特别的形式来表示。设 A= {a_1 , ⋯ , a_n},那么

$$p=\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \cdots & a_n \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

表示一个 A 上的 n 次置换,它满足

$$p(a_j)= a_{ij}$$

A 上的恒等函数显然为一置换，称为么置换，用 i 表示。

4.9 函数的复合和反函数

函数既然是一种关系，因此可以仿照关系的复合那样对函数进行复合运算。

定理 4.9.1 设 f:X→Y，g:Y→Z,，那么复合关系 f∘g 为 X 到 Z 的函数。

证明

首先证明 Dom(f∘g) =X。对任一 x∈X，有 y∈Y，使<x,y>∈f；对这一 y，有 z∈Z，使得<y,z>∈g，因此<x,z>∈f∘g 。故 x∈ Dom(f∘g)。Dom(f∘g) =X 得证。

再证 f∘g 的单值性。设对任意 x∈X 有 z_1,z_2，使<x,z_1>∈f∘g，<x,z_2>∈f∘g 。那么有 y_1,y_2，使<x,y_1>∈f，<y_1,z_1>∈g，<x,y_2>∈f, <y_2,z>∈g 。由于 f 为函数，知 $y_1=y_2$；又因 g 为函数，得知 $z_1=z_2$。f∘g 为 X 到 Z 的函数得证。

证毕

我们注意到，<x,z>∈f∘g 是指有 y 使<x,y>∈f，<y,z>∈g，即 y = f(x)，z = g(y) = g(f(x))，因而

$$f\circ g(x) = g(f(x))$$

这就是说，当 f,g 为函数时，它们的复合作用于自变量的次序刚好与合成的原始记号的顺序相反。

我们约定，函数复合时，只有当两个函数中一个的定义域与另一个的值域相同时，它们的复合才有意义。

例 4.9.1 设 A={x_1,x_2,x_3,x_4} B={y_1,y_2,y_3,y_4,y_5},C={z_1,z_2,z_3}

f:A→B f={<x_1,y_2>, <x_2,y_1>,<x_3,y_3>,<x_4,y_5>}

g:B→C g={ <y_1,z_1>, <y_2,z_2>, <y_3,z_3>, <y_4,z_3>, <y_5,z_2>}

求 f∘g

解

f∘g={<x_1,z_2>,<x_2,z_1>,<x_3,z_3>,<x_4,z_2>}

用关系图图示 f∘g.其中 - · - ➤ 表示 f∘g,见图 4.9.1。

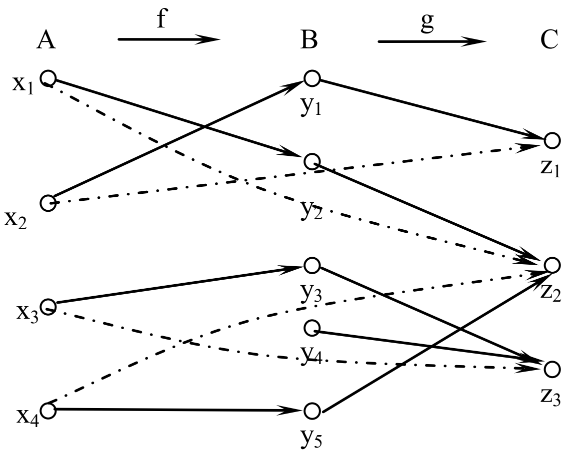


图 4. 9. 1

例 4.9.2 设 f，g 均为实函数，$f(x) = 2x+1$,$g(x) = x^2+1$,求 f∘g，g∘f，f∘f，g∘g

解 $f\circ g(x) = g(f(x)) = (2x+1)^2+1 = 4x^2+4x+2$

$g\circ f(x) = f(g(x)) = 2(x^2+1)+1 = 2x^2+3$

$f\circ f(x) = f(f(x)) = 2(2x+1)+1 = 4x+3$

$g\circ g(x) = g(g(x)) = (x^2+1)^2+1 = x^4+2x^2+2$

所以 $f\circ g=\{\langle x, 4x^2+4x+2\rangle\}$ $g\circ f=\{\langle x, 2x^2+3\rangle\}$

$f\circ f=\{\langle x, 4x+3\rangle\}$ $g\circ g=\{\langle x, x^4+2x^2+2\rangle\}$

同关系的复合运算一样，函数的复合运算不满足交换律，但满足结合律，有下面的推论。

推论 函数的复合运算满足结合律，即 $f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$

证明 因对任意 $x\in Dom(f)$，有

$$\begin{aligned} f\circ(g\circ h)(x) &= (g\circ h)(f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= h((f\circ g)(x)) \\ &= (f\circ g)\circ h(x) \end{aligned}$$

证毕

由于函数的合成满足结合律，n 个函数 f 的合成可记为 f^n，常称为 f 的 n 次**迭代**。

显然

$$\begin{cases} f^0(x) = x \\ f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \end{cases}$$

例 4.9.3

（1）设 f 为 N 上的后继函数，即 $f(x) = x+1$，那么 $f^y(x) = x+y$。这表明，当把复合运算强化地运用于变元（合成次数），它就成为一种有力的构造新函数的手段。

（2）设 $f:X\to X$，$X=\{a,b,c\}$。若 $f(a) = a$，$f(b) = b$，$f(c) = c$，那么 $f^2 = f$。这时称 f 是等幂的。

函数复合有下列明显的性质。

定理 4.9.1 设 $f:X\to Y$，则

$$f\circ I_y = I_x\circ f = f$$

关于单射的、满射的和双射的函数有下列性质。

定理 4.9.2 设函数 f：X→Y，g：Y→Z，那么

（1）如果 f 和 g 是单射的，则 f∘g 也是单射。

（2）如果 f 和 g 是满射的，则 f∘g 也是满射的。

（3）如果 f 和 g 是双射的，则 f∘g 也是双射的。

证明：（1）设 x_1，$x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，由于 f 为单射，故有 $y_1\neq y_2\in Y$,且 $y_1=f(x_1)\neq y_2=f(x_2)$；又因为 g 也是单射，所以有 $z_1\neq z_2\in Z$,且 $z_1=g(y_1)\neq z_2=g(y_2)\Rightarrow g(f(x_1))\neq g(f(x_2))$

即 $f\circ g(x_1)\neq f\circ g(x_2)$。f∘g 是单射得证。

（2）为证 f∘g 为满射，设 z 为 Z 中任一元素。由于 g 为满射，因而至少有一 $y\in Y$ 使

g(y) = z 。对于这一 y，由于 f 为满射，又必有 $x \in X$ 有使 $y = f(x)$。于是我们找到 x，使 $g(f(x)) = z$，即 $f \circ g\,(x) = z$ 。$f \circ g$ 是满射得证。

（3）由（1），（2）立得。

注意：定理说明复合运算保持了原来函数的单、满、双射的性质。但本定理之逆是不完全成立的。图 4.9.2（a）中 $f \circ g$ 是单射，但 g 并非单射；（b）中 $f \circ g$ 为满射，但 f 不是满射。

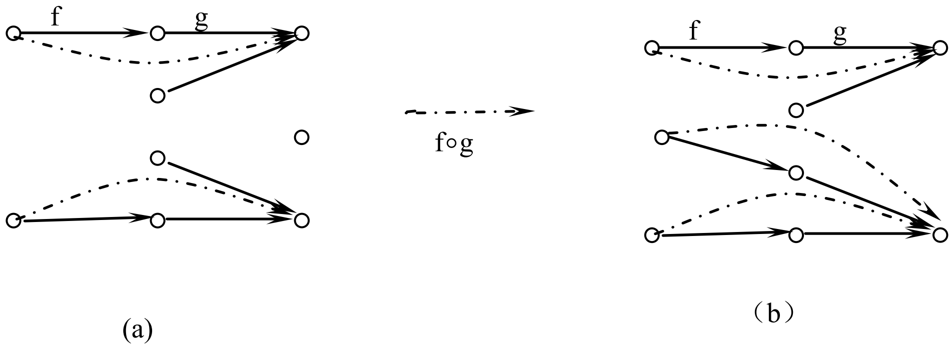


图 4.9.2

定理 4.9.4 设 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$，那么

（1）如果 $f \circ g$ 是单射，则 f 是单射函数。

（2）如果 $f \circ g$ 是满射，则 g 是满射函数。

（3）如果 $f \circ g$ 是双射，则 f 是单射函数，g 是满射函数。

证明（1）设 $f \circ g$ 是单射，而 f 并非单射。那么有 x_1，$x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$ 使 $f(x_1) = f(x_2)$，从而

$$f \circ g\,(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = f \circ g\,(x_2)$$

与 $g \circ f$ 为单射矛盾。因此 f 为单射。

（2），（3）的证明留给读者。

由于习惯上把置换的复合写得与一般函数复合次序相同，因而置换的复合的书写与关系复合的书写次序一致。显然，对任一集合 A 上的任一置换 **p**，

$$\mathbf{p} \circ \mathbf{i} = \mathbf{i} \circ \mathbf{p} = \mathbf{p}$$

例 4. 9. 4 设 A= {1,2,3,4}，P_1,P_2 为 A 上置换，

$$P_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix} \qquad P_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

那么

$$P_1 \circ P_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$P_2 \circ P_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$P_1 \circ P_2(2)= P_2\ (P_1(2))= P_2\ (4) = 1$$

$$P_2 \circ P_1(2)= P_1\ (P_2(2))= P_1\ (4)= 3$$

一般的关系 R，只要交换所有序偶的元素，就可以得到它的逆关系 R^{-1}，函数作为关系可以求取它的逆。对 $f: X \to Y$，$f^1 \subseteq Y \times X$ 为 f 的逆关系，那么是否 f^1 一定是 Y 到 X 的函数呢？回答是否定的。容易明白，当 f 不是单射或不是满射时，即 f 不是双射时，无法满足 $Dom(f^1) = Y$ 或单值性，f^1 就不再是一个函数了。但是，f 是双射时,有定理 4.9.5。

定理 4.9.5 若 $f: X \to Y$ 为一双射，那么其逆关系 f^1 为 Y 到 X 的函数，称为 f 的反函数（inverse functions），f^{-1}：$Y \to X$ 也为一双射。

证明　我们只证 f^{-1} 为一函数，而把 f^{-1} 为单射和满射的证明留给读者。

由于 f 为满射，因此对每一 $y\in Y$，有 $x\in X$，使 $f(x)=y$，从而 $<y,x>\in f^{-1}$，

这表明 $Dom(f^{-1})=Y$。为证 f^{-1} 的单值性，设 $y\in Y$，且 $<y,x_1>\in f^{-1}$，$<y,x_2>\in f^{-1}$，从而 $f(x_1)=y=f(x_2)$。据 f 的单射性，有 $x_1=x_2$ 。f^{-1} 的单值性证毕。故 f^{-1} 为 Y 到 X 的一个函数。

当 f 为一双射函数时，f^{-1} 为 f 的**反函数**，称 f 是**可逆的**。

证毕

关于反函数，有下列性质是明显的。

定理 4.9.6 若 $f: X\to Y$ 是可逆的，那么

（1）$(f^{-1})^{-1}=f$

（2）$f\circ f^{-1}=I_X$, $f^{-1}\circ f=I_Y$

证明（1） 由定理 4.9.5 知 f^{-1} 为一双射，因而 f^{-1} 也是可逆的。故 $(f^{-1})^{-1}=f$。

（2） 设 x 为 X 中任一元素，$f(x)=y$，那么 $x=f^{-1}(y)$。

由于 $f\circ f^{-1}(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x$，故 $f\circ f^{-1}=I_X$ 。同理可证 $f^{-1}\circ f=I_Y$ 。

证毕

定理 4.9.7 设 $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$ 都是可逆的，那么 $f\circ g$ 也是可逆的，

且 $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

证明留作练习。

例 4.9.5 设 f、$g\in N^N$，N 为自然数集。且

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x=0,1,2,3; \\ 0 & x=4; \\ x & x\geq 5 \end{cases} \quad ; \qquad g(x)=\begin{cases} x/2, & x\text{ 为偶数} \\ 3, & x\text{ 为奇数。} \end{cases}$$

(1) 求 $f\circ g$，并讨论它的性质（是否是单射或满射）。

(2)设 $A=\{0，1，2\}$，求 $f\circ g$（A）。

解 （1）

$$f\circ g(x)=g(f(x))=\begin{cases} 0 & x=4; \\ 1 & x=1; \\ 2 & x=3 \\ 3 & x=0、2，\text{或 } x\geq 5 \text{ 且为奇数} \\ x/2 & x\geq 5 \text{ 且为偶数} \end{cases}$$

因为对任何一个 $y\in N$，均有 $x\in N$ 使得 $f\circ g(x)=y$，所以 $f\circ g$ 是满射。

（2）$f\circ g(A)=\{1，3\}$

例 4.9.6 设 $f: R\to R$，$f(x)=x^2-2$； $g: R\to R$，$g(x)=x+4$；

(1) 求 $g\circ f$，$f\circ g$。

(2) 问 $g\circ f$ 和 $f\circ g$ 是否为单射、满射、双射的？

（3）求出 f、g、$g\circ f$ 和 $f\circ g$ 中的可逆函数的逆（反）函数。

解 （1）$g\circ f=\{<x, x^2+8x+14> \mid x\in R\}$

$f\circ g=\{<x, x^2+2> \mid x\in R\}$

（2）$g\circ f$ 和 $f\circ g$ 均是非单非满函数；

（3）因为 g 是双射，所以可逆，反函数为：$g^{-1}(x)=x-4$

4.10 集合的基数

在第三章里，我们把基数简单地看作集合元素的个数，这对于有限集来说是没有问题的，但对于无限集而言，“元素的个数”这个概念是没有意义的。 那么集合之间的“大小”相同

的确切含义是什么呢？用基数相同的概念可以精确地刻划集合的“大小”。

下文我们先讨论自然数集合、有限集、无限集的定义，然后再指出形式地描述元素“多少”概念的最好工具是函数，并给出常见无限集的基数规定及基数的基本性质。第三章里我们只是直观地描述有限集与无限集的意义，现在要给出它们的严格定义。

定义 4.10.1 设 S 为任意集合，$S\cup\{S\}$称为 S 的后继集合，记为 S^+。

易证对于任意集合 S 都有 $S\in S^+$和 $S\subseteq S^+$ 成立。

例如，令 $S=\varnothing$,反复利用定义 4.10.1 可以构造出集合序列：

$\varnothing$，

$\varnothing\cup\{\varnothing\}=\{\varnothing\}$，

$\{\varnothing\}\cup\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing，\{\varnothing\}\}$，

$\{\varnothing，\{\varnothing\}\}\cup\{\{\varnothing，\{\varnothing\}\}\}=\{\varnothing，\{\varnothing\}，\{\varnothing，\{\varnothing\}\}\}\cdots$

将上面的各集合依次命名为 0，1，2，…，就可构造出自然数。下面用记号：=给这些集合命名，于是，

$0:=\varnothing$；

$1:=0^+=\{\varnothing\}=\{0\}$；

$2:=1^+=\{\varnothing，\{\varnothing\}\}=\{0，1\}$；

$3:=2^+=\{\varnothing，\{\varnothing\}，\{\varnothing，\{\varnothing\}\}\}=\{0，1，2\}$

…

一般地，若已给出 n,则 $n+1:=n^+=\{0,1,2,\cdots\}$.因此得到自然数集 $N=\{0,1,2,3,\cdots\}$。

G.Peano 将自然数所组成的集合的基本特性描述为下列公理：设 N 表自然数集合，则

（1）$\varnothing$记为 0，$0\in N$.

（2）若 $n\in N$,则 $n^+\in N$.

（3）若子集 $S\subseteq N$ 且 $0\in S$,又若 $n\in S$ 则 $n^+\in S$,则 $S=N$.

该定理中（3）说明了 N 是满足条件（1），（2）的最小集合，（3）也称为极小性质。

定义 4.10.2 如果存在集合$\{0，1，2，\cdots，n-1\}$（自然数 n）到 A，或 A 到集合$\{0，1，2，\cdots，n-1\}$的双射，则集合 A 称为有限集；否则称 A 为无限集。

定理 4.10.1 自然数集 N 为无限集。

证明 只要证明 N 不是有限集。为证明这一点，反设 N 为有限集，即存在 f 是$\{0,l,2,\cdots,n-l\}$到 N 的双射。现令 $L\in N$, $L=1+\max\{f(0),f(1),\cdots,f(n-1)\}$。显然，对每一 $i=0，1，2，\cdots，n-1$，恒有 $f(i)<L$，这就是说 f 不是满射,与前面矛盾。因此 N 不是有限集,是无限集。

证毕

定理 4.10.2 有限集的任何子集均为有限集。

证明 设 S 为有限集，因而有双射 f，自然数 n，

$$f:\{0，l，2，\cdots，n-l\}\to S$$

因此 $S=\{f(0)，f(1)，f(2)，\cdots，f(n-1)\}$。若 S_1 为 S 的任一子集，则 $S_1=\{f(a_0)，f(a_1)，f(a_2)，\cdots，f(a_{k-1})\}$，$k\leqslant n$ 。$a_0，a_1，a_2，\cdots，a_{k-1}$为 $\{0，l，2，\cdots，n-l\}$ 中的不同成员。将序列 $a_0，a_1，a_2，\cdots，a_{k-1}$看作 $\{0，l，2，\cdots，k-l\}$ 到 $\{a_0，a_1，a_2，\cdots，a_{k-1}\}$ ($=S_2$)的双射,记为 g，那么

$$g\circ f\uparrow_{S2}:\{0，l，2，\cdots，k-l\}\to S1$$

为一双射，其中 $f\uparrow_{S2}$表示双射 f 将集合 S_2 作为定义域。因此 S_1 为有限集。

证毕

定理 4.10.3 任何含有无限子集的集合必定是无限集。

此定理是定理 4.l0.2 的逆否命题。

定理 4.10.4 无限集必与它的一个真子集存在双射函数。

证明 设 S 为任一无限集，显然 $S\neq\varnothing$，可取元素 $a_0\in S$。考虑 $S_1=S-\{a_0\}$, S_1 仍为非空无限集，又在 S_1 中可取元素 $a_1\in S_1$。考虑 $S_2=S_1-\{a_1\}$，S_2 依然为非空无限集，同样有 $a_2\in S_2$，……如此等等。

令 $B=\{a_0, a_1, a_2,\cdots\}$显然 $B\subseteq S$，且对任一自然数 n，总有 $a_n\in B$， S 有可数无限子集 B = { $a_0, a_1, a_2,\cdots$}。令 S_0= S - {a_0} ⊂ S。 定义函数 f：S→S_0：

$$f(x)=\begin{cases} x & x\notin B \\ a_{i+1} & x=a_i\in B(i=0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

容易看出 f 为一双射。

证毕

推论 凡不能与自身的任意真子集之间存在双射函数的集合为有限集合。

这里给出了有限集合和无限集合的另一个定义，它与定义 4.10.2 的定义是等价的。即凡能与自身的某一真子集之间存在双射函数的集合为无限集合，否则为有限集合。

对无限集还可作进一步的分类。

定义 4.10.3 如果存在从 N 到 S 的双射（或 S 到 N 的双射），则称集合 S 为可数无限集（countable infinite sets）。其它无限集称为不可数无限集。有限集和可数无限集统称为可数集（countable sets）。因此，不可数集即不可数无限集。

显然，自然数集合 N 为可数集，N 的任何子集均为可数集。自然数集 N 可以排成一个无穷序列的形式：0，1，2，3，…

因此，任何可数集 S 中的元素也可以排成一个无穷序列的形式：$a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$

反之，对于任何集合 S，如果它的元素可以排成上述无穷序列的形式，则 S 一定是可数集。因为 S 中元素 a_i 与 i 之间可以建立一一对应。所以一个集合是可数集的充要条件是它的元素可以排成一个无穷序列的形式。

例 4.10.1

非负偶数集以及正奇数集均为可数集，因为 f(x) = 2x , f(x) =2x+1 分别为 N 到非负偶数集以及正奇数集的双射。

定理 4.10.5 整数集为可数无限集。

证明 建立函数 f：Z→N（Z 为整数集）

$$f(x)=\begin{cases} 2x & 当x>0 \\ 0 & 当x=0 \\ 2(-x)-1 & 当x<0 \end{cases}$$

易知 f 为一双射（证明略），因此 Z 为可数集.

定理 4.10.6 任何无限集必含有一个可数子集。

该定理的证明类似于定理 4.10.4，从无限集中可以依次取出一列元素构成一个可数集。

定理 4.10.7 可数集的任何无限子集必为可数集。

证明 设 S 是可数集，S 中的元素可以排成：$a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$，设 B 是 S 的任一无限子集，它的元素也是 S 的元素，并且一定可以排成：$a_{0k},a_{1k},a_{2k},a_{3k},a_{4k},\cdots$, 所以 B 是可数集。

定理 4.10.8 可数集中加入有限个元素（或删除有限个元素）仍为可数集。

证明 设 S={$a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$}是可数集，不妨在 S 中加入有限个元素 b_0, b_1,b_2,b_3, $\cdots b_m$, 且它们均与 S 的元素不相同，得到新的集合 B,它的元素也可排成无穷序列：b_0, b_1,b_2,b_3, $\cdots b_m$，$a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$，

所以 B={ $b_0, b_1,b_2,b_3, \cdots b_m$，$a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$}是可数集。

定理 4.10.9 两个可数集的并集是可数集。

证明 设 S_1={ $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$}，$S_2$={ $b_0, b_1,b_2,b_3,b_4,\cdots$}均为可数集。不仿设 S_1 与 S_2 不相交。$S_1\cup S_2$ 的元素可以排成无穷序列，即 $a_0, b_0,a_1, b_1,a_2, b_2,a_3, b_3,a_4,\cdots$，所以

$S_1\cup S_2$={ $a_0, b_0,a_1, b_1,a_2, b_2,a_3, b_3,a_4,\cdots$}是可数集。

推论 有限个可数集的并集是可数集。

定理 4.10.10 可数个可数集的并集是可数集。

证明 不失一般性，设这可数个可数集均非空，且它们都是两两不相交的。

S_0= {a_{00} ,a_{01} ,a_{02}, …}

S_1= { a_{10} ,a_{11} ,a_{12},…}

S_2= { a_{20} ,a_{21} ,a_{22},…}

…

当 S_i 为有限集 { a_{i0} ,a_{i1} ,a_{i2},…, a_{ik}} 时，令 a_{ik} = $a_{i(k+1)}$ = $a_{i(k+2)}$ = … 从而 $S=\bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$ = $S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \cdots$, S 中元素排列次序如图 4. 10. 1 中的箭头所示。

$$
\begin{array}{llll}
a_{00} \rightarrow & a_{01} & a_{02} & a_{03}\cdots \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots \\
a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33}\cdots \\
\cdots & & &
\end{array}
$$

图 4.10-1

从左上角开始排，每一斜线上的每个元素的两个足标之和都相同，依次为 0，1，2，3，4，5，…，各斜线上的元素的个数依次为 1，2，3，4，…，因此这一排列可以写为：

a_{00} ,a_{01} , a_{10} ,a_{02}, a_{11} , a_{20}， a_{03}， a_{12}, a_{21},a_{30} …

因而 S 是可数集。

这种排列方法称为对角线方法，它是常用的方法，在计算机科学的某些理论中将发挥很大的作用。

例4.10.2 利用对角线方法证明 N×N 是可数集。

证明 N×N 中的元素可以排成如图 4.10-2 所示的形式。

$$
\begin{array}{llll}
(0,0) \rightarrow & (0,1) & (0,2) & (0,3)\cdots \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3)\cdots \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3)\cdots \\
(3,0) & (3,1) & (3,2) & (3,3)\cdots \\
\cdots & & &
\end{array}
$$

图 4.10-2

类似定理 4.10.7，按对角线方法可以将这样的排列写为：

(0,0) (0,1) (1,0) (0,2) (1,1) (2,0) (0,3) (1,2) (2,1) (3,0) …

所以 N×N 是可数集。

注意本题若不限定方法，也可定义双射 f：N×N→N,使得

$f((i,j))= \frac{1}{2}(i+j)(i+j+1)+i$,从而可知 N×N 是可数集。

例 4.10.3 有理数集是可数集。

证明 先证正有理数集 Q_+是可数的。例 4.10.2 已证得 N×N 是可数集，从 N×N 中删除所有使 i 和 j 不是互质的有序对（i,j），并删除所有有序对(i,0),得到集合为 S,S⊆N×N.因为 S 中包含(1,1) (2,1) (3,1) …，显然 S 是可数集。定义函数 f: S→Q_+,$f((i,j))=\frac{i}{j}$,显然 f 是双射，所以 Q_+是可数集。

设负有理数集 Q_-，同理可证也是可数集。而 Q= $Q_+ \cup Q_+ \cup$ {0}显然也是可数集。

证毕

定理 4.10.11 实数集的子集[0，1]区间是不可数集。

证明 反证法证明。设[0，1]为可数集{ $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$}。由于[0，1]中实数均可表示为十进制无限小数（对于有限小数均可以写成以“9”为循环节的无限循环小数形式（数 0 例外，0 表示为，0．000…）1 表示为 0．999…，0. 87=0. 86999…），因此[0，1]中实数可如下列出：

$$
\begin{array}{ll}
a_0 & 0.x_{00}x_{01}x_{02}x_{03}\cdots \\
a_1 & 0.x_{10}x_{11}x_{12}x_{13}\cdots \\
a_2 & 0.x_{20}x_{21}x_{22}x_{23}\cdots \\
\cdots & \\
a_n & 0.x_{n0}x_{n1}x_{n2}x_{n3}\cdots
\end{array}
$$

…

这里 x_{nj}(n,j = 0, l, 2,⋯)为第 n 个小数的第 j 个数字。现作一个十进制小数 $y = 0.y_0y_1y_2\cdots$，其中

$$y_i = \begin{cases} 1 & x_{ii} \neq 1 \\ 2 & x_{ii} = 1 \end{cases}$$

显然 y 满足：$y_i \neq 0$, $y_i \neq 9, i=0,1,2,3,\ldots y \in (0,1)$，且对于任一 n，因为 $y_i \neq x_{ii}$，所以 y 与 $\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots\}$中的任一个数都不相同，即 $y \notin \{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots\}=[0,1]$,于是矛盾。矛盾表明，[0，1]是不可数集。

定义 4.10.4 如果有双射 f:{0,1,2, ⋯,n-1}→S, 或双射 f：A→{0,1,2, ⋯,n-1}，则称集合 S 的基数（cardinal number）为 n(n 为自然数),记为| S| = n 。

显然，集合 S 为有限集，当且仅当它以自然数为其基数，即存在自然数 n 使 | S| = n 。可以说 n 是集合 A 的元素个数。

定义 4.10.5 如果有双射 f: N→S，或双射 f: S→N，N 为自然数集,称集合 S 的基数为$\aleph_0$，记为 $|S| = \aleph_0$,读作阿列夫零。

因此，自然数集及一切可数无限集的基数均为$\aleph_0$。

定义 4.10.6 如果有双射 f：[0，l]→S，或双射 f：S→[0，1]，则称集合 S 的基数为 c 也记为$\aleph$，读作阿列夫。记为| S|= c。具有基数 c 的集合常称为连续统（continuum）。

例 4.10.4 实数集上的任何闭区间[a，b]，开区间(a,b) (a<b)，以及实数集本身都是连续统。

证明 为证 | (a, b) | = c，先证明[0.1]与（0，1）的基数相同。令 A={0,1, $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$},A⊆[0,1].

定义函数 f: [0.1]→（0，1）使 f(0)= $\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n+1}$ (n≥1)

$$f(x)=x \quad (x\in[0,1]-A)$$

显然 f 是双射。所以|(0,1)|=c

建立双射 g：[0，l]→[a，b] 使 g(x) = (b – a)x + a

因此 | [a，b] | = | [0，l] | = c,同理| (a，b) | = | (0，l) | = c,

为证| R | = **c**，建立双射 h：(0 , l)→R，

$$h(x)=tg(\pi x-\frac{\pi}{2})$$

因此 | R | = | (0，l)| = **c**。

也许有人会问，是否所有集合都以自然数 n、$\aleph_0$和 c 之一作为其基数呢？为此我们引人基数大小的概念。

定义 4.10.7 设 A，B 为任意集合。

（1）如果有双射 f：A→B 或双射 f：B→A，则称 A，B 基数相等，记为| A | = | B |。

（2）如果有单射 f：A→B 或满射 f：B→A，则称 A 的基数小于等于 B 的基数，记为 | A |≤ |B| 。

（3）如果| A | ≤ | B |,且| A | ≠ | B |，则称 A 的基数小于 B 的基数，记为| A | < | B |。

显然，上述定义与我们前面对有限集、可数无限集及连续统的基数规定是一致的。对任何自然数 m，n，若 m≤n，则

| {0,1,2, ⋯,m-1} | ≤ | {0,1,2, ⋯,n-1} |

对任意自然数 n，n < $\aleph_0$，即 | {0,1,2, ⋯,n-1} | < | {0,1,2, 3,⋯} |

而$\aleph_0$＜c，即 | {0,1,2, 3,⋯} | < | R | 。

问是否存在无限集合 B，满足$\aleph_0$＜|B|＜c, 这是一个至今尚未解决的理论问题。

定理 4.10.12 对任意集合 A，B，C，有

（1）| A | ≤ | A |。

（2）若| A | ≤ | B |，| B | ≤ | C | ，则 | A |≤| C |。

请读者自行证明本定理。

定理 4.10.13 对任意集合 A，B，或者| A | < | B |，或者| A | = | B |，或者| B | < | A |，且任

意两者都不能兼而有之。

本定理常称为基数三歧性定理，它的证明依赖于选择公理，我们略去这一证明，有兴趣的读者可参阅相关文献。

定理 4.10.14 对任意集合 A，B，如果$|A| \leqslant |B|$，$|B| \leqslant |A|$，那么$|A| = |B|$。

证明 设$|A| \neq |B|$，那么根据基数三歧性定理，或者$|A| < |B|$，或者$|B| < |A|$,且不能兼而有之。

若$|A| < |B|$,则$|B| < |A|$不成立, 且$|A| \neq |B|$,于是与$|A| \leqslant |B|$矛盾。

若$|B| < |A|$,则$|A| < |B|$不成立, 且$|A| \neq |B|$,于是又与$|B| \leqslant |A|$矛盾。

$|A| = |B|$得证。

证毕

该定理为我们证明集合之间的基数相等提供了一个有力的工具。因为在某些情况下直接构造两个集合之间的双射函数是相当困难的。相比之下，构造两个单射函数这可能要容易得多。这样可降低构造的难度。

例 4.10.5 P(N)（N 为自然数集）为连续统。

证明 利用定理 4.10.14 证明本命题,为此要建立单射 f：$P(N) \to [0，1]$，

单射 g：$[0，1] \to P(N)$以便证明，$|\rho(N)| \leqslant c$，$c \leqslant |\rho(N)|$。

定义 f :$P(N) \to [0，1]$如下：对每一 $A \subseteq N$

$$f(A) = 0.x_0x_1x_2x_3\cdots（十进制小数）$$

其中

$$x_i=\begin{cases}1 & i \in A\\ 0 & i \notin A\end{cases}$$

例如 $f(\varnothing)=0.000\cdots$，$f(N) = 0.111\cdots$，$f(\{0，2\})=0.10100\cdots$

显然 f 为单射。

定义 g：$[0，1] \to P(N)$如下：对每一[0，1]中数的二进制表示（如果这种表示不唯一，则取定其中之一）$0.x_0x_1x_2x_3\cdots$（x_i 为 0 或 1）：

$$g(0.x_0x_1x_2x_3) = \{i \mid x_i=1\}$$

易知，g 也是单射。原命题得证。

证毕

注意，上述证明中，对 f 的定义不可用二进制表示的实数 $0.x_0x_1x_2x_3\cdots$，因为

$$f(\{0\}) = 0.1000\cdots=0.0111\cdots = f(\{1,2,3,\cdots\})$$

从而 f 便不是单射。另外，应注意 g 不是满射。因为，例如 1/2，只能取一种二进制表示方式，当它确定表示为 $0.1000\cdots$时，$g(0.1000\cdots)=\{0\}$，从而不可能有 x 使 $g(x) = \{1,2,3,4,\cdots\}$，因为只有在 $x = 0.0111\cdots$时才有这一结果，而 $0.0111\cdots$是 1/2 的另一二进制表示形式。

定理 4.10.15 （康托定理）设 M 为任意集合，记 M 的幂集为 S.则$|M|<|S|$.

证明 对任意集合 M,当 $M=\varnothing$时,显然$|M|=0$,$S=\{\varnothing\}$,$|S|=1$,故定理得证。

当 $M\neq\varnothing$时,对任意 $a\in M$,有$\{a\}\in 2^M=S$,因为如下定义的函数 f：$M\to S$，明显为一单射：对每一 $a\in M$，$f(a) =\{a\}$,所以$|M| \leqslant |S|$. 现证$|M| \neq |S|$。用反证法，设$|M| = |S|$，故有双射 g：$M\to S$，使得对每一 $a\in M$，有唯一的 $g(a)\in S$，即 $g(a)\subseteq M$。定义集合

$$B=\{a|a\in M\wedge a \notin g(a)\}$$

当然 $B\in S$。由于 g 为双射，对 $B\in S$,有唯一 $y\in M$，使得 $g(y) = B$ 。考虑 $y\in B$ 与否，得知

$$\begin{aligned}y\in B &\Leftrightarrow y\in \{a|a\in M\wedge a \notin g(a)\}\\ &\Leftrightarrow y \notin g(y)\\ &\Leftrightarrow y \notin B\end{aligned}$$

这是一个矛盾。因此 g 不存在，$|M| \neq |S|$,因此，$|M|<|S|$。

这个定理表明没有最大的基数，也没有最大的集合。

4.11 例题选解

为帮助读者熟练掌握本章的内容，本节选择部分综合性的题目，并做较为详细地解答。

例 4.11.1 证明：非空的对称、传递关系不可能是反自反关系。

证明

设 R 是集合 A 上的对称、传递关系，若 R 非空，则 $\exists$ x，y$\in$A　$<x,y>\in R$

由于 R 对称，因此 $<y,x>\in R$，又由于 R 是传递的，因此 $<x,x>\in R$。

因此：非空的对称、传递关系不可能是反自反关系。

例 4.11.2　设 R、S 均是 A 上的等价关系，证明：R∘S 于 A 上等价　iff　S∘R=R∘S。

证明：“$\Rightarrow$”　先证必要性　　$\forall <x,z>$

$<x,z> \in S\circ R \Leftrightarrow \exists y（<x,y>\in S \wedge <y,z>\in R）$

$\Leftrightarrow \exists y（<z,y>\in R \wedge <y,x>\in S）$　(由于 R、S 均是对称的)

$\Leftrightarrow <z,x>\in R\circ S$

$\Leftrightarrow <x,z> \in R\circ S$　　(由于 R∘S 于 A 上是对称的)

故 S∘R=R∘S

“$\Leftarrow$”再证充分性

a）$\forall x \in A$　由于 R、S 均是自反的，因此 $<x,x>\in R$ 且 $<x,x>\in S$

所以　$<x,x>\in R\circ S$　　即：R∘S 是自反的。

b）$\forall <x,y>$

$<x,y>\in R\circ S \Leftrightarrow \exists t（<x,t>\in R \wedge <t,y>\in S）$

$\Rightarrow \exists t（<t,x>\in R \wedge <y,t>\in S）$　(由于 R、S 均是对称的)

$\Leftrightarrow <y,x> \in S\circ R$

$\Leftrightarrow <y,x> \in R\circ S$　　(由于 S∘R=R∘S)　　即：R∘S 是对称的。

c）$\forall <x,y>$，$\forall <y,z>$

$<x,y>\in R\circ S \wedge <y,z>\in R\circ S$

$\Leftrightarrow <x,y>\in R\circ S \wedge <y,z>\in S\circ R$　(由于 S∘R=R∘S)

$\Rightarrow <x,z> \in R\circ S\circ S\circ R$

$\Rightarrow <x,z> \in R\circ(S\circ S) \circ R$　　(关系的复合满足结合律)

$\Rightarrow <x,z> \in R\circ S\circ R$ （由于 S 传递，因此 $S\circ S\subseteq S$）

$\Rightarrow <x,z> \in R\circ R\circ S$ （由于 $S\circ R=R\circ S$)

$\Rightarrow <x,z> \in R\circ S$ （由于 R 传递，因此 $R\circ R\subseteq R$） 即：$R\circ S$ 是传递的。

综上可得：$R\circ S$ 是等价的。 **证毕**

注：上例题中（3）的证明也可利用 R、S 的传递性和题设条件简化证明为

因为（$R\circ S$）$\circ$（$R\circ S$）$\subseteq R\circ S$ (由于 R、S 传递，因此 $R\circ R\subseteq R$, $S\circ S\subseteq S$）

所以 $R\circ S$ 是传递的。

例 4.11.3 设 R、S 均是 A 上的等价关系，证明：$R\cup S$ 于 A 上等价 iff $R\circ S\subseteq R\cup S$ 且 $S\circ R\subseteq R\cup S$。

证明“$\Rightarrow$”（必要性）

$\forall <x,y> \in R\circ S \Leftrightarrow \exists t$（$<x,t> \in R \wedge <t,y> \in S$）

$\Rightarrow \exists t$（$<x,t> \in R\cup S \wedge <t,y> \in R\cup S$）

$\Rightarrow <x,y> \in R\cup S$ (由于 $R\cup S$ 传递) 即 $R\circ S\subseteq R\cup S$

同理可证 $S\circ R\subseteq R\cup S$。

“$\Leftarrow$”（充分性）

（1） $\forall x \in A$ 由于 R、S 均是自反的，因此 $<x,x>\in R$ 且 $<x,x>\in S$

故 $<x,x>\in R\cup S$ 即 $R\cup S$ 是自反的。

（2） $\forall <x,y>$

$<x,y>\in R\cup S \Leftrightarrow <x,y>\in R \vee <x,y>\in S$

$\Rightarrow <y,x>\in R \vee <y,x>\in S$） (由于 R、S 均是对称的)

$\Leftrightarrow <y,x> \in R\cup S$ 即 $R\cup S$ 是对称的。

（3）$\forall <x,y>$， $\forall <y,z>$

$<x,y>\in R\cup S \wedge <y,z>\in R\cup S$

$\Leftrightarrow$（$<x,y>\in R \vee <x,y>\in S$ ）$\wedge$ （$<y,z>\in R \vee <y,z>\in S$）

$\Leftrightarrow$（$<x,y>\in R \wedge <y,z>\in R$）$\vee$ （$<x,y>\in R \wedge <y,z>\in S$）$\vee$（$<x,y>\in S \wedge <y,z>\in R$）

$\vee$ ($<x,y>\in S \wedge <y,z>\in S$)

$\Rightarrow <x,z> \in R \vee <x,z> \in R\circ S \vee <x,z> \in S \vee <x,z> \in S\circ R$ (由于 R、S 均传递)

$\Leftrightarrow$ （$\langle x,z\rangle \in R \vee \langle x,z\rangle \in S$）$\vee \langle x,z\rangle \in R\circ S \vee \langle x,z\rangle \in S\circ R$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle \in R\cup S \vee \langle x,z\rangle \in R\cup S \vee \langle x,z\rangle \in R\cup S$ （由于 $R\circ S\subseteq R\cup S$，$S\circ R\subseteq R\cup S$）

$\Leftrightarrow \langle x,z\rangle \in R\cup S$ 即 $R\cup S$ 是传递的。

综上可得：$R\cup S$ 是等价的。

例 4.11.4 设 R、S 均是非空集合 A 上的偏序关系，证明：$R\cap S$ 也是 A 上的偏序关系。

证明 （1）$\forall x \in A$ 由于 R、S 均是自反的，

因此 有 $\langle x,x\rangle \in R$ 且 $\langle x,x\rangle \in S$ 即：$\langle x,x\rangle \in R\cap S$， 故 $R\cap S$ 自反。

（2）$\forall\langle x,y\rangle \wedge x\neq y$， $\langle x,y\rangle \in R\cap S \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle x,y\rangle \in S$

$\Rightarrow \langle y,x\rangle \notin R \wedge \langle y,x\rangle \notin S$ （由于 R、S 均是反对称的）

$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \notin R\cap S$， 故 $R\cap S$ 反对称。

（3）$\forall\langle x,y\rangle$，$\forall\langle y,z\rangle$

$\langle x,y\rangle \in (R\cap S) \wedge \langle y,z\rangle \in (R\cap S)$

$\Leftrightarrow (\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle x,y\rangle \in S) \wedge (\langle y,z\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in S)$

$\Leftrightarrow (\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R) \wedge (\langle x,y\rangle \in S \wedge \langle y,z\rangle \in S)$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle \in R \wedge \langle x,z\rangle \in S$ （由于 R、S 均是传递的）

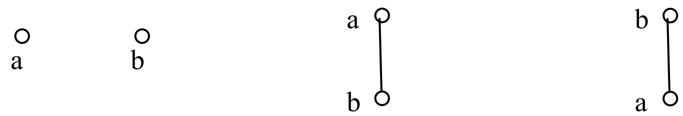
$\Rightarrow \langle x,z\rangle \in R\cap S$ 因此 $R\cap S$ 传递

因此，$R\cap S$ 也是偏序关系。

证毕

例 4.11.5 A={a,b }上有多少不同的偏序关系？

解 因为偏序关系与哈斯图一一对应，所以只要画出所有不同的哈斯图，就可求出其不同的偏序关系。详见图 4.11.1



(a) (b) (c)

图 4.11.1

所以该集合上共有 3 个不同的偏序关系。

例 4.11.6 给出 A={a,b,c}上既是等价关系又是偏序关系的 R。

解 $R=I_A$

例 4.11.7（12 分）设 A={1,2,3,4,5,6,9,24,54}, R 是 A 上的整除关系。

(1) 画出偏序关系 R 的 Hasse 图。

(2) 求 A 关于 R 的极大元、极小元。

(3) 设 B={2，3}，求 B 的上界和上确界。

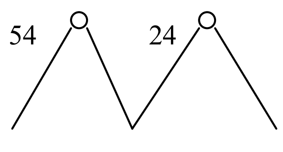
(4) 找出〈A，R〉中的长度为 4 的反链。

解 （1）关系 R 的 Hasse 图见图 4.11.2

（2）A 关于 R 的极大元：54，24，5；极小元：1。

（3）B 的上界：6，54，24； 下界：1

（4）长度为 4 的反链：{4，5，6，9}。



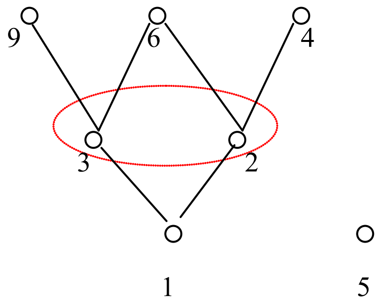


图 4.11.2

例 4.11.8 设 R 是实数集，令 $X = R^{[0,1]}$，若 f，g $\in$X，定义<f,g>$\in$S $\Leftrightarrow$ $\forall x\in[0,1]$，f（x）$-$ g（x）≥ 0。试证：S 是一个偏序。S 是全序吗？

解 $\forall x\in[0,1]$，$\forall f\in X$，有 f（x）$-$f（x）$=0$，故<f,f>$\in$S，即 S 是自反的。

若<f,g>$\in$S，且<g,f>$\in$S，则 $\forall x\in[0,1]$，f（x）$-$ g（x）≥ 0，且 g（x）$-$ f（x）≥ 0，故 f（x）$=$ g（x）。即 S 是对称的。

设<f,g>$\in$S，<g,h>$\in$S，则$\forall x\in[0,1]$，f（x）$-$ g（x）≥ 0，且 g（x）$-$ h（x）≥ 0，因而 f（x）$-$ h（x）≥ 0，故<f,h>$\in$S。即 S 是传递的。

因此 S 是偏序。但 S 不是全序。例如：设 f（x）$=x$，g（x）$=-x+1$，f、g$\in$X，由于 f（0）$-$ g（0）$= -1$，g（1）$-$ f（1）$= -1$，因此 f 与 g 不可比，即 S 不是全序。

例 4.11.9 设 f：A$\to$B 是满射，且 $B'\subseteq B$，则 $f^{-1}(B')$表示 A 的一个子集，称作在 f 作用下 B′的逆映射；$f^{-1}(B')=\{x \mid f(x)\in B'\}$，证明：$f(f^{-1}(B'))=B'$ 。

证明 由函数定义：$\forall y\in f(f^{-1}(B'))$，$\exists!$ $x\in f^{-1}(B')$，使得 f（x）$=$ y

因此，$y\in B'$，即 $f(f^{-1}(B'))\subseteq B'$ 。

$\forall y\in B'$，由于 $B'\subseteq B$，因此 $y\in B$，又由于 f 是满射，所以 $\exists x\in A$，使得 $f(x)=y$，故 $f(x)\in B'$，因此，$x\in f^{-1}(B')$，从而有 $y=f(x)\in f(f^{-1}(B'))$，即 $B'\subseteq f(f^{-1}(B'))$。

综上可得：$f(f^{-1}(B'))=B'$ 。

证毕

例 4.11.10 设 f：A$\to$B 是函数，并定义一个函数 g：B$\to$P（A）。对于任意的 b$\in$B，有

$$g(b)=\{x \mid (x\in A)\wedge(f(x)=b)\}$$

请证明：若 f 是 A 到 B 的满射，则 g 是 B 到 P（A）的单射。

证明 对任意 b_1，$b_2\in B$（$b_1\neq b_2$），由于 f 是满射，因此 $\exists a_1$，$a_2\in A$，使得 f（a_1）$=b_1$，f（a_2）$=b_2$。又由于 $b_1\neq b_2$ 且 f 是函数，因此 $a_1\neq a_2$。又：

$$g(b_1)=\{x \mid (x\in A)\wedge(f(x)=b_1)\}$$

$$g(b_2)=\{x \mid (x\in A)\wedge(f(x)=b_2)\}$$

因此有 $a_1\in g(b_1)$，$a_2\in g(b_2)$，但 $a_1\notin g(b_2)$，$a_2\notin g(b_1)$，因此 $g(b_1)\neq g(b_2)$，故 g 为单射。

证毕

例 4.11.11 设 X $\neq \Phi$，R 为 X^X 上的关系，定义为

$$<f,g>\in R \Leftrightarrow \operatorname{ran} f=\operatorname{ran} g$$

证明：R 是 X^X 上的等价关系，且存在双射 φ：$X^X/R\to P(X)-\{\Phi\}$

证明 （1）

① $\forall f\in X^X$，由于 ran f $=$ ran f，因此<f,f>$\in$R，即 R 是自反的。

②$\forall$ <f,g>，<f,g>$\in$R $\Leftrightarrow$ ran f $=$ ran g

$\Leftrightarrow$ ran g = ran f $\Rightarrow$ $<g,f> \in R$ 即 R 是对称的。

③$\forall$ <f,g>，<g,h>，

$<f,g>\in R \wedge <g,h>\in R$ $\Leftrightarrow$ (ran f = ran g) $\wedge$ (ran g = ran h)

$\Rightarrow$ ran f = ran h

$\Leftrightarrow$ $<f,h> \in R$ 即 R 是传递的。

综上，R 是 X^X 上的等价关系。

（2）定义 φ：$X^X/R \to P$（X）$-\{\Phi\}$： $\forall\, [f]_R \in X^X/R$， φ（$[f]_R$）= ran f

于是 φ（$[f]_R$）= φ（$[g]_R$）$\Leftrightarrow$ ran f = ran g

$\Leftrightarrow <f,g> \in R \Rightarrow [f]_R = [g]_R$

因而 φ 是单射。

又 $\forall A \in P$（X）$-\{\Phi\}$，$A \subseteq X$，$A \neq \Phi$，取定元素 $a\in A$，定义 f：$X\to X$ 为

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in A, \\ a, & x\notin A \end{cases}$$

则φ（$[f]_R$）= ran f = A，因而 φ是满射。

综上所述，存在双射 φ：$X^X/R \to P$（X）$-\{\Phi\}$。

证毕

例 4.11.12 设 f：$A\to B$，g：$B\to C$ 是两个函数，证明：

（1） 若 $f\circ g$ 是满射且 g 是单射，则 f 是满射。

（2） 若 $f\circ g$ 是单射且 g 是满射，则 f 是单射。

（注：这里函数的复合为右复合）

证明 （1）$\forall b\in B$，因为 g 是函数，所以存在 $c\in C$，使得 g（b）= c。由 $f\circ g$ 是满射，

对该元素 c，存在 $a\in A$，使得 $f\circ g$（a）= c，即 g（f（a））= c。又 g（b）= c，所以

g（f（a））= g（b）= c。右 g 是单射，所以有 f（a）= b。即$\forall b\in B$，$\exists a\in A$，使得 f（a）= b。因此 f 是满射。

（2）对任意 b_1，$b_2\in B$（$b_1\neq b_2$），由于 f 是单射， 因此 $\exists a_1$，$a_2\in A$，使得 f（a_1）= b_1，

f（a_2）=b_2。由于 $b_1\neq b_2$ 且 f 是函数，因此 $a_1\neq a_2$。再由 $f\circ g$ 是单射，可得 $f\circ g$（a_1）$\neq f\circ g$（a_2）

即 g（f（a_1））$\neq$ g（f（a_2）），所以 g（b_1）$\neq$ g（b_2）。因此 g 是单射。

证明

例 4.11.13 设 f：$A\to B$ 是函数，并定义一个函数 g：$B\to P$（A）。对于任意的 $b\in B$，有

g（b）= {x |（$x\in A$）$\wedge$（f（x）= b）}

证明：若 f 是 A 到 B 的满射，则 g 是 B 到 P（A）的单射。

证明 如果 f 是 A 到 B 的满射，则对每个 $b\in B$,至少存在一个 $a\in A$,使 f(a)=b,故 g 的定义域为 B.

若有 $b_1,b_2\in B$,且 $b_1\neq b_2$,

$g(b_1)$= {x |（$x\in A$）$\wedge$（f（x）= b_1）}

$g(b_2)$ = {y |（$y\in A$）$\wedge$（f（y）= b_2）}

因为 $b_1 \neq b_2$, $f(x) \neq f(y)$,而 f 是函数，故 $x \neq y$,所以 $g(b_1) \neq g(b_2)$

因此 g 是 B 到 P（A）的单射。

习题四

1． 已知 $A=\{\varnothing\}$,求 $P(A)\times A$。

2．设 $A=\{1, 2, 3\}$, R 为实数集,请在笛卡儿平面上表示出 $A\times R$ 和 $R\times A$ 。

3．以下各式是否对任意集合 A，B，C，D 均成立？试对成立的给出证明，对不成立的给出适当的反例。

（1）$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

（2）$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

（3）$(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

（4）$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

4．设 A , B , C , D 为任意集合，求证：

（1）若 $A\subseteq C$，$B\subseteq D$，那么 $A\times B\subseteq C\times D$，

（2）若 $C\neq\varnothing$, $A\times C\subseteq B\times C$，则 $A\subseteq B$

（3）$(A\times B)-(C\times D)=((A-C)\times B)\cup(A\times(B-D))$

5．证明定理 4.1.5 中的（2)，（3)，（4)，（6） 。

6．证明定理 4.1.4 和定理 4.1.5。

7．给定集合 A={1，2，3}，R，S 均是 A 上的关系，$R=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$，

$S=\{<1,1>,<2,3>\}$

（1）画出 R，S 的关系图 ；（2）说明 R，S 所具有的性质；（3）求 $R\circ S$。

8．设 $A=\{0,1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,2,3\}$，用列举法描述下列关系，并作出它们的关系图及关系矩阵：

（1）$R_1=\{<x,y>|x\in A\cap B\wedge y\in A\cap B\}$

（2）$R_2=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\wedge x=y^2\}$

（3）$R_3=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\wedge x+y=5\}$

（4）$R_4=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\wedge\exists k(x=k\cdot y\wedge k\in N\wedge k<2)\}$

（5）$R_5=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\wedge(x=0\vee 2x<3)\}$

9．设 R, S 为集合 A 上任意关系，证明：

（1）$Dom(R\cup S)=Dom(R)\cup Dom(S)$

（2）$Ran(R\cap S)\subseteq Ran(R)\cap Ran(S)$

10．设 A= {1，2，3，4， 5}，A 上关系 R= {<1，2>，<3，4>，<2，2>} , S= {<4，2>，<2,5> ,<3,1>，<1,3>}。试求 $R\circ S$ 的关系矩阵。

11．设 A= {1，2，3，4}，A 上关系 R＝ {<1，4>，<3，1>，<3，2>, <4, 3>}。求 R 的各次幂的关系矩阵。

12．证明定理 4.3.1 中的（1)，（4)，（5）及（6)。

13．设 A＝{a,b,c,d}，A 上二元关系 R_1，R_2 分别为

$R_1=\{<b,b>,<b,c>,<c,a>\}$

$R_2=\{<b,a>,<c,a>,<c,d>,<d,c>\}$

计算 $R_1\circ R_2$，$R_2\circ R_1$，R_1^2,R_2^2。

14．设 A={0，1，2，3}，R 和 S 均是 A 上的二元关系:

$R=\{\langle x,y\rangle\mid(y=x+1)\vee(y=x/2)\}$，$S=\{\langle x,y\rangle\mid(x=y+2)\}$

（1） 用列元素法表示 R，S;（2）说明 R，S 所具有的性质;（3）求 $R\circ S$

15．证明定理 4.3.3 中的（2)，（3)，（6)。

16．设 R_1,R_2,R_3,R_4,R_5 都是整数集上的关系，且

$xR_1y\Leftrightarrow|x-y|=1$

$xR_2y\Leftrightarrow x\cdot y<0$

$xR_3y \Leftrightarrow x|y$ (x 整除 y)

$xR_4y \Leftrightarrow x+y=5$

$xR_5y \Leftrightarrow x=y^n$ (n 是任意整数)

用 T(True)和 F(False)填写表 4.1。

表 4.1

关系	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1					
R_2					
R_3					
R_4					
R_5					

17．证明定理 4.4.2 和定理 4.4.6。

18．设 A={0，1，2，3}，$R\subseteq A\times A$ 且 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x=y \vee x+y\in A\}$

(1) 画出 R 的关系图； (2)写出关系矩阵 M_R ； (3)R 具有什么性质？

19．设 A 为一集合，$|A|=n$,试计算

（1） A 上有多少种不同的自反的（反自反的）二元关系？

（2） A 上有多少种不同的对称的二元关系？

（3） A 上有多少种不同的反对称的二元关系？

20．设 R 为 A 上的自反关系，证明：R 是传递的 iff $R\circ R=R$。并举例说明其逆不真。

21．请判断下述的结论和理由正确吗？并说明理由。

（1）如果 R 对称且传递，那么 R 必自反，因为由 R 对称可知 xRy 蕴含 yRx，而由 R 传递及 xRy , yRx，可知 xRx 。

（2）如果 R 反自反且传递，那么 R 必定是反对称的, 因为若 R 对称可知 xRy 蕴含 yRx，而由 R 传递及 xRy , yRx，可导出 xRx,从而得到矛盾。

22．证明：当关系 R 传递且自反时，$R^2=R$。

23．设 R、S、T 均是集合 A 上的二元关系，证明：若 $R\subseteq S$，则 $T\circ R\subseteq T\circ S$。

24．设 R 为集合 A 上任一关系，求证对一切正整数 n 有

$$(I_A\cup R)^n = I_A\cup\bigcup_{i=1}^{n}R^i$$

25．设 R 是集合 A 上的二元关系，R 在 A 上是反传递的定义为：若$\langle x,y\rangle\in R$,$\langle y,z\rangle\in R$,则$\langle x,z\rangle\notin R$ 即$\forall x\forall y\forall z(xRy\wedge yRz \rightarrow \neg xRz)$。证明：R 是反传递的，当且仅当（$R\circ R$）$\cap R=\phi$ 。

26．证明定理 4.5.1 中的（2）。

27．证明定理 4.5.2 中的（1)，（3）。

28．证明定理 4.5.3 中的（1)，（2）。

29．证明定理 4.5.4 中的（1)，（2）及对（3）$t(R1\cup R2) = t(R1)\cup t(R2)$举出反例。

30．证明定理 4.5.5 中的（3）。

31．设 R 是 X={1,2,3,4，5}上的二元关系，

$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 5,1\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}\cup I_A$

请给出关系矩阵并画出关系图；若 R 是等价关系，则求出等价类。

32．若{{a,c,e},{b,d,f}}是集合 A={a,b,c,d,e,f}的一个划分，求其等价关系 R.。

33．若{{1，3，5}，{2，4}}是集合 A={1,2,3,4,5}的一个划分，求其等价关系 R。

34．设 S={1,2,3,4,5,}且 A=S×S, 在 A 上定义关系 R:⟨a, b⟩R⟨a’, b’⟩当且仅当 ab’=a’b.

（1）证明 R 是一个等价关系.

（2）计算 A/R.

35．设 R 是集合 A 上的二元关系，R 在 A 上是循环的充分必要条件是若 aRb 并且 bRc 则 cRa, 证明 R 为等价关系当且仅当 R 是自反的和循环的

36．设 R，S 为 A 上的两个等价关系，且 $R\subseteq S$。定义 A/R 上的关系 R/S：

$<[x], [y]>\in R/S$ 当且仅当 $<x, y>\in S$

证明：R/S 为 A/R 上的等价关系。

37. 设 $\{A_1, \cdots, A_m\}$为集合 A 的划分，证明：对任意集合 B，$\{A_1\cap B, A_2\cap B, \cdots, A_m\cap B\}-\{\varnothing\}$必为集合 $A\cap B$ 的划分。

38．设 R_1 表示整数集上模 m_1 相等关系，R_2 表示模 m_2 相等关系，π_1，π_2分别是 R_1，R_2 对应的划分。证明：π_1细分于π_2当且仅当 m_1 是 m_2 的倍数。

39．确定下面集合 A 上的关系 R 是不是偏序关系。

（1） A=Z, aRb $\Leftrightarrow$ a=2b

（2） A=Z, aRb $\Leftrightarrow b^2|a$

（3） A=Z, aRb $\Leftrightarrow$ 存在 k 使 $a=b^k$

（4） A=Z, aRb $\Leftrightarrow a\le b$

40．设 A={a，b，c，d，e}，A 上的偏序关系 $R=\{<c,a>,<c,d>\}\cup I_A$

(1)画出 R 的哈斯图；

(2)求 A 关于 R 的极大元和极小元；

41．偏序集〈A，≤〉的哈斯图如下图 4.1：

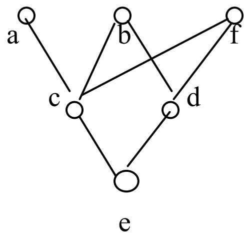


图 4.1

（1）用列举元素法求 R；

（2）求 A 关于 R 的最大元和最小元；

（3）求子集{c，d，e}的上界和上确界；

（4）求子集{a，b，c}的下界和下确界。

42．图 4.2 为一偏序集<A, R>的哈斯图。

（1）下列命题哪些为真？

aRb． dRa， cRd， cRb， bRe， aRa， eRa；

（2）画出 R 的关系图。

（3）指出 A 的最大、最小元（如果有的话），极大、极小元。

（4）求出子集 B1 = {c,d,e},B2 = {b,c,d },B3 = {b,c,d,e}的上界、下界，上确界、下确界（如果有的话）。

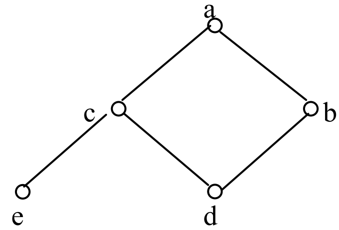


图 4.2

43． 设 R 是集合 A={a，b，c，d}上的偏序关系，关系矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（1）写出 R 的表达式；

（2）画出 R 的哈斯图；

（3）求子集 B={a，b}关于 R 的上界和上确界。

44．对下列每一条件构造满足该条件的有限集和无限集各一个。

（1）非空有序集，其中有子集没有最大元素。

（2）非空有序集，其中有子集有下确界，但它没有最小元素。

（3）非空有序集，其中有一子集存在上界，但它没有上确界。

45．图 4.3 给出了四个关系图。请指出哪些是偏序关系图，哪些是全序关系图，哪些是良序关系图，并对偏序关系图画出对应的哈斯图。

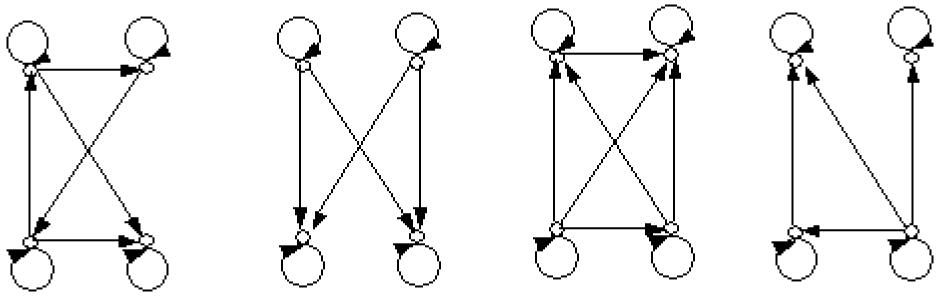


图 4.3

46．下列集合中哪些是偏序集合，哪些是全序集合，哪些是良序集合？

（1）$<P(N), \subseteq>$　　（2）$<P(N), \subset>$

（3）$<P\{a\}, \subseteq>$　　（4）$<P(\varnothing), \subseteq>$

47．设 R 是集合 S 上的关系，$S' \subseteq S$，定义 S' 上的关系 R' 如下：$R' = R \cap (S' \times S')$

确定下述各断言的真假：

(1) 如果 R 传递，则 R' 传递。

（2）如果 R 为偏序关系，则 R' 也是偏序关系。

（3）如果$<S, R>$为全序集，则$<S', R'>$，也是全序集。

（4）如果$<S, R>$为良序集，则$<S', R'>$，也是良序集。

48．设$<A, \le>$为一有限全序集，$|A| \geqq 2$，R 是 $A \times A$ 上的关系，根据 R 下列各定义，确定$<A \times A, R>$是否为偏序集、全序集或良序集。设 x，y，u，v 为 A 中任意元素。

（1）$<x, y>R<u, v> \Leftrightarrow x \le u \wedge y \le v$

（2）$<x, y>R<u, v> \Leftrightarrow x \le u \wedge x \ne u \vee (x = u \wedge y \le v)$

（3）$<x, y>R<u, v> \Leftrightarrow x \le u$

（4）$<x, y>R<u, v> \Leftrightarrow x \le u \wedge x \ne u$

49．指出下列各关系是否为 A 到 B 函数：

（1）A＝B＝N，$R = \{<x,y> \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x+y<100\}$

（2）A = B = R（实数集），$S = \{<x,y> \mid x \in A \wedge y \in B \wedge y=x^2\}$

（3）A＝{1,2,3,4}，B＝A×A，R = {<1,<2,3>>,<2,<3,4>>,<3,<1,4>>,<4,<2,3>>}

（4）A = {1,2,3,4}，B = A×A，S = {<1,<2,3>>,<2,<3,4>>,<3,<2,3>>}

50．设 f：X→Y，g：X→Y，求证：

（1）$f \cap g$ 为 X 到 Y 的函数当且仅当 f = g

（2）$f \cup g$ 为 X 到 Y 的函数当且仅当 f = g

51．设 f 和 g 为函数，且有 $f \subseteq g$ 和 $Dom(g) \subseteq Dom(f)$。证明 f = g。

52．证明定理 4.8.2 之（2)，（3）。

53．设 f:X→Y，$A \subseteq B \subseteq X$，求证 $f(A) \subseteq f(B)$。

54．令 $f = \{<\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$为一函数。计算 $f(\varnothing)$，$f(\{\varnothing\})$，$f(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})$　。

55．设 X,Y 均是有穷集合。|X|=n, |Y|=m, 分别找出从 X 到 Y 存在单射、满射、双射的必要条件。试计算集合 X 到集合 Y 有多少个不同的单射函数和多少不同的满射函数及多少不同的双射函数。

56．考虑下列实数集上的函数：$f(x) = 2x^2+1$，$g(x) = -x+7$，$h(x) = 2^x$，$k(x) = \sin x$

求 $g\circ f$，$f\circ g$，$f\circ f$，$g\circ g$，$f\circ h$，$f\circ k$，$k\circ h$。

57．设 X= {1,2，3}，请找出 X^X 中满足下列各式的所有函数。

（1）$f^2(x) = f(x)$（f 等幂）

（2）$f^2(x) = x$（f^2 为恒等函数）

（3）$f^3(x) = x$（f^3 为恒等函数）

58．设 $A \neq \varnothing$，A，B，C 为集合。

（1）求 $A^{\varnothing}$，$\varnothing^A$，$\varnothing^{\varnothing}$

（2）若 $A\subseteq B$，则 $A^C\subseteq B^C$

59．设 h 为 X 上函数，证明下列条件中（1）与（2）等价，（3）与（4）等价。

（1）h 为一单射。

（2）对任意 X 上函数 f，g，$f\circ h=g\circ h$ 蕴含 $f=g$ 。

（3）h 为一满射。

（4）对任意 X 上函数 f，g，$h\circ f=h\circ g$ 蕴含 $f=g$ 。

60．设 A = {l，2，3}，作出全部 A 上的置换，并以三个函数值组成的字的字典序排列这些置换。试计算 $p_2\circ p_3$，$p_3\circ p_3$，$p_3\circ p_2$，并求 x，使得 $p_3\circ p_x = p_x\circ p_3 = i$ 。

61．下列函数为实数集上的函数，如果它们可逆，请求出它们的反函数；

（1）$y = 3x+1$

（2）$y = x^2-1$

（3）$y = x^2-2x$

（4）$y = tgx +1$

62．根据自然数集合的定义计算：

（1）$4\cup 7$，$3\cap 5$

（2）6-5，$4\oplus 2$

（3）2×5

63．证明{1，3，5，…，2n+1,…}是可数集。

64．设 A，B 为可数集，证明：$A\times B$ 为可数集。

65．设 f：A→B 为一满射。

（1）当 A 为无限集时，B 是否一定为无限集？

（2）A 为可数集时，B 是否一定为可数集？

66．设 f：A→B 为一单射。

（1）A 为无限集时，B 是否一定为无限集？

（2）A 为可数集时，B 是否一定为可数集？

67．证明定理 4.10.12。

68． 若 $|A|=|B|$,$|C|=|D|$,则 $|A\times C|=|B\times D|$。