第一篇　　数理逻辑

数理逻辑是以数学的方法研究推理的形式结构和规律的数学学科。所谓数学方法是指建立一套符号，其作用是为了避免用自然语言讨论问题时所带来的歧义性。例如，下面三条语句均用“是”作谓语动词：

1）曹雪芹**是**《红楼梦》的作者。

2）曹雪芹**是**小说家。

3）小说家**是**文学家。

三个语句中的三个“**是**”涵义各不相同。1）中的“是”表示“=”，其主语和宾语是对等的；2）中的“是”表示“∈”，小说家是一个集合，曹雪芹只是其中的一分子；3）中的“是”表示“⊆”，文学家是包含着小说家的一个更大的集合。符号准确的表达了语句的含义。

推理就是研究前提和结论之间的关系和思维规律。在这里亦即表义符号之间的关系。

数理逻辑与人工智能、知识工程之间的关系，恰似微积分与力学、机械工程之间的关系一样。微积分在人类体力劳动自动化的过程中扮演了重要角色，数理逻辑在人类脑力劳动自动化的过程中也起着越来越大的作用。

第一章 命题逻辑

1. 1命题符号化及联结词

任何基于命题分析的逻辑称为命题逻辑。命题是研究思维规律的科学中的一项基本要素，它是一个判断的语言表达。

命题 能唯一判断真假的陈述句。

这种陈述句的判断只有两种可能，一种是正确的判断，一种是错误的判断，我们用两个数字1和0来区分这两种判断，称为**命题的真值**。如果某个陈述句判断为真（与人们公认的客观事实相符）则我们称其为一真命题，并说此命题的真值为1，否则称为假命题，并说此命题的真值为0。

【例1.1.1】 下述各句均为命题。

（1） 4是偶数。

（2） 太阳每天从西方升起。

（3） 《几何原本》的作者是欧几里德。

（4） 2190年人类将移居火星。

（5） 地球外也有生命存在。

上述命题中（1）、（3）是真命题，（2）是假命题，其中的（3）可能有人说不出它的真假，但客观上能判断真假。（4）的结果目前谁也不知道，但到了时候则真假可辨，即其真值是客观存在的，因而是命题。同样，（5）的真值也是客观存在，只是我们地球人尚不知道而已，随着科学技术的发展，其真值是可以知道的，因而也是命题。

【例1.1.2】 下列语句不是命题：

（1）你好吗？

（2）好棒啊！

（3）请勿吸烟

（4）$x > 3$

（5）我正在说谎。

（1）、（2）、（3）均不是陈述句，因而不是命题。（4）是陈述句，但它的真假取决于变量x的取值，例如取x为4时，其真值为1；取x为2时其真值为0，即其真值不惟一，因此不是命题。（5）也是陈述句，但它的真假无法确定，即所谓悖论，因而也不是命题。

从上面讨论可以看出，判断一个语句是否是命题的关键是：

①语句必须是陈述句。

②陈述句必须具有唯一的真值。要注意两点：

a． 一个陈述句在客观上能判断真假，而不受人的知识范围的限制。

b．一个陈述句暂时不能确定真值，但到了一定时候就可以确定，与一个陈述句的真值不能唯一确定是不同的。

以上所讨论的命题均是一些简单陈述句。在语言学中称为简单句，其结构均具有“主语+谓语”的形式，在数理逻辑中，我们将这种由简单句构成的命题称为**简单命题**，或称为**原子命题**。用p、q、r、p_i、q_i、r_i等符号表示。（必要时亦可用其它小写的英文字母表示）如：

p：4是偶数。

q：太阳每天从西方升起。

r：《几何原本》的作者是欧几里德。

S：2190年人类将移居火星。

p、r的真值是1，q的真值是0，s的真值待定。

【例 1.1.3】 下列命题不是简单命题：

（1） 2 是偶数且是素数。

（2） 悉尼不是澳大利亚的首都。

（3） 小王或小李考试得第一。

（4） 如果你努力，则你能成功。

（5） 三角形是等边三角形，当且仅当三内角相等。

上面的命题除（3）的真假需由具体情况客观判断外，余者的真值均为 1。但是他们均不是简单命题，分别用了“并且”、“并非”、“或者”、“如果…则…”、“当且仅当”等联结词。

由命题和联结词构成的命题称为**复合命题**，或称**分子命题**。构成复合命题的可以是原子命题，也可以是另一个复合命题。**一个复合命题的真值不仅与构成复合命题的命题的真值有关，而且也与所用联结词有关。**下面我们给出几个基本的联结词。

（1） 否定“¬”

设 p 为任一命题，复合命题：“非 p”（p 的否定）称为 p 的否定式，记作¬p。“¬”为否定联结词。**¬p 为真，当且仅当 p 为假**。

¬p 的真值亦可由右下面称为“真值表”的表格确定。由表 1.1.1 可知：命题 p 为真，当且仅当¬p 为假。事实上，它定义了一个一元函数(称为一元真值函数)：$f^{\neg}$: $\{0,1\}\rightarrow\{0,1\}$，

$f^{\neg}(0)=1$，$f^{\neg}(1)=0$。

表 1.1.1

p	¬p
0	1
1	0

【例 1.1.4】 （1） p：4 是偶数。 真值为 1。

¬p：4 不是偶数。 真值为 0。

（2）q：悉尼是澳大利亚的首都。真值为 0。

¬q：悉尼不是澳大利亚的首都。真值为 1。

（3） r：这些人都是学生。

¬r：这些人不都是学生。

注：否定联结词使用的原则：**将真命题变成假命题，将假命题变成真命题**。但这并不是简单的随意加个不字就能完成的。例如上例中的（3），r 的否定式就不能写成“这些人都不是学生”。事实上严格来讲，“不是”不一定否定“是”。如阿契贝难题：“本句是六字句”与“本句不是六字句”均是真命题。一般地，自然语言中的“不”、“无”、“没有”、“并非”等词均可符号化为“¬”。另外，有时也会将带有“不”字的命题设为原子命题，例如：设 q：塑料不是金属。¬q：塑料是金属。

（2） 合取“∧”

设 p、q 是任意两个命题，复合命题“p 且 q”（p 与 q）称为 p 与 q 的合取式，记作：p∧q “∧”是合取联结词。**p∧q 为真，当且仅当 p、q 均为真**。

p∧q 的真值表如右下（表 1.1.2），它定义了一个二元真值函数：

$f^{\wedge}$：$\{00,01,10,11\}\rightarrow\{0,1\}$，$f^{\wedge}(00)=0$，$f^{\wedge}(01)=0$，$f^{\wedge}(10)=0$，$f^{\wedge}(11)=1$。

【例 1.1.5】 （1） p：2 是偶数。 q：2 是素数。则

p∧q：2 是偶数且是素数。真值为 1。

（2） r：煤是白的。则

p∧r：2 是偶数且煤是白的。真值为 0。

表 1.1.2：

p	q	p∧q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

注 a) 日常语言中的联结词所联结的语句之间一般地都有一定的内在联系，但数理逻辑中的联结词是对日常语言中联结词的逻辑抽象。因此，它所联结的命题其内容可能毫无关系，如上例中的（2）。

b) “P∧q”的逻辑关系是 p 和 q 两个命题同时成立，因而，自然语言中常用的联结词

诸如：“既……又……”、“不仅……而且……”、“虽然……但是……”、“ ……和……”等，基本上都可以符号化为“∧”。

c）“∧”联结的是两个命题，并不能见到“与”、“和”就用“∧”。例如“张三和李四都是好学生”是“张三是好学生”和“李四是好学生”的合取式，但“张三和李四是好朋友”则是一个简单命题，其中“张三和李四”是句子的主语。

（3） 析取“∨”

设 p、q 是任意二命题，复合命题“p 或 q”称为 p、q 的析取式，记作：p∨q。“∨”为析取联结词。**p∨q 为假，当且仅当 p、q 同为假**。

p∨q 的真值表如右下（表 1.1.3），它定义了一个二元真值函数：

$f^{\vee}$：{00,01,10,11}→{0,1}，$f^{\vee}(00)=0$，$f^{\vee}(01)=1$，$f^{\vee}(10)=1$，$f^{\vee}(11)=1$。

【例 1.1.6】（1）p：小王喜欢唱歌。

q：小王喜欢跳舞。则

p∨q：小王喜欢唱歌或喜欢跳舞。

（2）p：明天刮风。

q：明天下雨。

p∨q：明天或者刮风或者下雨。

表 1.1.3

pq	p∨q
00	0
01	1
10	1
11	1

注 “∨”的逻辑关系是明确的。即：p、q 二命题中至少有一个为真则析取式为真。因而，自然语言中常用的联结词诸如：“或者……或者……”、“可能……可能……”、“要么……要么……”等，多数都可以符号化为“∨”。但日常语言中的“或”是具有二义性的，用“或”联结的命题有时是具有相容性的，如例 1.1.6 中的二例,我们称之为**可兼或**.而有时又具有排斥性,称为**不可兼或（异或）**如：

（3）小李明天出差去上海或去沈阳。

（4）刘昕这次考试可能是全班第一也可能是全班第二。

在（3）中用 p 表示“小李明天出差去上海”，用 q 表示“小李出差去沈阳”则 p、q 可以同时为假，此时是假命题。也可以 p 为真、q 为假，或 p 为假、q 为真，这两种情况下原命题均为真，但决不能 p、q 同真。（4）的情况完全类似。因此，这两个命题均是当且仅当只有其中一个命题为真时，其真值为 1。这时的“或”具有排斥性，是“不可兼或”，不能用“∨”联结。但可以用多个联结词表示：(p∧¬q)∨(¬p∧q) 或 (p∨q)∧¬(p∧q) 此二式准确的表达了（3）、（4）的含义。（异或也可用联结词“▽”表示，具体见§1.4 联结词全功能集）

（4） 蕴涵“→”

设 p、q 是任意二命题，复合命题“如果 p，则 q”称为 p 与 q 的蕴涵式，记作：p→q。P 称为蕴涵式的前件，q 称为蕴涵式的后件，→为蕴涵联结词。**p→q 为假，当且仅当 p 为真、q 为假**。

p→q 的真值表如右下（表 1.1.4）,它定义了一个二元真值函数：

$f^{\rightarrow}$：{00,01,10,11}→{0,1}，$f^{\rightarrow}(00)=1$，$f^{\rightarrow}(01)=1$，$f^{\rightarrow}(10)=0$，$f^{\rightarrow}(11)=1$。

【例 1.1.7】（1）p：天下雨了。

q：路面湿了。

p→q：如果天下雨，则路面会湿。

（2）r：三七二十一。

p→r：如果天下雨，则三七二十一。

表 1.1.4：

p　q	p→q
0　0	1
0　1	1
1　0	0
1　1	1

注 a) 逻辑中，前件 p 为假时，无论后件 q 是真是假，蕴涵式 p→q 的真值均为 1。这与日常语言中的，特别是数学上常用的“真蕴涵真”不太一样。事实上并不矛盾，例如某人说：“如果张三能及格，那太阳从西边升起。”说话者当然知道“张三能及格”与“太阳从西边升起”风

马牛不相及，而一般人此时并没有说谎的必要，即这是真命题，它所要明确的是“张三能及格”是假命题。

b) 正如前面所说，数理逻辑中的联结词是对日常语言中的联结词的一种逻辑抽象，日常语言中联结词所联结的句子之间是有一定内在联系的，但在数理逻辑中，联结词所联结的命题可以毫无关系。如在日常语言中“如果……则……”所联结的句子之间表现的是一种因果关系，如例 1.1.7 中的（1）。但在数理逻辑中，尽管说前件蕴涵后件，但两个命题可以是毫不相关的，如例 1.1.7 中的（2）。

c) $p\to q$ 的逻辑关系是：p 是 q 的充分条件、q 是 p 的必要条件。在日常语言中，特别是在数学语言中，q 是 p 的必要条件还有许多不同的叙述方式，如：“p 仅当 q（仅当 q，则 p）”、“只有 q 才 p”、“只要 p 就 q”、“除非 q，否则非 p（非 p，除非 q）”等，均可符号化成 $p\to q$ 的形式。

【例 1.1.8】 符号化下列命题：

（1）只要天下雨，我就回家。

（2）只有天下雨，我才回家。

（3）除非天下雨，否则我不回家。

（4）仅当天下雨，我才回家。

解 设 p：天下雨。 q：我回家。则（1）符号化为 $p\to q$。（2）、（3）、（4）均符号化为 $q\to p$（或等价形式：$\neg p\to\neg q$）。

（5）等价“$\leftrightarrow$”

设 p、q 是任意二命题，复合命题“p 当且当 q”称为 p 与 q 的等价式，记作：$p\leftrightarrow q$，“$\leftrightarrow$”称为等价联结词。**$p\leftrightarrow q$ 为真，当且仅当 p、q 真值相同**。

$p\leftrightarrow q$ 的真值表如右下（表 1.1.5），它定义了一个二元真值函数：

$f^{\leftrightarrow}$：$\{00,01,10,11\}\to\{0,1\}$，$f^{\leftrightarrow}(00) = 1$，$f^{\leftrightarrow}(01) = 0$，$f^{\leftrightarrow}(10) = 0$，$f^{\leftrightarrow}(11) = 1$。

【例 1.1.9】 （1）p：2+2 = 4。

q：5 是素数。

$p\leftrightarrow q$：2+2 = 4 当且仅当 5 是素数。

（2）p：$\angle A = \angle B$。

q：二角是同位角。

$p\leftrightarrow q$：$\angle A = \angle B$ 当且仅当二角是同位角。

表 1.1.5

p	q	$p\leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

在（1）中的 p 与 q 并无内在关系，但因二者均为真，所以 $p\leftrightarrow q$ 的真值为 1。

在（2）中由于相等的两角不一定是同位角，所以真值为 0。

“$\leftrightarrow$”的逻辑关系是：所联结的二命题互为**充分必要条件**。

以上定义了 5 种联结词，它们构成了一个联结词集合$\{\neg,\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$。其中$\neg$是一元联结词，余者均为二元联结词，亦称逻辑运算符，因此，将命题用联结词联结成复合命题的过程也称命题的逻辑运算。

用上面介绍的 5 个联结词和简单命题，通过各种形式的组合，可以对自然语言中的一些复杂语句进行形式化，过程如下：

① 用 p、q、r……等字母（命题表示符）表示简单命题；

② 用逻辑联结词，根据自然语言中联结词的逻辑涵义，将简单命题符联结起来。

【例 1.1.10】 将下列自然语言形式化

（1）如果天不下雨也不刮风，我就去公园。

（2）小王边走边唱。

（3）除非 a 能被 2 整除，否则 a 不能被 4 整除。

（4）此时，小纲要么在学习，要么在玩游戏。

（5）如果天不下雨，我们去打篮球，除非班上有会。

解 （1）设：p：今天天下雨，q：今天天刮风，r：我去公园。则原命题符号化为：

$(\neg p\wedge\neg q)\to r$

(2)设：p：小王走路，q：小王唱歌。则原命题符号化为：

$p \wedge q$

(3)设：p：a 能被 2 整除，q：a 能被 4 整除。则原命题符号化为：

$\neg p \to \neg q$　　（$q \to p$）

(4)设：p：小刚在学习，q：小刚在玩游戏。则原命题符号化为：

$(p\wedge\neg q) \vee (\neg p\wedge q)$　　（$(p\vee q) \wedge\neg (p\wedge q)$）

(5)设：p：今天天下雨，q：我们去打篮球，r：今天班上有会。则原命题符号化为：

$\neg r\to (p\to q)$

1. 2 命题公式及分类

为了用数学的方法研究命题，就必须象数学处理问题那样，将命题公式化，并讨论对于这些公式的演算（推理）规则，以期由给定的公式推导出新的命题公式来。

前面我们用 p、q、r……等符号表示确定的简单命题，它们的真值是已知的，通常此时称它们为**命题常元**。而事实上，这些常元无论具体是怎样的简单命题，它们的真值均只可能是“1”或“0”。为了更广泛地应用命题演算，在研究时，我们只考虑命题的“真”与“假”，而不考虑它的具体涵义（即：只重“外延”，不顾“内涵”）。譬如：当 p 是一个真命题时，$\neg p$ 就是一个假命题；当 p 是一个假命题时，$\neg p$ 就是一个真命题，而不管此时 p 表示的是命题“三七二十一”，还是命题“太阳每天从西方升起”。这时的 p 实际上就是一个简单命题的抽象，就如同数学公式中的变量 x 一样，我们称其为**命题变元**。

命题常元　一个真值确定的命题。

命题变元　一个真值尚未确定的命题符。以 p、q、r……等表之。

注意　命题变元不是命题，它只是一个可以用来表示命题的符号，因此没有确定的真值，只有当变元被代以确定的命题时，它变成了常元，此时方有真值，才成为命题。

命题公式　由命题符、联结词和圆括号按一定逻辑关系联结起来的字符串。

所谓按一定的逻辑关系，即字符串的构成要求合理，如（$\neg p$）是个合理的构成，是命题公式，（$\wedge p$）不是合理的构成，就不是命题公式，同样（$p\to q$）$\vee$ r）也不是合理的构成（括号必须成对出现），因此也不是命题公式。合理的命题公式叫做**合式公式**，记作：wff（wff = Well – formed formulas），也称**真值函数**。

定义 1.2.1　（合式公式的递归定义）

[1] 单个的命题符是合式公式；

[2] 如果 A 是一个合式公式，则（$\neg A$）也是合式公式；

[3] 如果 A、B 均是合式公式，则（$A\wedge B$）、（$A\vee B$）、（$A\to B$）、（$A\leftrightarrow B$）也都是合式公式。

[4] 只有有限次地应用[1]、[2]、[3]组成的字符串才是合式公式。

注　a) A、B 均代表任意的命题公式；

b) 为方便起见，公式最外层及（$\neg A$）的括号可省略。

必须指出：b)仅仅是一种约定，将程序输入计算机时，不仅括号，有时甚至空格也要与字符一样对待，不得随意省略。另外，书写时如果不写括号，通常默认联结词的优先级为：$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\to$、$\leftrightarrow$。

例如：$((p\vee q) \wedge r)$、$((\neg p) \wedge (q\wedge r))$、$(((p\to q) \wedge (q\vee r)) \leftrightarrow ((\neg p) \to r))$ 均是合式公式。第 3 式的生成过程如下：

① p	定义[1]
② q	[1]
③ $(p\to q)$	[3]①②
④ r	[1]
⑤ $(q\vee r)$	[3]②④
⑥ $(\neg p)$	[2]①
⑦ $((\neg p) \to r)$	[3]④⑥
⑧ $((p\to q) \wedge (q\vee r)$	[3]③⑤
⑨ $(((p\to q) \wedge (q\vee r)) \leftrightarrow ((\neg p) \to r))$	[3]⑦⑧

#

从公式的生成过程可看出，定义是递归的：从简单命题（变元）起，从内层括号到外层，一个层次一个层次地生成，这就有了公式**层次**的概念：

定义 1.2.2

[1] 若 A 是单个命题（变元或常元），则称为 0 层公式；

[2] 称 A 为 n+1（$n \geq 0$）层公式是指 A 符合下列诸情况之一：

a．$A = \neg B$，B 是 n 层公式；

b．$A = B \wedge C$，其中 B 为 i 层公式、C 为 j 层公式，$n = \max\{i, j\}$；

c．$A = B \vee C$，其中 B、C 的层次同 b；

d．$A = B \to C$，其中 B、C 的层次同 b；

e．$A = B \leftrightarrow C$，其中 B、C 的层次同 b。

由此可知，上面生成的第 3 式是 3 层公式。

解释　指定命题变元代表某个具体的命题。

命题变元本身是无意义的，它仅是一个符号。同样，公式本身也是无意义的，它们只是满足公式生成规律的一个符号串，只有给每个命题变元作了解释，它们才有意义，具有了真值，方成为命题。

【例 1.2.1】 做出解释，使公式 $A = (p \wedge q) \to r$ 成为命题。

解释 I_1:　假设　p：现在是白天，q：现在是晴天，r：我们能看见太阳。则

A：如果现在是白天且是晴天，则我们能看见太阳。其真值为 1。

解释 I_2:　假设　p、q 如上，r：我们能看见星星。则

A：如果现在是白天且是晴天，则我们能看见星星。其真值为 0。

由此可见，不同的解释可使公式有不同的真值。事实上，对于命题变元无论做什么样的解释，它都只有两种结果：或者是“真”，或者是“假”。从而由变元和联结词组成的公式所表示的复合命题，也是或为“真”，或为“假”。如前所述这才是我们所需要的。因此，欲获取命题公式的真值，并非只有“解释”一个途径，还可以通过“赋值”获得。

赋值（真值指派）　对命题变元指派确定的真值。

赋值是一组由 0、1 构成的数串，**按字典顺序（或下标）**对应公式中的命题符。

如上例 1.2.1，$A = (p \wedge q) \to r$

解释 I_1 下，得 A 的真值为 1，实际上考虑的是对变元 p、q、r 赋值 111；

解释 I_2 下，得 A 的真值为 0，实际上考虑的是对变元 p、q、r 赋值 110。

A 的真值是在对 p、q、r 的某种赋值下所得的真值。

定义 1.2.3　设 p_1、p_2、……p_n 是公式 A 中所包含的所有命题变元，按顺序给 p_1、p_2、……p_n 各赋一个真值称为对 A 的一个赋值，那些使 A 的真值为 1 的赋值称为 A 的**成真赋值**，使 A 的真值为 0 的赋值称为 A 的**成假赋值**。

如上例 1.2.1，111 是 $A = (p \wedge q) \to r$ 的成真赋值，110 是 A 的成假赋值。根据前面对联结词的讨论知：001、011、101、000、010 也都是 A 的成真赋值。

问题　若公式 A 含有 n（$n \geq 1$）个命题变元，那么对 A 共有多少种不同的赋值？

答　因为 n 个变元赋值后形成一个 n 位的二进制数，所以共有 2^n 个。

将公式 A 在所有赋值情况下的取值列成表，称为 A 的**真值表**。构造真值表的步骤如下：

① 找出命题公式中所含的所有命题变元并按下标或字典顺序给出；

② 按从低到高的顺序写出公式的各层次；

③ 顺序列出所有的赋值（2^n 个）；对应每个赋值，计算命题公式各层次的真值，直到最后计算出命题公式的真值。

【例 1.2.2】　求下列命题公式的真值表：

（1）$(\neg p \wedge q) \to q$；

（2）$\neg(p \to q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

（3）$(p \to q) \wedge \neg r$；

解

表 1.2.2　公式（$\neg p\wedge q$）$\rightarrow q$ 的真值表：

p　　q	$\neg p$	$\neg p\wedge q$	（$\neg p\wedge q$）$\rightarrow q$
0　0	1	0	1
0　1	1	1	1
1　0	0	0	1
1　1	0	0	1

表 1.2.3　公式$\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow\neg(p\wedge\neg q)$的真值表：

p q	$p\rightarrow q$	$\neg(p\rightarrow q)$	$\neg q$	$p\wedge\neg q$	$\neg(p\wedge\neg q)$	$\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow\neg(p\wedge\neg q)$
0 0	1	0	1	0	1	0
0 1	1	0	0	0	1	0
1 0	0	1	1	1	0	0
1 1	1	0	0	0	1	0

表 1.2.1　公式（$p\rightarrow q$）$\wedge\neg r$ 的真值表：

p　q　r	$p\rightarrow q$	$\neg r$	($p\rightarrow q$）$\wedge\neg r$
0　0　0	1	1	1
0　0　1	1	0	0
0　1　0	1	1	1
0　1　1	1	0	0
1　0　0	0	1	0
1　0　1	0	0	0
1　1　0	1	1	1
1　1　1	1	0	0

由上可知，有的公式在任何赋值情况下真值恒为 1，如例 1.2.2（1）；有的公式在任何赋值情况下真值恒为 0，如例 1.2.2（2）；有的公式某些赋值使其真值为 1，而另一些赋值使其真值为 0，如例 1.2.2（3），由此可得**公式的分类**。

命题公式的类型有三种：

永真式（重言式）　所有赋值均为成真赋值的公式。

永假式（矛盾式）　所有赋值均为成假赋值的公式。

可满足式　至少有一组赋值是成真赋值的公式。

由定义可知，任何不是矛盾式的公式是可满足式，这其中包含着永真式，但在实际分类中，常将永真式单独表示，而将非永真的可满足式称为可满足式。

1.3 等值演算

【例 1.3.1】　构造公式 $\neg p\vee q$、$\neg$（$p\wedge\neg q$）、$p\rightarrow q$、$\neg q\rightarrow\neg p$ 的真值表。

解　　公式 $\neg p\vee q$、$\neg$（$p\wedge\neg q$）、$p\rightarrow q$、$\neg q\rightarrow\neg p$ 的真值表：

p　q	$\neg p\vee q$	（$p\wedge\neg q$）	$\neg$（$p\wedge\neg q$）	$p\rightarrow q$	$\neg q\rightarrow\neg p$
0　0	1	0	1	1	1
0　1	1	0	1	1	1
1　0	0	1	0	0	0
1　1	1	0	1	1	1

由例题可见，$\neg p\vee q$、$\neg$（$p\wedge\neg q$）、$p\rightarrow q$、$\neg q\rightarrow\neg p$ 的真值表是完全相同的，这种情况并

不是偶然的。事实上，给定 n 个命题变元，按照公式的生成规则，我们可以得到无穷多个命题公式，但这无穷多个命题公式对应的真值表却只有有限个。如上例，许多公式在变元的各种赋值下真值是一样的，我们称其为等值的，那么如何判断两个公式等值呢？

定义 1.3.1 设 A、B 是任意两个命题公式，若等价式 $A\leftrightarrow B$ 为重言式，则称 A 与 B 是**等值**的，记作：$A\Leftrightarrow B$。

定理 $A\leftrightarrow B$ 为重言式，当且仅当 A、B 具有相同的真值表。

注 ① 如果 $A\leftrightarrow B$ 不是重言式，则称 A 与 B 不等值，可记作：$A\not\Leftrightarrow B$。

② “$\Leftrightarrow$”与“=”不同，“A=B”表示二公式一样，“$A\Leftrightarrow B$”表示二公式真值一样，如：$\neg p\vee q \Leftrightarrow p\rightarrow q$ 但是 $\neg p\vee q \neq p\rightarrow q$。

③ “$\Leftrightarrow$”与“$\leftrightarrow$”是两个完全不同的符号。“$\leftrightarrow$”是联结词，是运算符，$A\leftrightarrow B$ 是一个公式。“$\Leftrightarrow$”不是联结词，而是两个公式之间的关系符，$A\Leftrightarrow B$ 并不是一个公式，而只是表示 A 与 B 是真值相同的两个公式。

④ “$\Leftrightarrow$”的性质：

a. $A\Leftrightarrow A$（自反性）；

b. 若 $A\Leftrightarrow B$，则 $B\Leftrightarrow A$（对称性）；

c. 若 $A\Leftrightarrow B$ 且 $B\Leftrightarrow C$，则 $A\Leftrightarrow C$（传递性）。

利用真值表我们可以证明许多等值式作为我们以后运算的基本定律：

1. 双重否定律： $A \Leftrightarrow \neg\neg A$
2. 幂等律： $A \Leftrightarrow A\vee A$ 　 $A \Leftrightarrow A\wedge A$
3. 交换律： $A\vee B \Leftrightarrow B\vee A$ 　 $A\wedge B \Leftrightarrow B\wedge A$
4. 结合律： $(A\vee B)\vee C \Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$ 　 $(A\wedge B)\wedge C \Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$
5. 分配律： $A\vee(B\wedge C) \Leftrightarrow (A\vee B)\wedge(A\vee C)$ 　 $A\wedge(B\vee C) \Leftrightarrow (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$
6. 德・摩根律： $\neg(A\vee B) \Leftrightarrow \neg A\wedge\neg B$ 　 $\neg(A\wedge B) \Leftrightarrow \neg A\vee\neg B$
7. 吸收律： $A\vee(A\wedge B) \Leftrightarrow A$ 　 $A\wedge(A\vee B) \Leftrightarrow A$
8. 零律： $A\vee 1 \Leftrightarrow 1$ 　 $A\wedge 0 \Leftrightarrow 0$
9. 同一律： $A\vee 0 \Leftrightarrow A$ 　 $A\wedge 1 \Leftrightarrow A$
10. 排中律： $A\vee\neg A \Leftrightarrow 1$
12. 矛盾律： $A\wedge\neg A \Leftrightarrow 0$
13. 蕴涵等值式： $A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg A\vee B$
14. 等价等值式： $A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
15. 假言易位： $A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg B\rightarrow\neg A$
16. 等价否定等值式： $A\leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A\leftrightarrow\neg B$
17. 归谬论： $(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B) \Leftrightarrow \neg A$

【例 1.3.2】 证明 13.等价等值式：$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$

解 作真值表：

A　B	$A\rightarrow B$	$B\rightarrow A$	$(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$	$A\leftrightarrow B$
0　0	1	1	1	1
0　1	1	0	0	0
1　0	0	1	0	0
1　1	1	1	1	1

因此，$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$。

【例 1.3.3】 证明 7. 吸收律： $A\vee(A\wedge B) \Leftrightarrow A$ 　 $A\wedge(A\vee B) \Leftrightarrow A$

解 作真值表：

A　B	$A\wedge B$	$A\vee(A\wedge B)$	$A\vee B$	$A\wedge(A\vee B)$
0　0	0	0	0	0
0　1	0	0	1	0
1　0	0	1	1	1
1　1	1	1	1	1

注 a）公式中的 A、B、C 等是可代表任意命题公式的，所以等值式中的每一个公式都对应着无数多个同类型的命题公式。例如：$p\wedge\neg p\Leftrightarrow 0$，$(p\to q)\wedge\neg(p\to q)\Leftrightarrow 0$，$(\neg p\vee q\vee r)\wedge\neg(\neg p\vee q\vee r)\Leftrightarrow 0$ 等均是第 19 式矛盾律的具体形式。

b）真值表无疑是证明等值式、求公式真值的好方法，但当公式中命题变元个数增多时，真值表的行数成倍地增长。因此当命题变元个数较多时，真值表不实用。而我们有了上述这些等值式后，就完全可以利用它们推演出更多的等值式，这一**过程**称为**等值演算**，在演算过程中将不断的使用**置换规则**。

置换规则 设$\Phi(A)$是含公式 A 的命题公式（称 A 为$\Phi(A)$的一个子公式），$\Phi(B)$是用命题公式 B 置换了$\Phi(A)$中的 A 之后得到的命题公式，如果 $A\Leftrightarrow B$，则$\Phi(A)\Leftrightarrow\Phi(B)$。

【例 1.3.4】 用等值演算验证等值式 $p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$

证 $p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow p\to(\neg q\vee r)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow \neg p\vee(\neg q\vee r)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee r$ （结合律）

$\Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\vee r$ （德·摩根律）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$ （蕴涵等值式）

利用等值演算还可以化简某些形式较为复杂的命题公式，并判断某些公式的类型。

【例 1.3.5】 化简公式 $(\neg p\wedge(\neg q\wedge r))\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge r)$，并判断公式的类型

解 $(\neg p\wedge(\neg q\wedge r))\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee((q\wedge r)\vee(p\wedge r))$ （结合律）

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee((q\vee p)\wedge r)$ （分配律）

$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\wedge r)\vee((p\vee q)\wedge r)$ （结合律、交换律）

$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\vee(p\vee q))\wedge r$ （分配律）

$\Leftrightarrow (\neg(p\vee q)\vee(p\vee q))\wedge r$ （德·摩根律）

$\Leftrightarrow 1\wedge r$ （排中律）

$\Leftrightarrow r$ （同一律）

由此可知，这是一个可满足式

【例 1.3.6】 判断下列公式 $((p\vee q)\wedge\neg q)\to p$ 的类型

解 $((p\vee q)\wedge\neg q)\to p$

$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg q))\to p$ （分配律）

$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee 0)\to p$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\to p$ （同一律）

$\Leftrightarrow \neg(p\wedge\neg q)\vee p$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\vee p$ （德·摩根律、双重否定律）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee p)\vee q$ （交换律、结合律）

$\Leftrightarrow 1\vee q$ （排中律）

$\Leftrightarrow 1$ （零律）

因此，公式 $((p\vee q)\wedge\neg q)\to p$ 是一个重言式。

等值演算在计算机硬件设计，开关理论和电子元器件中都占据重要地位。

1.4 联结词全功能集

前面我们一共介绍了五个联结词：$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\to$和$\leftrightarrow$，并用它们构成了一些命题公式，且看到了有些公式书写形式尽管不同，但实际上是等值的。这就自然产生了疑问：

问题 1：互不等值的命题公式的个数是有限的吗？共有多少个？

问题 2：联结词的个数是有限的吗？共有多少个？

对于含有 2 个命题变元的公式，理论上讲可以书写出无穷多个公式，但互不等值的公式

个数却是有限的，恰有 $2^{2^2}=2^4=16$ 个。对应着 16 个不同的真值表（真值表共有 2^2 行，行上的每个记入值又可在 0、1 中任取其一，因此构成 2^{2^2} 个不同的真值表），亦即对应着 16 个真值函数 F_i（i=0，1，… 15），其中 F_i：{00，01，10，11}→{0，1}，列表如下：

表 1.4.1

p q	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

p q	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

这里，F_0 和 F_{15} 正是两个常值函数：永假式 0 和永真式 1；

F_3 和 F_5 分别是命题变元 p 和 q；

F_1 是我们所熟知的二元真值函数 $p\wedge q$；

F_7 是二元真值函数 $p\vee q$；

F_9 是二元真值函数 $p\leftrightarrow q$；

F_{10} 和 F_{12} 分别是一元真值函数 $\neg q$ 和 $\neg p$；

F_{11} 和 F_{13} 分别是二元真值函数 $q\to p$ 和 $p\to q$。

另外我们注意到，F_2 是 F_{13} 的否定形式，F_4 是 F_{11} 的否定形式，即：

$F_2\Leftrightarrow\neg F_{13}\Leftrightarrow\neg(p\to q)$，$F_4\Leftrightarrow\neg F_{11}\Leftrightarrow\neg(q\to p)$；

F_6 是 F_9 的否定形式，即：$F_6\Leftrightarrow\neg F_9\Leftrightarrow\neg(p\leftrightarrow q)$；

F_8 是 F_7 的否定形式，即：$F_8\Leftrightarrow\neg F_7\Leftrightarrow\neg(p\vee q)$；

F_{14} 是 F_1 的否定形式，即：$F_{14}\Leftrightarrow\neg F_1\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)$。

对应于 F_2、F_4，F_6，F_8 和 F_{14} 我们来定义四个新的联结词：

（1） 如果… 则… 的否定“$\nrightarrow$”

设 p、q 为任意两个命题，复合命题“如果 p 则 q 的否定”称为 p、q 蕴含的否定，记作：$p\nrightarrow q$。“$\nrightarrow$”称为蕴含的否定联结词。**$p\nrightarrow q$ 为真，当且仅当 p 为真，q 为假。**

由上面所述可知，F_2 是二元真值函数 $p\nrightarrow q$。

$p\nrightarrow q\Leftrightarrow\neg(p\to q)$，

（2） 异或（排斥或）“$\triangledown$”

设 p、q 为任意两个命题，复合命题“p 异或 q”称为 p、q 的异或（排斥或），记作：$p\triangledown q$。“$\triangledown$”称为异或（排斥或）联结词。**$p\triangledown q$ 为真，当且仅当 p、q 中恰有一个为真。**

由上表和前面所述可知，F_6 是二元真值函数 $p\triangledown q$。

$p\triangledown q\Leftrightarrow\neg(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$。

联结词“$\triangledown$”有以下性质：

① $A\triangledown B\Leftrightarrow B\triangledown A$

② $(A\triangledown B)\triangledown C\Leftrightarrow A\triangledown(B\triangledown C)$

③ $A\wedge(B\triangledown C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\triangledown(A\wedge C)$

④ $A\triangledown A\Leftrightarrow 0$

⑤ $A\triangledown 0\Leftrightarrow A$

⑥ $A \triangledown 1 \Leftrightarrow \neg A$

以上各式均可用真值表或等值演算证明。

【例 1.4.1】用真值表证明（A▽B）▽C ⇔A▽（B▽C）

解 表 1.4.2

A B C	A▽B	B▽C	（A▽B）▽C	A▽（B▽C）
0 0 0	0	0	0	0
0 0 1	0	1	1	1
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	0	0	0
1 0 0	1	0	1	1
1 0 1	1	1	0	0
1 1 0	0	1	0	0
1 1 1	0	0	1	1

所以等值式成立。

【例 1.4.2】用等值演算证明 A∧（B▽C） ⇔（A∧B）▽（A∧C）

证明 A∧（B▽C） ⇔A∧（(B∨C）∧¬（B∧C））

（A∧B）▽（A∧C）⇔（(A∧B）∨（A∧C））∧¬（A∧B∧A∧C）

⇔（A∧（B∨C））∧（¬A∨¬（B∧C））

⇔（A∧（B∨C）∧¬A）∨（A∧（B∨C）∧¬（B∧C））

⇔0∨（A∧（B∨C）∧¬（B∧C））

⇔A∧（(B∨C）∧¬（B∧C））

所以等值式成立。

想一想 此等值式说明∧对于▽是满足分配律的，那么∨对于▽是否满足分配律？

其它等值式的证明请读者自己完成。

（3） 与非“↑”

设 p、q 为任意两个命题，复合命题“p 与 q 的否定”称为 p、q 的与非，记作：p↑q。“↑”称为与非联结词。**p↑q 为假，当且仅当 p、q 均为真。**

由定义可知，F_{14}是二元真值函数 p↑q。

p↑q ⇔ ¬（p∧q）

性质：（p↑q）↑r ⇎ p↑（q↑r）

证明：（p↑q）↑r ⇔ ¬（p∧q）↑r

⇔ ¬（¬（p∧q）∧r）

⇔ （p∧q）∨¬r

p↑（q↑r） ⇔ p↑¬（q∧r）

⇔ ¬（p∧¬（q∧r））

⇔ ¬p∨（q∧r）

因为 （p∧q）∨¬r ⇎ ¬p∨（q∧r） 所以 （p↑q）↑r ⇎ p↑（q↑r） 证毕

【例 1.4.3】 将下列公式化成仅含联结词“↑”的公式。

（1）A = ¬p

（2）B = p∧q

（3）C= p∨q

解 （1）A = ¬p ⇔ ¬（p∧p）⇔ p↑p

（2）B = p∧q ⇔ ¬¬（p∧q）⇔ ¬（p↑q）⇔ （p↑q）↑（p↑q）

（3）C = p∨q ⇔ ¬（¬p∧¬q）⇔ ¬p↑¬q ⇔ （p↑p）↑（q↑q）

（3）或非“↓”

设 p、q 为任意两个命题，复合命题“p 或 q 的否定”称为 p、q 的或非，记作：p↓q。“↓”称为或非联结词。**p↓q 为真，当且仅当 p、q 均为假。**

由定义可知，F_8是二元真值函数 p↓q。

p↓q ⇔ ¬（p∨q）

类似于“↑”，“↓”同样不满足结合律，并类似可将例 1.4.1 中的公式化成仅含联结词“↓”的公式（请读者自己完成）。

事实上,每一个公式（表中的每一列）都是定义域为{0，1}^{2} = {00，01，10，11}，值域为{0，1}的函数，我们称这样的函数为二元真值函数。一般地，n 个命题变元仅能构成2^{2^n}个互不等值的命题公式，它们是定义域为$\{0,1\}^n$ = {00…00，00…01，……，11…11}（由 0、1 构成的长度为 n 的符号串，称为维卡氏积），值域为{0，1}的函数，称为 n 元真值函数。

每个 n 元真值函数均对应着无穷个与之等值的命题公式,这些公式都是由联结词联结而成。理论上讲，每个真值函数都可定义一个联结词，于是，一元的有2^{2^1}= 4 个，二元的有2^{2^2}=16 个，三元的有2^{2^3}=256 个。但实际上由真值表可知，一元联结词只有“¬”一个，二元联结词共有 8 个，而三元联结词我们也只用“if...then...else...”（如果…则…否则）一个,且这个联结词完全可以用一元、二元的¬、∧和→表示（参看例 1.8.1（2））。在不同的形式系统中，联结词集合中的联结词有的多些，有的少些，但无论联结词集合中的联结词有多少，它们都必须具备共同的功能：可以表示出所有的真值函数。

全功能集（功能完备集） 任一真值函数均可用仅含该集中的联结词的公式表示。

对于一个联结词集来说，如果集中的某个联结词可以用集中的其他联结词所定义，则称这个联结词是**冗余的联结词**。

极小全功能集（全功能完备集） 不含冗余联结词的全功能集。

由于三元联结词可用一元和二元的联结词表示，所以是冗余的。考察前面的二元真值函数的真值表可知：{¬，∧，∨，→，↔}是全功能集。而因为：

A↔B ⇔（A→B）∧（B→A）

因此“↔”是冗余的，得新的联结词集{¬，∧，∨，→}是全功能集。又因为：

A→B ⇔ ¬A∨B

因此“→”是冗余的，得联结词集{¬，∧，∨}是全功能集。在由

A∨B ⇔ ¬（¬A∧¬B）

所以“∨”也是冗余的，可得{¬，∧}是全功能集。

下面证明**{¬，∧}是极小全功能集**。

证明 设¬是冗余的联结词，则¬可由仅含∧的公式表示，则对于任意的公式 A、B、…

¬A ⇔ A∧B∧A∧……

当 A、B、…均取真值为 0 时，上式右端真值为 0，但左式真值为 1，故等式不成立，矛盾。即：¬不是冗余的联结词。

而二元联结词∧不可能用一元联结词¬来表示，所以∧也不是冗余的联结词，综上所述，{¬，∧}是极小全功能集。 证毕

类似可证，**{¬，∨}、{¬，→}均是极小全功能集**。再由上面例 1.4.2 可得**{↑}及{↓}也均是极小全功能集**。

【例 1.4.4】 将公式 p∧（q↔r）化成仅含联结词¬、∧的公式形式。

解 p∧（q↔r）

⇔ p∧（(q→r）∧（r→q)） （等价等值式）

⇔ p∧（¬q∨r）∧（¬r∨q） （蕴涵等值式）

⇔ p∧¬（¬¬q∧¬r）∧¬（¬¬r∧¬q） （德·摩根律）

⇔ p∧¬（q∧¬r）∧¬（r∧¬q） （双重否定律） #

【例 1.4.5】 将公式 p→q 化成仅含联结词↑、↓的公式形式。

解 p→q ⇔ ¬p∨q

⇔ ¬（p∧¬q）

⇔ p↑¬q

⇔ p↑（q↑q）

p→q ⇔ ¬p∨q

⇔ ¬¬（¬p∨q）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \downarrow q)$
$\Leftrightarrow (\neg p \downarrow q) \downarrow (\neg p \downarrow q)$
$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$

1.5 对偶与范式

在 1.3 中介绍的基本等值式中，多数公式是成对出现的，这些成对出现的公式是对偶的。

定义 1.5.1 在仅含联结词$\neg$、$\wedge$、$\vee$的命题公式 A 中，将$\vee$换成$\wedge$，将$\wedge$换成$\vee$，若 A 中含有 0 或 1，则将 0 换成 1，1 换成 0，所得命题公式称为 A 的**对偶式**，记作 A^*。

由定义易知，对偶式是相互的，$(A^*)^* = A$，我们称 A 与 A^*是对偶的。

例如（1）$(p \wedge \neg q) \vee r \vee 1$ 与 $(p \vee \neg q) \wedge r \wedge 0$ 互为对偶式。

（2）$\neg(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$ 与 $\neg(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$ 是对偶的。

定理 1.5.1 设 A 与 A^*是对偶的，p_1、p_2、…p_n 是出现在 A、A^*中的所有命题变元，则

$$\neg A(p_1, p_2, \ldots p_n) \Leftrightarrow A^*(\neg p_1, \neg p_2, \ldots \neg p_n) \qquad (1)$$

$$A(\neg p_1, \neg p_2, \ldots \neg p_n) \Leftrightarrow \neg A^*(p_1, p_2, \ldots p_n) \qquad (2)$$

证明 对 $A(p_1, p_2, \ldots p_n)$ 中出现的联结词的个数 m 作数学归纳。

$m = 0$ 时，$A(p_1, p_2, \ldots p_n)$ 中无联结词，则 A 为 p_i，$i \in \{1, 2, \ldots n\}$，或 A 为 0、1（命题常元）。

$A(p_i)$ 为 p_i 时，$A^*(p_i)$ 亦为 p_i，则$\neg A(p_i) \Leftrightarrow \neg p_i \Leftrightarrow \neg A^*(p_i)$

A 为 0（或 1）时，A^*为 1（或 0），则$\neg A \Leftrightarrow \neg 0 \Leftrightarrow 1$。

假设：当 A 中有 m 个联结词时原命题成立。

则 A 中有 m+1 个联结词时，A 可能是下述情形之一。

（i）$A(p_1、\ldots p_n)$ 呈$\neg A_1(p_1, \ldots p_n)$ 形，其中 $A_1(p_1, \ldots p_n)$ 有 m 个联结词出现。

由归纳假设 $\neg A_1(p_1, \ldots p_n) \Leftrightarrow A_1^*(\neg p_1, \ldots \neg p_n)$

于是有 $\neg\neg A_1(p_1, \ldots p_n) \Leftrightarrow \neg A_1^*(\neg p_1, \ldots \neg p_n)$

因此 $\neg A(p_1, \ldots p_n) \Leftrightarrow A^*(\neg p_1, \ldots \neg p_n)$

（ii）$A(p_1, \ldots p_n)$ 呈 $A_1(p_1, \ldots p_n) \wedge A_2(p_1, \ldots p_n)$ 形。

$\neg A(p_1, \ldots p_n) \Leftrightarrow \neg(A_1(p_1, \ldots p_n) \wedge A_2(p_1, \ldots p_n))$

$\Leftrightarrow \neg A_1(p_1, \ldots p_n) \vee \neg A_2(p_1, \ldots p_n)$ （De Morgan 律）

$\Leftrightarrow A_1^*(\neg p_1, \ldots \neg p_n) \vee A_2^*(\neg p_1, \ldots \neg p_n)$ （归纳假设）

$\Leftrightarrow A^*(\neg p_1, \ldots \neg p_n)$

（iii）$A(p_1, \ldots p_n)$ 呈 $A_1(p_1, \ldots p_n) \vee A_2(p_1, \ldots p_n)$ 形。

证明同（ii）。归纳成立。

类似可证（2）， 故定理成立。 证毕

定理 1.5.2 设 A^*、B^*分别是公式 A、B 的对偶式，如果 $A \Leftrightarrow B$，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

证明 设 A、B 中所有不同的变元为 p_1，$p_2 \ldots p_n$，则由 $A \Leftrightarrow B$ 知：

$A(p_1, \ldots p_n) \leftrightarrow B(p_1, \ldots p_n)$ 是永真式，$\neg A(p_1, \ldots p_n) \leftrightarrow \neg B(p_1, \ldots p_n)$ 亦是永真式。所以，$\neg A(p_1, \ldots p_n) \Leftrightarrow \neg B(p_1, \ldots p_n)$。

由定理 1.5.1 知 $A^*(\neg p_1, \ldots \neg p_n) \Leftrightarrow B^*(\neg p_1, \ldots \neg p_n)$，即：

$A^*(\neg p_1, \ldots \neg p_n) \leftrightarrow B^*(\neg p_1, \ldots \neg p_n)$ 是永真式，当 p_i 代以$\neg p_i$时，得

$A^*(\neg\neg p_1, \ldots \neg\neg p_n) \leftrightarrow B^*(\neg\neg p_1, \ldots \neg\neg p_n)$ 仍是永真式，即：

$A^*(\neg\neg p_1, \ldots \neg\neg p_n) \Leftrightarrow B^*(\neg\neg p_1, \ldots \neg\neg p_n)$，因此有

$A^*(p_1, \ldots p_n) \Leftrightarrow B^*(p_1, \ldots p_n)$ 证毕

本定理称为**对偶原理**。

因为 0 与 1 互为对偶式，所以由对偶原理可知，若 A 为重言式，则 A^*必为矛盾式，反之亦然。

在命题逻辑中需要解决下面的问题。

问题 1 对任何一个命题公式 $A(p_1, \ldots p_n)$，我们如何判断它的类型？

解决的方法之一是做出该公式的真值表，检查它在任一赋值下的真值。此方法的缺点是 n 个变元的公式有 2^n 个赋值，当 n 较大时工作量大。

解决的方法之二是利用逻辑等值演算，对公式化简并配合部分赋值法来判定。

问题 2　如果已知公式的成真和成假赋值，能否将它的表达式求出？

这是问题 1 的逆，为此我们需要研究赋值与命题联结词之间的关系。

问题 3　同一真值函数可有不同的公式表达式，给定两个命题公式如何判定它们是等值的？

问题 1、3 均可归为判定问题，可用将公式化为范式的方法解决，范式给各种各样的公式提供了一个统一的表达形式，从而为我们讨论问题，作机械的符号处理提供了方便。

定义 1.5.2　将命题变元及其否定统称为**文字**。p 与¬p 称为一对相反的文字。

简单析取式（基本和）　仅由有限个文字构成的析取式。

简单合取式（基本积）　仅由有限个文字构成的合取式。

例如：p∨¬q、p∨r 均是有两个文字的简单析取式。

p∧q∧r、¬p∧q∧¬q 均是有三个文字的简单合取式。

而 p、¬q 既是一个文字的简单析取式，又是一个文字的简单合取式。

性质　① 一个文字既是简单析取式又是简单合取式；

② 一个简单析取式是重言式，当且仅当它同时含有相反的文字；

③ 一个简单合取式是矛盾式，当且仅当它同时含有相反的文字。

如：p∨q∨¬p 是重言式，¬p∧¬q∧q 是矛盾式。

定义 1.5.3　**析取范式**：由有限个简单合取式构成的析取式。

合取范式：由有限个简单析取式构成的合取式。

【例 1.5.1】　判断下列各式是析取范式还是合取范式。

（1）　p

（2）　p∨¬q

（3）　¬p∧q∧r

（4）　p∨（q∧¬r）∨¬r

（5）　¬p∧（p∨q）∧（p∨¬q∨r）∧q

解（1）既是一个简单析取式又是一个简单合取式；是只有一个简单析取式的合取范式，也是只有一个简单合取式的析取范式。（2）是有两个简单合取式的析取范式，也是只有一个简单析取式的合取范式。（3）是有三个简单析取式的合取范式，也是只有一个简单合取式的析取范式。（4）是有三个简单合取式的析取范式。（5）是有四个简单析取式的合取范式。

性质　① 一个文字既是一析取范式又是一合取范式。

② 一个析取范式为矛盾式，当且仅当它的每个简单合取式是矛盾式。

③ 一个合取范式为重言式，当且仅当它的每个简单析取式是重言式。

如：A =（¬p∧p∧q）∨（p∧q∧¬q）是矛盾式。

A =（¬p∨p∨q）∧（p∨q∨¬q）∧（q∨¬r∨r）是重言式。

定理 1.5.3　任一命题公式都存在着与之等值的析取范式，任一命题公式都存在着与之等值的合取范式。

证明　对于任一公式，可用下面的方法构造出与其等值的范式：

（i）利用等值式

A↔B ⇔（A→B）∧（B→A）、A→B ⇔ ¬A∨B

使公式中仅含联结词 ¬、∧、∨。

（ii）利用 Do Morgan 律和双重否定律

¬（A∨B）⇔ ¬A∧¬B、¬（A∧B）⇔ ¬A∨¬B 和¬¬A ⇔ A

将否定符¬移至命题变元符前，并去掉多余的否定符¬。

（iii）利用分配律

A∧（B∨C）⇔（A∧B）∨（A∧C）或 A∨（B∧C）⇔（A∨B）∧（A∨C）

将公式化成析取范式或合取范式。所得即与原公式等值的范式。　证毕

【例 1.5.2】　求公式 （（p∨q）→r）↔p 的析取范式。

解　（（p∨q）→r）↔p

⇔（（（p∨q）→r）→p）∧（p→（（p∨q）→r））　（消↔）

⇔（¬（¬（p∨q）∨r）∨p）∧（¬p∨¬（p∨q）∨r）　（消→）

⇔（（¬¬（p∨q）∧¬r）∨p）∧（¬p∨（¬p∧¬q）∨r）　（Do Morgan 律）

$\Leftrightarrow$（((p∨q）∧¬r）∨p）∧（¬p∨r）　　　　（双重否定律、吸收律）
$\Leftrightarrow$（(p∧¬r）∨（q∧¬r）∨p）∧（¬p∨r）　　　　（分配律）
$\Leftrightarrow$（((p∧¬r）∨p）∨（q∧¬r））∧（¬p∨r）　　　　（交换律）
$\Leftrightarrow$（p∨（q∧¬r））∧（¬p∨r）　　　　（吸收律）
$\Leftrightarrow$（p∧（¬p∨r））∨（(q∧¬r）∧（¬p∨r））　　　　（分配律）
$\Leftrightarrow^{*}$（p∧¬p）∨（p∧r）∨（q∧¬r∧¬p）∨（q∧¬r∧r）　　　　（分配律）
$\Leftrightarrow$ 0∨（p∧r）∨（¬p∧q∧¬r）∨ 0　　　　（矛盾式）
$\Leftrightarrow$（p∧r）∨（¬p∧q∧¬r）　　——析取范式　　（同一律）

事实上，第*步已经是析取范式了，最后是化简了的结果。这说明一个公式的析取范式不是唯一的。

【例 1.5.3】 求例 1.5.2 中公式的合取范式

解 由上式第 4 步

原式$\Leftrightarrow$（(p∨q）∧¬r）∨p）∧（¬p∨r）
　$\Leftrightarrow$（p∨q∨p）∧（¬r∨p）∧（¬p∨r）　　　　（分配律）
　$\Leftrightarrow$（p∨q）∧（p∨¬r）∧（¬p∨r）　——合取范式　　（幂等律、交换律）

同样，合取范式也是不唯一的。

范式的不唯一性为我们讨论问题带来不便，为了使一个命题公式化成唯一的等值的标准形式，我们引入主范式的概念。

定义 1.5.3 对于公式 A

极小项：包含 A 中所有命题变元或其否定一次且仅一次的简单合取式；

极大项：包含 A 中所有命题变元或其否定一次且仅一次的简单析取式。

注 极小项或极大项中各文字要求按**角标顺序**或**字典顺序**排列。

【例 1.5.4】 求公式 A（p，q）的极小项和极大项。

解 极小项：¬p∧¬q、¬p∧q、p∧¬q、p∧q

　极大项：p∨q 、p∨¬q、¬p∨q、¬p∨¬q

即：极小（大）项的个数等于 2^2 个。（n 元的公式为 2^n 个）。

我们做出仅含两个命题变元的公式的极小项的真值表：

p q	¬p∧¬q （m_0）	¬p∧q （m_1）	p∧¬q （m_2）	p∧q （m_3）
0 0	1	0	0	0
0 1	0	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	0	0	1

由真值表可看出：对于 p、q 的任一组赋值，有且仅有一个极小项的真值为 1，即极小项之间是不等值的，4 个真值赋值与 4 个极小项值之间有一一对应关系。我们用 m_i 表示在十进制为 i 的赋值下真值为 1 的极小项。

定义 1.5.4 对于公式 A

主析取范式：与 A 等值的由极小项构成的析取范式；

主合取范式：与 A 等值的由极大项构成的合取范式；

由定理 1.5.3 知任一公式的析（合）取范式总是存在的，求主范式只须在求范式的基础上将每个简单合（析）取式化成极小（大）项。

【例 1.5.5】 求公式 （(p∨q）→r）↔p 的主析取范式。

解 由例 1.5.4 已求得公式的析取范式，在此基础上求主析取范式。即：

（(p∨q）→r）↔p
$\Leftrightarrow$（p∧r）∨（¬p∧q∧¬r）　　——析取范式
$\Leftrightarrow$（p∧r∧（q∨¬q））∨（¬p∧q∧¬r）　　（同一律）
$\Leftrightarrow$（p∧r∧q）∨（p∧r∧¬q）∨（¬p∧q∧¬r）　　（分配律）
$\Leftrightarrow$（¬p∧q∧¬r）∨（p∧¬q ∧ r）∨（p∧ q ∧ r）　　（交换律）
$\Leftrightarrow$ $m_2 \vee m_5 \vee m_7$　　——主析取范式
$\Leftrightarrow$ $\sum$（2，5，7）

2、5、7 恰是使三个极小项成真的赋值的十进制表示。

【例 1.5.6】 求（$p\rightarrow(p\vee r)$）$\wedge$（$q\leftrightarrow p$）的主析取范式

解 原式 $\Leftrightarrow (p\rightarrow(p\vee r))\wedge(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$ （等价等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee p\vee r)\wedge(\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow 1\wedge(\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$ （排中律）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$ ——合取范式 （同一律）

$\Leftrightarrow ((\neg p\vee q)\wedge p)\vee((\neg p\vee q)\wedge\neg q)$ （分配律）

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge p)\vee(q\wedge p)\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg q)$ ——析取范式（分配律）

$\Leftrightarrow (q\wedge p)\vee(\neg p\wedge\neg q)$ （矛盾式、同一律）

$\Leftrightarrow ((q\wedge p)\wedge(\neg r\vee r))\vee((\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg r\vee r))$ （同一律）

$\Leftrightarrow (q\wedge p\wedge r)\vee(q\wedge p\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ （分配律）

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$ （交换律）

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_6\vee m_7$ ——主析取范式

$\Leftrightarrow \sum(0,1,6,7)$

定理 1.5.4 任何命题公式的主析取范式存在且唯一。

证明 由析取范式的存在性知主析取范式的存在性成立。下面证唯一性：

设任一命题公式 A 有两个主析取范式 B 和 C。则因为 $A\Leftrightarrow B$，$A\Leftrightarrow C$，所以 $B\Leftrightarrow C$。若 B、C 是 A 的（在不计极小项的顺序的情况下）不等值的主析取范式（$B\neq C$），则必存在某个极小项 m_i，m_i 只存在于 B、C 之一中。不妨设 m_i 在 B 中，而不在 C 中，因此 i 之二进制表示是 B 的成真赋值，而对于 C 则为成假赋值，这与 $B\Leftrightarrow C$ 矛盾，故 B=C。

证毕

注意到每个极小项均对应着公式的一个成真赋值，因此只要我们知道了公式的成真赋值，就可得到其相应的主析取范式。换言之，我们可以直接由公式的真值表得到与之等值的主析取范式，反之亦然。

【例 1.5.7】 用真值表法求上例公式（$p\rightarrow(p\vee r)$）$\wedge$（$q\leftrightarrow p$）的主析取范式。

解 构造公式的真值表：

p q r	$p\vee r$	$p\rightarrow(p\vee r)$	$q\leftrightarrow p$	$(p\rightarrow(p\vee r))\wedge(q\leftrightarrow p)$	
0 0 0	0	1	1	1	m_0
0 0 1	1	1	1	1	m_1
0 1 0	0	1	0	0	m_2
0 1 1	1	1	0	0	m_3
1 0 0	1	1	0	0	m_4
1 0 1	1	1	0	0	m_5
1 1 0	1	1	1	1	m_6
1 1 1	1	1	1	1	m_7

$\therefore (p\rightarrow(p\vee r))\wedge(q\leftrightarrow p)\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_6\vee m_7\Leftrightarrow\sum(0,1,6,7)$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

结论（主析取范式的用途）

1. 重言式的主析取范式包含公式的全部 2^n 个极小项。
2. （规定）矛盾式的主析取范式为 0。
3. 两个等值的公式必有相同的主析取范式（不计极小项的顺序）。
4. 不列真值表，由主析取范式可得公式的成真、成假赋值。
5. 仅由真值表，可得公式的表达式（主析取范式形式）。
6. 解决应用问题。

前两条可用来判断公式的类型，第三条判断两个公式的等值，第五条由真值表得到公式的表达式，由此前面提出的三个问题得到了解决。

【例 1.5.8】 不列真值表，求公式（$q\rightarrow p$）$\rightarrow\neg r$ 的成真赋值。

解 $(q\rightarrow p)\rightarrow\neg r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg q\vee p)\vee\neg r$ （消$\rightarrow$）

$\Leftrightarrow$（$\neg p\wedge q$）$\vee\neg r$　　　　　　　　　　（内移$\neg$）

$\Leftrightarrow$（（$\neg p\wedge q$）$\wedge$（$\neg r\vee r$））$\vee$（（$\neg p\vee p$）$\wedge\neg r$）　　　　（缺项补项）

$\Leftrightarrow$（$\neg p\wedge q\wedge\neg r$）$\vee$（$\neg p\wedge q\wedge r$）$\vee$（$\neg p\wedge\neg r$）$\vee$（$p\wedge\neg r$）

$\Leftrightarrow$（$\neg p\wedge q\wedge\neg r$）$\vee$（$\neg p\wedge q\wedge r$）$\vee$（（$\neg p\wedge\neg r$）$\wedge$（$\neg q\vee q$））$\vee$（（$p\wedge\neg r$）$\wedge$（$\neg q\wedge q$））

$\Leftrightarrow$（$\neg p\wedge q\wedge\neg r$）$\vee$（$\neg p\wedge q\wedge r$）$\vee$（$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$）$\vee$（$\neg p\wedge q\wedge\neg r$）$\vee$（$p\wedge\neg q\wedge\neg r$）$\vee$（$p\wedge q\wedge\neg r$）

$\Leftrightarrow$（$\neg p\wedge q\wedge\neg r$）$\vee$（$\neg p\wedge q\wedge r$）$\vee$（$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$）$\vee$（$p\wedge\neg q\wedge\neg r$）$\vee$（$p\wedge q\wedge\neg r$）

$\Leftrightarrow m_2\vee m_3\vee m_0\vee m_4\vee m_6$

$\Leftrightarrow\sum$（0，2，3，4，6）

所以：公式（$q\rightarrow p$）$\rightarrow\neg r$ 成真的赋值为：000，010，011，100，110。

【例 1.5.9】　已知命题公式 A（p，q，r）的成真赋值为 010，101，110，求 A。

解　$A\Leftrightarrow m_2\vee m_5\vee m_6$

$\Leftrightarrow$（$\neg p\wedge q\wedge\neg r$）$\vee$（$p\wedge\neg q\wedge r$）$\vee$（$p\wedge q\wedge\neg r$）

【例 1.5.10】　四人比赛，三人估计成绩。甲说：“A 第一、B 第二”，乙说：“C 第二、D 第四”，丙说：“A 第二、D 第四”。结果每人都是对了一半，假设无并列名次，问 A、B、C、D 的实际名次如何？

解　设 p：A 第一，q：B 第二。　（甲说）　（$\neg p\wedge q$）$\vee$（$p\wedge\neg q$）$\Leftrightarrow 1$

r：C 第二，s：D 第四。　（乙说）　（$\neg r\wedge s$）$\vee$（$r\wedge\neg s$）$\Leftrightarrow 1$

t：A 第二，s：D 第四。　（丙说）　（$\neg s\wedge t$）$\vee$（$s\wedge\neg t$）$\Leftrightarrow 1$

$1\Leftrightarrow$（（$\neg p\wedge q$）$\vee$（$p\wedge\neg q$））$\wedge$（（$\neg r\wedge s$）$\vee$（$r\wedge\neg s$））$\wedge$（（$\neg s\wedge t$）$\vee$（$s\wedge\neg t$））

$\Leftrightarrow$（（$\neg p\wedge q\wedge\neg r\wedge s$）$\vee$（$\neg p\wedge q\wedge r\wedge\neg s$）$\vee$（$p\wedge\neg q\wedge\neg r\wedge s$）$\vee$（$p\wedge\neg q\wedge r\wedge\neg s$））

$\wedge$（（$\neg s\wedge t$）$\vee$（$s\wedge\neg t$））

$\Leftrightarrow$（$\neg p\wedge q\wedge\neg r\wedge s\wedge\neg t$）$\vee$（$\neg p\wedge q\wedge r\wedge\neg s\wedge t$）$\vee$（$p\wedge\neg q\wedge\neg r\wedge s\wedge\neg t$）$\vee$（$p\wedge\neg q\wedge r\wedge\neg s\wedge t$）

$\Leftrightarrow m_{01010}\vee m_{01101}\vee m_{10010}\vee m_{10101}$

因为 q、r 不能同为 1，p、t 不能同为 1，q、r、t 不能同为 0，所以需去掉不符题义的 m_{01101}、m_{10101}、m_{10010}。得：$1\Leftrightarrow m_{01010}\Leftrightarrow\neg p\wedge q\wedge\neg r\wedge s\wedge\neg t$

即：A 不是第一，B 是第二，C 不是第二，D 是第四，A 不是第二。

故：实际名次是：C 第一，B 第二，A 第三，D 第四。

完全类似，我们可以求主合取范式，先做含两个命题变元的极大项真值表：

p q	$p\vee q$（M_0）	$p\vee\neg q$（M_1）	$\neg p\vee q$（M_2）	$\neg p\vee\neg q$（M_3）
0 0	0	1	1	1
0 1	1	0	1	1
1 0	1	1	0	1
1 1	1	1	1	0

对应 p、q 的每一组赋值，极大项的真值有且仅有一个为 0：极大项与其成假赋值有着一一对应关系，我们用 M_i 表示在十进制为 i 的赋值下真值为 0 的极大项。因此，求一个公式的主合取范式，只需知道该公式的成假赋值，并将对应着这个赋值也成假的那些极大项合取起来，即得该公式的主合取范式。

【例 1.5.11】　求公式（$p\rightarrow$（$p\vee r$））$\wedge$（$q\leftrightarrow p$）的主合取范式。

解　由例 1.5.7 已知此公式的成假赋值为 010，011，100，101，$\therefore$主合取范式：

（$p\rightarrow$（$p\vee r$））$\wedge$（$q\leftrightarrow p$）$\Leftrightarrow M_2\wedge M_3\wedge M_4\wedge M_5\Leftrightarrow\prod$（2，3，4，5）

$\Leftrightarrow$（$p\vee\neg q\vee r$）$\wedge$（$p\vee\neg q\vee\neg r$）$\wedge$（$\neg p\vee q\vee r$）$\wedge$（$\neg p\vee q\vee\neg r$）

同样，利用等值演算法也可得主合取范式：

（$p\rightarrow$（$p\vee r$））$\wedge$（$q\leftrightarrow p$）

$\Leftrightarrow$（$\neg p\vee p\vee r$）$\wedge$（$\neg q\vee p$）$\wedge$（$\neg p\vee q$）　　（等价等值式、蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow 1\wedge$（$p\vee\neg q$）$\wedge$（$\neg p\vee q$）　　（排中律、零律、交换律）

$\Leftrightarrow$（$p\vee\neg q\vee\neg r$）$\wedge$（$p\vee\neg q\vee r$）$\wedge$（$\neg p\vee q\vee\neg r$）$\wedge$（$\neg p\vee q\vee r$）　（同一律、分配律）

$\Leftrightarrow$（$p\vee\neg q\vee r$）$\wedge$（$p\vee\neg q\vee\neg r$）$\wedge$（$\neg p\vee q\vee r$）$\wedge$（$\neg p\vee q\vee\neg r$）　（交换律）

——主合取范式

注意到，对于任一公式，在它的2^n个赋值中，非 0 即 1，因此其主析取范式中的极小项和其主合取范式中的极大项的个数之和恰为2^n，且其下标不会相同。故当我们知道了一个公式的所有成真赋值时，也就知道了它的所有成假赋值。亦即：知道了主析取范式，相应的也就得到了主合取范式，反之亦然。

【例 1.5.12】 求$(\neg p\vee r)\wedge(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)$的主析取范式。

解 $(\neg p\vee r)\wedge(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee r)\wedge(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$ ——主合取范式

$\Leftrightarrow M_2\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6$

$\Leftrightarrow\prod(2，4，5，6)$

$\Leftrightarrow\sum(0，1，3，7)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$ ——主析取范式

1.6 推理理论

推理是由前提到结论的思维过程。在命题逻辑中，前提是已知的命题公式，结论是从前提出发应用推理规则推出的命题公式。在传统数学中定理的证明均是由前提（已知条件，全是真命题）推出结论（亦全是真命题），这样的结论称为**合法结论**。数理逻辑有所不同，它着重研究的是推理的过程，**这种过程称为演绎或形式证明**。在过程中使用的推理规则必须是公认的且要明确列出，而对于作为前提和结论的命题并不一定要求他们全是真命题，这样的结论称为**有效结论**。

定理 1.6.1 称蕴涵式$(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n)\rightarrow B$为推理的**形式结构**，$A_1，A_2，\ldots，A_n$为推理的前提，B 为推理的结论。若$(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n)\rightarrow B$是**重言式**，则称从前题$A_1，A_2，\ldots，A_n$推出结论 B 的推理正确，B 是$A_1，A_2，\ldots，A_n$的**有效结论或逻辑结论**。记作：

$(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n)\Rightarrow B$ $(A_1，A_2，\ldots，A_n\Rightarrow B)$

否则称推理不正确，或 B 不是前提$A_1，A_2，\ldots，A_n$的有效结论。

注意 “$\Rightarrow$”亦读作“蕴涵”，但它不是联结词，是表示前后两个公式之间的关系的符号。“$\Rightarrow$”具有的性质：

（1）$A\Rightarrow A$ （自反性）

（2）若$A\Rightarrow B$且$B\Rightarrow A$，则$A\Leftrightarrow B$ （对称性）

（3）若$A\Rightarrow B$且$B\Rightarrow C$，则$A\Rightarrow C$ （传递性）

由定义可知，推理的正确与否，取决于蕴涵式是否是重言式，判断重言式的方法已学的有三种：真值表法、等值演算法和主析取范式法等。

【例 1.6.1】 验证下面推理是否正确：

某数是复数，仅当它是实数或是虚数，某数既不是实数也不是虚数，因此它不是复数。

证 设 p：它是复数，q：它是实数，r：它是虚数。

推理的形式结构为：$((p\rightarrow(q\vee r))\wedge(\neg q\wedge\neg r))\rightarrow\neg p$

（1） 真值表法

p q r	$p\rightarrow(q\vee r)$	$\neg q\wedge\neg r$	$\neg p$
0 0 0	1	1	1
0 0 1	1	0	1
0 1 0	1	0	1
0 1 1	1	0	1
1 0 0	0	1	0
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	0	0
1 1 1	1	0	0

因为只有第一行前提、结论均为真，所以推理正确。

（2）等值演算法

$((p\to(q\vee r))\wedge(\neg q\wedge\neg r))\to\neg p$

$\Leftrightarrow((\neg p\vee(q\vee r))\wedge(\neg q\wedge\neg r))\to\neg p$　（蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow((\neg p\vee(q\vee r))\wedge\neg(q\vee r))\to\neg p$　（De Morgan）

$\Leftrightarrow((\neg p\wedge\neg(q\vee r)\vee 1)\to\neg p$　（分配律、排中律）

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\to\neg p$　（同一律）

$\Leftrightarrow\neg(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee\neg p$　（蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow p\vee q\vee r\vee\neg p$　（De Morgan）

$\Leftrightarrow 1\vee q\vee r$　（交换律、排中律）

$\Leftrightarrow 1$　（零律）

因为推理的形式结构是重言式，所以推理正确。

（3）主析取范式法（需得出此式含 $2^3=8$ 个极小项，过程略）

利用真值表法、等值演算法以及分析法等容易证明下述推理定律的正确性。

推理定律（重言蕴涵式）：

1．$A\Rightarrow(A\vee B)$　附加
2．$(A\wedge B)\Rightarrow A$　化简
3．$((A\to B)\wedge A)\Rightarrow B$　假言推理
4．$((A\to B)\wedge\neg B)\Rightarrow\neg A$　拒取式
5．$((A\vee B)\wedge\neg B)\Rightarrow A$　析取三段论
6．$((A\to B)\wedge(B\to C))\Rightarrow(A\to C)$　假言三段论
7．$((A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C))\Rightarrow(A\leftrightarrow C)$　等价三段论
8．$((A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(A\vee C))\Rightarrow(B\vee D)$　构造性二难

【例 1.6.2】证明拒取式 $((A\to B)\wedge\neg B)\Rightarrow\neg A$ 的正确性。

证明　$((A\to B)\wedge\neg B)\to\neg A$

$\Leftrightarrow\neg((\neg A\vee B)\wedge\neg B)\vee\neg A$

$\Leftrightarrow\neg(\neg A\wedge\neg B)\vee\neg A$

$\Leftrightarrow A\vee B\vee\neg A$

$\Leftrightarrow 1$

【例 1.6.3】分析证明析取三段论 $((A\vee B)\wedge\neg B)\Rightarrow A$ 的正确性。

分析　由于蕴涵式当且仅当前件为真，后件为假的情况下为假，因此我们只需考虑假设前件为真时，能否推出后件为真即可。

证明　假设前件 $(A\vee B)\wedge\neg B$ 为真，则 $A\vee B$ 为真且 $\neg B$ 为真，则必有 B 为假，而 $A\vee B$ 为真，故：A 为真。

其它定律请读者自己考虑。

以上的证明方法，当形式结构比较复杂，特别是所含命题变元较多、构成前提的公式较多时，一般是很不方便的。下面介绍构造证明法，这种方法必须在给定的规则下进行，其中有些规则建立在推理定律（重言蕴涵式）的基础之上。

构造证明法

构造证明实质上就是一串公式的序列，其中的每个公式都是按照事先规定的规则得到的，且需将所用的规则在公式后写明，该序列的最后一个公式正是所要证明的结论。

注意　a）构造证明法作为推理系统有其固有的书写格式，必须严格遵守。

b）不同的推理系统所给出的推理规则集合不尽相同。

本推理系统中所依据的推理规则如下

推理规则

前提引入规则　在证明的任何步骤上，都可以引入前提。

结论引入规则　在证明的任何步骤上，所得到的结论均可作后续证明的前提加以引用。

置换规则　在证明的任何步骤上，命题公式中的任何子公式都可以用与之等值的公式置换。（等值式见本章第 1.3 节）

另外，由前面的 8 个推理定律可得下面 8 个推理规则：（这里 A_1，A_2，… $A_n \vDash B$ 表示 B 是 A_1，A_2，… A_n 的逻辑结论）

附加规则　$A \vDash (A \vee B)$

化简规则　$(A \wedge B) \vDash A$

假言推理规则　$(A \rightarrow B), A \vDash B$

拒取式规则　$(A \rightarrow B), \neg B \vDash \neg A$

假言三段论规则　$(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vDash (A \rightarrow C)$

析取三段论规则　$(A \vee B), \neg B \vDash A$

构造性二难规则　$(A \rightarrow B), (C \rightarrow D), (A \vee C) \vDash (B \vee D)$

合取引入规则　$A, B \vDash (A \wedge B)$

【例 1.6.4】　构造下列推理的证明

前提：$p \vee q$，$p \rightarrow \neg r$，$s \rightarrow t$，$\neg s \rightarrow r$，$\neg t$

结论：q

解

（1）	$s \rightarrow t$	前提引入
（2）	$\neg t$	前提引入
（3）	$\neg s$	（1）（2）拒取式
（4）	$\neg s \rightarrow r$	前提引入
（5）	r	（3）（4）假言推理
（6）	$\neg\neg r$	（5）置换
（7）	$p \rightarrow \neg r$	前提引入
（8）	$\neg p$	（6）（7）拒取式
（9）	$p \vee q$	前提引入
（10）	$q \vee p$	（9）置换
（11）	q	（10）（8）析取三段论

因此，推理正确　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　证毕

在以上的证明中，左边是公式的序号，中间是公式，右边是得到该公式的依据，如“（10）（8）析取三段论”表示：以公式（10）（即 $q \vee p$）和公式（8）（即 $\neg p$）作为前提，应用析取三段论规则得到公式（11）（即 q）。

【例 1.6.5】　用构造证明的方法证明下列推理的正确性。

如果小张守一垒且小李向乙队投球，则甲队取胜。如果甲队取胜，则甲队成为联赛第一名。小张守第一垒。甲队没有成为联赛第一名。因此，小李没有向乙队投球。

分析　本题属于自然语言的文字推理，解题需分三个步骤：第一步，找出题中的原子命题并将其符号化；第二步，写出构成推理的前提和结论的命题公式；第三步，构造推理的证明。

解　设 p：小张守一垒，q：小李向乙队投球，r：甲队取胜，s：甲队成为联赛第一名。

前提：$(p \wedge q) \rightarrow r$，$r \rightarrow s$，p，$\neg s$

结论：$\neg q$

（1）	$r \rightarrow s$	前提引入
（2）	$\neg s$	前提引入
（3）	$\neg r$	（1）（2）拒取式
（4）	$(p \wedge q) \rightarrow r$	前提引入
（5）	$\neg (p \wedge q)$	（3）（4）拒取式
（6）	$\neg p \vee \neg q$	（5）置换
（7）	p	前提引入
（8）	$\neg q$	（6）（7）析取三段论

所以推理正确。

【例 1.6.6】 构造证明，找出下列推理的有效结论。

如果我考试通过了，那么我很快乐。如果我快乐，那么阳光灿烂。现在是晚上十一点，天很暖。

解 设：p：我考试通过了，q：我很快乐，r：阳光灿烂，s：天很暖。

前提：$p \to q$，$q \to r$，$\neg r \wedge s$

（1）	$p \to q$	前提引入
（2）	$q \to r$	前提引入
（3）	$p \to r$	（1）（2）假言三段论
（4）	$\neg r \wedge s$	前提引入
（5）	$\neg r$	（4）化简
（6）	$\neg p$	（5）（3）拒取式

∴ 有效结论是：我考试没通过。

附加前提证明法（CP 规则）

若 A_1，A_2，$\ldots A_n$，$A \vDash B$，则 A_1，A_2，$\ldots A_n \vDash A \to B$

证明 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to (A \to B)$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \vee (\neg A \vee B)$

$\Leftrightarrow \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee \neg A \vee B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A) \vee B$

$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A) \to B$ 证毕

附加前提证明法的意义在于：当推理的结论是蕴涵式时，可以将其前件作为附加前提引用，只要能推导出其后件，则原推理成立。

【例 1.6.7】 如果小张去看电影，则当小王去看电影时，小李也去。小赵不去看电影或小张去看电影。小王去看电影。所以，当小赵去看电影时，小李也去。

解 设：p：小张去看电影，q：小王去看电影，r：小李去看电影，s：小赵去看电影。

前提：$p \to (q \to r)$，$\neg s \vee p$，q

结论：$s \to r$

（1）	$\neg s \vee p$	前提引入
（2）	s	附加前提引入
（3）	$p \vee \neg s$	（1）置换
（4）	$\neg\neg s$	（2）置换
（5）	p	（3）（4）析取三段论
（6）	$p \to (q \to r)$	前提引入
（7）	$q \to r$	（5）（6）假言推理
（8）	q	前提引入
（9）	r	（7）（8）假言推理
（10）	$s \to r$	CP

∴ 推理正确。

定义 1.6.1 如果 A_1，A_2，$\ldots A_n$ 均为命题公式，$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Leftrightarrow 0$，则称 A_1，A_2，$\ldots A_n$ 不相容，否则称相容。

归缪证明法

若 A_1，A_2，$\ldots$，A_n，$\neg B$ 不相容，则 A_1，A_2，$\ldots A_n \vDash B$

证明 因为：

$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \vee B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)$

所以 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B \Leftrightarrow 1$ 当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B \Leftrightarrow 0$

即：A_1，A_2，$\ldots$，A_n，$\neg B$ 不相容，则 A_1，A_2，$\ldots A_n \vDash B$。 证毕

归缪法即：将结论的否定式作为附加前提引入，公式序列的最后得一矛盾式，则原推理成立。

【例 1.6.8】 证明：p→（q∨r） ⊨ （p→q）∨（p→r）

证明（1） ¬（（p→q）∨（p→r）） 否定结论引入
（2） ¬（p→q）∧¬（p→r） （1）置换
（3） ¬（p→q） （2）化简
（4） p∧¬q （3）置换
（5） ¬（p→r） （2）化简
（6） p∧¬r （5）置换
（7） p （6）化简
（8） p→（q∨r） 前提引入
（9） q∨r （7）（8）假言推理
（10）¬r （6）化简
（11）q （9）（10）析取三段论
（12）¬q （4）化简
（13）q∧¬q （11）（12）合取引入

所以推理正确。

【例 1.6.9】 证明：p↔q，q→r，¬r∨s，¬p→s，¬s 不相容。

证（1） ¬p→s 前提引入
（2） ¬s 前提引入
（3） p （1）（2）拒取式
（4） p↔q 前提引入
（5） （p→q）∧（q→p） （4）置换
（6） p→q （5）化简
（7） q （3）（6）假言推理
（8） q→r 前提引入
（9） r （7）（8）假言推理
（10） ¬r∨s 前提引入
（11） ¬r （9）（10）析取三段论
（12） ¬r ∧r （9）（11）合取式引入

故：诸命题不相容。

*1.7 命题演算的自然推理形式系统 N

形式系统的基本概念

通过前面的讨论，我们看到，永真式是命题逻辑推理中一个非常基本和非常重要的概念，这些为数无穷的永真式，它们都是逻辑推理规律的反映，弄清这些永真式，对于掌握命题逻辑有极为重要的意义。为了系统的研究它们，就需要把所有的永真式包括在一个系统内，作为一个整体来研究，这样的系统应当是一个形式系统，也只有形式系统，才能进行充分的研究，从而掌握全部规律。

在形式系统中，原始概念和用于推演的逻辑规则没有任何直觉意义，甚至没有任何预先设定的涵义，它们无非是一些约定，约定怎样用符号（符号语言）来表达原始概念和用于推演的逻辑规则。这一过程一旦结束，这个形式系统便和一切实际意义，甚至逻辑都毫不相干，留下来的知识符号串与符号串之间的关系，根据这种关系，可以进行符号串之间的变换。在形式系统中，决定一切的是符号串与符号串之间的关系、合法符号串的识别，系统内的推演都可以根据合法符号串的形成规则和推理规则——符号串之间的关系机械的完成，不需要比认读和改写符号串更多的知识，甚至不需要逻辑。很清楚，只有这样的形式系统，才是本质上只能做符号变换的计算机可以接受的。

当然，形式系统的提出往往是有客观背景的，这是因为现实世界的某些对象及其性质需要精确的描述。但是，当形式系统一旦建成，它便应当是超脱客观背景的，它描述的对象可以不限于原来考虑的那些对象，而是与它们有着共同结构相当广泛的一类对象。

形式系统一般由下面几部分组成：

（1）字母表。字母表由不加定义而采用的符号组成，字母表提供形式系统可以使用的符号。

（2）字母表上符号串集的一个子集 Form。Form 中的元素称为公式，Form 提供形式系统可以使用的符号串。

（3）Form 的一个子集是 Axiom。Axiom 中的元素称为公理，Axiom 提供形式系统一开始便要接受而不加证明的定理。

(4) 推理规则集 Rule。Rule 中的元素称为推理规则，Rule 规定了公式间的转换关系。

对于一个形式系统，Axiom 和 Rule 均有可能是空集。如当 Axiom 和 Rule 均为空集时，称这样的形式系统仅仅是一个语言生成系统。在数理逻辑中，如果 Axiom 不是空集时，称这样的系统为公理系统；**Axiom 如果是空集时，称这样的推理系统为自然推理系统。**

在形式系统中进行推理时，涉及的仅仅是公式的语法，并不涉及公式本身的意义是什么，推理过程仅被看作为公式按照推理规则进行变形的过程。但是，我们可以对公式进行解释，使公式变成具体涵义的语句，从而对某一特定的客体范畴，特定的性质进行描述，用来讨论一个具体的实际系统，这时，有两个具体的问题必须解决：

a. 形式系统中正确推理出来的公式——定理在所讨论的具体实际系统中是否永真；

b. 在所讨论的具体实际系统中永真的语句是否均为形式系统内的定理。

这是系统的可靠性和完备性问题。

命题演算的自然推理形式系统 N

(1)字母表

i）命题符：p，q，r，p_1，q_1，r_1，…，p_i，q_i，r_i，…；

ii）联结词符：¬，∧，∨，→，↔；

iii）括号：(，)。

其中的命题符构成的集合为可数集。

(2) 公式（N 的 Form 简记为 F_N）

定义 1.7.1　字母表上的一个符号串是 F_N 中的元素，当且仅当这个符号串能由①～③推导出：

①单个的命题符是 F_N 中的元素。

②如果 $A \in F_N$，则（¬A）$\in F_N$。

③如果 A，$B \in F_N$，则（A∧B)，(A∨B)，(A→B)，(A↔B）$\in F_N$。

在上面的定义中，我们使用了 A、B 来表示任意的公式，而不是某个具体的公式，因而这样的符号是元语言符号。以下我们用大写英文字母：

$$A，B，C，A_1，B_1，C_1，…，A_i，B_i，C_i，…$$

来表示任意公式。

(3)推理规则

N 系统中有 11 条推理规则，下面以模式的形式给出：

- 包含律（∈）
  如果 $A \in \Gamma$，则 $\Gamma \vdash A$。
- 增加前提律（+）
  如果 $\Gamma \vdash A$，则 $\Gamma，\Gamma' \vdash A$。（$\Gamma' \subseteq F_N$）
- ¬消去律（¬－）
  如果 $\Gamma，\neg A \vdash B$，$\Gamma，\neg A \vdash \neg B$ 则 $\Gamma \vdash A$。
- →消去律（→－）
  如果 $\Gamma \vdash A \to B$，$\Gamma \vdash A$，则 $\Gamma \vdash B$。
- →引入律（→+）
  如果 $\Gamma，A \vdash B$，则 $\Gamma \vdash A \to B$。
- ∧消去律（∧－）
  如果 $\Gamma \vdash A \wedge B$，则 $\Gamma \vdash A$，$\Gamma \vdash B$。
- ∧引入律（∧+）
  如果 $\Gamma \vdash A$，$\Gamma \vdash B$，则 $\Gamma \vdash A \wedge B$。
- ∨消去律（∨－）

如果Γ，A├C，Γ，B├C，则Γ，A∨B├C。

✧ ∨引入律（∨+）

如果Γ├A，则Γ├A∨B，Γ├B∨A。

✧ ↔消去律（↔−）

如果Γ├A↔B，则Γ├A→B，Γ├B→A。

✧ ↔引入律（↔+）

如果Γ├A→B，Γ├B→A，则Γ├A↔B 。

关于 N 系统推理规则的几点说明：

① 推理规则中使用了元语言符号 A，B，C，这些符号不是 N 系统的字母表上的符号，而是用来表示任意公式的。

② 我们用Γ表示任意公式的集合，即：

$\Gamma=\{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$

有时为了方便，Γ也可写成序列：

$A_1, A_2, A_3, \cdots$

但写成序列时，其中元素的次序是没有关系的，这是因为Γ是集合。

③ 我们用符号“├”表示公式间的关系，Γ├A 表示公式 A 是由公式集Γ形式可证明的（形式可证明的定义下面给出）。├也不是 N 系统字母表上的符号，是一个元语言符号。

④ 为了简便起见，我们可以省略一些括号，约定如前。

⑤ 前面我们已经介绍过，形式系统中的推理规则只是规定了公式间的转换关系，而没有任何的实际涵义。但是，形式系统中推理规则的提出往往是有客观背景的，N 系统中推理规则的客观背景就是我们前面介绍的命题逻辑的推理，对照一下，就会发现 N 系统中的推理规则的直观涵义是很明显的。如（¬ −）是对反证法的语法抽象；（→+）是对附加前提法的语法抽象；（↔+）和（↔−）是对联结词↔的语法抽象，这里，语法抽象的意思是 N 系统中各个推理规则仅仅是描述了公式间的语法关系，不涉及公式间的任何其它关系；而在前面介绍的推理方法和推理规则是描述公式间的语义关系——前提中公式的值和结论中公式的值的蕴含关系。

N 系统中的证明

定义 1.7.2 A 是在 N 系统中由Γ形式可证明的，记作：Γ├A，当且仅当Γ├A 能由有限次使用 N 系统中的推理规则生成。

【例 1.7.1】 证明：A→B，B→C├A→C

证明

（1）A→B├A→B	（∈）
（2）A→B，B→C，A├A→B	（+），（1）
（3）A├A	（∈）
（4）A→B，B→C，A├A	（+），（3）
（5）A→B，B→C，A├B	（→ −），（2），（4）
（6）B→C├B→C	（∈）
（7）A→B，B→C，A├B→C	（+），（6）
（8）A→B，B→C，A├C	（→ −），（5），（7）
（9）A→B，B→C├A→C	（→+），（8）

证毕

【例 1.7.2】 证明：¬¬A├A

此模式称为双¬消去律（简称¬¬ −）

证明

（1）¬¬A ，¬A├¬¬A	（∈）
（2）¬¬A ，¬A├¬A	（∈）
（3）¬¬A├A	（¬ −），（1），（2）

证毕

【例 1.7.3】 证明：如果 Γ，A├¬B，Γ，A├B，则Γ├¬A。

此模式称为¬引入律（简称¬+）。

证明

（1）Γ，A├¬B	（前提）
（2）Γ，A├B	（前提）
（3）Γ├A→¬B	（→+），（1）
（4）Γ，¬¬A├A→¬B	（+），（3）
（5）Γ├A→B	（→+），（2）
（6）Γ，¬¬A├A→B	（+），（5）
（7）¬¬A├A	（¬¬－）
（8）Γ，¬¬A├A	（+），（7）
（9）Γ，¬¬A├¬B	（→－），（4），（8）
（10）Γ，¬¬A├B	（→－），（6），（8）
（11）Γ├¬A	（¬－），（9），（10）

证毕

在 N 中证明推理模式，为了避免冗长，可以使用已经证明了的推理模式。这是因为使用已经证明的推理模式，总可以归结为使用推理规则。

【例 1.7.4】 证明：Γ├B，B├A，则Γ├A

此模式称为传递律（简称 Tr）

证明

（1）Γ├B	（前提）
（2）B├A	（前提）
（3）Γ，B├A	（+），（2）
（4）Γ├B→A	（→+），（3）
（5）Γ├A	（→－）（1），（4）

证毕

N 中推理模式的一些性质

(1) A 和 B 是形式等值的（简称等值的），记作：A├┤B，当且仅当 A├B，B┤A。
(2) 设 A，B，C 是公式，B 是 A 的子串，将 A 中的 B 用 C 置换（不一定全部置换）后得到的公式 A′，如果 B├┤C，则 A├┤A′。
(3) 设 A 和 A^*互为对偶式，则有 A^*├┤¬A。
(4) 设 A，B 为有对偶的公式，其对偶式分别为 A^*，B^*，如果 A├┤B，则 A^*├┤B^*。

【例 1.7.5】 证明：A→B├┤¬A∨B

证明 先证 A→B├¬A∨B

（1）¬A├¬A	（∈）
（2）¬A├¬A∨B	（∨+），（1）
（3）A→B，¬（¬A∨B），¬A├¬A∨B	（+），（2）
（4）A→B，¬（¬A∨B），¬A├¬（¬A∨B）	（∈）
（5）A→B，¬（¬A∨B）├A	（¬－），（4）
（6）A→B，¬（¬A∨B）├A→B	（∈）
（7）A→B，¬（¬A∨B）├B	（→－），（6）
（8）A→B，¬（¬A∨B）├¬A∨B	（∨+），（7）
（9）A→B，¬（¬A∨B）├¬（¬A∨B）	（∈）
（10）A→B├¬A∨B	（¬－），（8），（9）

再证 ¬A∨B├A→B

（1）A，¬B，¬A├¬A	（∈）
（2）A，¬B，¬A├A	（∈）
（3）A，¬A├B	（¬－），（1），（2）
（4）¬A├A→B	（→+），（3）
（5）B，A├B	（∈）
（6）B├A→B	（→+），（5）

（7）$\neg A \vee B \vdash A \rightarrow B$　　　　（$\vee-$），（4），（6）

故　$A \rightarrow B \dashv\vdash \neg A \vee B$

证毕

几个定理

(1) **可靠性定理**

设$\Gamma \subseteq F_N$，$A \in F_N$，如果 $\Gamma \vdash A$，则 $\Gamma \Rightarrow A$。

(2) **完备性定理**

设$\Gamma \subseteq F_N$，$A \in F_N$，如果$\Gamma \Rightarrow A$，则$\Gamma \vdash A$。

证明略。

1.8　例题选解

【例 1.8.1】将下列命题符号化。

（1）晚上做完了作业，如果有时间，他就会看电视或去公园散步。

（2）如果天不下雨，我们去打篮球，否则在教室自习。

（3）辱骂和恐吓绝不是战斗。

（4）鱼和熊掌不可兼得。

分析　将命题符号化，就是要把这个命题用合乎规定的命题表达式表示出来。具体操作时，首先列出原子命题，然后根据给定命题的具体含义，将原子命题用适当的联结词连接起来。另外原子命题是简单句，应主语、谓语齐全。例如（1）中应将命题“他晚上做完了作业”设为原子命题 p，“他有时间”设为 q，而不是设 p 为“晚上做完了作业”，设 q 为“有时间”。此外，选用联结词时要注意原命题的实际含义。例如（2），是对未来将要做的事情根据条件做选择：条件成立时做一种选择，条件不成立时做另一种选择，两个同时为真时原命题为真，此题实际上是用一元和二元联结词来表达三元联结词“如果…则…否则…”。(3) 中字面上虽然用的是“和”，但它表示的实际含义是：辱骂不是战斗，恐吓不是战斗，辱骂和恐吓加在一起也不是战斗。(4) 的意思是说“得到鱼”和“得到熊掌”两件事情不可能同时成立，必须选择放弃一样，两者兼顾，有可能“鸡飞蛋打”两者均得不到。

解　（1）设　p：他晚上做完了作业。　q：他有时间。　r：他看电视。　s：他去公园散步。则原命题符号化为：

$$(p \wedge q) \rightarrow (r \,\overline{\vee}\, s)$$

（2）设　p：今天天下雨。　q：我们去打篮球。　r：我们在教室自习。则原命题符号化为：

$$(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)。$$

（3）设　p：辱骂不是战斗。　q：恐吓不是战斗。则原命题符号化为：

$$p \vee q$$

（4）设　p：鱼可得。　q：熊掌可得　。则原命题符号化为：

$$\neg (p \wedge q)$$

【例 1.8.2】　某研究所有赵、钱、孙、李、周五位高级工程师。现需派一些人出国考察，由各方面的限制，此次选派必须满足下列条件：

（1）　若赵去，则钱也去。

（2）　李、周两人中必有人去。

（3）　钱、孙两人中去且仅去一人。

（4）　孙、李两人同去或都不去。

（5）　若周去，则赵、钱也同去。

试分析领导的选派方案。

分析　五个人每个人都可以去，这就得到五个原子命题。满足条件，即要使由所给条件确定的命题公式同时为真，方法是取五个命题公式的合取式 F，再化成主析取范式，这样每个极小项就是一个选派方案，符合题意的方案即为所求。

解 设p：赵去，q：钱去，r：孙去，s：李去，t：周去，选派方案为F。则

F$\Leftrightarrow$（$p\rightarrow q$）$\wedge$（$s\vee t$）$\wedge$（（$q\wedge\neg r$）$\vee$（$\neg q\wedge r$））$\wedge$（（$r\wedge s$）$\vee$（$\neg r\wedge\neg s$））$\wedge$（$t\rightarrow$（$p\wedge q$））

$\Leftrightarrow$（$\neg p\vee q$）$\wedge$（$s\vee t$）$\wedge$（（$q\wedge\neg r$）$\vee$（$\neg q\wedge r$））$\wedge$（（$r\wedge s$）$\vee$（$\neg r\wedge\neg s$））$\wedge$（$\neg t\vee$（$p\wedge q$））

$\Leftrightarrow$（（$\neg p\wedge s$）$\vee$（$\neg p\wedge t$）$\vee$（$q\wedge s$）$\vee$（$q\wedge t$））$\wedge$（（$q\wedge\neg r\wedge\neg s$）$\vee$（$\neg q\wedge r\wedge s$））$\wedge$（$\neg t\vee$（$p\wedge q$））

$\Leftrightarrow$（（$\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s$）$\vee$（$\neg p\wedge t\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s$）$\vee$（$\neg p\wedge t\wedge\neg q\wedge r\wedge s$）$\vee$（$q\wedge t\wedge\neg r\wedge\neg s$））$\wedge$（$\neg t\vee$（$p\wedge q$））

$\Leftrightarrow$（$\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg t$）$\vee$（$q\wedge t\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge p$）

$\Leftrightarrow$（$\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg t$）$\vee$（$p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge t$）　　——主析取范式

所以方案有两个：（1）孙、李同去。（2）赵、钱、周三人同去。

【例 1.8.3】 有一种保密锁的控制电路,锁上共有三个键 A,B,C。当三键同时按下，或只有 A，B 两键按下，或只有 A，B 其中之一按下时，锁被打开。以 G 表示锁被打开，试写出 G 的逻辑表达式。

分析 因为当且仅当开锁条件成立时，G 为真。所以，命 A，B，C 分别表示命题“A，B，C 键被按下”，依据开锁条件，寻求出 G 的成真赋值，即可解决问题。

解 列出开锁条件的真值标如表 1.8.1 所示。

表 1.8.1

A	B	C	G
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

由真值表写出 G 的逻辑表达式为：

G $\Leftrightarrow$（$\neg A\wedge B\wedge\neg C$）$\vee$（$A\wedge\neg B\wedge\neg C$）$\vee$（$A\wedge B\wedge\neg C$）$\vee$（$A\wedge B\wedge C$）

$\Leftrightarrow$（$\neg A\wedge B\wedge\neg C$）$\vee$（$A\wedge\neg B\wedge\neg C$）$\vee$（（$A\wedge B$）$\wedge$（$\neg C\vee C$））

$\Leftrightarrow$（$\neg A\wedge B\wedge\neg C$）$\vee$（（（$A\wedge\neg B\wedge\neg C$）$\vee A$）$\wedge$（（$A\wedge\neg B\wedge\neg C$）$\vee B$））

$\Leftrightarrow$（$\neg A\wedge B\wedge\neg C$）$\vee$（$A\wedge$（$A\vee B$）$\wedge$（$\neg C\vee B$））

$\Leftrightarrow$（$\neg A\wedge B\wedge\neg C$）$\vee$（$A\wedge B$）$\vee$（$A\wedge\neg C$）

$\Leftrightarrow$（$A\wedge B$）$\vee$（（$\neg A\wedge B\wedge\neg C$）$\vee$（$A\wedge\neg C$）

$\Leftrightarrow$（$A\wedge B$）$\vee$（（（$\neg A\wedge B\wedge\neg C$）$\vee A$）$\wedge\neg C$）

$\Leftrightarrow$（$A\wedge B$）$\vee$（（$B\vee A$）$\wedge$（$\neg C\vee A$）$\wedge\neg C$））

$\Leftrightarrow$（$A\wedge B$）$\vee$（（$A\vee B$）$\wedge\neg C$）

$\Leftrightarrow$（$A\wedge B$）$\vee$（$A\wedge\neg C$）$\vee$（$B\wedge\neg C$）

【例 1.8.4】 验证下列推理的正确性。

如果 6 是偶数，则 7 被 2 除不尽。或 5 不是素数，或 7 被 2 除尽。5 是素数。因此，6 是奇数。

分析 显然推理的结论是个假命题，但不能由此就认定推理不正确。逻辑推理关心的是推理的过程是否合乎规则，并不要求前提均为真，当前题中有假命题时，正确的推理完全可推出错误的结论，因此逻辑推理的结论只是有效结论。

解 设：p：6 是偶数，q：7 被 2 除尽，r：5 是素数。

前提：$p\rightarrow\neg q$，$\neg r\vee q$，r

结论：$\neg p$

（1）	$\neg r\vee q$	前提引入
（2）	r	前提引入
（3）	q	（1）（2）析取三段论
（4）	$p\rightarrow\neg q$	前提引入

（5） $\neg p$ （4）（5）拒取式

所以推理正确。

【例 1.8.5】 公安人员审一件盗窃案。已知：

（1）甲或乙盗窃了电脑；

（2）若甲盗窃了电脑，则作案时间不能发生在午夜前；

（3）若乙证词正确，则在午夜时屋里灯光未灭；

（4）若乙证词不正确，则作案时间发生在午夜前；

（5）午夜时屋里灯光灭了。

问：谁是盗窃犯？

解 设 p：甲盗窃了电脑， q：乙盗窃了电脑， r：作案时间发生在午夜前，
s：乙证词正确， t：午夜时屋里灯光灭了。

前提：$p\vee q$， $p\rightarrow\neg r$，$s\rightarrow\neg t$，$\neg s\rightarrow r$，t

推理：（1） t 前提引入

（2） $s\rightarrow\neg t$ 前提引入

（3） $\neg s$ （1）（2）拒取式

（4） $\neg s\rightarrow r$ 前提引入

（5） r （3）（4）假言推理

（6） $p\rightarrow\neg r$ 前提引入

（7） $\neg p$ （5）（6）拒取式

（8）$p\vee q$ 前提引入

（9）q （7）（8）析取三段论

因此可得结论：乙是盗窃犯。

习题一

1．指出下述语句哪些是命题，哪些不是命题，若是命题，指出其真值。

（1）离散数学是计算机科学系的一门必修课。

（2）你上网了吗？

（3）不存在偶素数。

（4）明天我们去郊游。

（5）$x \leq 6$。

（6）我们要努力学习。

（7）如果太阳从西方升起，你就可以长生不老。

（8）如果太阳从东方升起，你就可以长生不老。

（9）这个理发师给一切不自己理发的人理发。

2．将下列命题符号化。

（1）逻辑不是枯燥无味的。

（2）小李边读书边听音乐。

（3）现在没下雨，可也没出太阳，是阴天。

（4）你不要边做作业边看电视。

（5）小王要么住在 203 室要么住在 205 室。

（6）小刘总是在图书馆自习，除非他病了或图书馆不开门。

（7）他只要用功，成绩就会好。

（8）他只有用功，成绩才会好。

（9）如果你来了，那么他唱不唱歌将看你是否伴奏而定。

（10）如果我考试通过了，我就继续求学，否则我去打工。

3．求下列公式在赋值 0011 下的真值。

（1）$p\vee(q\wedge r)\rightarrow s$

（2）$(p\leftrightarrow r)\wedge(\neg s\vee q)$

（3） $(p\wedge(q\vee r))\vee((p\vee q)\wedge r\wedge s)$

（4） $(q\vee\neg p)\rightarrow(\neg r\vee s)$

4．用真指表判断下列公式的类型。

（1）$(p\rightarrow(q\rightarrow p))$

（2）$\neg(p\rightarrow q)\wedge\neg q$

（3）$((p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r))\rightarrow(p\rightarrow(q\rightarrow r))$

（4）$\neg(p\vee(q\wedge r))\leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))$

5．证明下列等值式。

（1）$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)\Leftrightarrow(p\vee q)\rightarrow r$

（2）$p\rightarrow(q\rightarrow r)\Leftrightarrow q\rightarrow(p\rightarrow r)$

（3）$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$

（4）$\neg(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

（5）$p\rightarrow(q\vee r)\Leftrightarrow\neg r\rightarrow(p\rightarrow q)$

6．设 A、B、C 是任意命题公式

（1）若 $A\vee B\Leftrightarrow A\vee C$，则 $B\Leftrightarrow C$ 成立吗？

（2）若 $A\wedge B\Leftrightarrow A\wedge C$，则 $B\Leftrightarrow C$ 成立吗？

（3）若 $\neg A\Leftrightarrow\neg B$，则 $A\Leftrightarrow B$ 成立吗？

7．证明$\{\neg,\rightarrow\}$是联结词极小全功能集。

8．将下列公式化为仅出现联结词$\neg$，$\rightarrow$的公式。

（1）$p\vee(q\wedge\neg r)$

（2）$p\leftrightarrow(q\rightarrow(p\vee r))$

（3）$p\wedge q\wedge r$

9．将下列公式化为仅出现联结词$\neg$，$\wedge$的等价公式。

（1）$\neg r\vee q\vee(p\rightarrow q)$

（2）$p\rightarrow(q\rightarrow r)$

（1）$p\leftrightarrow q$

10．将下列公式化为仅出现联结词$\neg$，$\vee$的等价公式。

（1）$\neg p\wedge\neg q\wedge(\neg r\rightarrow p)$

（2）$\neg p\,\bar{\nabla}\,q$

（3）$(p\rightarrow(q\vee\neg r))\wedge\neg p\wedge q$

11．将下列公式化为仅出现联结词$\uparrow$的等价公式，再将其化成仅出现联结词$\downarrow$的等价公式。

（1）$p\rightarrow(\neg p\rightarrow q)$

（2） $(p\vee\neg q)\wedge r$

12．公式 $A=(\neg(p\downarrow q)\wedge r)\uparrow q$，写出 A 的对偶式 A^*，并将 A 和 A^*化成仅含联结词$\neg$，$\wedge$，$\vee$的等价公式。

13．A、B、C、D 四人参加拳击比赛，三个观众猜测比赛结果。

甲说：“C 第一，B 第二。”

乙说：“C 第二，D 第三。”

丙说：“A 第二，D 第四。”

比赛结果显示，他们每个人均猜对了一半，并且没有并列名次。问实际名次怎样排列？

14．求下列公式的主析取范式和主合取范式，并指出他们的成真赋值。

（1）$(\neg p\vee\neg q)\rightarrow(p\leftrightarrow\neg q)$

（2）$q\wedge(p\vee\neg q)$

（3）$p\vee(\neg p\rightarrow(q\vee(\neg q\rightarrow r)))$

（4） $(p\rightarrow(q\wedge r))\wedge(\neg p\rightarrow(\neg q\wedge\neg r))$

（5）$p\rightarrow(p\wedge(q\rightarrow r))$

（6）$\neg(p\rightarrow q)\vee p\vee r$

（7） $(p\rightarrow q)\rightarrow r$

（8）$(p\vee q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)$

15．P、Q、R、S 四个字母，从中取两个字母，但要同时满足三个条件：

a：如果取 P，则 R 和 S 要取一个；

b：Q，R 不能同时取；

c：取 R 则不能取 S；

问有几种取法？ 如何取？

16．甲、乙、丙、丁四个人有且仅有两个人参加比赛，下列四个条件均要满足：

（1）甲和乙只有一人参加；

（2）丙参加，则丁必参加；

（3）乙和丁至多有一人参加；

（4）丁不参加，甲也不会参加。

问那两个人参加了比赛？

17．一个排队线路，输入为 A，B，C，其输出分别为 F_A，F_B，F_C，在此线路中，在同一时间只能有一个信号通过，若同时有两个或两个以上信号申请输出时，则按 A，B，C 的顺序输出，写出 F_A，F_B，F_C 的表达式。

18．用两种方法（真值表法，主析取范式法）证明下面推理不正确。

如果 a，b 两数之积是负数，则 a，b 之中恰有一个是负数。a，b 两数之积不是负数。所以 a，b 中无负数。

19．用构造证明法证明下列推理的正确性。

（1）前提 $\neg(p\wedge\neg q)$，$\neg q\vee r$，$\neg r$

结论 $\neg p$

（2）前提 $p\wedge q$，$(p\leftrightarrow q)\rightarrow(r\vee s)$

结论 $r\vee s$

（3）前提 $q\rightarrow p$，$q\leftrightarrow s$，$s\leftrightarrow r$，$r\wedge t$

结论 $p\wedge q$

（4）前提 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$，$(r\wedge s)\rightarrow t$，$\neg u\rightarrow(s\wedge\neg t)$

结论 $p\rightarrow(q\rightarrow u)$

（5）前提 $(p\vee q)\rightarrow(u\wedge s)$，$(s\vee t)\rightarrow r$

结论 $p\rightarrow r$

（6）前提 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$，$s\rightarrow p$，$q$

结论 $s\rightarrow r$

（7）前提 $p\rightarrow q$

结论 $p\rightarrow(p\wedge q)$

（8）前提 $s\rightarrow\neg q$，$s\vee r$，$\neg r$，$\neg p\leftrightarrow q$

结论 p

20．用附加前提法推证 19 题中的（4），（5），（6），（7）。

21．用归缪法推证 19 题中的（1），（3），（7），（8）。

22．将下列论证用命题逻辑符号表示，然后求证逻辑推证是否成立。

（1）如果天热则蝉叫，如果蝉叫则小王不睡觉，小王游泳或睡觉，所以如果天热则小王游泳。

（2）或者逻辑难学，或者有少数学生不喜欢它，如果数学容易学，那逻辑并不难学。因此，如有许多学生喜欢逻辑，，那么数学并不难学。

（3）如果小张来，则小王和小李中恰有一人来。如果小王来，则小赵就不来。所以，如果小赵来了但小李没来，则小张也没来。

（4）有甲、乙、丙、丁参加乒乓球比赛。如果甲第三，则当乙第二时，丙第四。或者丁不是第一，或者甲第三。事实上，乙第二。因此，如果丁第一，那么丙第四。

23．判断下面推理的结论。

若公司拒绝增加工资，则罢工不会停止，除非罢工超过 3 个月且公司经理辞职。公司拒绝增加工资。罢工又刚刚开始。罢工是否停止？

24*. 在自然推理系统 N 中证明：

（1）$A\rightarrow B, \neg A\rightarrow B \vdash B$

（2）$A\leftrightarrow \neg A \vdash B$

（3）$\neg(A\wedge B) \dashv\vdash A\rightarrow \neg B$

25. 将下面表格填写完全。

p q r	对应赋值的极小项 m_i	对应赋值的极大项 M_i
0 0 0	$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	
0 0 1		
0 1 0		
0 1 1		
1 0 0		$\neg p\vee q\vee r$
1 0 1		
1 1 0		
1 1 1		