

第四篇 图论基础

图论是一门古老的数学分支，它起源于游戏难题的研究，如 1736 年欧拉所解决的哥尼斯堡七桥问题，1859 年爱尔兰数学家威廉·哈密顿爵士 (Sir Willian Hamilton) 提出的“周游世界”的游戏，以及迷宫问题，博奕问题，棋盘上马的行走路线问题等。同时，图论又是近年来发展迅速且应用广泛的一门新兴学科，受计算机科学蓬勃发展的刺激，其应用范围不断拓展，已渗透到诸如语言学、逻辑学、运筹学、物理学、化学、电讯工程、计算机科学以及数学的其它分支中，特别在计算机科学中，如形式语言、数据结构、分布式系统、操作系统等方面均扮演着重要的角色。

图论中所讨论的图，是由顶点和带方向或不带方向的弧线联结而成的线状图。我们在二元关系一章中已见过，当我们研究的对象能被抽象为离散的元素的集合和集合上的二元关系时，用关系图表示和处理是很方便的。由于大量问题的研究需要，图被作为一个抽象的数学系统加以研究，其研究方法本身已成为一种新的科学方法，用于具系统功能的模型的分析与设计中。

本篇着重介绍图论的基本概念，图的基本性质以及在实际问题中的一些应用。

第八章 图的基本概念

对于离散结构的刻画，图是一种有利的工具。在现实生活中，当我们研究事物之间的关系时，可以将它们抽象为点（事物）及其之间的连线（事物间的关系）构成的图。我们可以想象，在运筹规划、网络研究中，在计算机程序流程分析中，都会遇到由称为“顶点”和“边”的东西组成的图。这样的图与几何图形在本质上的区别是，我们只关心顶点之间是否有边，而不关心顶点的位置和边的长短及曲直。它是我们描述事物之间关系的一种手段。

8.1 图的定义及相关术语

图论作为数学的分支给出了图的严格的数学定义，为此我们首先给出无序积的概念：

A、B 是任意两个非空集合，A 与 B 的**无序积**记为 $A \& B$

$$A \& B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

性质 $(a, b) = (b, a)$

【例 8.1.1】 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, 求 $A \& B$ 、 $B \& A$ 和 $B \& B$

解 $A \& B = \{ (a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2) \} = B \& A$

$$B \& B = \{ (1,1), (1,2), (2,2) \}$$

定义 8.1.1 图是一个二元组 $G = \langle V, E \rangle$ ，其中 V ($V \neq \emptyset$) 是顶点集， E 是边集。当 E 是无序积 $V \& V$ 的多重子集时，其元素为无向边，图 G 为无向图。当 E 是有序积 $V \times V$ 的多重子集时，其元素为有向边，图 G 为有向图。

注 i) 所谓多重子集是指集合中元素不再要求互异性，可以重复出现。

ii) 通常也常用 $D = \langle V, E \rangle$ 来专门表示有向图。

【例 8.1.2】 图 8.1-1 中 (a)、(b) 是无向图，(c) 是有向图。

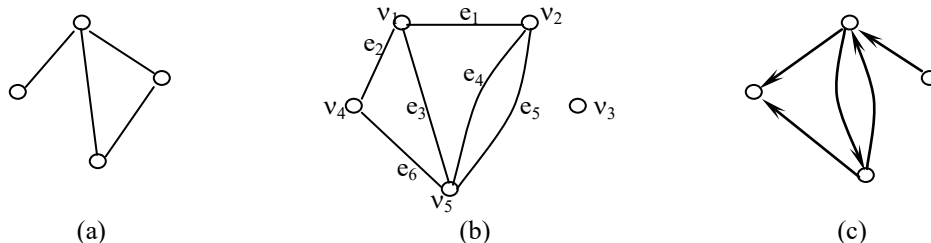


图 8.1-1 无向图和有向图

给图的顶点标以名称，如图 8.1-1 (b) 的 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 ，这样的图称为标定图。同时也可对边进行标定，这里 $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_4)$, $e_3 = (v_1, v_5)$, $e_4 = (v_2, v_5)$, $e_5 = (v_2, v_5)$, $e_6 = (v_4, v_5)$ 。当 $e_i = (v_j, v_k)$ (或者 $e_i = \langle v_j, v_k \rangle$) 时，称 v_j 和 v_k 是 e_i 的**端点**，并称 e_i 与 v_j 和 v_k 相**关联**，当 $e_i = \langle v_j, v_k \rangle$ 是有向边时，又称 v_j 是 e_i 的**起点**， v_k 是 e_i 的**终点**。如果图的顶点集 V 和边集 E 均是有穷集，则称图为**有限图**，本书所讨论的均是有限图。顶点集 V 的基数 n 称为图的**阶数**， n 个顶点构成的图称为 n 阶图，为了方便起见，具有 n 个顶点， m 条边的图也称 (n, m) 图。

下面介绍一些图的基本概念和常用术语

邻接点 同一条边的两个端点。

孤立顶点 没有边与之关联的顶点。

零图 顶点集 V 非空但边集 E 为空集的图。即 $(n, 0)$ 图。

平凡图 $|V| = n = 1$, $|E| = m = 0$ 的图。即 $(1, 0)$ 图。

邻接边 关联同一个顶点的两条边。

环 关联同一个顶点的一条边 ((v, v) 或 $\langle v, v \rangle$)。

平行边 关联一对顶点的 m 条边 ($m \geq 2$, 称重数, **注意**: 有向平行边必须方向相同)。

多重图 含有平行边(无环)的图。

简单图 不含平行边和环的图。

无向完全图 每对顶点间均有边相连的无向简单图。 n 阶无向完全图记作 K_n 。

竞赛图 在 K_n 的每条边上任取一个方向的有向图。

有向完全图 每对顶点间均有一对方向相反的边相连的有向简单图。 n 阶有向完全图也可记作 D_n 。

由完全图的定义易知, 无向完全图 K_n 的边数

$$|E(K_n)| = C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$$

有向完全图 D_n 的边数

$$|E(D_n)| = n(n-1)$$

顶点的度数 顶点所关联的边数。顶点 v 的度数记作: $d(v)$

在有向图中, 以顶点 v 为起点的边数称顶点 v 的**出度**, 记作: $d^+(v)$

以顶点 v 为终点的边数称顶点 v 的**入度**, 记作: $d^-(v)$

图 G 的最大度 $\Delta(G) = \max \{d(v) \mid v \in V(G)\}$

图 G 的最小度 $\delta(G) = \min \{d(v) \mid v \in V(G)\}$

有向图 G 的最大出度 $\Delta^+(G) = \max \{d^+(v) \mid v \in V(G)\}$

有向图 G 的最小出度 $\delta^+(G) = \min \{d^+(v) \mid v \in V(G)\}$

有向图 G 的最大入度 $\Delta^-(G) = \max \{d^-(v) \mid v \in V(G)\}$

有向图 G 的最小入度 $\delta^-(G) = \min \{d^-(v) \mid v \in V(G)\}$

k -正则图 每个顶点的度数均是 k 的无向简单图。

另外, 我们称度数为 1 的顶点为**悬挂点**, 称与悬挂点关联的边为**悬挂边**。

定理 8.1.1 (握手定理) 任意一个图中, 顶点的度数的总和等于边数的二倍。即

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

证明 因为在任一图中, 每一条边均关联着两个顶点(或二点重合), 所以在计算度数时要计算两次, 故顶点的度数的总和等于边数的二倍。证毕

推论 任一图中, 奇度数顶点必有偶数个。

证明 设 $V_1 = \{v \mid d(v) \text{ 为奇数}\}$, $V_2 = V - V_1$, 则 $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, 故

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

因为 $\sum_{v \in V_2} d(v)$ 是偶数, $\sum_{v \in V} d(v)$ 也是偶数, 所以 $\sum_{v \in V_1} d(v)$ 必是偶数。而 $d(v)$ 为奇数,

故 $|V_1|$ 是偶数。证毕

定理 8.1.2 若 $G = \langle V, E \rangle$ 是有向图, 则

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = m \quad d(v) = d^+(v) + d^-(v)$$

证明请读者自己完成。

假设 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是 n 阶图 G 的顶点集, 称 $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$ 为 G 的度数列。如例 8.1.2 中图 8.1-1 (a) 的度数列为 1, 2, 2, 3。例 8.1.2 中图 8.1-1 (c) 的度数列为 1, 2, 3, 4, 其中出度数列为 1, 0, 2, 2, 入度数列为 0, 2, 1, 2。

【例 8.1.3】 求解下列各题

(1) 无向完全图 K_n 有 36 条边, 则它的顶点数 n 为几?

(2) 图 G 的度数列为 2, 2, 3, 5, 6, 则顶点数 $n = ?$ 边数 $m = ?$

(3) 图 G 有 12 条边, 度数为 3 的顶点有 6 个, 余者度数均小于 3, 问 G 至少有几个顶点?

解 (1) 因为无向完全图 K_n 的边数 $m = \frac{1}{2}n(n-1) = 36$, 所以 $n = 9$ 。

(2) 由度数列中所含数字个数知 $n = 5$ 。由握手定理 $2m = \sum d(v) = 2+2+3+5+6 = 18$, 知 $m = 9$ 。

(3) 由握手定理 $\sum d(v) = 2m = 24$, 度数为 3 的顶点有 6 个占去 18 度, 还有 6 度由其余顶点占有, 而由题意, 其余顶点的度数可为 0, 1, 2, 当均为 2 时所用顶点数最少, 所以应有 3 个顶点占有此 6 度, 即 G 中至少有 9 个顶点。

【例 8.1.4】 证明在 n ($n \geq 2$) 个人的团体中, 总有两个人在此团体中恰好有相同个数的朋友。

分析 表面看来问题与图毫无关系, 但由题意和我们对图的了解, 图所表现的正是事物(人)与事物(人)之间的联系(这里是朋友关系), 所以可以在图中建立数学模型。

解 以顶点代表人, 二人如果是朋友, 则在代表他们的顶点间连上一条边, 这样可得无向简单图 G , 每个人的朋友数即图中代表他的顶点的度数, 于是问题转化为图中的命题: n 阶无向简单图 G 中必有两个顶点的度数相同。

用反证法, 设 G 中各顶点的度数均不相同, 则度数列为 0, 1, 2, \dots , $n-1$, 说明图中有孤立顶点, 这与有 $n-1$ 度顶点相矛盾(因为是简单图, 其中的 $n-1$ 度顶点必与其它 $n-1$ 个顶点均邻接), 所以必有两个顶点的度数相同。

子图

在深入研究图的性质及图的局部性质时, 子图的概念是非常重要的。所谓子图, 就是适当的去掉一些顶点或一些边后所形成的图, 子图的顶点集和边集是原图的顶点集和边集的子集。

定义 8.1.2 设 $G = \langle V, E \rangle$, $G' = \langle V', E' \rangle$ 均是图, (同为有向图或无向图)

(1) 若 $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, 则称 G' 是 G 的子图, 记作 $G' \subseteq G$ 。

(2) 若 $G' \subseteq G$, $V' \subset V$ 或 $E' \subset E$, 则称 G' 是 G 的真子图, 记作 $G' \subset G$ 。

(3) 若 $G' \subseteq G$, $V' = V$, 则称 G' 是 G 的生成子图。

(4) 设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ 是 G 的子图, 若 $V_1 \subseteq V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$, E_1 由端点均在 V_1 中的所有边组成, 则称 G_1 是由 V_1 导出的导出子图, 记作 $G[V_1]$ 。

(5) 设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ 是 G 的子图, 若 $E_1 \subseteq E$ 且 $E_1 \neq \emptyset$, V_1 由 E_1 中边所关联的所有顶点组成, 则称 G_1 是由 E_1 导出的导出子图, 记作 $G[E_1]$ 。

【例 8.1.5】 在图 8.1-2 中, G_1, G_2, G_3 均是 G 的真子图, 其中 G_1 是 G 的由 $E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 导出的导出子图 $G[E_1]$; G_2, G 均是 G 的生成子图; G_3 是 G 的由 $V_3 = \{a, d, e\}$ 导出的导出子图 $G[V_3]$, 同时也是由 $E_3 = \{e_4, e_5\}$ 导出的导出子图 $G[E_3]$ 。

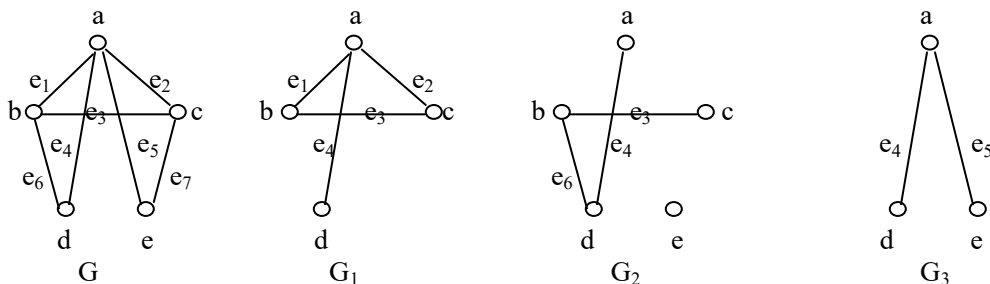


图 8.1-2 图与子图

补图

定义 8.1.3 G 为 n 阶简单图, 由 G 的所有顶点和能使 G 成为完全图的添加边所构成的图称为 G 的相对于完全图的补图, 简称 G 的补图, 记作 \overline{G} 。

【例 8.1.6】 图 8.1-3 中 \overline{G} 是 G 相对于 K_5 的补图。图 8.1-4 中 \overline{G} 是 G 相对于四阶有向完全图 D_4 的补图。

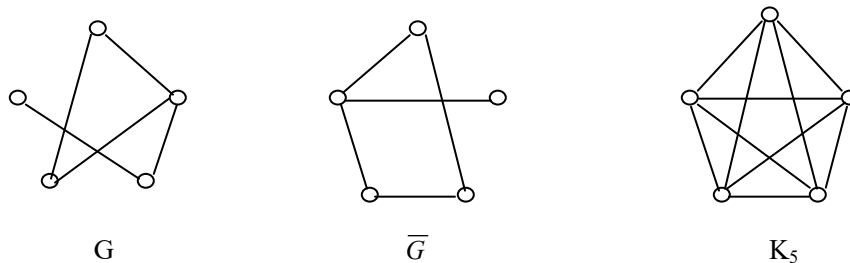


图 8.1-3 图与补图

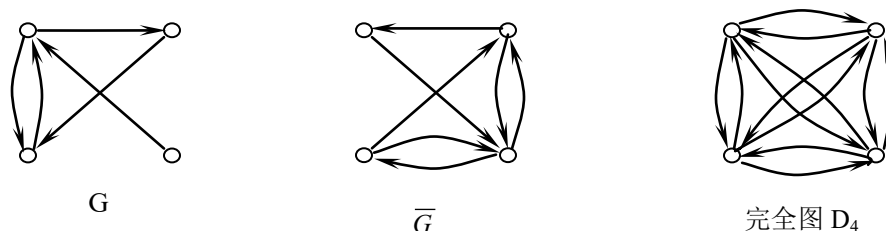


图 8.1-4 图与补图

对于补图, 显然有以下结论:

- (1) G 与 \overline{G} 互为补图。即: $\overline{\overline{G}} = G$
- (2) $E(G) \cup E(\overline{G}) = E(\text{完全图})$ 且 $E(G) \cap E(\overline{G}) = \emptyset$ 。
- (3) n 阶完全图与 n 阶零图互为补图。
- (4) G 与 \overline{G} 均是完全图的生成子图。

同构

在根据问题构造图的数学模型时, 由于画图时, 顶点的位置和边的几何形状是无关紧要的, 因此表面上完全不同的图形可能表示的是同一个图。为了判断不同的图形是否反映同一个图的性质, 我们给出图的同构的概念。

定义 8.1.4 设有两个图 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$, 如果存在着双射 $f: V_1 \rightarrow V_2$, 使得 $(v_i, v_j) \in E_1$ 当且仅当 $(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$ (或者 $\langle v_i, v_j \rangle \in E_1$ 当且仅当 $\langle f(v_i), f(v_j) \rangle \in E_2$) 且它们的重数相同, 则称图 G_1 与 G_2 同构, 记作 $G_1 \cong G_2$ 。

例如, 图 8.1-5 中 $G_1 \cong G_2$, 其中 $f: V_1 \rightarrow V_2$, $f(v_i) = u_i$ ($i=1, 2, \dots, 6$)。 $G_3 \cong G_4$, 其中 $f: V_1 \rightarrow V_2$, $f(v_1) = u_3$, $f(v_2) = u_1$, $f(v_3) = u_2$ 。

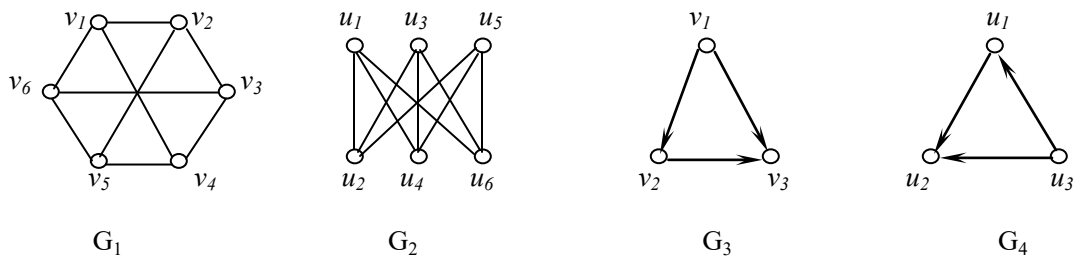


图 8.1-5 图的同构

容易看出，两个同构的图必定满足：顶点数相同、边数相同、度数列相同。但这是二图同构的必要条件而非充分条件，如图 8.1-6 中的 (a) 和 (b) 均为 6 阶 3—正则图，满足上述三个条件，但因为对于 (a) 中的任一顶点，与该点关联的三个顶点间彼此不邻接，而对于图 (b) 中的任一顶点，与该点关联的三个顶点中有两个是邻接点，所以它们不同构。同样可以看出 (c) 与 (d) 也是不同构的。

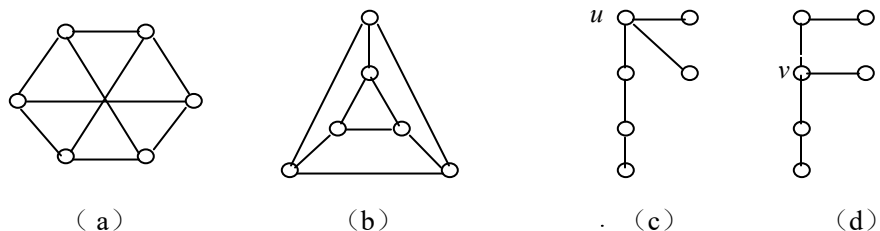


图 8.1-6 不同构的图

【例 8.1.7】 证明图 8.1-6 中图 (c) 与 (d) 不同构。

证明 反证法：假设二图同构，即存在着同构映射 f ，则 (c) 中惟一的 3 度顶点 u 必定对应着 (d) 中惟一的 3 度顶点 v ，亦即 $v = f(u)$ ，但是 u 邻接两个 1 度顶点和一个 2 度顶点，而 v 邻接一个 1 度顶点和两个 2 度顶点，与同构定义矛盾，故二图不同构。 证毕

设集合 $S = \{G \mid G \text{ 是图}\}$ ，在 S 上定义二元关系 $R: \forall G_1, G_2 \in S, G_1 R G_2$ 当且仅当 G_1 和 G_2 同构，称 R 为图的同构关系，也记作 \cong 。容易证明，图的同构关系是一种等价关系。按同构关系将图的集合划分成等价类，等价类的代表认为是一个非标定图，且可通过它所属的等价类中任一标定图来给出它的图形，但不必对顶点标以名称。

【例 8.1.8】 画出 K_4 的所有非同构的生成子图。

解 K_4 的所有非同构的生成子图如图 8.1-7

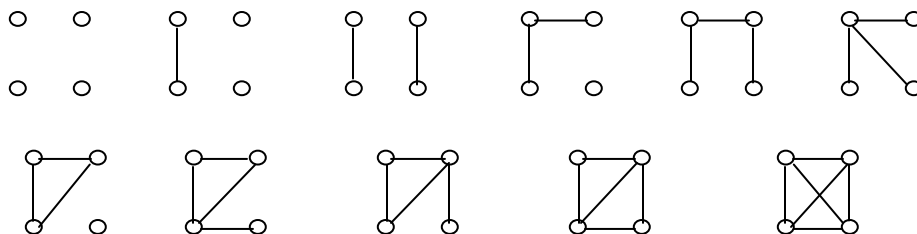


图 8.1-7 K_4 的生成子图

【例 8.1.9】 设 G_1, G_2, G_3, G_4 均是 4 阶 3 条边的无向简单图，则它们之间至少有几个是同构的？

解 由图 8.1-7 知 4 阶 3 条边非同构的无向简单图共有 3 个，因此 G_1, G_2, G_3, G_4 中至少有 2 个是同构的。

8.2 通路 回路 图的连通性

定义 8.2.1 给定图 $G = \langle V, E \rangle$ ，图中的一条通路是一个点、边交替的序列

$$v_{i1}e_{i1}v_{i2}e_{i2}\cdots v_{ip-1}e_{ip-1}v_{ip}$$

其中 $v_{ik} \in V$ ， $e_{ik} \in E$ （其中 $e_{ik} = (v_{ik}, v_{ik+1})$ 或者 $e_{ik} = \langle v_{ik}, v_{ik+1} \rangle$ ）， v_{i1} 、 v_{ip} 分别称为通路的起点和终点，当其重合时通路称为回路。

一条通路中所包含的边数称为此路的长度。

由定义可知，一条通路即是 G 的一个子图，且通路允许经过的顶点或边重复，因此根据不同要求通路可以作如下的划分：

简单通路（迹） 顶点可重复但边不可重复的通路。

初级通路（路径） 顶点不可重复且边也不可重复的通路。

简单回路（闭迹） 起、终点重合的简单通路。

初级回路（圈） 仅起、终点重合的初级通路。

注意 长度为 1 的圈只能由环生成，长度为 2 的圈只能由平行边生成，因此，对于简单图，圈的长度至少是 3。

一般称长度为奇数的圈为奇圈，称长度为偶数的圈为偶圈。显然，初级通路必是简单通路，但简单通路未必是初级通路，非简单通路（回路）称为复杂通路（回路）。在应用中，常常只用边的序列表示通路，对于简单图亦可用顶点序列表示通路，这样更方便。

定理 8.2.1 在一个 n 阶图中，若从顶点 u 到顶点 v ($u \neq v$) 存在通路，则必存在从 u 到 v 的初级通路且路长小于等于 $n-1$ 。

证明 设 $L = ue_1v_1e_2v_2\cdots e_pv$ 是图中从 u 到 v 的通路，若其中顶点没有重复，则 L 是一条初级通路。否则必有 t, s ($1 \leq t < s \leq p-1$)，使得 $v_t = v_s$ ，此时从 L 中去掉从 v_t 到 v_s 之间的一段路后，所得仍为从 u 到 v 的通路，重复上述动作直到顶点无重复为止，所得通路 L' 即为由 u 到 v 的初级通路。因为长度为 k 的初级通路上顶点数必为 $k+1$ 个，所以 n 阶图中的初级通路长度至多为 $n-1$ 。证毕

推论 n 阶图中，任何初级回路的长度不大于 n 。

在图 G 中，从顶点 u 到顶点 v 的通路一般不止一条，在所有这些通路中，长度最短的一条称为 u 到 v 的**短程线**，短程线的长度称为顶点 u 到顶点 v 的**距离**，记作 $d(u, v)$ （若有向图则记为 $d\langle u, v \rangle$ ）。

显然，短程线必定是一条初级通路。

【例 8.2.1】 一个人带着一只狼、一只羊和一捆草要渡河，由于船太小，人做摆渡者一次只能运送一个“乘客”，很显然，如果人不在，狼要吃羊，羊要吃草，问人怎样才能把它们平安地渡过河去？

解 这是通路问题的一个典型实例。用 f 表示人， w 表示狼， s 表示羊， h 表示草。集合 $\{f, w, s, h\}$ 中能平安在一起的子集有： $\{f, w, s, h\}$ ， $\{f, w, s\}$ ， $\{f, s, h\}$ ， $\{f, w, h\}$ ， $\{f, w\}$ ， $\{f, s\}$ ， $\{f, h\}$ ， $\{w, h\}$ ， $\{f\}$ ， $\{w\}$ ， $\{s\}$ ， $\{h\}$ 。据此建立数学模型：用顶点表示渡河过程中的状态，状态是二元组：第一元素是集合 $\{f, w, s, h\}$ 在渡河过程中留在原岸的子集，第二元素是在彼岸的子集，将一次渡河后代表状态变化的顶点间连边，得图 8.2-1 容易看出，一条路径就是一种渡河方案。

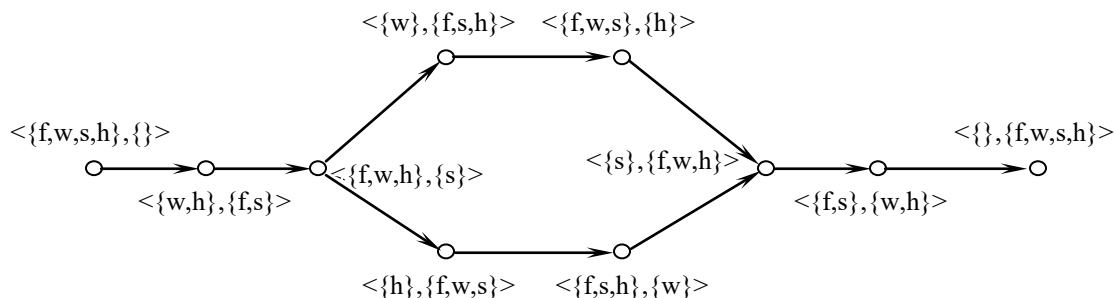


图 8.2-1 渡河方案

【例 8.2.2】 设 G 是无向连通简单图，已知 $\delta(G) \geq 2$ ，证明： G 中存在长度大于等于 3 的初级回路。

分析 如果我们能构造出一条这样的回路，则结论得到证明，这就是所谓构造性证明。构造时可以使用图论中常用的“极大路径法”：先在图 G 中选取一条路径 $L: v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ip}$ ，如果有 $v_k \in G$ ，但 $v_k \notin L$ ，而 v_k 与 v_{i1} 或 v_{ip} 邻接，则将 v_k 添加到 L 中，如此往复，直到 L 的两个端点不再与 G 中不属于 L 的顶点邻接，这时所得的路径 L 即为一条极大路径。

证明 设 G 中的一条极大路径是 $L: v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, \dots, v_{ip}$ 。所以 v_{i1} 不再与路外的顶点邻接（否则与 L 是极大路径矛盾），因为 $\delta(G) \geq 2$ ，所以 v_{i1} 必与路内的某些点邻接， G 是简单图，故 v_{i1} 只能再邻接于 v_{ik} ($k \geq 3$)，因此， G 中存在初级回路 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}, v_{i1}$ 长度大于等于 3。（见图 8.2-2）

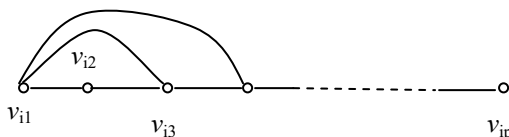


图 8.2-2 极大路径和初级路径

无向图的连通性

定义 8.2.2 在无向图 G 中，若顶点 u 与 v 之间存在通路，则称 u 与 v 是连通的，规定任何顶点自身是连通的。若 G 是平凡图或 G 中任二顶点均连通，则称 G 是连通图，否则称 G 是非连通图或分离图。

如果我们在 G 的顶点集 V 上定义一个二元关系 R ：

$$R = \{ \langle u, v \rangle \mid u, v \in V \text{ 且 } u \text{ 与 } v \text{ 是连通的} \}$$

容易证明， R 是自反的、对称的、传递的，即 R 是一个等价关系，于是 R 可将 V 划分成若干个非空子集： V_1, V_2, \dots, V_k ，它们的导出子图 $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$ 构成 G 的**连通分支**，其连通分支的个数记作 $P(G)$ 。显然， G 是连通图，当且仅当 $P(G) = 1$ 。

注 每个连通分支 G' 又称为 G 的一个“**极大连通子图**”： G' 是 G 的连通子图，并且对于 G 的任意连通子图 G'' ，都有 $G' \not\subset G''$ 。

例如，图 8.2-3 所示的图 G_1 是连通图， $P(G_1) = 1$ ，图 G_2 是一个非连通图， $P(G_2) = 3$ 。



图 8.2-3 无向图的连通性

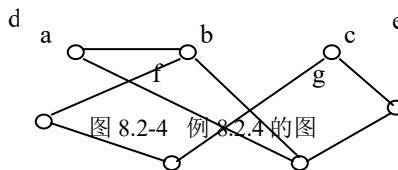
【例 8.2.3】 求证：若图中有且仅有两个奇度数顶点，则二顶点必连通。

证明 用反证法

设二顶点不连通，则它们必分属两个不同的连通分支，而对于每个连通分支，作为 G 的子图只有一个奇度数顶点，余者均为偶度数顶点，与握手定理推论矛盾，因此：若图中只有两个奇度数顶点，则二顶点必连通。 证毕

【例 8.2.4】 在一次国际会议中，由七人组成的小组 $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ 中， a 会英语、阿拉伯语； b 会英语、西班牙语； c 会汉语、俄语； d 会日语、西班牙语； e 会德语、汉语和法语； f 会日语、俄语； g 会英语、法语和德语。问：他们中间任何二人是否均可对话（必要时可通过别人翻译）？

解 用顶点代表人，如果二人会同一种语言，则在代表二人的顶点间连边，于是得到图 8.2-4。问题归结为：在这个图中，任何两个顶点间是否都存在着通路？由于图 8.2-4 是一个连通图，因此，必要时通过别人翻译，他们中间任何二人均可对话。



在连通图中，如果删去一些顶点或边，则可能会影响图的连通性。所谓从图中删去某个顶点 v ，就是将顶点 v 和与 v 关联的所有的边均删去，得 G 的一个子图，我们用 $G-v$ 记之，并用 $G-V'$ 表示从 G 中删去 V 的子集 V' 后所得的子图；用 $G-e$ 表示删去边 e 后所得的子图，用 $G-E'$ 表示从 G 中删去 E 的子集 E' 后所得的子图。

例如在例 8.2-4 中，任何一人请假，即删去任意一点 v ，图 $G-v$ 还连通，小组对话仍可继续进行，但如果 f 、 g 二人同时不在， $G-\{f, g\}$ 是分离图，则小组中的对话无法再继续进行。

定义 8.2.3 设无向图 $G=\langle V, E \rangle$ ，若存在顶点集 $V' \subset V$ ，使得 $P(G-V') > P(G)$ ，而对于任意的 $V'' \subset V$ ，均有 $P(G-V'') = P(G)$ （即扩大图的连通分支数， V' 具有极小性），则称 V' 是 G 的一个**点割集**。如果 G 的某个点割集中只有一个顶点，则称该点为**割点**。

定义 8.2.4 设无向图 $G=\langle V, E \rangle$ ，若存在边集 $E' \subset E$ ，使得 $P(G-E') > P(G)$ ，而对于任意的 $E'' \subset E$ ，均有 $P(G-E'') = P(G)$ （即扩大图的连通分支数， E' 具有极小性），则称 E' 是 G 的一个**边割集**。如果 G 的某个边割集中只有一条边，则称该边为**割边**或**桥**。

例如在图 8.2-4 中， $\{f, g\}$ ， $\{d, g\}$ ， $\{a, c, d\}$ ， $\{b, e\}$ 等等均是点割集； $\{(c, f), (e, g)\}$ ， $\{(d, f), (e, g)\}$ 等等均是边割集，并且在图 8.2-4 中，不存在割点和桥。

由定义容易得到下面结论：

- (1) n 阶零图既无点割集也无边割集。
- (2) 完全图 K_n 无点割集。
- (3) 若 G 是连通图，则 $P(G-V') \geq 2$ 。
- (4) 若 G 是连通图，则 $P(G-E') = 2$

一个连通图 G ，若存在点割集和边割集，一般并不唯一，且各个点（边）割集中所含的点（边）的个数也不尽相同。我们用含元素个数最少的点割集和边割集来刻画它的连通度。

定义 8.2.5 设 G 是一个无向连通图，称 $\kappa(G)$ 为 G 的点连通度，

$$\kappa(G) = \min\{|V'| \mid V' \text{ 是 } G \text{ 的点割集或 } V' \text{ 使 } G-V' \text{ 成平凡图}\}$$

称 $\lambda(G)$ 为 G 的边连通度,

$$\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E' \text{ 是 } G \text{ 的边割集}\}$$

规定: 若 G 是非连通图, $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。

由定义容易得到下面结论:

- (1) 若 G 是平凡图, 则 $V' = E' = \emptyset$, $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。
- (2) 对于完全图 K_n , $\kappa(K_n) = \lambda(K_n) = n-1$ 。
- (3) 若 G 中有割点, 则 $\kappa(G) = 1$ 。
- (4) 若 G 中有桥, 则 $\lambda(G) = \kappa(G) = 1$ 。

下面举一例说明讨论连通度的用处。

【例 8.2.5】 图 8.2-5 中的两个连通图都是 $n=8$, $m=16$, 其中, $\kappa(G_1)=4$, $\lambda(G_1)=4$, $\kappa(G_2)=1$, $\lambda(G_2)=3$ 。假设 n 个顶点代表 n 个站, m 条边表示铁路或者桥梁或者电话线等等, $m \geq n-1$ 。为了使 n 个站之间的连接不容易被破坏, 必须构造一个具有 n 个顶点 m 条边的连通图, 并使其具有最大的点连通度和边连通度。按图 8.2-5 中 G_1 的连接法, 如果 3 个站被破坏, 或者 3 条铁路被破坏, 余下的站仍能继续相互联系, 也就是仍具有连通性。但按图 8.2-5 中 G_2 的连接法, 如果 v 站被破坏, 余下的站就不能保持连通。

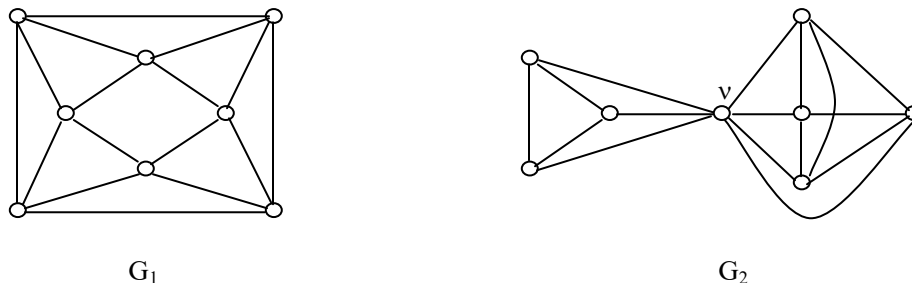


图 8.2-5 图的连通度

关于点连通度、边连通度与最小顶点度数之间的关系有如下一个不等式。

定理 8.2.1 对于任何一个图 G , $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

证明 若 G 是非连通图或是平凡图, 则必有 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0 \leq \delta(G)$ 。

若 G 是完全图 K_n , 则 $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G) = n-1$ 。

对于其他情况, 首先证明 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

因为图中存在顶点 v , $d(v) = \delta(G)$, 删去 v 的所有关联边, 得到的图必定不连通, 所以, 至多删去 $\delta(G)$ 条边即可破坏 G 的连通性, 故必有 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

下面再证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。

当在 G 中删去构成割集的 $\lambda(G)$ 条边时, 将产生 G 的两个子图 G_1 、 G_2 , 而这 $\lambda(G)$ 条边的两个端点显然分别在 G_1 和 G_2 中, 在 G_1 (或 G_2) 中这 $\lambda(G)$ 条边至多关联着 $\lambda(G)$ 个顶点, 删去这些顶点同样可使 G 不连通, 故必有 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。 证毕

例如, 图 8.2-6 中的 $\kappa(G) = 2$, $\lambda(G) = 3$, $\delta(G) = 4$ 。

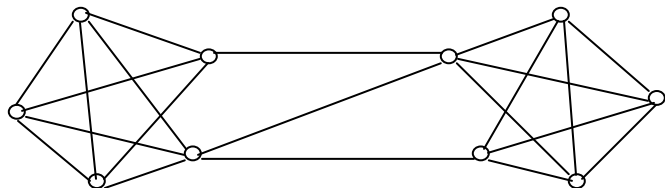


图 8.2-6 $\kappa(G)$ 、 $\lambda(G)$ 与 $\delta(G)$ 的关系

定义 8.2.6 若图 G 的 $\kappa(G) \geq k$, 则称 G 是 k -连通的。

例如图 8.2-6 的点连通度是 2, 所以它是 2-连通的, 也是 1-连通的, 但不是 3-连通的。非平凡的连通图均是 1-连通的。非连通图是 0-连通的。

定义 8.2.7 若图 G 的 $\lambda(G) \geq k$, 则称 G 是 k -边连通的。

例如图 8.2-6 的边连通度是 3, 所以它是 3-边连通的, 也是 2-边连通的和 1-边连通的, 但不是 4-边连通的。非连通图是 0-边连通的。由定理 8.1.1 易知: 若 G 是 k -连通图, 则 G 必是 k -边连通图。

有向图的连通性

定义 8.2.8 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一有向图, $\forall u, v \in V$, 若从 u 到 v 存在通路, 则称 u 可达 v , 规定 u 到自身总是可达的; 若 u 可达 v , 同时 v 可达 u , 则称 u 与 v 相互可达。

若 u 可达 v , 其长度最短的通路称 u 到 v 的**短程线**, 短程线的长度称 u 到 v 的**距离**, 记作 $d\langle u, v \rangle$ 。

有向图中顶点间的可达关系是自反的, 传递的, 但不一定是对称的, 所以不是等价关系。通常 $d\langle u, v \rangle \geq 0$ (其中 $d\langle u, u \rangle = 0$)

$$d\langle u, v \rangle + d\langle v, w \rangle \geq d\langle u, w \rangle$$

如果从 u 到 v 不可达, 记 $d\langle u, v \rangle = \infty$ 。

注意, 即使 u 与 v 是相互可达的, 也可能 $d\langle u, v \rangle \neq d\langle v, u \rangle$ 。

定义 8.2.9 在简单有向图 G 中, 若任二顶点间均相互可达, 则称 G 为**强连通图**; 若任二顶点间至少从一个顶点到另一个顶点是可达的, 则称 G 是**单向连通图**; 若在忽略 G 中各边的方向时 G 是无向连通图, 则称 G 是**弱连通图**。

例如在图 8.2-7 中, 图 (a) 是强连通图, 图 (b) 是单向连通图, 图 (c) 是弱连通图。

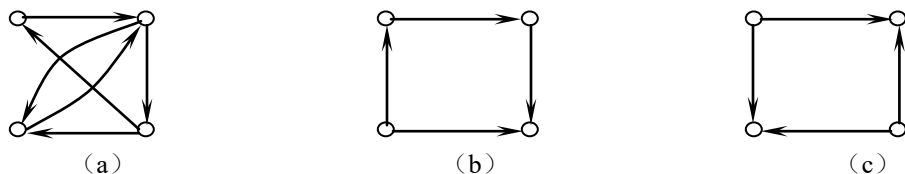


图 8.2-7 有向图的连通性

由定义可知, 强连通图必是单向连通图和弱连通图, 单向连通图必是弱连通图, 在分类时我们只考虑性质最强的情况。

定理 8.2.2 有向图 G 是强连通的, 当且仅当 G 中有一条包含每个顶点至少一次的回路。

证明 设 G 中有一回路, 它至少包含每个顶点一次, 则在此路上 G 的任意两个顶点都是相互可达的, G 是强连通图。反之, 若 G 是强连通图, 则任意两个顶点是相互可达的, 因此必

可作一条回路经过 G 中所有各个顶点。否则会出现一回路不包含某个顶点 v ，这样 v 就与回路上的顶点不是相互可达的，与假设 G 是强连通图矛盾。

定理 8.2.3 有向图 G 是单向连通的，当且仅当 G 中有一条包含每个顶点至少一次的通路。

证明略。

定义 8.2.10 在简单有向图 G 中，具有极大强连通性的子图，称为 G 的一个**强分图**；具有极大单向连通性的子图，称为 G 的一个**单向分图**；具有极大弱连通性的子图，称为 G 的一个**弱分图**。

强分图的定义中“极大”的含义是：对该子图再加入其他顶点，它便不再具有强连通性。对单向分图、弱分图也类似。

【例 8.2.6】 求图 8.2-8 中 G 的所有强分图、单向分图和弱分图。

解 $V_1=\{v_1, v_3, v_4\}$ 、 $V_2=\{v_2, v_6\}$ 、 $V_3=\{v_3\}$ 的导出子图 $G[V_1]$ 、 $G[V_2]$ 、 $G[V_3]$ 均是 G 的强分图（见图 8.2-9 (a) G_1 、 G_2 、 G_3 ）； $V_4=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$ 、 $V_5=\{v_2, v_3, v_6\}$ 的导出子图 $G[V_4]$ 、 $G[V_5]$ 均是 G 的单向分图（见图 8.2-9 (b) G_4 、 G_5 ）； G 是弱连通的，故 G 的弱分图就是 G 自身。

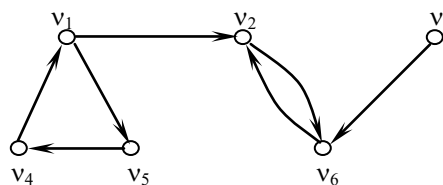


图 8.2-8 例 8.2.6 的图

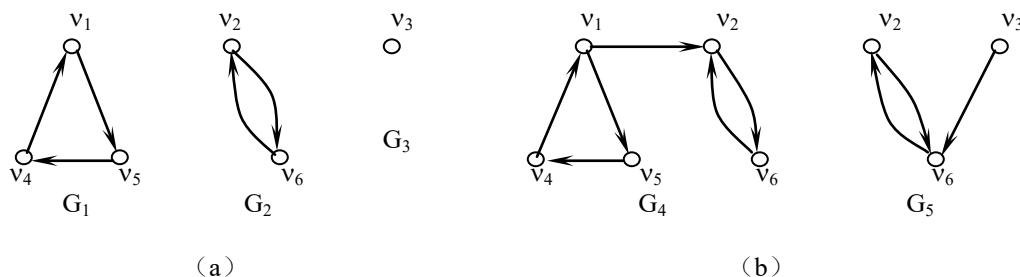


图 8.2-9 有向图的强分图和单向分图

定理 8.2.4 有向图 $G=\langle V, E \rangle$ 中，每个顶点在且仅在一个强分图中。

证明 在顶点集 V 中定义一个二元关系 R ：

$$R = \{ \langle u, v \rangle \mid u \text{ 与 } v \text{ 同在一个强分图中} \}$$

显然， R 是自反的，对称的，传递的，即 R 是一个等价关系。因此构成 V 的划分，由于 V 的每个划分块构成的导出子图是一强分图，所以每个顶点在且仅在一个强分图中。证毕

在计算机系统中，如果我们用顶点来表示资源，若有一程序 p_1 占有资源 s_1 ，而对资源 s_2 提出申请，则用从 s_1 引向 s_2 的有向边表示，并标定边 $\langle s_1, s_2 \rangle$ 为 p_1 ，那么任一瞬间计算机资源的状态图，就是由顶点集 $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ 和边集 $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ 构成的有向图 G ，图 G 的强分图反映一种死锁现象。最简单的死锁现象如：程序 p_1 占有 s_1 对 s_2 提出申请； p_2 占有 s_2 对 s_3 提出申请；而 p_3 占有 s_3 对 s_1 提出申请（如图 8.2-9 的 G_1 ），结果只能是“你等我，我等你”，互相等待，这就是死锁现象。这是操作系统要避免出现的事件。

8.3 图的矩阵表示

矩阵是研究图的一种有力工具，由矩阵表示图便于用计算机研究图，也便于用代数的方法研究图的性质。同时，由于研究的角度不同，所以也就有了图的不同矩阵表示，本节只介绍常用的几个矩阵。在图的矩阵表示法中，要求图是标定图。

有向图的邻接矩阵

定义 8.3.1 设 $G=\langle V, E \rangle$ 是一有向图, $V=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 构造一矩阵 $A(G)$:

$$A(G) = (a_{ij}^{(1)})_{n \times n}$$

其中 $a_{ij}^{(1)}$ 是顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 的条数, 称 $A(G)$ 为图 G 的邻接矩阵。

【例 8.3.1】 求下面图 G 的邻接矩阵。

解

$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

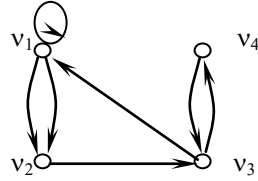


图 8.3-1 例 8.3.1 的图

给出了图 G 的邻接矩阵, 就等于给出了图 G 的全部信息。图的性质可以由矩阵 A 通过运算而获得。

有向图的邻接矩阵有如下性质:

$$(1) \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{于是}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = \sum_{i=1}^n d^+(v_i) = m, \quad \text{类似地有}$$

$$(2) \sum_{i=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{于是}$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^{(1)} = \sum_{j=1}^n d^-(v_j) = m。$$

(3) 由 (1)、(2) 不难看出, $A(G)$ 中所有元素的和为 G 中长度为 1 的通路个数, 而 $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(1)}$ 为 G 中长度为 1 的回路 (环) 的个数。

(4) 令 $A^2 = A \times A = (a_{ij}^{(2)})_{n \times n}$, 其中 $a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(1)} a_{kj}^{(1)}$, 则 $a_{ij}^{(2)}$ 表示从顶点 v_i 两步到达顶点 v_j 的通路条数, 而 $a_{ii}^{(2)}$ 表示从顶点 v_i 两步回到顶点 v_i 的回路数目。利用数学归纳法可得:

(5) 若令 $A^s = A \times A = (a_{ij}^{(s)})_{n \times n}$, 则 $a_{ij}^{(s)}$ 表示从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 s 的通路条数, 而 $a_{ii}^{(s)}$ 表示从顶点 v_i 回到顶点 v_i 的长度为 s 的回路数目。于是有

(6) $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^{(s)}$ 表示 G 中长度为 s 的通路总数, 其中 $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(s)}$ 表示 G 中长度为 s 的回路总数。进一步可得

(7) 若令 $B = A + A^2 + \dots + A^s = (b_{ij})_{n \times n}$, 则 b_{ij} 表示从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度小于或等于 s 的通路总数。

【例 8.3.2】 对于图 8.3-1, 因为

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

所以，由 v_1 到 v_3 长度为1、2、3、4的通路分别有0、2、2、4条， G 中共有长度为4的通路43条，其中回路11条，长度小于等于4的通路共有87条，其中回路22条。

注 无向图也有相应的邻接矩阵，一般只考虑简单图，无向图的邻接矩阵是对称的，其性质基本与有向图邻接矩阵的性质相同。

【例 8.3.3】 设有一个简单无向图 G 的邻接矩阵为 $A(G)$ ，画出图 G 和 \overline{G}

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

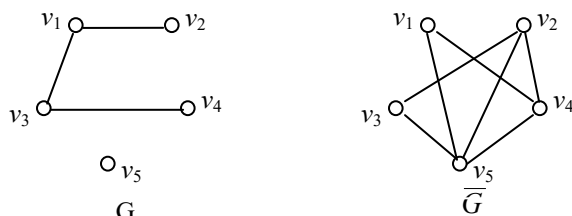


图 8.3-2 对应 $A(G)$ 的图形

解 见图 8.3-2。

有向图的可达矩阵

定义 8.3.2 设 $G=\langle V, E \rangle$ 是一有向图， $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，令

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ 可达 } v_j \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的可达矩阵，记作 $P(G)$ 。

例如记图 8.3-1 的可达矩阵为 $P(G)$ ，则

$$P(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

可达矩阵具有如下性质：

(1) $p_{ii}=1$ (因为规定任何顶点自身可达)。

(2) 所有元素均为1的可达矩阵对应强连通图。如果经过初等行列变换后， $P(G)$ 可变形为

$$\begin{bmatrix} P(G_1) & & & \\ & P(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(G_l) \end{bmatrix}$$

主对角线上的分块矩阵 $P(G_i)$ ($i=1, 2, \dots, l$) 元素均为1，则每个 G_i 是 G 的一个强分图。

(3) 根据定理 8.2.1 及推论可知，可达矩阵可通过计算邻接矩阵得到，令

$$B = E + A + A^2 + \dots + A^n = (b_{ij})_{n \times n}$$

其中 E 是单位矩阵。则

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & b_{ij} \neq 0 \\ 0 & b_{ij} = 0 \end{cases}$$

无向图的关联矩阵

定义 8.3.3 设无向图 $G=\langle V, E \rangle$, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{若 } v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联} \\ 1 & \text{若 } v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的一个端点} \\ 2 & \text{若 } e_j \text{ 是关联 } v_i \text{ 的一个环} \end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 G 的关联矩阵, 记作 $M(G)$ 。

【例 8.3.4】 求图 G (图 8.3-3) 的关联矩阵。

解

$$M(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

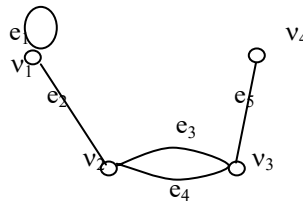


图 8.3-3 例 8.3.4 的图

无向图的关联矩阵的特性是很明显的:

(1) $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 2$ ($j=1, 2, \dots, m$), 即 $M(G)$ 每列元素之和为 2, 因为每条边恰有两个端点 (若是简单图则每列恰有两个 1)。

(2) $\sum_{j=1}^m m_{ij} = d(v_i)$, 因而全为 0 的行所对应的顶点是孤立顶点。

(3) 若图 G 有连通分支 G_1, G_2, \dots, G_s , 那么存在 G 的关联矩阵 $M(G)$ 形如

$$M(G) = \begin{bmatrix} M(G_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M(G_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M(G_s) \end{bmatrix}$$

其中 $M(G_1), M(G_2), \dots, M(G_s)$ 分别是 G_1, G_2, \dots, G_s 的关联矩阵, 0 是零矩阵。

对于连通简单图的关联矩阵还有下面重要事实。

定理 8.3.1 若 G 为 (n, m) 连通简单图, 则 $M(G)$ 的秩为 $n-1$ (即其最大非零行列式的为 $n-1$)。

我们只给出直观解释:

令

$$M(G) = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix}$$

其中 M_1, M_2, \dots, M_n 为行向量。由于 M 中各列中恰有两个 1, 因此

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n = (2, 2, \dots, 2)$$

适当更换上式中的 “+” 为 “-”, 便可使其代数和为

$$(0, 0, \dots, 0)$$

这说明向量 M_1, M_2, \dots, M_n 是线性相关的, 因而 M 的秩不超过 $n-1$ 。

另一方面, 由于 G 连通, 所以 $M(G)$ 的每一行均不全为 0, 也不能表成分块矩阵

$$\begin{bmatrix} M(G_1) & 0 \\ 0 & M(G_2) \end{bmatrix}$$

否则 G 为具有连通分支 G_1, G_2 的非连通图, 因此 $M(G)$ 中任意 k ($k \leq n-1$) 行向量之代数
和 (m_1, m_2, \dots, m_m) 中至少有一个元素为 1, 因而是线性无关的。这表明 $M(G)$ 的秩至少
为 $n-1$ 。

综上所述, 无向连通简单图的关联矩阵 $M(G)$ 的秩为 $n-1$ 。

推论 (n, m) 图 G 为有 k 个连通分支的简单图, 当且仅当 $M(G)$ 的秩为 $n-k$ 。

有向无环图的关联矩阵

定义 8.3.4 设 $G=\langle V, E \rangle$ 是有向无环图, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的起点} \\ 0 & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联} \\ -1 & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的终点} \end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的关联矩阵, 记作 $M(G)$ 。

【例 8.3.5】 求图 G (图 8.3-4) 的关联矩阵

解

$$M(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

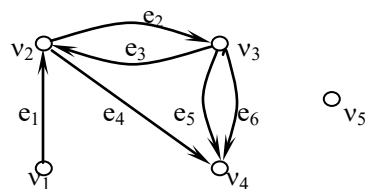


图 8.3-4 例 8.3.5 的图

$M(G)$ 的特性:

- (1) $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 0$ (一条边关联两个点: 一个起点, 一个终点), 从而有 $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij} = 0$ 。
- (2) 每一行中 1 的数目是该点的出度, -1 的数目是该点的入度。
- (3) 二列相同, 当且仅当对应的边是平行边 (同向)。
- (4) 全为 0 的行对应孤立顶点。

8.4 带权图与最短通路

当把实际问题抽象为图时, 在许多情况下, 需要将附加信息放在图的边 (或点) 上。边上的附加信息称为图的边权 (简称权), 权可以是数、记号或者其它指派的量, 在这里我们只讨论实数权。给每一条边指定了权的图称 (边) **带权图** (俗称网络)。

带权图在实际中有很多应用, 如在输油管系统中, 权可以表示单位时间内流经管内的石油数量; 在城市街道中, 权可以表示通行车辆密度; 在航空交通图中, 权可以表示两城市间的距离等等。

定义 8.4.1 对图 G 的每条边附加上一个实数 $\omega(e)$ ，称 $\omega(e)$ 为边 e 上的权， G 连同附加在各边上的权称为带权图，常记作 $G=\langle V, E, \omega \rangle$ 。设 G_1 是 G 的任意子图，称 $\sum_{e \in E(G_1)} \omega(e)$ 为 G_1

的权，记作 $\omega(G_1)$ 。如果 $e \notin E$ ，则令 $\omega(e) = \infty$ 。

若 P 为 G 中 u 到 v 的路径，称 $W(P) = \sum_{e \in P} \omega(e)$ 为路径 P 的长度；

若 P^* 为 G 中 u 到 v 的路径，且有

$$W(P^*) = \min \{W(P) \mid P \text{ 为 } G \text{ 中 } u \text{ 到 } v \text{ 路径}\}$$

则称 P^* 为 G 中 u 到 v 的**最短路径**，并记 $d(u, v) = W(P^*)$ ，称 u 到 v 的路程。

最短路径问题有许多实际应用，如果用顶点表示城市，边上的权表示从一个城市到另一个城市的里程，则从 u 到 v 的最短路径就表示从城市 u 到城市 v 的里程最短的运输线路；如果边上的权表示的是花费的时间或运费，则从 u 到 v 的最短路径就表示从城市 u 到城市 v 的所用时间最短或运费最低的运输线路。

求最短路径有各种算法，针对边权 $\omega(e)$ 非负的带权图，1959 年荷兰数学家迪克斯特拉 (E.W.Dijkstra) 提出的标号算法，是目前公认的求最短路径的较好的算法之一，这个算法可以求出从某个顶点到图中任何一个顶点的最小路径。

在熟练地掌握了这个算法后，可以用列表法表示求解过程。这样可使求解过程显得十分简洁，从始点到各点的最短路径及其路程一目了然。

在算法的执行过程中，如果对某个顶点 s 标号，就表示为 $h(s) = d(v, s)$ (v 为路径的始点)。在列表法中，是将顶点 s 对应的 $d(v, s)$ 用 \square 框起来，例如， $d(v, s) = 5$ ，则记为 $\square 5/w$ ，它表示在 v 到 s 的最短路径上 v 邻接于 w 。

迪克斯特拉最短路径算法：

开始令 $d(v, v) = 0$ ，对所有的 $u \neq v$ ，令 $d(v, u) = +\infty$ ， $t \leftarrow v$ ，标号 $h(v) = 0$ ；

①对每一个未标号顶点 u ，若 u 邻接于 t ，则修改 $d(v, u)$ ：

$$d(v, u) \leftarrow \min \{d(v, u), d(v, t) + W(t, u)\}$$

②在未标号顶点中选取顶点 s ，使 $d(v, s) = \min \{d(v, u) \mid u \text{ 是未标号的顶点}\}$ ，给 s 标号，令 $h(s) = d(v, s)$ ， $t \leftarrow s$ ；

③若终点 w 已标号，则终止，得到一条从始点 v 到终点 w 的最短路径，否则转①。

【例 8.4.1】 用迪克斯特拉算法求下图中从 a 到 g 的最短路径。

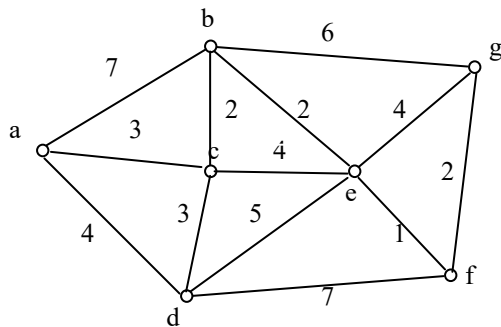


图 8.4-1 例 8.4.1 的图

解 计算过程见表 8.4-1。

表 8.4-1 从 a 到各顶点的路程和最短路径

| 步骤 | a | b | c | d | e | f | g | 最短路径 |
|----|-------------|---------------|---------------|---------------|----------|----------|----------|------|
| 1 | $\square 0$ | 7 | 3 | 4 | ∞ | ∞ | ∞ | |
| 2 | | 5 | $\square 3/a$ | 4 | 7 | ∞ | ∞ | ac |
| 3 | | 5 | | $\square 4/a$ | 7 | 11 | ∞ | ad |
| 4 | | $\square 5/c$ | | | 7/b | 11 | 11 | acb |

| | | | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|----------|-------|--------|---------------|
| 5 | | | | | [7]/b, c | 8 | 11/e | ace, acbe |
| 6 | | | | | | [8]/e | 10 | acef, acbef |
| 7 | | | | | | | [10]/f | acefg, acbefg |
| A 到各顶点路程 | 0 | 5 | 3 | 4 | 7 | 8 | 10 | |

由表知，从 a 到 g 最短路径有两条：acefg 和 acbefg，路程为 10。

8.5 例题选解

【例 8.5.1】 判断下列各命题是否是真命题。

- (1) n 阶无向完全图 K_n 是 n -正则图。
- (2) 任何有相同顶点数和边数的无向图都同构。
- (3) 图中的初级回路均是简单回路。
- (4) 在有向图中顶点间的可达关系是等价关系。
- (5) 任一图 G 的最大度数 $\Delta(G)$ 必小于 G 的顶点数。
- (6) 在 n ($n \geq 2$) 个人中，不认识另外奇数个人的有偶数个人。

解答与分析

- (1) 假命题。由无向完全图的定义可知， K_n 的每个顶点的度数均是 $n-1$ ，所以 K_n 是 $n-1$ -正则图。
- (2) 假命题。两个图有相同顶点数和边数是二图同构的必要条件，而非充分条件。
- (3) 真命题。由初级回路和简单回路的定义可知。
- (4) 假命题。可达关系不满足对称性。
- (5) 假命题。当 G 非简单图时， $\Delta(G)$ 可大于顶点数。
- (6) 真命题。将 n 个人抽象成 n 个顶点，若两个人不认识，则在他们的对应顶点之间画一条边，得到无向图 G 。 G 中每个顶点的度数就是该顶点所对应的人不认识的其他人的个数，由握手定理的推论可知， G 中奇度数的顶点必有偶数个。故在 n 个人中，不认识另外奇数个人的有偶数个人。

【例 8.5.2】 在六个人的团体中，至少有三个人彼此认识或彼此不认识。

分析 将六个人抽象成六个顶点，若两个人认识，则在他们的对应顶点之间画一条边，得到无向图 G ，则 G 是 6 阶无向简单图， \bar{G} 中的边则表示他们关联的两个顶点代表的人彼此不认识，本题即：证明 G 或它的补图 \bar{G} 中存在 3 个顶点彼此邻接。

解 因为 K_6 是 5-正则图，所以 $\forall v \in V(G)$ ($v \in (\bar{G})$)， $d(v)$ 在 G 中或在 \bar{G} 中大于等于 3。不妨设在 G 中 $d(v) \geq 3$ ，则 v 在 G 中至少关联三个顶点设为 a 、 b 、 c (见图 8.5-1)，若此三顶点在 G 中彼此不邻接，则必有三边 (a, b) 、 (a, c) 、 (b, c) 均在 \bar{G} 中 (图中虚线)，亦即 a 、 b 、 c 三点在 \bar{G} 中彼此邻接，否则三顶点至少有两个在 G 中邻接，不妨设 $(a, b) \in E(G)$ ，则 v 、 a 、 b 为在 G 中彼此邻接的三顶点，故在 G 或 \bar{G} 中存在 3 个顶点彼此邻接。

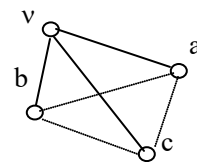


图 8.5-1 例 8.5.2 的图

【例 8.5.3】 证明无向图 G 与其补图 \bar{G} 至少有一个是连通图。

分析 \bar{G} 是 G 的补图，即 $G \cup \bar{G}$ 是一个无向完全图。对 G 中任一边 e ，若 $e \in E(G)$ ，则 $e \notin E(\bar{G})$ ；反之若 $e \in E(\bar{G})$ ，则 $e \notin E(G)$ 。又 G 与 \bar{G} 有相同的顶点集，故只需考虑 G 中的任意二顶点。若 G 是连通图，则命题已成立，所以不妨设 G 不是连通图。

证明 假设 G 不是连通图，则 G 至少有两个连通分支，不妨设为 G_1 、 G_2 。对于 G 中的任意二顶点 u 、 v ，设 $u \in G_1$ ，此时若 $v \in G_2$ ，则必有边 $(u, v) \in \bar{G}$ ， $\therefore u$ 、 v 在 \bar{G} 中连通。此时若 $v \notin G_2$ ，即 $v \in G_1$ ，则必存在顶点 $w \in G_2$ ，使得 $(u, w) \in \bar{G}$ 且 $(v, w) \in \bar{G}$ ， $\therefore u$ 、 v 仍在 \bar{G} 中连通。故 \bar{G} 是连通图。所以， G 与其补图 \bar{G} 至少有一个是连通图。证毕

【例 8.5.4】 给定无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, $|V|=n (n \geq 3)$, $|E| > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, 试证 G 是连通图。试给出一个 $|V|=n$, $|E| = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 的不连通的无向简单图的例子。

分析 当涉及到图的连通性时, 反证法往往是比较行之有效的。

证明 假设 G 是满足条件的无向简单图, 且不连通, 不妨设 G 由两个连通分支 G_1 和 G_2 构成, $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$, $|V_1| = n_1 \geq 1$, $|V_2| = n_2 \geq 1$, $n = n_1 + n_2$ 。因为 G_1 、 G_2 均是简单图, 所以有

$$|E_1| \leq \frac{1}{2}n_1(n_1-1), \quad |E_2| \leq \frac{1}{2}n_2(n_2-1)$$

于是

$$\begin{aligned} |E| &= |E_1| + |E_2| \\ &\leq \frac{1}{2}[n_1(n_1-1) + n_2(n_2-1)] \\ &= \frac{1}{2}\{n_1(n_1-1) + [(n-n_1)(n-n_1-1)]\} \\ &= \frac{1}{2}\{n_1(n_1-1) + [(n-1-n_1+1)(n-2-n_1+1)]\} \\ &= \frac{1}{2}\{(n-1)(n-2) - 2[(n_1-1)(n-n_1-1)]\} \end{aligned}$$

因为 $(n_1-1)(n-n_1-1) \geq 0$, 所以 $|E| \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 与 $|E| > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 矛盾, 故 G 必为连通图。

举例 当 G 是由一个孤立顶点和一个 $n-1$ 阶无向完全图构成的图时, 满足 $|V|=n$, $|E| = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 但 G 不连通。

习题八

1. 顶点度数列 1, 1, 2, 3, 3 的无向简单图有几个?
2. 证明 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6 不是无向简单图的度数列。
3. 设图 G 有 n 个顶点, $n+1$ 条边, 证明 G 中至少有一个顶点的度数 ≥ 3 。
4. 在简单图中若顶点数 ≥ 2 , 则至少有两个顶点的度数相同。
5. 证明定理 8.1.2: 若 $G = \langle V, E \rangle$ 是有向图, 则

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = m \quad d(v) = d^+(v) + d^-(v)$$

6. G 是 n 阶无向简单图, $n > 2$ 为奇数, 则 G 与 \overline{G} 所含的奇度数顶点数相等。
7. 证明图 8-1 中, (a) 与 (b) 同构, (c) 与 (d) 不同构。

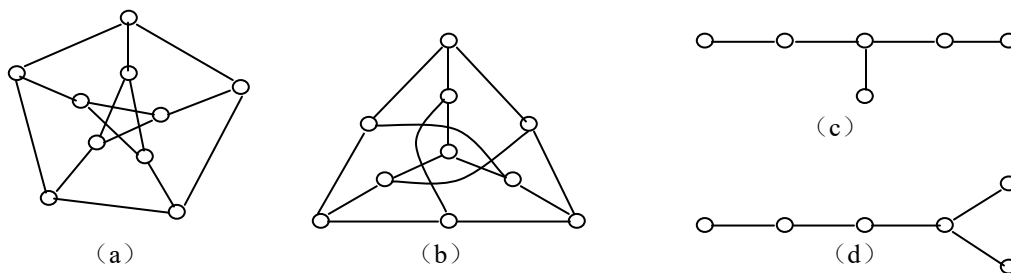


图 8-1

8. 画出 4 阶无向完全图 K_4 的所有非同构的子图, 并指出哪些是生成子图和生成子图的互补情况。
9. 画出 3 阶有向完全图 D_3 的所有非同构的生成子图, 指出它们的互补情况, 并指出哪个是 3 阶竞赛图。

10. 如果一个简单图 G 同构于自己的补图 \bar{G} ，则称该图为自补图。
- (1) 有几个非同构的 4 阶和 5 阶的无向自补图？
- (2) 是否有 3 阶和 6 阶的无向自补图？为什么？
11. 求出图 8-1 (a) 的 $\kappa(G)$ 、 $\lambda(G)$ 和 $\delta(G)$ 。
12. G 是 n ($n \geq 3$) 阶无向连通图， G 没有桥，当且仅当对 G 的每一对顶点和每一条边，有一条连接这两个顶点而不含这条边的通路。
13. 一个连通无向图 G 中的顶点 v 是割点的充分必要条件是存在两个顶点 u 和 w ，使得顶点 u 和 w 之间的每一条路都通过 v 。
14. 试求图 8-2 中有向图的所有强分图，单分图和弱分图。
15. 图 8-2 中有向图所对应的二元关系是否是可传递的？若不是，试求此图的传递闭包。
16. 证明图的每一个顶点和每一条边，都只包含在一个弱分图中。
17. 有向图 G 如图 8-3 所示，计算 G 的邻接矩阵的前 4 次幂，回答下列问题。
- (1) G 中 v_1 到 v_4 长度为 4 的通路有几条？
- (2) G 中 v_1 到 v_1 的长度为 4 的回路有几条？
- (3) G 中长度为 4 的通路总数是多少？其中有多少条是回路？
- (4) G 中长度小于等于 4 的通路有几条？其中有多少条是回路？
- (5) 写出 G 的可达矩阵。

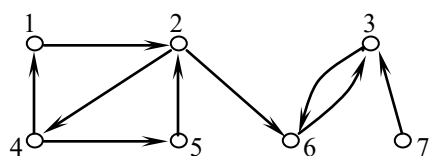


图 8-2

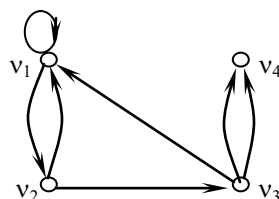


图 8-3

18. 给定图 $G = \langle V, E \rangle$ ，其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，定义 G 的距离矩阵 D 为：
- $$D = (d_{ij}), \quad d_{ij} = d(v_i, v_j)$$

对图 8-4 中的有向图

- (1) 按定义求距离矩阵。
- (2) 试用邻接矩阵 A 求距离矩阵。
19. 试求图 8-4 中有向图的关联矩阵。
20. 给定带权图，如图 8-5 所示，求顶点

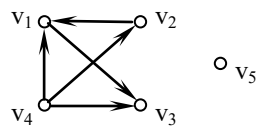


图 8-4

a 到其它各顶点的最短路径和路程。

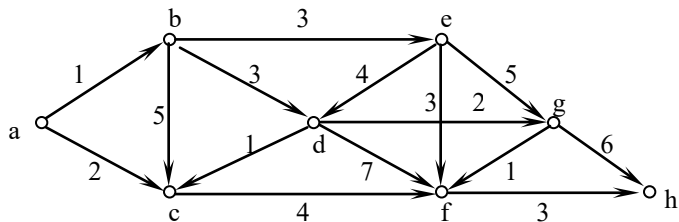


图 8-5