一、 判断正误 20% （每小题 2 分）

1、设 A.B. C 是任意三个集合。

（1）若 A∈B 且 B⊆C，则 A⊆C。 （ ）

（2）若 A⊆B 且 B∈C，则 A⊆C。 （ ）

（3）若 A⊆B 且 B∈C，则 A∉C。 （ ）

（4）$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$。 （ ）

（5）(A－B)×C=(A×C)-(B×C) 。 （ ）

2、可能有某种关系，既不是自反的，也不是反自反的。（ ）

3、若两图结点数相同，边数相等，度数相同的结点数目相等，则两图是同构的。（ ）

4、一个图是平面图，当且仅当它包含与 $K_{3,3}$ 或 K_5 在 2 度结点内同构的子图。（ ）

5、代数系统中一个元素的左逆元并一定等于该元素的右逆元。（ ）

6、群是每个元素都有逆元的半群。（ ）

二、 8%

将谓词公式 $(\forall x)(P(x)\to Q(x,y))\to((\exists y)P(y)\wedge(\exists z)Q(y,z))$ 化为前束析取范式与前束合取范式。

三、 8%

设集合 A＝{a,b,c,d} 上的关系 R＝{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>} 写出它的关系矩阵和关系图，并用矩阵运算方法求出 R 的传递闭包。

四、9%

1、画一个有一条欧拉回路和一条汉密尔顿回路的图。

2、画一个有一条欧拉回路，但没有一条汉密尔顿回路的图。

3、画一个有一条欧拉回路，但有一条汉密尔顿回路的图。

五、10%

证明：若图G是不连通的，则G的补图$\overline{G}$是连通的。

六、10%

证明：循环群的任何子群必定也是循环群。

七、12%

用CP规则证明：

1．$A \vee B \to C \wedge D, D \vee E \to F \Rightarrow A \to F$。

2．$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee ((\exists x)Q(x)$。

八、10%

用推理规则证明下式：

前提：$((\exists x)(F(x) \wedge S(x)) \to (\forall y)(M(y) \to W(y)),\quad (\exists y)(M(y) \wedge \neg W(y))$

结论：$(\forall x)(F(x) \to \neg \mathrm{S}(x))$

九、13%

若集合X＝{（1，2），（3，4），（5，6），……}

$R = \{<< x_1, y_1 >, < x_2, y_2 >> | \, x_1 + y_2 = x_2 + y_1\}$

1、证明R是X上的等价关系。

2、求出X关于R的商集。

一、　填空 20%（每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5	6

	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）					
答案	N	N	N	Y	Y	Y	N	N	Y	N

二、8%

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x,y)) \to ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x,y)) \vee ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z)) \quad 2\text{分}$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee ((\exists u)P(u) \wedge (\exists z)Q(y,z)) \quad 4\text{分}$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists u)(\exists z)((P(x) \wedge Q(x,y)) \vee (P(u) \wedge Q(y,z))) \quad 6\text{分}$$

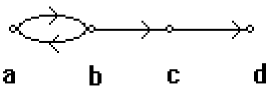
前束析取范式

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists u)(\exists z)((P(x) \vee P(u)) \wedge (P(x) \vee Q(y,z)) \wedge (\neg Q(x,y) \vee P(u)) \wedge (\neg Q(x,y) \vee Q(y,z)))$$

前束合取范式　　　　　　　共 8 分

三、8%

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 1\text{分}$$



关系图　　　　　　　　2 分

传递闭包 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = = \bigcup_{i=1}^{4} R^i$　　　　4 分

$$\Theta \quad M_{R^2} = M_R \circ M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

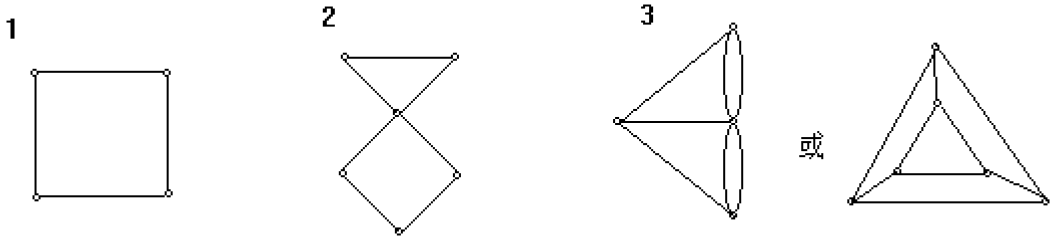
$$M_{R^3} = M_{R^2} \circ M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^4}=M_{R^3}\circ M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_R+M_{R^2}+M_{R^3}+M_{R^4}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ 6 分

t(R)={<a, a>, <a, b>, <a, c>, <a, d>, <b, a>, <b, b>, <b, c>, <b, d>, <c, d>} 共 8 分

四、9%



五、10%

因为 G=< V，E>不连通，设其连通分支是$G(V_1),\Lambda\ ,G(V_m)\quad (m\geq 2)$，

由于任两个连通分支$G(V_i)$和$G(V_j)\quad (i\neq j)$之间不连通，故两结点子集V_i与V_j之间所有连线都在 G 的补图$\overline{G}$中。

$\forall u,v\in V$，则有两种情况：

（1）u , v，分别属于两个不同结点子集 V_i 和 V_j，由于 $G(V_i)$, $G(V_j)$是两连通分支，故(u , v) 在不 G 中，故边（u , v） 在$\overline{G}$中连通。

（2）u ,v ，属于同一个结点子集 V_i，可在另一结点子集 V_j 中任取一点 w，故边(u , w)和边 (w , v)均在$\overline{G}$中，故邻接边(u ,w) (w , v) 组成的路连接结点 u 和 v，即 u , v 在$\overline{G}$中也是连通。

六、10%

设<G,*>是循环群,G=(a)，设<S,*>是<G,*>的子群。且$S \neq \{e\}, S \neq G$，则存在最小正整数m，使得：$a^m \in S$，对任意$a^l \in S$，必有$l = tm + r, \quad 0 \leq r < m, \quad t > 0$，

故：$a^r = a^{l-tm} = a^l * a^{-tm} = a^l * (a^m)^{-t} \in S$　即：$a^l = a^r * (a^m)^t \in S$

所以$a^r \in S$，任 m 使$a^m \in S$的最小正整数，且$0 \leq r < m$，所以 r=0 即：$a^l = (a^m)^t$

这说明 S 中任意元素是a^m的乘幂。 所以<G,*>是以a^m为生成元的循环群。

七、用 CP 规则证明 12%

1、(6 分)

①A	P（附加前提）
②$A \vee B$	T①I
③$A \vee B \rightarrow C \wedge D$	P
④$C \wedge D$	T②③I
⑤D	T④I
⑥$D \vee E$	T⑤I
⑦$D \vee E \rightarrow F$	P
⑧F	T⑥⑦I
⑨$A \rightarrow F$	CP

2、因为$\forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

本题亦即：$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \neg(\forall x)P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

①$\neg(\forall x)P(x)$	P（附加前提）
②$(\exists x)\neg P(x)$	T①E
③$\neg P(e)$	ES②
④$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	P
⑤$P(e) \vee Q(e)$	US④
⑥$Q(e)$	T③⑤I
⑦$(\exists x)Q(x)$	EG⑥

⑧ $\neg(\forall x)P(x)\to\exists xQ(x)$ CP

八、**10%**

⑴ $\exists y(M(y)\wedge\neg W(y))$ P

⑵ $M(e)\wedge\neg W(e)$ ES⑴

⑶ $\neg(M(e)\to W(e))$ T⑵E

⑷ $\exists y\neg(M(y)\to W(y))$ EG⑶

⑸ $\neg(\forall y)(M(y)\to W(y))$ T⑷E

⑹ $(\exists x)(F(x)\wedge S(x))\to(\forall y)(M(y)\to W(y))$ P

⑺ $\neg\exists x(F(x)\wedge S(x))$ T⑸⑹I

⑻ $(\forall x)\neg(F(x)\wedge S(x))$ T⑺E

⑼ $\neg(F(a)\wedge S(a))$ US⑻

⑽ $\neg F(a)\vee\neg S(a)$ T⑼E

⑾ $F(a)\to\neg S(a)$ T⑽E

⑿ $(\forall x)(F(x)\to\neg S(x))$ UG⑾

九、**13%**

（1）自反性：$\forall(x,y)\in X$,由于$x+y=x+y$,故$<(x,y),(x,y)>\in R$

(2) 对称性：$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X$,当$<(x_1,y_1),(x_2,y_2)>\in R$时

即$x_1+y_2=x_2+y_1$ 亦 $x_2+y_1=x_1+y_2$有$<(x_2,y_2),(x_1,y_1)>\in R$

（3）传递性：$\forall(x_1,y_1)$，(x_2,y_2)，$(x_3,y_3)\in X$,

当$<(x_1,y_1),(x_2,y_2)>\in R$，$<(x_2,y_2),(x_3,y_3)>\in R$时

即$\begin{cases}x_1+y_2=x_2+y_1\\x_2+y_3=x_3+y_2\end{cases}$相加化简得$x_1+y_3=x_3+y_1$故$<(x_1,y_1),(x_3,y_3)>\in R$

由等价关系的定义知 R 是 X 上的等价关系。

2、X/R={[<1,2>]$_R$}