

## 第二篇集合论

集合论分为两种体系。一种是朴素集合论体系，也称为康托集合论体系，另一种是公理集合论体系。本书只讨论朴素集合论。

自从 19 世纪末著名的德国数学家康托 (George Cantor 1845—1918) 创立集合论，迄今已有 100 多年的历史，集合的概念已深入到现代科学的各个方面，成为表达各种严格科学概念的必不可少的“数学语言”，然而有趣的是，集合本身却是一个不能精确定义的基本概念，但这并不妨碍我们对它的理解和使用。

集合论的特点是研究对象的广泛性。人们把研究的对象视作一个集合，本意可以是包罗万象的，但从最早的集合论文献来看，那时所研究的集合多半是分析数学中的“数集”和几何学中的“点集”，而集合的元素真正成为包罗万象的对象，应当说是从“计算机革命”开始：数字、符号、图像、语音以及光、电、热等各种信息，它们都可以作为“数据”，这些“数据”就构成集合。集合论总结出由各种对象构成的集合的共同性质，并用统一的方法来处理。正因为如此，集合的理论被广泛地应用于各种科学和技术领域。由于集合论的语言适合于描述和研究离散对象及其关系，因此它也是计算机科学与工程的理论基础，它在程序设计、形式语言、关系数据库、操作系统等计算机学科中得到广泛的应用。集合论的原理和方法成为名符其实的数学技术。

本篇介绍在计算机科学与工程中应用的极为广泛的关于集合、关系、函数及基数的理论。

## 第三章 集合的基本概念和运算

集合是现代数学中最重要的基本概念之一，是现代数学的重要基础。

众所周知，在任何一个数学理论中，不可能对其中每个概念都严格定义。比如说，它的第一个概念就无法严格定义，因为没有能用于定义这个概念的更原始的概念。我们称这种不能严格定义的概念为该数学理论的原始概念，而称其余的概念为它的派生概念。如在欧几里得几何学中，“点”和“线”是原始概念，而“三角形”和“圆”则为派生概念。在这里，我们把“集合”也作为这样的不能严格定义的原始概念。

本章介绍集合的表示法、集合的运算，以及有限集合的计数。

### 3.1 集合的基本概念与表示

一些不同对象的全体称为集合。通常用大写的英文字母  $A, B, C \dots$  表示。

严格地说这不是集合的定义，因为“全体”只是“集合”一词的同义反复。在集合论中，集合是一个不能严格定义的原始概念（就像几何学中的点、线、面等概念）。

组成集合的元素称为对象。一般可用小写英文字母  $a, b, c, \dots$  表示。

注意，这里“对象”的概念是相当普遍的，可以是任何具体的东西或抽象的概念，还可以是集合，因为人们有时以集合为其讨论的对象，而又需要涉及它们的一个总体——以集合为其元素的集合。

如果  $a$  是  $A$  的元素，则记为  $a \in A$ ，读着“ $a$  属于  $A$ ”或“ $a$  在集合  $A$  之中”。

如果  $a$  不是  $A$  的元素，记为  $a \notin A$  或  $\neg(a \in A)$  读着“ $a$  不属于  $A$ ”或“ $a$  不在集合  $A$  之中”。

其中“ $\in$ ”表示一种关系。

在我们所研究的集合论中（古典集合论），对任何对象  $a$  和任何集合  $A$ ，或者  $a \in A$  或者  $a \notin A$ ，两者必居其一且仅居其一。这正是集合对其元素的“确定性”要求。随着科学的发展，由控制论的研究所引起的当代数学的一个新领域——模糊集合论，所研究的不清晰的对象构成的集合，不在我们讨论的范围内。

集合的三特性：确定性、互异性和无序性。

(1) 确定性： $a \in A$  或  $a \notin A$ ，二者必居其一并仅居其一。

(2) 互异性： $\{1, 2, 3, 2\}$  与  $\{1, 2, 3\}$  视作一个集合。

(3) 无序性： $\{1, 2, 3\}$  与  $\{2, 3, 1\}$  与  $\{3, 1, 2\}$  视为一个集合。

集合  $A$  中的不同的元素的数目，可称为集合  $A$  的基数或者势，记为  $|A|$ 。

基数有限的集合称为有穷集合，否则称为无穷集合。

表示一个集合的方法通常有两种。

(1) 列举法：将集合的元素列举出来并写在一个花括号里，元素之间用逗号分开。如，设  $A$  是由  $a, b, c, d$  为元素的集合， $B$  是由  $a, \{b\}, \{\{c, d\}\}$  为元素的集合，则  $A = \{a, b, c, d\}$ ， $B = \{a, \{b\}, \{\{c, d\}\}\}$ ，集合  $B$  说明集合也可用作元素，因此，尽管集合与其元素是两个截然不同的概念，但一个集合完全可以成为另一个集合的元素。

列举法基本上用于有限集合，如果能说明集合的特征，也可只列出部分元素，其余的用

省略号表示。如自然数集用列举法表示是  $N=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ , 根据所列元素, 可判断  $N$  中的其余元素。

列举法使集合中的元素一目了然, 但是元素个数很多时使用起来就很麻烦, 另外, 有很多集合, 如大于 0 而小于 1 的所有实数的集合就不能用列举法表示。为此引入另一种表示方法。

(2) 描述法: 规定一个集合  $A$  时, 将  $A$  中元素的特征用一个谓词公式来描述, 用谓词  $P(x)$  表示  $x$  具有性质  $P$ , 用  $\{x \mid P(x)\}$  表示具有性质  $P$  的集合  $A$ , 即  $A=\{x \mid P(x)\}$  它表示集合  $A$  是使  $P(x)$  为真的所有元素  $x$  构成的集合,  $P(x)$  是任意谓词。

$P(a)$  为真的充分必要条件是  $a \in A$ ,  $P(a)$  为假的充分必要条件是  $a \notin A$ 。

### 例 3.1.1

(1) 设  $P(x): x$  是英文字母, 则  $S=\{x \mid P(x)\}$  表示 26 个英文字母的集合。

(2)  $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{x \mid x \text{ 是自然数}\}$

(3)  $I^+ = \{1, 2, 3, \dots\} = \{x \mid x \text{ 是正整数}\}$

(4)  $I = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \{x \mid x \text{ 是整数}\}$

(5)  $I_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\} = \{x \mid x \in N \wedge 0 \leq x < m\}$

(6)  $E = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} = \{x \mid x \text{ 是偶数}\}$   
 $= \{x \mid x \in I \wedge 2 \mid x\}$  ( $2 \mid x$  表示 2 整除  $x$ )

(7) 前  $n$  个自然数集合

$= \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\}$

$= \{x \mid x = I_n \wedge n \in I^+\}$

$= \{I_n \mid n \in I^+\}$

由此可见, 表示一个集合的方法是很灵活多变的, 必须注意准确性和简洁性。

为方便起见, 本书中指定下列常见数集符号:

$N$ (Natural) 表示自然数集合 (含 0)

$Z$  表示整数集合, 本书我们也常用  $I$ (Integer) 表示整数集合

$Q$ (Quotient) 表示有理数集合

$R$ (Real) 表示实数集合

$C$ (Complex) 表示复数集合

$P$ (proton) 表示素数集合

下面讨论集合之间的关系 (以下  $\Leftrightarrow$  表示术语 “当且仅当”)。

**定义 3.1.1** 设  $A$ 、 $B$  为任意两个集合, 如果  $A$  的每一个元素都是  $B$  的元素, 则称集合  $A$  为集合  $B$  的子集 (或子集, subsets), 表示为  $A \subseteq B$  (或  $B \supseteq A$ ), 读作 “ $A$  包含于  $B$ ” (或 “ $B$  包含  $A$ ”)。其符号化形式为

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

若  $A$  不是  $B$  的子集, 则记作  $A \not\subseteq B$ , 其符号化形式为

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B)$$

集合之间的子集关系或包含关系是集合之间最重要的关系之一。读者必须彻底弄清子集关系和隶属关系这两个完全不同的概念。

集合的包含具有下列性质:

(1) 自反性:  $A \subseteq A$ ;

(2) 传递性:  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq C$ , 则  $A \subseteq C$ ;

(3)  $A \subseteq B$  且  $A \not\subseteq C$ , 则  $B \not\subseteq C$ 。

**例3.1.2**  $\{a, b\} \subseteq \{a, c, b, d\}$ ,  $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$ ,  $\{a\} \subseteq \{a, b\}$ , 但  $a \notin \{a, b\}$ , 只有  $a \in \{a, b\}$ 。不过存在这样两个集合, 其中一个既是另一个的子集, 又是它的元素。例如,  $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$ , 且  $\{a\} \subseteq \{a, \{a\}\}$ 。

**定义3.1.2** 设  $A$ 、 $B$  为任意两个集合, 若  $B$  包含  $A$  同时  $A$  包含  $B$ , 则称集合  $A$  和  $B$  相等, 记作  $A = B$ 。即对任意集合  $A$ ,  $B$ ,

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

**定义3.1.3** 设  $A$ 、 $B$  为任意两个集合, 若  $A$  是  $B$  的子集且  $A \neq B$ , 则称  $A$  是  $B$  的真子集或称  $B$  真包含  $A$ , 记为  $A \subset B$ 。即

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ 且 } A \neq B。$$

若集合  $A$  不是集合  $B$  的真子集, 则记为  $A \not\subset B$ , 其符号化形式为

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B) \vee (A = B) \Leftrightarrow A \not\subseteq B \vee A = B$$

集合的真包含具有下列性质:

- (1) 反自反性:  $A \not\subset A$ ;
- (2) 传递性: 若  $A \subset B$  且  $B \subset C$ , 则  $A \subset C$ ;
- (3) 反对称性: 若  $A \subset B$ , 则  $B \not\subset A$ 。

**定义3.1.4** 没有任何元素的集合称为**空集合**, 简称为空集, 记为  $\emptyset$

如,  $|\emptyset| = 0$ ,  $|\{\emptyset\}| = 1$ 。

注意  $a \neq \{a\}$ , 前者为一对象, 后者为仅含该对象的单元素集合;  $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ , 前者是没有元素的集合, 后者是恰含一个元素——空集的单元素集。

空集具有下面两个性质 (即定理 3.1.1 及其推论)。

**定理3.1.1** 空集是任意集合的子集, 即 对任何集合  $A$ ,  $\emptyset \subseteq A$ 。

**证明** 因  $x \in \emptyset$  恒假, 故  $\forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$  恒真, 即  $\emptyset \subseteq A$  恒真。

证毕

**推论** 空集是唯一的。

**证明** 设有空集  $\emptyset_1, \emptyset_2$ 。据定理 3.1.1, 应有  $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$  和  $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$ , 从而由定义 3.1.2 知  $\emptyset_1 = \emptyset_2$ 。

由推论可知, 空集无论以什么形式出现, 它们都是相等的, 所以

$$\emptyset = \{\} = \{x \mid x \neq x\} = \{x \mid x \in R \wedge x^2 + 1 = 0\} = \{x \mid P(x) \wedge \neg P(x)\} \quad P(x) \text{ 是任意谓词}$$

**定义3.1.5** 在一定范围中, 如果所有集合均为某一集合的子集, 则称某集合为全集, 常记为  $E$ 。即  $\forall x (x \in E)$  为真 因此  $E = \{x \mid P(x) \vee \neg P(x)\}$ ,  $P(x)$  是任意谓词

因为只要求全集包含我们讨论的所有集合, 具有相对性, 所以根据讨论的问题不同, 可以有不同全集, 即全集不是唯一的。但是为了方便起见, 在以后的讨论中我们总是假定有一个足够大的集合作为全集  $E$ , 至于全集  $E$  是什么, 我们有时不关心。

**定理3.1.2** 设  $A$  为一有限集合,  $|A| = n$ , 那么  $A$  的子集个数为  $2^n$ 。

**证明** 设  $A$  含不同元素个数的子集分别为: 没有元素的子集  $\emptyset$ , 计  $C_n^0$  个 ( $C_n^0 = 1$ ); 恰

含  $A$  中一个元素的子集计  $C_n^1$  个, 恰含  $A$  中两个元素的子集计  $C_n^2$  个,  $\dots$ , 恰含  $A$  中  $n$  个元

素的子集计  $C_n^n$  个。因此  $A$  的子集个数为

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

设集合  $A = \{1, \emptyset, \{1, 3\}\}$ , 则  $A$  有  $2^3 = 8$  个子集, 分别为:  $\emptyset, \{1\}, \{\emptyset\}, \{\{1, 3\}\}, \{1, \emptyset\}, \{1, \{1, 3\}\}, \{\emptyset, \{1, 3\}\}, \{1, \emptyset, \{1, 3\}\}$ 。

**定义 3.1.6** 给定集合  $A$ , 由  $A$  的所有子集为元素构成的集合, 称为集合  $A$  的**幂集**, 记作  $P(A)$ , 即  $P(A) = \{x | x \subseteq A\}$ 。由于,  $\emptyset \subseteq A, A \subseteq A$  故必有  $\emptyset \in P(A), A \in P(A)$ 。

例如,  $A = \emptyset, P(A) = \{\emptyset\}$

$A = \{a\}, P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$

$A = \{a, b\}, P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

显然, 幂集元素的个数与集合  $A$  的元素个数有关, 且当集合  $A$  的基数为  $n$  时,  $A$  有  $2^n$  个子集, 因此  $|P(A)| = 2^n$

**例 3.1.3** 设  $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

**解**  $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$P(B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$

$\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

**定理 3.1.3** 设  $A, B$  为任意集合,  $A \subseteq B$  当且仅当  $P(A) \subseteq P(B)$ 。

**证明** 先证必要性。设  $A \subseteq B$ 。为证  $P(A) \subseteq P(B)$ , 又设  $X$  为  $P(A)$  中任一元素, 从而  $X \subseteq A$ 。由于  $A \subseteq B$ , 故  $X \subseteq B$ , 从而有  $X \in P(B)$ 。  $P(A) \subseteq P(B)$  得证

再证充分性。设  $P(A) \subseteq P(B)$ , 又设  $x$  为  $A$  中任意元素, 从而  $x \in A$ , 考虑单元素集合  $\{x\}$ ,  $\{x\} \subseteq A$ , 所以  $\{x\} \in P(A)$ , 因为  $P(A) \subseteq P(B)$ , 因此  $\{x\} \in P(B)$ ,  $\{x\} \subseteq B, x \in B$  因此  $A \subseteq B$ 。 证毕

如何在计算机上表示有限集合的子集? 下面介绍一种二进制编码的方法。

我们在表示一个集合时, 元素的排列顺序是无关紧要的, 但是为了便于在计算机上操作, 有时我们给元素排定次序, 这样就可以用二进制数为足码表示任意集合的子集, 这种方法称为子集的编码表示法。

设集合  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 。用  $B_{x_1 x_2 \dots x_n}$  表示  $A$  的一个子集, 其中  $B$  是子集符号, 足码  $x_1 x_2 \dots x_n$  是  $n$  位二进制数,  $n$  是集合  $A$  的基数, 对于  $A$ , 如果子集含有  $a_i$ , 则在足码的第  $i$  位上记入 1, 否则记为 0。所以  $P(A) = \{B_k | 0 \leq k \leq 2^n - 1\}$  也可将  $B_i$  的二进制数换算成十进制数。

**例 3.1.4** 设  $A = \{a, b, c\}$ , 则各子集的编码表示为

$\emptyset = B_{000} = B_0$

$\{a\} = B_{100} = B_4$

$\{b\} = B_{010} = B_2$

$\{c\} = B_{001} = B_1$

$\{a, b\} = B_{110} = B_6$

$\{a, c\} = B_{101} = B_5$

$\{b, c\} = B_{011} = B_3$

$\{a, b, c\} = B_{111} = B_7$

## 3.2 集合的基本运算

集合的运算指以集合为运算对象, 按照某种规律生成一个新的集合的运算。

**定义 3.2.1** 设  $A, B$  为任意两个集合。由那些或属于  $A$  或属于  $B$  或同时属于二者的所有元素构成的集合称为  $A$  与  $B$  的**并集 (union set)**, 记为  $A \cup B$ 。形式化为

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

$\cup$  称为**并运算**。

下面定理介绍并运算的性质。

**定理 3.2. 1** 对任意集合  $A, B$  有

$$A \subseteq A \cup B; B \subseteq A \cup B$$

该定理由定义 3.2.1 可直接得出。

**定义 3.2.2** 设  $A, B$  为任意两个集合。由集合  $A$  和  $B$  所共有的全部元素构成的集合称为  $A$  与  $B$  的**交集 (intersection set)**, 记为  $A \cap B$ 。形式化为

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$\cap$  称为**交运算**。

下面定理介绍交运算的性质。

**定理 3.2. 2** 对任意集合  $A, B$  有

$$A \cap B \subseteq A; A \cap B \subseteq B$$

该定理由定义 3.2.2 可直接得出。

**定义 3.2.3** 设  $A, B$  为任意两个集合。由属于  $A$  的但不属于集合  $B$  的所有元素构成的集合称为  $A$  与  $B$  的**差集 (difference set)**, 记为  $A - B$ , 又称为相对补。形式化为

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$-$  称为**差运算**。

下面定理介绍差运算的性质。

**定理 3.2. 3** 对任意的集合  $A, B, C$ ,

$$(1) A - B = A - (A \cap B)$$

$$(2) A \cup (B - A) = A \cup B$$

$$(3) A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$$

$$(4) A - B \subseteq A$$

该定理由定义 3.2.3 易证。

**定义 3.2.4** 设  $A$  为任意集合,  $E$  是全集。对于  $E$  和  $A$  所进行的差运算称为  $A$  的**补集 (complement set)**, 也称为  $A$  对  $E$  的相对补集, 称为  $A$  的绝对补集, 或简称为  $A$  的补集, 记为  $\sim A$ 。即

$$\sim A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

$\sim$  称为**补运算**, 它是一元运算, 是差运算的特例。

下面定理介绍补运算的性质。

**定理 3.2. 4** 对任意的集合  $A, B$ , 若  $A \subseteq B$ , 则  $\sim B \subseteq \sim A$

**集合的图形表示法:** 集合与集合之间的关系以及一些运算结果可用文氏图给予直观表示。

**文氏图 (Venn Diagram)** 英国逻辑学家 J. Venn (1834-1923) 于 1881 年在《符号逻辑》一书中, 首先使用相交区域的图解来说明类与类之间的关系。后来人们以他的名字来命名这种用图形来表示集合间的关系和集合的基本运算的方法。其构造如下: 用一个大的矩形表示全集的所有元素 (有时为简单起见, 可将全集省略)。在矩形内画一些圆 (或任何其他形状的闭曲线), 用圆或其他闭曲线的内部代表  $E$  的子集, 用圆的内部的点表示相应集合的元素。不同的圆代表不同的集合。并将运算结果得到的集合用阴影或斜线的区域表示新组成的集合。如图 3.2.1 所示的集合的相关运算用文氏图表示。

文氏图的优点是形象直观, 易于理解。缺点是理论基础不够严谨。需要注意的是这里介绍的文氏图只能帮助我们形象地理解复杂的集合关系, 一般不作为一种证明方法来证明集合等式及包含关系。因此只能用于说明, 不能用于证明。

**例 3.2.1** 设  $E = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ ,  $A = \{2, 4\}$ ,  $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ,  $C = \{0, 8, 9\}$ ,  $D = \{1, 2, 3, 10\}$ :

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7\}, A \cup B \cup C \cup D = E$$

$$A \cap B = \{4\}, A \cap C = \emptyset$$

$$A - B = \{2\}, B - A = \{5, 6, 7\}, A - C = \{2, 4\}$$

$$\sim A = \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \sim B = \{0, 1, 2, 3, 8, 9\}$$

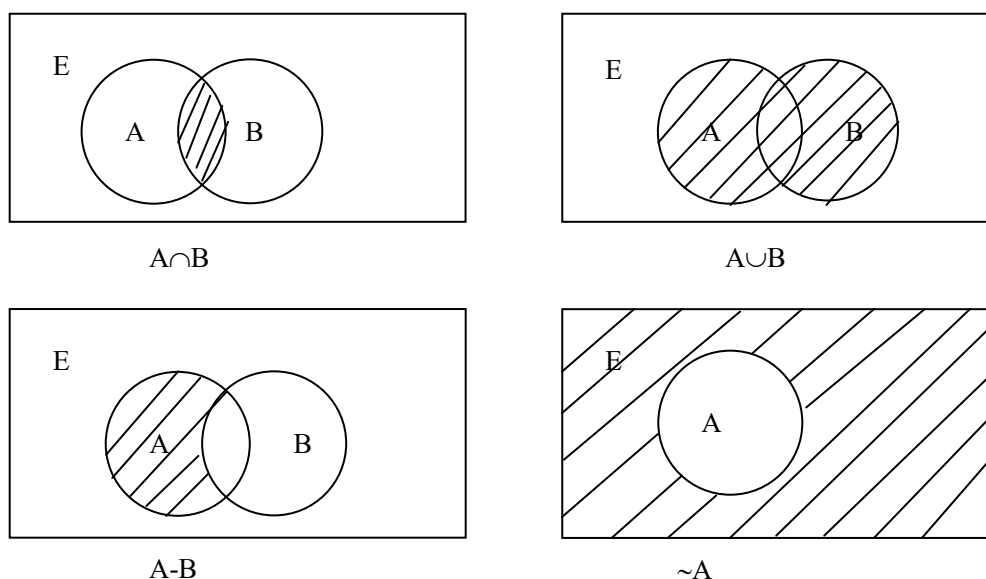


图 3.2.1

命题代数与集合代数，两者都是一种称为 布尔 (Boole) 代数的抽象代数的特定情况。这个事实说明了，为什么命题演算中的各种运算，与集合论中的各种运算极为相似。在此，将列举若干集合恒等式，它们都有与其相对应的命题等式。

下面介绍集合运算的恒等式。

**定理 3.2.5** 设  $A, B, C$  为任意集合，那么下列式成立。

- |            |  |
|------------|--|
| (1) 等幂律    | $A \cup A = A$<br>$A \cap A = A$   |
| (2) 交换律    | $A \cup B = B \cup A$<br>$A \cap B = B \cap A$   |
| (3) 结合律    | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$<br>$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$   |
| (4) 同一律    | $A \cup \emptyset = A; A \cap E = A$   |
| (5) 零律     | $A \cap \emptyset = \emptyset; A \cup E = E$   |
| (6) 分配律    | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$<br>$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$   |
| (7) 吸收律    | $A \cap (A \cup B) = A$<br>$A \cup (A \cap B) = A$   |
| (8) 双重否定律  | $\sim(\sim A) = A; \sim E = \emptyset; \sim \emptyset = E$   |
| (9) 排中律    | $A \cup \sim A = E,$   |
| (10) 矛盾律   | $A \cap \sim A = \emptyset$  |
| (11) 德 摩根律 | $\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$<br>$\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$<br>$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$<br>$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ |
| (12) 补交转换律 | $A - B = A \cap \sim B$  |

证明 (1), (2), (3), (6) 由逻辑运算  $\wedge, \vee$  的相应定律立即可得。现

证 (4) 中的第一式。

对任意  $x$ , 有

$$\begin{aligned} x \in A \cup \emptyset &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in A \quad (x \in \emptyset \text{ 为假}) \end{aligned}$$

故  $A \cup \emptyset = A$ 。

下证 (5) 中的第一式。对任意  $x$ , 有

$$\begin{aligned} x \in A \cap \emptyset &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in \emptyset \quad (x \in \emptyset \text{ 为假}) \end{aligned}$$

故  $A \cap \emptyset = \emptyset$ 。(4), (5) 中的其余两式请读者补证。

(8), (9), (10), (12) 易证, 现证 (11) 的第一式。

$$\begin{aligned} \sim (A \cup B) &= E - (A \cup B) \\ &= (E - A) \cap (E - B) \\ &= \sim A \cap \sim B \end{aligned}$$

再证 (11) 中第三式, 其余留给读者。

对任意  $x$ , 有

$$\begin{aligned} x \in A - (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg (x \in B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A - B) \wedge (x \in A - C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C) \end{aligned}$$

故  $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ 。

**定理 3.2.6** 对任意集合  $A, B$ , 下面四个命题等价

- (1)  $A \subseteq B$
- (2)  $A - B = \emptyset$
- (3)  $A \cup B = B$
- (4)  $A \cap B = A$

**证明** 我们来证明  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$ 。

(1)  $\Rightarrow$  (2): 设  $A - B \neq \emptyset$ , 存在  $a \in A - B$ , 即  $a \in A$ , 但  $a \notin B$ , 这与  $A \subseteq B$  矛盾。故  $A - B = \emptyset$ 。得证。

(2)  $\Rightarrow$  (3): 为证  $A \cup B = B$ , 需证

1)  $B \subseteq A \cup B$ 。但由定理 3.2.1 之 (2), 此已得证。

2)  $A \cup B \subseteq B$ 。为此设  $x$  为  $A \cup B$  中任意一元素, 从而  $x \in A$  或  $x \in B$ 。当  $x \in B$  时目的已达到。当  $x \in A$  时, 若  $x \notin B$ , 则  $x \in A - B$ , 与  $A - B = \emptyset$  矛盾。故  $x \in B$ 。总之,  $A \cup B$  中元素  $x$  必为  $B$  中元素, 所以  $A \cup B \subseteq B$  得证 2)。

综合 1)、2) 可知  $A \cup B = B$ 。

(3)  $\Rightarrow$  (4): 因  $A \cup B = B$ , 故  $A \cap B = A \cap (A \cup B) = A$  (吸收律)

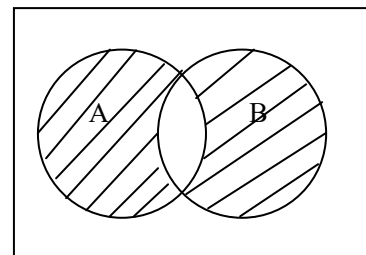
(4)  $\Rightarrow$  (1): 设  $A \cap B = A$ 。为证  $A \subseteq B$ , 又设  $x$  为  $A$  中任意一元素。由此及  $A \cap B = A$ , 可知  $x \in B$ 。故  $A \subseteq B$  得证。从而证明四个命题等价。 **证毕**

**定理 3.2.7** 对任意集合  $A, B, C$ ,

$$A - A = \emptyset, \quad A - \emptyset = A, \quad A - E = \emptyset$$

该定理易证。

**定理 3.2.8** 对任意集合  $A, B$ 。若它们满足



$A \oplus B$

图 3.2.2



$A \cup B = E$  和  $A \cap B = \emptyset$  那么  $B = \sim A$

**证明**

$$\begin{aligned}
 B &= B \cup \emptyset \\
 &= B \cup (A \cap \sim A) \\
 &= (B \cup A) \cap (B \cup \sim A) \\
 &= E \cap (B \cup \sim A) \\
 &= (A \cup \sim A) \cap (B \cup \sim A) \\
 &= (A \cap B) \cup \sim A \\
 &= \emptyset \cup \sim A \\
 &= \sim A
 \end{aligned}$$

**证毕**

**定义 3.2.5** 设  $A, B$  为任意两个集合, 由或属于  $A$  或属于  $B$ , 但不同时属于  $A$  和  $B$  的那些元素构成的集合称为集合  $A, B$  的环和 (cycle sum) 或对称差, 记为  $A \oplus B$ 。即有

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

$\oplus$  称为对称差运算。该运算的文氏图如图 3.2.2 所示。

下面讨论对称差运算的性质及相关的恒等式。

**定理 3.2.9** 对任意集合  $A, B$  有

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

**证明**

$$\begin{aligned}
 A \oplus B &= (A - B) \cup (B - A) \\
 &= (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A) \\
 &= (A \cup B) \cap E \cap E \cap (\sim A \cup \sim B) \\
 &= (A \cup B) \cap \sim (A \cap B) \\
 &= (A \cup B) - (A \cap B)
 \end{aligned}$$

**定理 3.2.10** 对任意集合  $A, B, C$  有

- (1) 交换律  $A \oplus B = B \oplus A$
- (2) 同一律  $A \oplus \emptyset = A$
- (3) 零律  $A \oplus A = \emptyset$
- (4) 分配律  $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
- (5) 结合律  $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
- (6) 吸收律  $A \oplus (A \oplus B) = B$

**证明** (1), (2), (3), (4), (6) 易证, 现证 (5)。

(5) 我们先证  $(A \oplus B) \oplus C \subseteq A \oplus (B \oplus C)$ 。

设  $x \in (A \oplus B) \oplus C$ , 则分两种情况, 有

①  $x \in (A \oplus B)$ ,  $x \notin C$ , 再分两种情况, 有

$x \in A$ ,  $x \notin B$ ,  $x \notin C$ , 则有  $x \in A$ ,  $x \notin B \oplus C$ , 故  $x \in A \oplus (B \oplus C)$ 。

$x \notin A$ ,  $x \in B$ ,  $x \notin C$ , 则有  $x \notin A$ ,  $x \in B \oplus C$ , 故  $x \in A \oplus (B \oplus C)$ 。

②  $x \notin (A \oplus B)$ ,  $x \in C$ , 也再分两种情况, 有

$x \in A$ ,  $x \in B$ ,  $x \in C$ , 则有  $x \in A$ ,  $x \notin B \oplus C$ , 故  $x \in A \oplus (B \oplus C)$ 。

$x \notin A$ ,  $x \notin B$ ,  $x \in C$ , 则有  $x \notin A$ ,  $x \in B \oplus C$ , 故  $x \in A \oplus (B \oplus C)$ 。

综上所述,  $(A \oplus B) \oplus C \subseteq A \oplus (B \oplus C)$ 。

设  $x \in A \oplus (B \oplus C)$ , 则也分两种情况, 有

①  $x \in A$ ,  $x \notin (B \oplus C)$ , 又再分两种情况, 有

$x \in A$ ,  $x \in B$ ,  $x \in C$ , 则有  $x \in C$ ,  $x \notin A \oplus B$ , 故  $x \in (A \oplus B) \oplus C$ 。

$x \in A$ ,  $x \notin B$ ,  $x \notin C$ , 则有  $x \notin C$ ,  $x \in A \oplus B$ , 故  $x \in (A \oplus B) \oplus C$ 。

②  $x \notin A$ ,  $x \in (B \oplus C)$ , 也再分两种情况, 有

$x \notin A, x \notin B, x \in C$ , 则有  $x \notin A \oplus B, x \in C$ , 故  $x \in (A \oplus B) \oplus C$ 。

$x \notin A, x \in B, x \notin C$ , 则有  $x \in A \oplus B, x \notin C$ , 故  $x \in (A \oplus B) \oplus C$ 。)

综上所述,  $A \oplus (B \oplus C) \subseteq (A \oplus B) \oplus C$ 。

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C.$$

**定理 3.2.11** 对任意的集合 A, B, C, 有

$$(1) (A \oplus E) = \sim A;$$

$$(2) \sim A \oplus \sim B = A \oplus B$$

$$(3) \sim A \oplus B = A \oplus \sim B = \sim (A \oplus B)$$

**证明:** (1), (2) 易证, 下证 (3)

$$\begin{aligned} \sim (A \oplus B) &= (A \cup \sim B) \cap (\sim A \cup B) \\ &= \sim (\sim A \cap B) \cap (\sim A \cup B) \\ &= (\sim A \cup B) - (\sim A \cap B) \\ &= \sim A \oplus B \\ \sim (A \oplus B) &= (A \cup \sim B) \cap (\sim A \cup B) \\ &= (A \cup \sim B) \cap \sim (A \cap \sim B) \\ &= (A \cup \sim B) - (A \cap \sim B) \\ &= A \oplus \sim B \end{aligned}$$

所以  $\sim A \oplus B = A \oplus \sim B = \sim (A \oplus B)$

### 3.3 集合元素的计数

含有有限个元素的集合称为有穷集合。设 A 是有穷集合, 其元素个数为  $|A|$ 。下面介绍两种方法解决有穷集合的计数问题。

方法一:

**定理 3.3.1 基本运算的基数** 假设 A, B 均是有穷集合, 其基数分别为  $|A|, |B|$ 。

$$(1) |A \cup B| \leq |A| + |B|$$

$$(2) |A \cap B| \leq \min(|A|, |B|)$$

$$(3) |A - B| \geq |A| - |B|$$

$$(4) |A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

该定理易证。

**定理 3.3.2 包含排除原理** 对有限集合 A 和 B,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

**证明** 1) 当 A 与 B 不相交, 即  $A \cap B = \emptyset$ ,

$$\text{则 } |A \cup B| = |A| + |B|$$

2) 若  $A \cap B \neq \emptyset$ , 则

$$|A| = |A \cap \sim B| + |A \cap B|, \quad |B| = |\sim A \cap B| + |A \cap B|$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |A| + |B| &= |A \cap \sim B| + |A \cap B| + |\sim A \cap B| + |A \cap B| \\ &= |A \cap \sim B| + |\sim A \cap B| + 2|A \cap B| \end{aligned}$$

$$\text{但 } |A \cap \sim B| + |\sim A \cap B| + |A \cap B| = |A \cup B|$$

因此  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$  得证。

**例 3.3.1** 一个班 50 人中, 有 16 人期中得优, 21 人期末得优, 17 人两项均没得优, 问: 有多少人两项均得优? 并用集合文氏图表示。

**解:** 设 A 为期中得优的人集合, B 为期末得优的人集合。E 为全集。

由已知:  $|A|=16, |B|=21, |E|=50, |\sim(A \cup B)|=17$ 。

$$\begin{aligned}
|A \cap B| &= |A| + |B| - |(A \cup B)| \\
&= |A| + |B| - (|E| - |\sim(A \cup B)|) \\
&= 16 + 21 - (50 - 17) = 4
\end{aligned}$$

所以有 4 个人两项均得优。

该定理可推广到  $n$  个集合的情形。若  $n \in \mathbb{N}$  且  $n > 1$ ,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是有限集合, 则用数学归纳法可证明下面的定理。

**定理 3.3.3** 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是有限集合, 其元素的基数分别为  $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|$ , 则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| =$$

$$\sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n|$$

**例 3.3.2** 在 1 到 1000 的整数中 (包括 1 和 1000), 仅能被 5、6、8 中的一个数整除的整数有多少? 能被 5 和 6 整除但不能被 8 整除的有多少?

**解** 设

$$E = \{x \mid 1 \leq x \leq 1000, x \in \mathbb{Z}\}, A = \{x \mid x \text{ 能被 } 5 \text{ 整除}\},$$

$$B = \{x \mid x \text{ 能被 } 6 \text{ 整除}\}, C = \{x \mid x \text{ 能被 } 8 \text{ 整除}\}$$

$$\text{则: } |A| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200, |B| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166, |C| = \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor = 125, |A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{(5,6)} \right\rfloor = 33,$$

$$|A \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{(5,8)} \right\rfloor = 25, |B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{(6,8)} \right\rfloor = 41, |A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{(5,6,8)} \right\rfloor = 8$$

$$\begin{aligned}
\therefore |A \oplus B \oplus C| &= |A \cup B \cup C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + 2|A \cap B \cap C| \\
&= |A| + |B| + |C| - 2|A \cap B| - 2|A \cap C| - 2|B \cap C| + 3|A \cap B \cap C| \\
&= 200 + 166 + 125 - 66 - 50 - 82 + 24 = 317 \\
|(A \cup B) - C| &= |A \cup B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\
&= 200 + 166 - 33 - 25 - 41 + 8 = 275
\end{aligned}$$

$\therefore$  1 到 1000 的整数中, 仅能被 5, 6, 8 中的一个数整除的整数个数是 317 个, 能被 5 或 6 整除, 但不能被 8 整除的整数个数为 275 个。

方法二:

借助文氏图法可以很方便的解决有限集合的计数问题。首先根据已知条件画出相应的文氏图。如果没有特殊说明, 两个集合一般都画成相交的, 然后将已知的集合的基数填入文氏图中的相应区域, 用  $x$  等字母来表示未知区域, 根据题目中的条件, 列出相应的方程或方程组, 解出未知数即可得出所需求的集合的基数。下面通过例子说明这一方法。

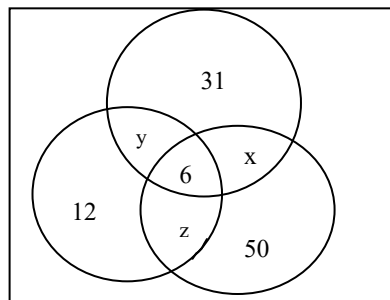


图 3.3.1

**例 3.3.3** 计算中心需安排 Pascal, Visual Basic, C 三门课程的上机。三门课程的学生分别有 110 人, 98 人, 75 人, 同时学 Pascal 和 Basic 有 35 人, 同

时学 Pascal 和 C 的有 50 人,三人都学的有 6 人,同时学 Visual Basic 和 C 的有 19 人。求共有多少学生。

**解** 设  $x$  是同时选 Pascal 和 Visual Basic 但没有选 C 的学生人数, $y$  是同时选 Pascal 和 C,但没有选 Visual Basic 的学生人数, $z$  是同时选 C 和 Visual Basic 但没有选 Pascal 的学生人数,设  $P$  是仅选 Pascal 的学生人数, $B$  是仅选 Visual Basic 的学生人数  $C$  是仅选 C 课程的学生人数。根据题设有

$$\begin{aligned} x+6 &= 35 & \text{所以 } x &= 29 \\ y+6 &= 50 & \text{所以 } y &= 44 \\ z+6 &= 19 & \text{所以 } z &= 13 \\ x+y+6 &= 110-P & \text{所以 } P &= 31 \\ x+z+6 &= 98-B & \text{所以 } B &= 50 \\ y+z+6 &= 75-C & \text{所以 } C &= 12 \\ \text{总计} &= 31+29+50+44+6+13+12 & &= 185 \end{aligned}$$

其文氏图解法参见图 3.3.1

又如例 3.3.1 可用文氏图解法解,详见图 3.3.2

由文氏图和已知条件可得:  $16-x+x+21-x+17=50$

所以  $x=4$

由此可看出用文氏图与用包含排除原理方法所得的结论一致。

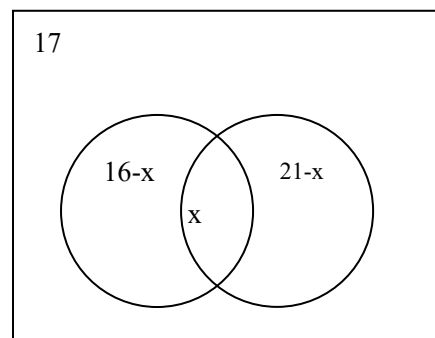


图 3.3.2

### 3.4 例题选解

**例 3.4.1** 设  $A$ 、 $B$  为集合,已知  $A-B=B-A$ ,证明:  $A=B$ 。

**证明**  $A-B=B-A$

$$\Rightarrow A \cap \sim B = B \cap \sim A$$

$$\Rightarrow (A \cap \sim B) \cup B = (B \cap \sim A) \cup B$$

$$\Rightarrow A \cup B = B \quad \textcircled{1}$$

同理:  $\because A-B=B-A$

$$\Rightarrow A \cap \sim B = B \cap \sim A$$

$$\Rightarrow (A \cap \sim B) \cup A = (B \cap \sim A) \cup A$$

$$\Rightarrow A = A \cup B \quad \textcircled{2}$$

由 ① ② 可得:  $A = B$

证毕

**例 3.4.2** 设  $A$ 、 $B$  为集合,证明:  $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ 。并举例说明不能将“ $\subseteq$ ”换成“ $=$ ”。

**证明**  $\forall x, \quad x \in (P(A) \cup P(B)) \Leftrightarrow x \in P(A) \vee x \in P(B)$

不妨设:  $x \in P(A)$  则有  $x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq (A \cup B)$

所以  $x \in P(A \cup B)$

故  $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

下面来说明不能将“ $\subseteq$ ”换成“ $=$ ”。

例如

$$A = \{a, b\} \quad B = \{b, c\} \quad A \cup B = \{a, b, c\}$$

则

$$P(A) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \quad P(B) = \{\Phi, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$$

$$P(A) \cup P(B) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$\text{而 } P(A \cup B) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

所以  $P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$

**例 3.4.3** 设  $A_i$  是实数集合，它被定义为： $A_0 = \{a \mid a < 1\}$ ， $A_i = \{a \mid a \leq 1 - \frac{1}{i}\}$ ， $i = 1, 2,$

..., 则  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_0$

**证明** (1) 先证  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A_0$

设  $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ，则必存在某个自然数  $k$ ，使  $x \in A_k$ ，即  $x \leq 1 - \frac{1}{k}$ ，则有  $x < 1$ ，

故  $x \in A_0$ 。所以  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A_0$ 。

(2) 再证  $A_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

设  $x \in A_0$ ，即  $x < 1$ ，故必有  $\varepsilon > 0$ ，使  $x = 1 - \varepsilon$ ，令  $k = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ ，则  $x \leq 1 - \frac{1}{k}$ ，即

$x \in A_k$ ，所以  $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ，故  $A_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 。

由此可得  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_0$ 。

证毕

**例 3.4.4** 证明  $(A-B) \oplus B = A \cup B$

**证明**  $(A-B) \oplus B = (A \cap \sim B) \oplus B$

$$\begin{aligned} &= ((A \cap \sim B) - B) \cup (B - (A \cap \sim B)) \\ &= (A \cap \sim B \cap \sim B) \cup (B \cap \sim (A \cap \sim B)) \\ &= (A \cap \sim B) \cup (B \cap (\sim A \cup B)) \\ &= (A \cap \sim B) \cup B = A \cup B \end{aligned}$$

证毕

### 习题三

1. 证明：如果  $B \in \{\{a\}\}$ ，那么  $a \in B$ 。
2. 试用描述法表示下列集合：
  - (1) 小于 5 的非负整数集合。
  - (2) 10 与 20 之间的素数集合。
  - (3) 小于 65 的 12 的正倍数集合。
  - (4) 能被 5 整除的自然数的集合。

3. 选择适宜的客体域和谓词公式表示下列集合:

- (1) 奇整数集合。
- (2) 十的倍数集合。
- (3) 永真式的集合。

4. 对任意元素  $a, b, c, d$  证明:

$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$  当且仅当  $a = c$  且  $b = d$

5. “如果  $A \in B, B \in C$ , 那么  $A \in C$ ” 对任意  $A, B, C$  都成立吗? 都不成立吗? 举例说明你的结论。

6. 列举出下列集合的元素:

- (1)  $S = \{x \mid x \in I (3 < x < 12)\}$ ,  $I$  为整数集合
- (2)  $S = \{x \mid x \text{ 是十进制的数字}\}$
- (3)  $S = \{x \mid (x=2) \vee (x=5)\}$

7. 下面命题的真值是否为真, 说明理由。

- (1)  $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$
- (2)  $\{a\} \in \{\{a\}\}$
- (3)  $\{a\} \in \{\{a\}, a\}$
- (4)  $\{a\} \subseteq \{\{a\}, a\}$
- (5)  $\emptyset \subseteq \emptyset$
- (6)  $\emptyset \in \emptyset$
- (7)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- (8)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- (9) 对任意集合  $A, B, C$ , 若  $A \in B, B \subseteq C$  则  $A \in C$ 。
- (10) 对任意集合  $A, B, C$ , 若  $A \in B, B \subseteq C$  则  $A \subseteq C$ 。
- (11) 对任意集合  $A, B, C$ , 若  $A \subseteq B, B \in C$  则  $A \in C$ 。
- (12) 对任意集合  $A, B, C$ , 若  $A \subseteq B, B \in C$  则  $A \subseteq C$ 。

8. 列举下列集合的所有子集:

- (1)  $\{\emptyset\}$
- (2)  $\{1, \{2, 3\}\}$
- (3)  $\{\{1, \{2, 3\}\}\}$
- (4)  $\{\{\emptyset\}\}$
- (5)  $\{\{1, 2\} \{2, 1, 1\}, \{2, 1, 1, 2\}\}$

9.  $A, B, C$  均是集合, 若  $A \cap C = B \cap C$  且  $A \cup C = B \cup C$ , 则必有  $A = B$ 。

10. 设  $A = \{a\}$ , 求  $A$  的幂集  $P(A)$  以及  $A$  的幂集的幂集  $P(P(A))$ 。

11. 设  $A, B, C, D$  为 4 个集合, 已知  $A \subseteq B$  且  $C \subseteq D$ , 证明:  $A \cap C \subseteq B \cap D$

12. 设  $A, B$  为集合, 证明:  $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ 。

13. 证明定理 3.2.3。

14. 设  $A, B, C$  为集合, 证明:

- (1)  $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$ 。
- (2)  $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
- (3)  $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ 。

15. 证明对任意集合  $A, B$  和  $C$  有  $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$  的充分必要条件是  $C \subseteq A$ 。

16. 设  $A, B, C$  为集合, 证明:  $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$ 。

17. 设全集  $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ , 子集  $A = \{a, b, d, e\}$ ,  $B = \{c, d, f, g\}$ ,  $C = \{c, e\}$ , 求下面集合: (1)  $\sim A \cup \sim B$ ; (2)  $\sim (A \oplus B)$ ; (3)  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

18. 设  $A, B$  是全集  $E$  的子集, 已知  $\sim A \subseteq \sim B$ , 证明  $B \subseteq A$ 。

19. 设  $A, B$  为集合, 且  $A \subseteq B$ , 证明:  $\sim A \cup B = E$ , 其中  $E$  为全集。

20. 设  $B_i$  是实数集合, 它被定义为:  $B_0 = \{b \mid b \leq 1\}$ ,  $B_i = \{b \mid b < 1 + \frac{1}{i}\}$ ,  $i = 1,$

2, ..., 证明:  $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = B_0$ 。

21. 设某校有 58 个学生, 其中 15 人会打篮球, 20 人会打排球, 38 人会踢足球, 且其中只有 3 人同时会三种球, 试求仅同时会两种球的学生共有几人。

22. 求 1 到 500 的整数中 (1 和 500 包含在内) 分别求满足以下条件的数的个数:

- (1) 同时能被 4, 5 和 7 整除。
- (2) 不能被 4 或 5, 也不能被 7 整除。
- (3) 可以被 4 整除, 但不能被 5 或 7 整除。

(4) 可以被 4 或 5 整除，但不能被 7 整除。