## 一、填空 20%（每空 2 分）：

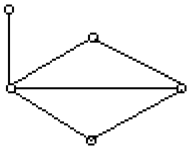
1．若对命题 P 赋值 1，Q 赋值 0，则命题 $P \leftrightarrow Q$ 的真值为 ____________________ 。

2．命题“如果你不看电影，那么我也不看电影”（P：你看电影，Q：我看电影）的符号化为

________________________________________________________________________ 。

3．公式 $\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg(Q \wedge \neg S))$ 的对偶公式为

________________________________________________________________________ 。

4．图  的对偶图为

__________________________________________ 。

5．若关系 R 是等价关系，则 R 满足 ______________________________________ 性质。

6．关系 R 的传递闭包 t (R) = ____________________________________________________ 。

7．代数系统 $< A, * >$ 是群，则它满足 __________________________________________

________________________________________________________________________ 。

8．设 $< A,+,\bullet >$ 和 $< B,\oplus,\otimes >$ 是两代数系统，f 是从 $< A,+,\bullet >$ 到 $< B,\oplus,\otimes >$ 的同态映射，

则 f 具有__________________________________________________________________性质。

9．若连通平面图 $G =< V, E >$ 共有 r 个面，其中 $|V| = v$ , $|E| = e$，则它满足的 Euler 公式为

__________________________________________ 。

10．树 T 的边数 e 与点数 v 有关系 ______________________________________________ 。

## 二、选择 10%（每小题 2 分）：

1．如果解释 I 使公式 A 为真，且使公式 $A \to B$ 也为真，则解释 I 使公式 B 为（　　　　　）。

A、真；　B、假；　C、可满足；　D、与解释 I 无关。

2．设 $A = \{a,b\}$，则 $\mathcal{P}$（A）×A =（　　　　　　　　　　　　　）。

A、A ；　B、$\mathcal{P}$（A)；

C、$\{< \Phi, a >,< \Phi, b >,< \{a\}, a >,< \{a\}, b >,< \{b\}, a >,< \{b\}, b >,< A, a >,< A, b >\}$ ；

D、 $\{<a,\Phi>,<b,\Phi>,<a,\{a\}>,<b,\{a\}>,<a,\{b\}>,<b,\{b\}>,<a,A>,<b,A>\}$。

3．设集合 A，B 是有穷集合，且 $|A|=m$，$|B|=n$，则从 A 到 B 有（　　　　　）个不同的双射函数。

A、$n$ ； B、$m$ ； C、$n!$ ； D、$m!$ 。

4．设 K = {e , a , b , c}，$<K,*>$ 是 Klein 四元群，则元素 a 的逆元为（　　　　　　）。

A、e ； B、a ； C、b ； D、c。

5．一个割边集与任何生成树之间（　　　　　　）。

A、没有关系； B、割边集诱导子图是生成树； C、有一条公共边； D、至少有一条公共边。

## 三、逻辑推理 12%：

符号化命题“每个学术会的成员都是工人并且是专家，有些成员是青年人，所以有的成员是青年专家”；并用演绎方法证明上面推理。（F(x)：x 是学术会成员；H(x)：x 是工人；G(x)：x 是专家；R(x)：x 是青年人）

## 四、8%：

求集合 $A_n=\left\{x \mid 0<x\le\frac{1}{n}\right\}$ $(n=1,2,3,\Lambda)$ 的并与交。

## 五、12%：

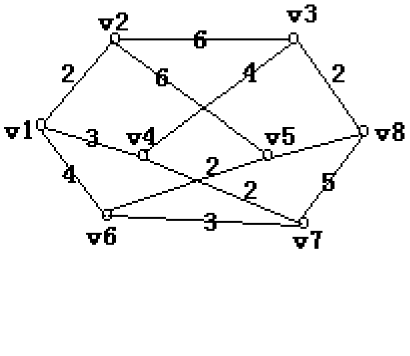
在实数平面上，画出关系 $R=\{<x,y> \mid x-y+2>0 \wedge x-y-2<0\}$，并判定关系的特殊性质。

## 六、8%：

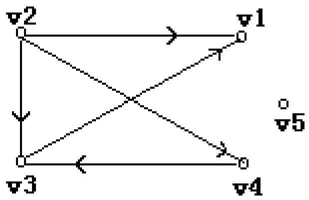
问代数系统 $<S_{24}, LCM, GCD, \bar{\ }>$ 是否是布尔代数，为什么？（其中 $S_{24}$ 为能整除 24 的所有正整数，LCM 为最小公倍数，GCD 为最大公约数，$\bar{x}=\frac{24}{x}$）

## 七、10%：

求图中的一棵最小生成树。



## 八、10%：

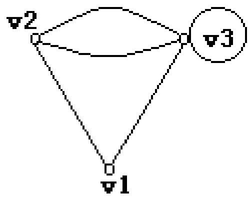
求图  的邻接矩阵和可达矩阵。



## 九、10%：

证明：如果 G 是无向简单图且$\delta \geq 2$，则 G 包含一条长度不小于$\delta + 1$的基本回路。

## 一、填空 20%（每空 2 分）

1、 0；2、$\neg P \to \neg Q$；3、$\neg(P \wedge Q) \wedge (P \wedge \neg(Q \vee \neg S))$；4、



5、自反性、对称性、传递性；6、$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R^+$；

7、①运算*在 A 上封闭，②*在 A 上可结合，③*在 A 上存在幺元，④A 中每个元素都有逆元；

8、$\forall a,b \in A$，$f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$，$f(a \cdot b) = f(a) \otimes f(b)$

9、$v - e + r = 2$ ； 10、$e = v - 1$ 。

## 二、选择题 10%（每小题 2 分）

1、A； 2、C； 3、D； 4、B； 5、D。

## 三、解：

符号化：前提 $\forall x(F(x) \to G(x) \wedge H(x))$，$\exists x(F(x) \wedge R(x))$

结论 $\exists x(F(x) \wedge R(x) \wedge G(x))$

推理演绎：（1） $\exists x(F(x) \wedge R(x))$ P

（2） $F(c) \wedge R(c)$ ES(1)

(3) $\forall x(F(x) \to G(x) \wedge H(x))$ P

(4) $(F(c) \to G(c) \wedge H(c))$ US(3)

(5)　F(c)　　　　　　　　　T(2)I

(6)　$G(c) \wedge H(c)$　　　　　　　　　T(5)(4)I

(7)　R(c)　　　　　　　　　T(2)I

(8)　G(c)　　　　　　　　　T(6)I

(9)　$F(c) \wedge R(c) \wedge G(c)$　　　　　　　　　T(5)(7)(8)I

(10)　$\exists x(F(x) \wedge R(x) \wedge G(x))$　　　　　　　　　EG(9)

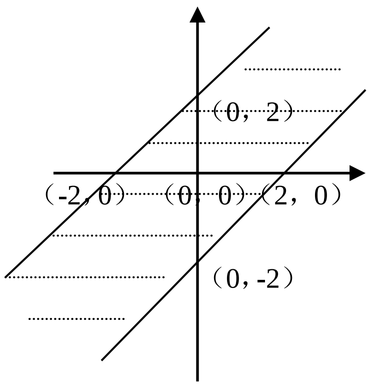
## 四、解：

（1）$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \middle| 0 < x \le \frac{1}{n} \right\} = \Phi$

（2）$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \middle| 0 < x \le \frac{1}{n} \right\} = \left\{ x \middle| 0 < x \le 1 \right\}$

## 五、解：

（1）关系图为




x-y+2=0 与 x-y-2=0 两直线将实平面划分为三个区域 x-y+2>0 ， x-y-2<0 为包含原点的狭长区域。

（2）

①**R 自反**

任意实数 x，x-x+2>0 ， x-x-2<0，所以直线 y=x 上的点在区域内，即 <x，x>$\in R$，故 R 自反；

②**R 对称**

若$<x, y> \in R$ 有 $\begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ x - y - 2 < 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} y - x + 2 = -(x - y - 2) > 0 \\ y - x - 2 = -(x - y + 2) < 0 \end{cases}$ 即 $<y, x> \in R$

所以 R 对称；

③因 R 自反且结点集非空，故 R 非反自反；

④因 R 对称且结点集非空，并非全是孤立点，故 R 不是反对称；

⑤由$\begin{cases} x-y+2>0 \\ x-y-2<0 \end{cases}$ 得 $x-2<y<x+2$ 所以$<1,\frac{1}{4}>\in R$ 而 $<1,-1>\notin R$

所以 $R_4$ 不是传递的。

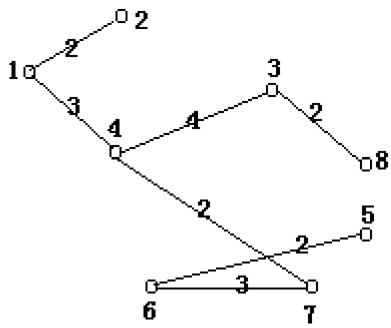
## 六、解：

不是布尔代数。因 $S_{24}$ 的最小元为 1，最大元为 24，但$2'=\frac{24}{2}=12$ ，LCM(2,12)=12$\neq$24，vb 且$GCD(2,2')=GCD(2,24)=2\neq 1$ 。

## 七、解：

用 Kruskal 算法，选一条权最小的边，逐一选取剩余的边中与已知边未构成回路且权数最小的边$(v_1,v_2)$，每次选出的边记入 T,其权加入 T 的成本。

| T 的边 | T 的成本 |
| --- | --- |
| $(v_1,v_2)$ | 2 |
| $(v_3,v_8)$ | 2+2 |
| $(v_4,v_7)$ | 2+2+2 |
| $(v_5,v_6)$ | 2+2+2+2 |
| $(v_6,v_7)$ | 2+2+2+2+3 |
| $(v_1,v_4)$ | 2+2+2+2+3+3 |




## 八、解：

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&1&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}，\quad A^2(G)=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}，$$

$$A^3(G)=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}，\quad A^4(G)=O_{5\times 5}。$$

所以可达矩阵 $P = A \vee A^2 \vee A^3 \vee A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

## 九、解：

设 G 中最长的基本路 $l$ 为（点不同）：$v_0 v_1 v_2 \Lambda\ v_k$ ，则 $v_0$ 的所有邻接点均在 $l$ 上，否则它与 $l$ 是最长的基本道路矛盾。将 $v_0$ 的所有邻接点中下标最大者记为 m ，显然 $m \geq \delta$，取 $l$ 中子基本通路为 $v_0 v_1 v_2 \Lambda\ v_m$，连接 $v_0$ 与 $v_m$ 之间的边便得 G 的一条长度不小于 $\delta + 1$ 的基本回路：

$Q = v_0 v_1 v_2 \Lambda\ v_m v_1$