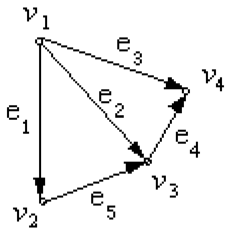
一、 填空 10% （每小题 2 分）

1、$Z^{+}=\{x \mid x \in Z \wedge x>0\}$，*表示求两数的最小公倍数的运算（Z 表示整数集合），对于*运算的幺元是 ______________，零元是 _______________ 。

2、代数系统<A,*>中，|A|>1，如果e和θ分别为<A,*>的幺元和零元，则e和θ的关系为 ____________________ 。

3、设<G,*>是一个群，<G,*>是阿贝尔群的充要条件是 _________________________________ 。

4、图 

的完全关联矩阵为 ____ 。

5、一个图是平面图的充要条件是 ____ 。

二、 选择 10% （每小题 2 分）

1、 下面各集合都是 N 的子集，（　　　　　　　　　　）集合在普通加法运算下是封闭的。

A、{x | x 的幂可以被 16 整除}；　　B、{x | x 与 5 互质}；

C、{x | x 是 30 的因子}；　　　　　D、{x | x 是 30 的倍数}。

2、 设$G_1=<\{0,1,2\},\mathrm{o}>$，$G_2=<\{0,1\},*>$，其中o表示模 3 加法，*表示模 2 乘法，则积代数$G_1 \times G_2$的幺元是（　　　　　　）。

A、<0,0>；　B、<0,1>；　C、<1,0>；　D、<1,1> 。

3、 设集合 S={1,2,3,6}，“≤”为整除关系，则代数系统< S , ≤ >是（　　　　　　　）。

A、域；　B、格，但不是布尔代数；　C、布尔代数；　D、不是代数系统。

4、 设 n 阶图 G 有 m 条边，每个结点度数不是 k 就是 k+1，若 G 中有 N_k 个 k 度结点，则 N_k=（　　　　　　　）。

A、n・k；　B、n(k+1)；　C、n(k+1)-m；　D、n(k+1)-2m 。

5、 一棵树有 7 片树叶，3 个 3 度结点，其余全是 4 度结点，则该树有（　　　　　　）个 4 度结点。

A、1；　　B、2；　　C、3；　　D、4 。

三、判断 10% （每小题 2 分）

1、（　　　）设 S={1,2}，则 S 在普通加法和乘法运算下都不封闭。

2、（　　　）在布尔格<A,≤>中，对 A 中任意原子 a，和另一非零元 b，在 $a \le b$ 或 $a \le \bar{b}$ 中有且仅有一个成立。

3、（　　　）设 $S=\{x \mid x \in Z \wedge x \ge 0\}=N$，+,• 为普通加法和乘法，则<S，+，• >是域。

4、（　　　）一条回路和任何一棵生成树至少有一条公共边。

5、（　　　）没 T 是一棵 m 叉树，它有 t 片树叶，i 个分枝点，则(m-1)i = t-1。

四、证明 38%

1、（8 分）对代数系统<A,*>，*是 A 上二元运算，e 为 A 中幺元，如果*是可结合的且每个元素都有右逆元，则（1）<A,*>中的每个元素在右逆元必定也是左逆元。

（2）每个元素的逆元是唯一的。

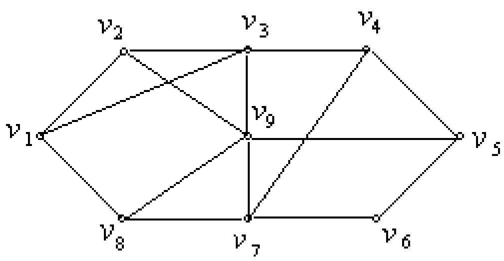
2、（12 分）设 $<A, \vee, \wedge, ->$ 是一个布尔代数，如果在 A 上定义二元运算☆，为 $a☆b=(a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$，则<A,☆>是一阿贝尔群。

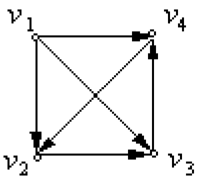
3、（10 分）证明任一环的同态象也是一环。

4、（8 分）若 $G=<V,E>$　$(|V|=v, \ |E|=e)$ 是每一个面至少由 k(k≥3)条边围成的连通平面图，则 $e \le \dfrac{k(v-2)}{k-2}$ 。

五、应用 32%

1、（8 分）某年级共有 9 门选修课程，期末考试前必须提前将这 9 门课程考完，每人每天只在下午考一门课，若以课程表示结点，有一人同时选两门课程，则这两点间有边（其图如右），问至少需几天？



2、 用 washall 方法求图 

的可达矩阵，并判断图的连通性。（8 分）

3、 设有 a、b、c、d、e、f、g 七个人，他们分别会讲的语言如下：a：英，b：汉、英，c：英、西班牙、俄，d：日、汉，e：德、西班牙，f：法、日、俄，g：法、德，能否将这七个人的座位安排在圆桌旁，使得每个人均能与他旁边的人交谈？（8 分）

4、 用 Huffman 算法求出带权为 2，3，5，7，8，9 的最优二叉树 T，并求 W（T）。

若传递 a ，b， c， d ，e， f 的频率分别为 2%， 3% ，5 %， 7% ，8% ，9%求传输它的最佳前缀码。（8 分）

一、 填空 10%（每小题 2 分）

1、1， 不存在；2、$e \neq \theta$；3、$\forall a,b \in G$ 有 $(a*b)*(a*b)=(a*a)*(b*b)$；

4、

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
v_1	1	1	1	0	0
v_2	-1	0	0	0	1
v_3	0	-1	0	1	-1
v_4	0	0	-1	-1	0

5、它不包含与 $K_{3,3}$ 或 K_5 在 2 度结点内同构的子图。

二、 选择 10%（每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5
答案	A，D	B	C	D	A

三、 判断 10%

题目	1	2	3	4	5
答案	Y	Y	N	N	N

四、 **证明 38%**

1、（8 分）证明：

（1）设$a,b,c \in A$，b 是 a 的右逆元，c 是 b 的右逆元，由于$b*(a*b)=b*e=b$，

$$e=b*c=b*(a*b)*c=(b*a)*(b*c)=(b*a)*e=b*a$$

所以 b 是 a 的左逆元。

（2）设元素 a 有两个逆元 b、c，那么

$$b=b*e=b*(a*c)=(b*a)*c=e*c=c$$

a 的逆元是唯一的。

2、（12 分）证明：

[乘]Θ $\vee$，$\wedge$，$-$ 在A上封闭， $\therefore$ 运算☆在 A 上也封闭。

[群] $\forall a,b,c \in A$

$$\begin{aligned}
&(a☆b)☆c=((a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b))☆c \\
&=(((a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b))\wedge\bar{c})\vee(\overline{(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b)}\wedge c) \\
&=(a\wedge\bar{b}\wedge\bar{c})\vee(\bar{a}\wedge b\wedge\bar{c})\vee((\bar{a}\vee\bar{\bar{b}})\wedge(a\vee\bar{b})\wedge c) \\
&=(a\wedge\bar{b}\wedge\bar{c})\vee(\bar{a}\wedge b\wedge\bar{c})\vee(((a\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b}))\wedge c) \\
&=(a\wedge\bar{b}\wedge\bar{c})\vee(\bar{a}\wedge b\wedge\bar{c})\vee(a\wedge b\wedge c)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b}\wedge c)
\end{aligned}$$

同理可得$:a☆(b☆c)=(a\wedge\bar{b}\wedge\bar{c})\vee(\bar{a}\wedge b\wedge\bar{c})\vee(a\wedge b\wedge c)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b}\wedge c)$

$\therefore (a☆b)☆c=a☆(b☆c)$ 即☆满足结合性。

[幺] $\forall a\in A, a☆0=0☆a=(0\wedge\bar{a})\vee(\bar{0}\wedge a)=0\vee(1\wedge a)=0\vee a=a$

故全下界 0 是 A 中关于运算☆的幺元。

[逆] $\forall a\in A,(a☆a)=(a\wedge\bar{a})\vee(\bar{a}\wedge a)=0\vee 0=0$

即 A 中的每一个元素以其自身为逆元。

[交] $a☆b=(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b)=(b\wedge\bar{a})\vee(\bar{b}\wedge a)=b☆a$

即运算☆具有可交换性。

所以<A, ☆>是 Abel 群。

3、(10 分) 证明:

设$< A,+,\bullet >$是一环,且$< f(A),\oplus,\otimes >$是关于同态映射 f 的同态象。

由$<A,+>$是 Abel 群，易证$<f(A),\oplus>$也是 Abel 群。

$<A,\bullet>$是半群，易证$<f(A),\otimes>$也是半群。

现只需证：$\otimes$ 对 $\oplus$ 是可分配的。

$\forall b_1,b_2,b_3\in f(A)$,则必有相应的$a_1,a_2,a_3$使得：$f(a_i)=b_i, i=1,2,3$　于是

$$
\begin{aligned}
&b_1\otimes(b_2\oplus b_3)=f(a_1)\otimes(f(a_2)\oplus f(a_3))=f(a_1)\otimes(f(a_2+a_3))\\
&=f(a_1\cdot(a_2+a_3))=f((a_1\cdot a_2)+(a_1\cdot a_3))=f(a_1\cdot a_2)\oplus f(a_1\cdot a_3)\\
&=(f(a_1)\otimes f(a_2))\oplus(f(a_1)\otimes f(a_3))\\
&=(b_1\otimes b_2)\oplus(b_1\otimes b_3)
\end{aligned}
$$

同理可证$(b_2\oplus b_3)\otimes b_1=(b_2\otimes b_1)\oplus(b_3\otimes b_1)$

因此$<f(A),\oplus,\otimes>$也是环。

5、（8 分）证明：

设 G 有 r 个面，

$$\Theta\ \sum_{i=1}^{r}\deg(r_i)=2e,\quad 而\deg(r_i)\geq k\quad(1\leq i\leq r)\quad \therefore 2e\geq kr\quad 即 r\ \leq\frac{2e}{k}$$

$$而 v-e+r=2,\quad 故 v-e+\frac{2r}{k}\geq 2\quad 即 e\leq=\frac{k(v-2)}{k-2}$$ 。

五、 应用 32%

1、（8 分）

解：$\chi(G)$即为最少考试天数。

用 Welch-Powell 方法对 G 着色：$v_9v_3v_7v_1v_2v_4v_5v_8v_6$

第一种颜色的点 $v_9v_1v_4v_6$，剩余点$v_3v_7v_2v_5v_8$

第二种颜色的点 $v_3v_7v_5$，剩余点v_2v_8

第三种颜色的点 v_2v_8

所以$\chi(G)\leqslant 3$

任$v_2v_3v_9$构成一圈，所以$\chi(G)\geqslant 3$

故$\chi(G)=3$

所以三天下午即可考完全部九门课程。

2、（8 分）

解：$A(G)=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$

$i=1$：A[2，1]=1，$A=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$；　$i=2$：　A[4，2]=1，$A=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

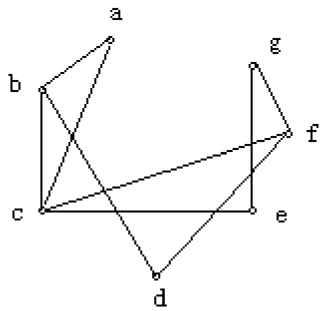
$i=3$：　A[1，3]=A[2，3]=A[4，3]=1，$A=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

$i=4$：　A[k，4]=1，k=1，2，3，4，$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

p 中的各元素全为 1，所以 G 是强连通图，当然是单向连通和弱连通。

3、（8 分）

解：用 a,b,c,d,e,f,g 7 个结点表示 7 个人，若两人能交谈可用一条无向边连结，所得无向图为

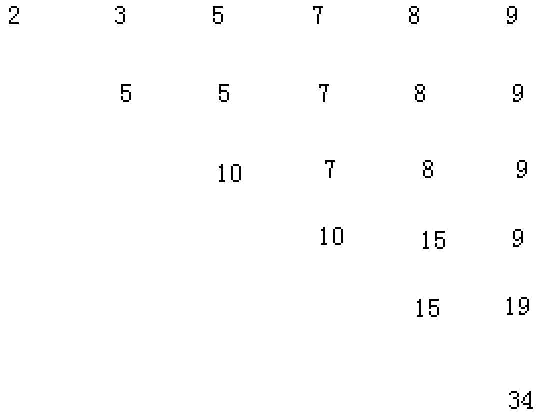


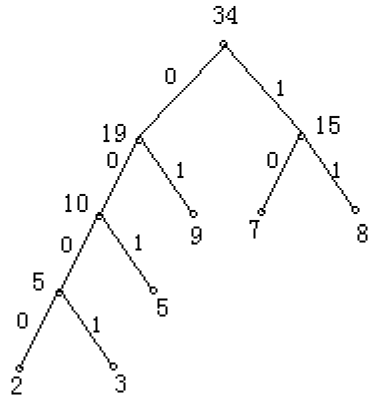
此图中的 Hamilton 回路即是圆桌安排座位的顺序。

Hamilton 回路为 a b d f g e c a。

4、（8 分）

解：(1)





$$W(T)=2\times4+3\times4+5\times3+9\times2+7\times2+8\times2=83$$

（1） 用 0000 传输 a、0001 传输 b、001 传输 c、01 传输 f、10 传输 d、11 传输 e

传输它们的最优前缀码为{0000，0001，001，01，10，11} 。