《离散数学》练习题

一、 填空题

1．设 p：我上课；q：我玩游戏。则“我不会上课玩游戏。”符号化为 $\underline{\neg(p \wedge q)}$。

2．命题“如果地球倒转，则我们能回到唐朝。”的真值为 ___1___。

3．设 F(x)：x 是狗；G(x)：x 是宠物。则“有的狗是宠物，但不是所有的狗都是宠物。”的符号化为 $\underline{\exists x(F(x) \wedge G(x)) \wedge \neg \forall x(F(x) \to G(x))}$。

4．A 是含 p、q、r、s 四个命题变元的公式，其极小项 $m_6 = \underline{\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s}$；极大项 $M_7 = \underline{p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s}$。若 A 是可满足式，则其主析取范式中所含极小项的个数为 ___[1,16]___；其主合取范式中所含极大项的个数为 ___[0,15]___。

5．公式 $\forall x\exists y (F(x)\wedge G(x,y))\to \forall yF(y)$ 中，量词 $\forall x$ 的辖域是 ___$\exists y (F(x)\wedge G(x,y))$___，此公式的类型为 ___永真式___（永真式，永假式，非永真可满足式）。

6．公式 $A= \neg (p\wedge r)\vee(q\wedge\neg r)$ 的对偶式 $A^*=$ ___$\neg (p\vee r)\wedge(q\vee\neg r)$___。

7．推理规则 $A，\neg A\vee B \Rightarrow B$ 称为 ___析取三段论___ 规则。

8． $\forall x F(x,y)\wedge \exists xG(x)$ 的前束范式为 ___$\forall x\exists z(F(x,y)\wedge \exists xG(z))$___。

二、 单项选择题

1．下列语句中不是命题的是（　　）

A：2050 年人类将移居火星。　　B：x = 5　　C：明天考试。　　D：我不会开车。

2．设 p：我过了英语四级。q：我考研。r：我找工作。命题“如果我过了英语四级，我就考研，否则，我去找工作。”的形式化表达为（　　）。

A：$(p\to q)\vee(\neg p\to r)$；　B：$(p\to q)\wedge(\neg p \to r)$；　C：$p\to(q\vee r)$；　D：$(p\to q)\nabla(\neg p \to r)$。

3．下列公式中，是关于 p、q、r 的主析取范式的公式是（　　）。

A：$(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg r)$；　　B：$p\wedge\neg q \wedge\neg r$；

C：$p\vee\neg q \vee\neg r$；　　D：$(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(r\wedge q\wedge\neg p)$

4．设 p：我做完作业。q：我睡觉。则下列语句中能形式化为 $p\to q$ 的语句是（　　）。

A：只有做完作业，我才睡觉。　　B：只要做完作业，我就睡觉。

C：我不睡觉，除非我做完作业了。　　D：除非我做完作业了，否则我不睡觉。

5．下列公式中有三个是等值的，与其他公式不等值的是（　　）。

A：$\neg(p\leftrightarrow q)$；　　B：$(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$；

C：$(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$；　　D：$\neg(p\to q)\wedge\neg(q\to p)$。

6．下面联结词集合中不是全功能集的是（　　）。

A：$\{\neg,\wedge\}$；　B：$\{\neg, \vee\}$；　C：$\{\neg,\to\}$；　D：$\{\wedge, \vee\}$。

7．由 n 个命题变元组成的不等值的公式的个数为（　　）

A：2n　　B：2^n　　C：n^2　　D：2^{2^n}

8．B 是与 x 无关的公式，下列命题中真值为 0 的是（　　）。

A：$\forall x(F(x)\wedge B)\Leftrightarrow \forall x F(x)\wedge B$；　　B：$\exists x(F(x)\wedge B)\Leftrightarrow \exists x F(x)\wedge B$；

C：$\exists x(B \to F(x)) \Leftrightarrow B \to\exists x F(x)$；　　D：$\forall x(F(x)\to B) \Leftrightarrow \forall x F(x)\to B$。

9．取个体域为整数集合，• 是普通乘法，则下列公式中为假命题的是（　　）。

A：$\forall x\exists y(x \cdot y = 1)$；　　B：$\exists x\forall y(x \cdot y = y)$；

C：$\forall x\exists y(x \cdot y = x)$；　　D：$\exists x\forall y(x \cdot y = 0)$。

10．$\forall x(F(x,y) \wedge G(y,z)) \rightarrow F(x,y)$是（　　　　）。

A：命题公式；　　　B：闭式；　　　C：一阶逻辑公式　　　D：前束范式。

11．下面一阶公式是前束范式的是（　　　　）

A：$\forall x \exists y \forall z$（$F(x,y) \rightarrow G(z)$）　　　B：$\neg \forall x \exists y F(x,y)$

C：$\forall x \exists y \forall x$（$F(x,y) \wedge H(x,y)$)　　　D：$\forall x(F(x,y) \wedge G(y,z)) \rightarrow F(x,y)$

12. 令 F（x）：x 是火车。G（x）：x 是轮船。H（x，y）：x 比 y 跑得快。可将命题“所有的火车都比某些轮船跑的快”符号化为（　　　）。

A：$\forall x\ (F(x) \rightarrow \exists y\ (G(y) \rightarrow H(x,y)))$；　　B：$\forall x\ (F(x) \wedge \exists y(G(y) \rightarrow H(x,y)))$；

C：$\forall x\ (F(x) \rightarrow \exists y\ (G(y) \wedge H(x,y)))$；　　D：$\forall x\ (F(x) \wedge \exists y(G(y) \wedge H(x,y)))$。

13．在公式$\forall x F(x,y) \rightarrow \exists y\ G(x,y)$中，变元 x 是（　　　）。

A：自由变元　　　　　　　　B：约束变元

C：既是自由变元，又是约束变元；　　D：既不是自由变元，又不是约束变元。

14. $\forall x$（F（x）$\vee$G（x））（　　　）$\forall x$ F（x）$\vee \forall x$ G（x）。

A：= ；　　　B：$\Rightarrow$ ；　　　C：$\Leftarrow$ ；　　　D：$\Leftrightarrow$

15．下列式子中，不是推理规则的是（　　　）

A：（$A \rightarrow B$），$\neg B \vDash \neg A$ ；　　　B：（$A \leftrightarrow B$）$\wedge$（$B \leftrightarrow C$））$\vDash$（$A \leftrightarrow C$）

C：　A，B $\vDash$（$A \wedge B$)；　　　D：A $\vDash$（$A \vee B$）

16．皇帝不是穷人，在守财奴之中也有穷人，所以，有一些__________并不是_________。

填在________上的正确答案是（　　　　）。

A：皇帝，皇帝　　B：守财奴，守财奴　　C：守财奴，皇帝　　D：皇帝，守财奴

答案：1-5：BBBBD　6-10：DDDAC　11-15：ACCCB　16：C

三、 画出公式（$(p \vee q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow q)$）$\wedge \neg$ q 的真值表，并说明公式的类型。

三. $((p \vee q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow q)) \wedge \neg q$ 真值表.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$ (a)	$\neg p \leftrightarrow q$ (b)	$a \rightarrow b$	$(a \rightarrow b) \wedge \neg q$
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0

∴可满足式

四、 求公式 $(q \leftrightarrow \neg p) \rightarrow r$ 的主析取范式和主合取范式。

四. $(q \leftrightarrow \neg p) \rightarrow r$.

$\Leftrightarrow ((q \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow r$.

$\Leftrightarrow \neg((\neg q \vee \neg p) \wedge (p \vee q)) \vee r$.

$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee r$.

$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge (r \vee \neg r)) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r)) \vee ((p \vee \neg p) \wedge r)$

$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee \underbrace{(p \wedge r)}_{\wedge(q \vee \neg q)} \vee \underbrace{(\neg p \wedge r)}_{\wedge(q \vee \neg q)}$

$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \vee r)$.

$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_1 \vee m_0 \vee m_5 \vee m_3$. 主析取.

$\Leftrightarrow \underset{010}{M_2} \wedge \underset{100}{M_4}$

$\Leftrightarrow (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$ 主合

四、 求公式 $(q\leftrightarrow\neg p)\rightarrow r$ 的主析取范式和主合取范式。等值演算

p	q	r	$\neg p$	$q\leftrightarrow\neg p$	$(q\leftrightarrow\neg p)\rightarrow r$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

由真值表求主析取范式和主合取范式，结果和等值演算应该是一样的。两种方法二选一。

五、 设个体域 D={a,b}，$A=\forall x（F(x)\rightarrow\exists xG(x,y)）$　求 A 的不带量词的等价式 。

$（(F(a)\wedge F(b))\rightarrow(G(a,y)\vee G(b,y)）$

注：自由变量不带入，所以 y 不变

六、 求公式　$p\vee(q\leftrightarrow\neg r)$ 的仅含联结词¬、∧ 的等值式。

六. $p\vee(q\leftrightarrow\neg r)$

$\Leftrightarrow p\vee(q\rightarrow\neg r\wedge\neg r\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow p\vee((\neg q\vee\neg r)\wedge(r\vee q))$

$\Leftrightarrow(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg p\wedge q\wedge r)\wedge\neg(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

七、 求公式　$\neg\forall x(F(x)\rightarrow\exists xG(x,y))\vee\exists xH(x,y)$的前束范式。

七. $\neg\forall x(F(x)\rightarrow\exists xG(x,y))\vee\exists xH(x,y)$　P56. 化前束范式

消↔, →.

¬后移.

$\Leftrightarrow\neg\forall x(\neg F(x)\vee\exists zG(z,y))\vee\exists tH(t,y)$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge\neg\exists zG(z,y))\vee\exists tH(t,y)$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge\forall z\neg G(z,y))\vee\exists tH(t,y)$

$\Leftrightarrow\exists x\forall z(F(x)\wedge\neg G(z,y))\vee\exists tH(t,y)$

$\Leftrightarrow\exists x\forall z\exists t((F(x)\wedge\neg G(z,y))\vee H(t,y))$

八、下面推理有错误，请重新书写出全部正确的推理过程和有效结论。

（1）	$\forall xF(x)\wedge\neg\forall xG(x)$	前提引入
（2）	$\forall xF(x)$	（1）化简
（3）	$F(t)$	（2）UI 规则
（4）	$\neg\forall xG(x)$	（1）化简
（5）	$\neg G(t)$	（4）UI 规则
（6）	$F(t)\wedge\neg G(t)$	（2）（5）合取引入
（7）	$\forall x（F(x)\wedge\neg G(x)）$	（6）UG 规则

九、先符号化下面的推理，再用构造证明法证明之：

（1）如果天气很热并且他不去上课，他必去游泳；如果他去上课，他不会穿拖鞋；今天天气很热；他穿着拖鞋；所以，他去游泳。

九.(1). $(p\wedge\neg q)\to r$ 前提

$q\to\neg s$.

p.

s.

结论：r

(1) $q\to\neg s$. 前提引

(2) $\neg q\vee\neg s$. (1)置换

(3) s 前引

(4) $\neg q$. 析取三段

(5) p. 前引

(6) $p\wedge\neg q$. 合取引入

(7) $(p\wedge\neg q)\to r$. 前引. (8) r. 假言推理

（2）有些学生相信所有的老师，任何一个学生都不相信骗子。所以，老师都不是骗子。

设 $F(x)$: x是学生, $G(x)$: x是老师. $H(x)$: x是骗子.

$P(x,y)$: x相信y.

$\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\to P(x,y)))$.

$\forall x(F(x)\to\forall y(H(y)\to\neg P(x,y)))$.

结论: $\forall x(G(x)\to\neg H(x))$

(1) $\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(x)\to P(x,y)))$ 前提引入.

(2) $F(a)\wedge\forall y(G(y)\to P(a,y))$. ①EI.

(3) $\forall x(F(x)\to\forall y(H(y)\to\neg P(x,y)))$ 前提引入

(4) $F(a)\to\forall y(H(y)\to\neg P(a,y))$. ③EI.

(5) $F(a)$ ② 化简.

(6) $\forall y(H(y)\to\neg P(a,y))$. (4),(5) 假言推理.

(7) $\forall y(G(y)\to P(a,y))$. (2) 化简.

(8) $G(t)\to P(a,t)$. (7) UI.

(9) $H(t)\to\neg P(a,t)$. (6) UI.

(10) $P(a,t)\to\neg H(t)$. (9)置换.

(11) $G(t)\to\neg H(t)$ (8),(10) 假言三段论

(12) $\forall x(G(x)\to\neg$