一、填空题：（每空 1 分，本大题共 15 分）

1．给定命题公式 A、B，若 ________________________ ，则称 A 和 B 是逻辑相等的。

2．命题公式$\neg(P \to Q)$的主析取范式为 ，主合取范式的编码表示为 __________________________________ 。

3．设 E 为全集，_______________________ ，称为 A 的绝对补，记作～A，且～（～A）= _____________ ，～E = __________ ，～Φ = __________________ 。

4．设$A = \{a,b,c\}$考虑下列子集

$S_1 = \{\{a,b\},\{b,c\}\}$，$S_2 = \{\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$，$S_3 = \{\{a\},\{b,c\}\}$，$S_4 = \{\{a,b,c\}\}$

$S_5 = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$，$S_6 = \{\{a\},\{a,c\}\}$

则 A 的覆盖有 _______________________ ，A 的划分有 ______________________ 。

5．设 S 是非空有限集，代数系统＜Π（S），∩，∪＞中，Π（S）对∩的幺元为 _____________ ，零元为 ______________ 。Π（S）对∪的幺元为 ______________ ，零元为 ___________。

6．若$G = <V,E>$为汉密尔顿图，则对于结点集 V 的每个非空子集 S，均有 W(G-S) ______________ $|S|$成立，其中 W(G-S)是 ________________________________ 。

二、单项选择题：（每小题 1 分，本大题共 10 分）

1．下面命题公式（ ）不是重言式。

A、$Q \to (P \vee Q)$；　　B、$(P \wedge Q) \to P$；

C、$\neg(P \wedge \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$；　　D、$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$。

2．命题“没有不犯错误的人”符号化为（ ）。

设$M(x)$: x是人，$P(x)$: x犯错误。

A、$\forall x(M(x) \wedge P(x))$；　　B、$\neg(\exists x(M(x) \to \neg P(x)))$；

C、$\neg(\exists x(M(x) \wedge P(x)))$；　　D、$\neg(\exists x(M(x) \wedge \neg P(x)))$。

3．设$A = \{\Phi\}$，B = $\Pi(\Pi$(A))，下列各式中哪个是错误的（ ）。

A、$\Phi \subseteq B$；　B、$\{\Phi\} \subseteq B$，　C、$\{\{\Phi\}\} \in B$；　D、$\{\Phi,\{\Phi\}\} \subseteq \Pi(A)$。

4．对自然数集合 N，哪种运算不是可结合的，运算定义为任$a,b \in N$（　　　　）。

A、$a*b=\min(a,b)$；　　B、$a*b=a+2b$；

C、$a*b=a+b+3$；　　D、$a*b=a,b(\bmod 3)$。

5．设 Z 为整数集，下面哪个序偶不够成偏序集（　　　　）。

A、$<Z,<>$　$(<$：小于关系$)$；　B、$<Z,\le>$　$(\le$：小于等于关系$)$；

C、$<Z,=>$　$(=$：等于关系$)$；　D、$<Z,\,|>$　$(\,|$：整除关系$)$。

6．任意具有多个等幂元的半群，它（　　　　）。

A、不能构成群；　B、不一定能构成群；

C、不能构成交换群；　D、能构成交换群。

7．设$<A,\le>$是一个有界格，它也是有补格，只要满足（　　　　）。

A、每个元素都有一个补元；　B、每个元素都至少有一个补元；

C、每个元素都无补元；　D、每个元素都有多个补元。

8．设$G=<V,E>$为无向图，$|V|=7$，$|E|=23$，则 G 一定是（　　　　）。

A、完全图；　B、树；　C、简单图；　D、多重图。

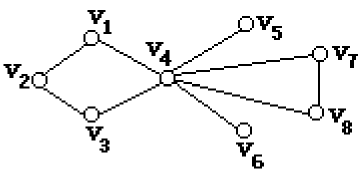
9．给定无向图$G=<V,E>$，如下图所示，下面哪个边集不是其边割集（　　　　）。

A、$\{<v_1,v_4>,<v_3,v_4>\}$；

B、$\{<v_1,v_5>,<v_4,v_6>\}$；

C、$\{<v_4,v_7>,<v_4,v_8>\}$；

D、$\{<v_1,v_2>,<v_2,v_3>\}$。



10．有 n 个结点$(n \ge 3)$，m条边的连通简单图是平面图的必要条件（　　　　）。

A、$n \ge 3m-6$；　B、$n \le 3m-6$；　C、$m \ge 3n-6$；　D、$m \le 3n-6$。

三、判断改正题：（每小题 2 分，本大题共 20 分）

1．设 A，B 为任意集合，不能 $A \subset B$ 且 $A \in B$。（　　　　　　）

2．设 R 是集合 A 上的关系，若 R_1，R_2 是对称的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是对称的。（　　　　　　）

3．群中可以有零元（对阶数大于 1 的群）。（　　　　　　）

4．循环群一定是 Abel 群。（　　　　　　）

5．每一个链都是分配格。（　　　　　　）

6．不可能有偶数个结点，奇数条边的欧拉图。（　　　　　　）

7．图 G 中的每条边都是割边，则 G 必是树。（　　　　　　）

9．公式 $\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge R(y)$ 中 $\forall x$ 的辖域为 $P(x)$。（　　　　　　）

10．公式 $\forall xP(x) \to \exists yQ(x,y)$ 的前束范式为

$\forall x \forall y(P(x) \to Q(x,y))$。（　　　　　　）

四、简答题（共 20 分）

1．用等值演算法求下面公式的主析取范式，并求其成真赋值。

$(P \vee Q) \to R$

2．集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的关系

$R = \{<1,1>, <1,3>, <2,2>, <3,3>, <3,1>, <3,4>, <4,3>, <4,4>\}$，

写出关系矩阵 M_R，画出关系图并讨论 R 的性质。

3．有 n 个药箱，若每两个药箱里有一种相同的药，而每种药恰好在两个药箱中，问共有多少种药品？

4．一棵树 T 中，有 3 个 2 度结点，一个 3 度结点，其余结点都是树叶。

（1）T 中有几个结点；

（2）画出具有上述度数的所有非同构的无向图。

五、证明题：（35 分）

1．符号化下列各题，并说明结论是否有效（用推理规则）。

凡 15 的倍数都是 3 的倍数，凡 15 的倍数都是 5 的倍数，所以有些 5 的倍数是 3 的倍数。

2．用推理规则证明：

$$(A \to B) \wedge (C \to D),\ (\neg B \vee E) \wedge (\neg D \vee F),\ \neg(E \wedge F),\ A \to C \vdash \mathrm{A}$$

3．设函数 f：$A \to B$，g：$B \to C$，若 $g \circ f$ 是满射的，则 g 是满射的。

4．当且仅当 G 的一条边 e 不包含在 G 的闭迹中时，e 才是 G 的割边。

5．设 $< S, \vee, \wedge >$ 是一个分配格，$a \in S$，令 $f(x) = x \vee a$，对任意 $a \in S$，证明：f 是 $< S, \vee, \wedge >$ 到自身的格同态映射。

一、填空题

1．对于 A，B 中原子变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 任意一组真值指派，A 和 B 的真值相同。

2．$P \wedge \neg Q$，$M_{00} \wedge M_{01} \wedge M_{11}$ 。

3．集 A 关于 E 的补集 E－A ；A ；Φ；E 。

4．S_1, S_2, S_3, S_4, S_5；S_3，S_4，S_5。

5．Φ；S；S；Φ 。

6．≤；$G - S$ 的连通分支数。

二、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	D	B	A	A	B	D	B	D

三、判断改正题

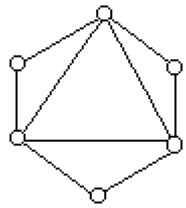
1．× 可能 $A \subset B$ 且 $A \in B$，如 $A = \{a\}$，$B = \{1, \{1\}, 2\}$。

2．× R_1，R_2是对称的，则$R_1 \circ R_2$不一定是对称的。

3．× 阶数大于 1 的群不可能有零元。

4．√。 5．√ 。

6．× 可以有偶数个结点、奇数条边的欧拉图。如图



7．× 连通图，若每条边都是割边，则 G 必是树。

8．× $\neg P$:每一个自然数不都是偶数。

9．× $\forall x$的辖域为$P(x) \to Q(x)$。

10．× $\forall xP(x) \to \exists yQ(x,y)$的前束范式为$\exists x \exists y(P(x) \to Q(u,y))$。

四、简答题

1．解：原式

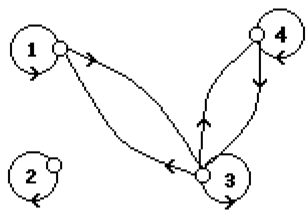
$$\Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee R \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee$$
$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$
$$\Leftrightarrow m_{001} \vee m_{000} \vee m_{111} \vee m_{101} \vee m_{001} \vee m_{011}$$

∴ 使其成真赋值为：

$$\begin{cases} P & 0 \\ Q & 0 \\ R & 1 \end{cases}, \begin{cases} P & 0 \\ Q & 0 \\ R & 0 \end{cases}, \begin{cases} P & 1 \\ Q & 1 \\ R & 1 \end{cases}, \begin{cases} P & 1 \\ Q & 0 \\ R & 1 \end{cases}, \begin{cases} P & 0 \\ Q & 0 \\ R & 1 \end{cases}, \begin{cases} P & 0 \\ Q & 1 \\ R & 1 \end{cases}。$$

2．解：

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ R 的关系图为



R 是自反、对称的。

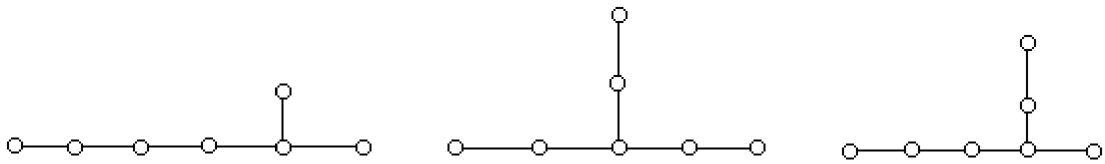
3．解：用n个结点表示n个药箱，当两种药箱放一种相同药时，则对应的两点连一条边，则得到一个无向完全图，因而所求药品数即为该图边数=$\frac{1}{2}n(n-1)$。

4．解：（1）设该树树叶数为 t，则树 T 的结点数为$3+1+t$，又边数 ＝ 结点数 － 1，

$$\sum \deg(v_i) = 边数2倍，∴ \ 3\times 2+1\times 3+t\times 1 = 2(3+t+1-1)$$

即$9+t=6+2t$，∵ $t=3$，∴ T 中 7 个结点。

（2）具有 3 个两度结点，一个 3 度结点，3 片树叶的树（非同构的）共有以下三种：



五、证明题

1．解：设个体域为整数集，$D(x,y)$：x是y的倍数。则命题符号化为：

$\forall x(D(x,15)\to D(x,3))$，$\forall x(D(x,15)\to D(x,5))$，$\exists xD(x,15)$

$\vdash \exists x(D(x,5)\wedge D(x,3))$

证明：（1） $\exists xD(x,15)$ P

（2） $D(c,15)$ ES（1）

（3） $\forall x(D(x,15)\to D(x,3))$ P

（4）$D(c,15)\to D(c,3)$ US（3）

（5）$D(c,3)$ T（2）（4）I

（6）$\forall x(D(x,15)\to D(x,5))$ P

（7）$D(c,15)\to D(c,5)$ US（6）

（8）$D(c,5)$ T（2）（7）I

（9）$D(c,5)\wedge D(c,3)$ T（5）（8）I

（10）$\exists x(D(x,5)\wedge D(x,3))$ EG（9）

∴结论有效。

2．证明：（1）A P（附加前提）

（2）$A\to C$ P

（3）C T（1）（2）I

（4）$(A \to B) \wedge (C \to D)$ P

（5）$C \to D$ T（4）I

（6）D T（3）（5）I

（7）$(\neg B \vee E) \wedge (\neg D \vee F)$ P

（8）$(B \to E) \wedge (D \to F)$ T（7）E

（9）$D \to F$ T（8）I

（10）F T（6）（9）I

（11）$A \to B$ T（4）I

（12）B T（1）（11）I

（13）$B \to E$ T（8）I

（14）E T（12）（13）I

（15）$E \wedge F$ T（10）（14）I

（16）$\neg(E \wedge F)$ P

（17）$(E \wedge F) \wedge \neg(E \wedge F)$ T（15）（16）I

∴结论有效。

3．证明：$g \circ f: A \to C$，$\forall c \in C$，$\because g \circ f$ 是满射，$\therefore \exists a \in A$，使

$g \circ f(a) = g(f(a)) = c$，令 $b = f(a) \in B$，则 $g(b) = c$，

$\therefore g$：$B \to C$ 是满射。

4．证明：必要性：设e为割边，若e包含在 G 的一个闭迹中，则从 G 中删去e仍连通，此与e是割边矛盾。

充分性：设$e = (u,v)$，不包含 G 的任一闭迹中。假设e不为割边，则$G - e$仍连通，u,v间存在一条基本回路 C，于是$C + e$则为一条闭迹与已知矛盾，$\therefore e$为割边。

5．证明：$\forall x, y \in S$，$\because f(x \vee y) = x \vee y \vee a = (x \vee a) \vee (y \vee a) = f(x) \vee (y)$ （$\vee$可结合），

$f(x \wedge y) = (x \wedge y) \vee a = (x \vee a) \wedge (y \vee a) = f(x) \wedge (y)$ (分配律)，

∴ f 是$< S, \vee, \wedge >$到自身的格同态映射。