

CT 系统标定与基于卷积反投影的图像重建

摘要

本文对 CT 系统进行标定，基于卷积反投影法重建未知介质的图像，并且得出该介质在托盘中的位置，几何形状以及吸收率的相关信息，最后给出优化设计的标定模板并分析新旧模版的标定精度和稳定性。

对 CT 系统的参数标定问题，本文建立了接受信息矩阵与吸收率矩阵的关系，并结合标定模板的对称性，计算出旋转中心的位置为 $(40.8966mm, 55.7931mm)$ ，通过系统组件的几何关系，计算出探测器单元间距大小为 $0.2759mm$ 。X 射线初始方向与 X 正半轴顺时针成 61° 角，经过 180 次 1° 的逆时针旋转，最终与 X 正半轴逆时针成 119° 角。

对附件 3 某未知介质的 CT 重建问题，本文基于傅里叶切片定理建立了卷积反投影重建模型。对 X 射线的每一个方向，先卷积滤波，再通过反投影将接受信息还原为一个二维矩阵，最终重建图像为 180 次二维矩阵的叠加。得出介质的几何形状形似人的头骨，头骨左侧距正方形托盘左边缘 $28.9044mm$ ，上侧距上边缘 $6.2496mm$ ，宽度为 $44.1378mm$ ，高度为 $82.0260mm$ 。本文建立了吸收率归一化模型，通过附件二接收信息矩阵还原出原图像吸收率矩阵，将其与附件一吸收率矩阵比值的均值作为吸收率比例系数。通过该系数求出重建图像的相对吸收率矩阵，得到要求的 10 个位置的相对吸收率为 $0.0090, 0.9906, 0.0027, 1.1974, 1.0705, 1.4772, 1.2918, 0.0046, 0.0002, 0.0243$ 。通过阈值分析，对相对吸收率进行进一步降噪，得到优化后 10 个位置的相对吸收率为 $0, 0.9906, 0, 1.1974, 1.0705, 1.4772, 1.2918, 0, 0, 0$ 。

对附件 5 另一未知介质的 CT 重建问题，通过分析接收信息轮廓模糊得出含有明显噪声，因而在卷积反投影重建模型的基础上采用小波变换进行降噪。最终重建图像为一块相互牵连的组织，得到 10 个坐标点的相对吸收率为 $0.0104, 2.4336, 6.3433, 0.0111, 0.5005, 2.4619, 4.7460, 0.0898, 6.9776, 0.1622$ 。

最后本文设计的新模板为放置在托盘上的五个外切圆。基于此模版标定了旋转中心。建立了精度评价指标：一是实际旋转中心和标定旋转中心的间距，二是通过标定之后重建图像与原图像的重合度；建立了稳定性评价指标：一是加入噪声对参数标定的影响，二是 X 射线发射起始方向对图像重合度的影响。根据评价指标最终本文设计的模板精度和稳定性更高。例如初始角度为 81° 时新模版重合度为 0.9923 ，原模版重合度为 0.9899 。

关键字： 卷积反投影图像重建模型 吸收率归一化 小波变换

一、问题重述

一种典型的二维 CT 系统如图 (1) 所示, 平行入射的 X 射线垂直于探测器平面, 每个探测器单元等距排列。X 射线的发射器和探测器相对位置固定不变, 整个发射-接收系统绕某固定的旋转中心逆时针旋转 180 次。对每一个 X 射线方向, 在具有 512 个等距单元的探测器上测量经位置固定不动的二维待检测介质吸收衰减后的射线能量, 并经过增益等处理后得到 180 组接收信息。

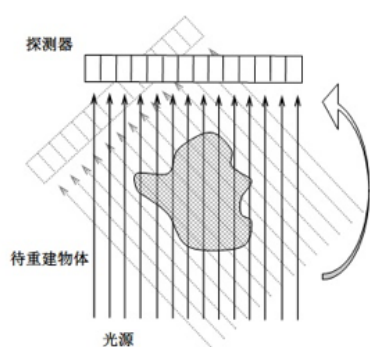


图 1 CT 系统示意图

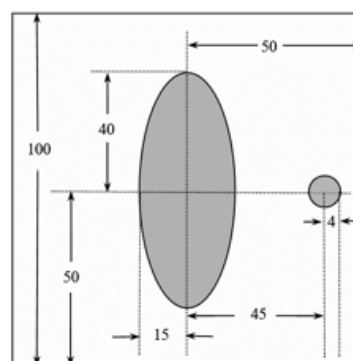


图 2 模版示意图 (单位: mm)

1. 在如图 (2) 所示的正方形托盘上放置两个均匀固体介质组成的标定模板, 根据这一模板及其接收信息, 确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。
2. 利用上述 CT 系统得到某未知介质的接收信息。在 (1) 的标定基础上, 确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息。具体给出题中给出的 10 个位置处的吸收率。
3. 利用上述 CT 系统得到另一个未知介质的接收信息。在 (1) 的标定基础上, 给出该未知介质的相关信息。同 (2) 给出 10 个位置出的吸收率。
4. 分析 (1) 中参数标定的精度和稳定性。在此基础上自行设计新模板、建立对应的标定模型, 以改进标定精度和稳定性, 并说明理由。

二、问题分析

CT 系统在安装过程中往往会存在机械误差, 而这些误差对物体重建的准确性影响是至关重要的, 本文对如何确定标定系统的参数、通过接收信息矩阵如何还原二维图像及对新建立的模版的精度和稳定性这三个问题展开探究。

本文首先需要通过题中给定的标定模板，即正方形托盘上的两个均匀介质，通过两均匀介质的吸收率矩阵和接收信息矩阵得出 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置，探测器单元间的距离，以及 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。本文发现当 X 射线方向为水平和竖直方向时，接收信息（吸收率延 X 射线方向的积分）能取得极值。因而通过比接受信息和标定模板，结合标定模板的对称性，找到 X 射线方向为水平和竖直方向时对应的接受信息中的旋转次数，再结合几何位置、小圆半径的对应关系依次确定旋转中心以及探测器单元间距 d 。本文发现 X 射线方向为水平方向和竖直方向时，可以找出对应的旋转次数，并可以求出每次的旋转平均角度，本文先假设每次采用该平均旋转角度均匀扫描，后用该平均旋转角度去还原图像并进行检验。

之后本文需要通过附件三某未知介质的接收信息矩阵确定出该未知介质在正方形托盘中的位置，以及该未知介质的几何形状和吸收率的信息，并且要求给出 10 个特定点的吸收率。本文先用傅里叶切片定理以及卷积反投影的方法对图像进行还原，再得到并参照附件一建立吸收率的比例系数模型，对卷积反投影得出的图像求出任意一点的相对吸收率，通过坐标可以确定 10 个特定点的相对吸收率的大小。

接着本文需要通过附件五中的接收信息矩阵确定出该未知介质的相关信息，由于附件五中每一点都存在吸收率，本文认为该接收信息矩阵存在噪声，通过对附件五的接收信息矩阵进行卷积反投影还原，可以得出重构的图像，观察发现重构图像的轮廓不是很清晰，内部连续性不好，考虑可能存在非线性，非平稳噪声，因此采用小波滤波，对图像进行降噪处理。将降噪后的信息再进行卷积反投影重构图像，最后得出图像上各点的相对吸收率，并求出给定特定 10 个坐标点下的相对吸收率。

最后本题要求给出新的设计模板，使得在对 CT 成像仪的参数确定上经度更高，稳定性更强。经度更高即是指设计出的该模板对 CT 系统旋转中心的确定的准确性要比原标定模板的准确性高，并且本文运用新设计的标定模板产生的旋转中心去还原原图形的重合度高于原设计的标定模板产生的旋转中心去还原原图形的重合度。稳定性更强一方面是指在加入外界噪声时，新模板标定旋转中心坐标的改变要比原模板标定的旋转中心坐标的改变小，另一方面，对系统初始参数的改变，当观察到新设计模板对图像的还原度较原设计模板高时说明新模版对图像的还原受到初始参数改变的影响较小，更加稳定。本文在考虑参数标定时仅考虑对旋转中心的标定是因为探测器单元间的距离，以及 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向直接受到旋转中心确定的影响。

三、模型假设

1. X 射线的发射器、探测器相对位置固定不变。
2. 发射器发射的 X 射线能量恒定。
3. X 射线在穿过物体时不发生散射。

4. 所有重建图像均用 256×256 的矩阵表示。

四、符号说明

4.1 名词解释

1. 接收信息矩阵：CT 扫描系统得到的某未知介质的接收信息所构成的矩阵。
2. 吸收率矩阵：矩阵中每个元素反映了该点的吸收强度。

4.2 变量说明

符号	意义	单位
COR	CT 旋转中心	-
$f(x, y)$	原图像的直角坐标方程	-
$F(\omega_1, \omega_2)$	原图像傅立叶变化后的方程	-
$f(r, \theta)$	原图像的极坐标方程	-
J	雅可比符号	-
φ	X 射线与平面直角坐标系正方向的夹角	度 ($^{\circ}$)
p	接收信息	-
$F\{\}$	傅立叶变换	-
$F^{-1}\{\}$	傅立叶逆变换	-
$dataTable$	接收信息矩阵	-
n	系统旋转次数	次
k	接收器单元序号	-
d	接收器单元间距	毫米 (mm)
D	原标定模版小圆直径	毫米 (mm)
α	X 射线与 X 正半轴的夹角	度 ($^{\circ}$)

五、模型建立与求解

5.1 CT 系统的参数标定

本题要求给出 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。运用接收信息矩阵的局部极值，确定旋转中心的位置，并结合标定模板的对称性，找到 X 射线方向为水平和竖直方向时对应的接收信息中的旋转次数，再结合几何位置、小圆半径的对应关系依次确定所求参数。

5.1.1 模型建立

以正方形托盘的左下角做为原点，下边框自左向右方向为 X 轴正方向，左边框自下向上方向为 Y 轴正方向建立平面直角坐标系，如下图（3）所示。在坐标系中，椭圆标定模版中心为 $O_1(50, 50)$ ，圆形标定模版圆心为 $O_2(95, 50)$ 。

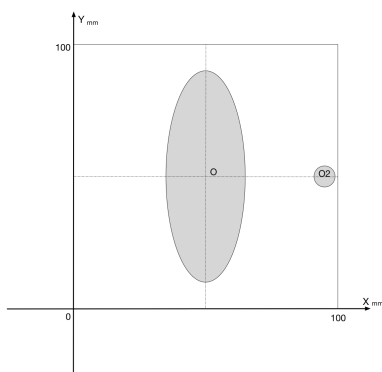


图 3 坐标系建立（单位：mm）

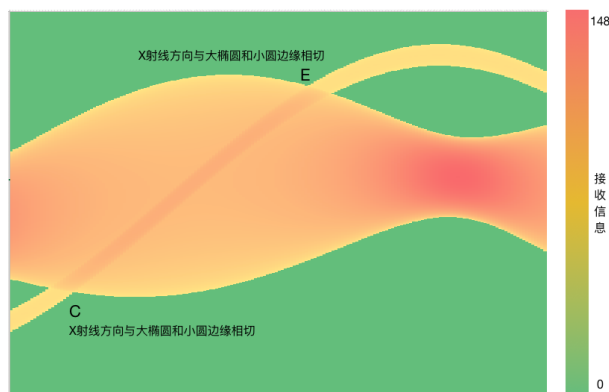


图 4 附件二探测器接收信息色阶图

通过分析附件二的接收信息色阶图（如图（4）所示），可以发现小圆的接收信息近似为一条相对窄的有宽度的正弦曲线，大椭圆的接收信息为中部的区域块。当这两个区域重叠时，即是 X 射线同时穿过了小圆和大椭圆。由于整个发射-接收系统是绕某固定的旋转中心进行逆时针，结合接收信息的相关数据，如通过小圆和大椭圆的相对位置等可大致判断出探测器旋转的起点和终点（如图（5）所示）。

由于模板是匀质介质，X 射线穿过的介质的长度达到极值时，即当 X 射线方向为水平和竖直方向时，接收信息（吸收率延 X 射线方向的积分）能取得极值。X 射线方向为竖直方向时，发射穿过大椭圆长半轴的那一条 X 射线的探测器会取得极值，这个极值是全局最大值，可对接收信息直接搜索得到。X 射线为水平方向时，发射穿过大椭圆短半轴的那一条 X 射线的探测器会取得极值，但可能因为误差不明显。因而通过对称性（如图（6）所示）来求 X 射线为水平方向时对应的接收信息。

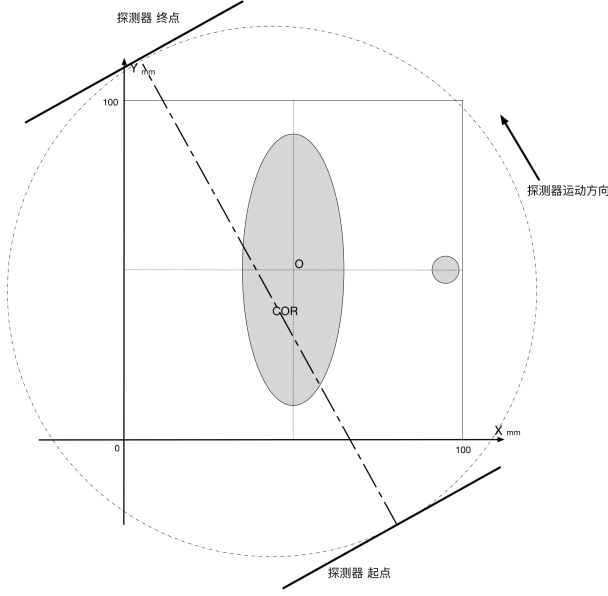


图 5 探测器旋转路径示意图

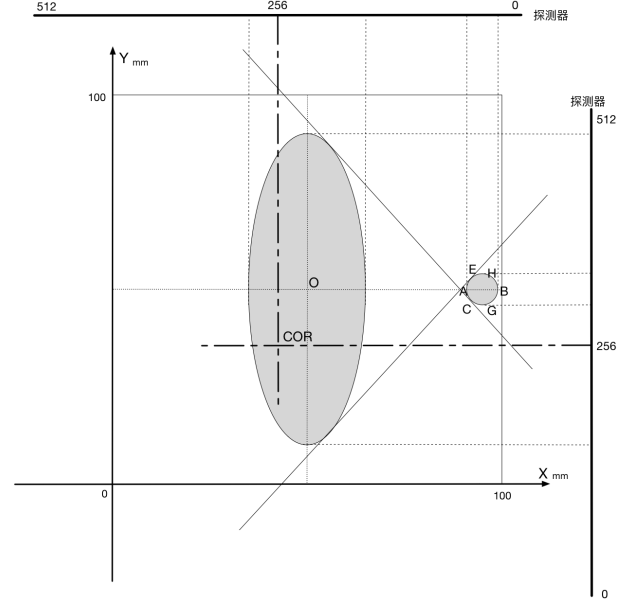


图 6 旋转中心定位原理示意图

$$\begin{cases} k = dataTable_{row} \\ n = dataTable_{column} \end{cases} \quad (1)$$

如公式 (1) 所示，接收信息矩阵 $dataTable$ 的行数 row 是探测器的序号 k ，接受信息的列数 $column$ 是扫描次数 n ($n = 1, 2, \dots, 180$)。对于矩阵中的每一个点对应的探测器序号 k 和扫描次数 n ，也采取相同的表示方式。下面结合以上分析对 X 射线方向为垂直和水平方向具体讨论。

a. X 射线方向为竖直方向

$$\begin{cases} [l]n_{\perp} = MAX(dataTable_{column}) \\ D = (B_{row} - A_{row}) \cdot d_{\perp} \end{cases} \quad (2)$$

公式 (2) 中 n_{\perp} 为 X 射线为垂直方向时对应的扫描次数， A 、 B 分别为 X 射线水平时与小圆相切的左端点和右端点（如图 (6) 所示）， D 为小圆直径， d_{\perp} 为 X 射线方向为垂直方向时计算出的探测器单元间距。

b. X 射线方向为水平方向

$$\begin{cases} n_{\parallel} = \frac{1}{2}(E_{column} + C_{column}) \\ D = (H_{row} - G_{row}) \cdot d_{\parallel} \end{cases} \quad (3)$$

公式 (3) 中 n_{\parallel} 为 X 射线为水平方向时对应的扫描次数， C 、 E 分别为 X 射线与大椭圆和小圆边缘同时相切与小圆的两个切点， H 、 G 分别为 X 射线竖直时与小圆相切的

上端点和下端点（如图（6）所示）， D 为小圆直径， d_{\parallel} 为 X 射线方向为垂直方向时计算出的探测器单元间距。

综合以上公式1、2，可以得到旋转中心 COR 和探测器单元间距的表达式。

(1) 旋转中心 COR 位置确定

旋转中心即为 X 射线方向为水平和竖直方向时，所对应探测器中垂线的交点。

$$\begin{cases} COR_{row} = \frac{512}{2} = 256 \\ COR_x = O_x - (O_{row} - COR_{row}) \cdot d \\ COR_y = O_y - (O_{row} - COR_{row}) \cdot d \end{cases} \quad (4)$$

公式（4）中 COR 是旋转中心， O 是大椭圆的中心， d 是探测器单元间距。

(2) 探测器单元间距 d 确定

探测器单元间距为 d_{\parallel} 和 d_{\perp} 的平均值。代入公式（2、3）得到以下计算公式（5）

$$d = \frac{1}{2}(d_{\perp} + d_{\parallel}) = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{B_{row} - A_{row}} + \frac{D}{H_{row} - G_{row}} \right) \quad (5)$$

公式（5）中 d_{\parallel} 和 d_{\perp} 分别为 X 射线方向为垂直、水平方向时计算出的探测器单元间距， A 、 B 分别为 X 射线水平时与小圆相切的左端点和右端点， D 为小圆直径， H 、 G 分别为 X 射线竖直时与小圆相切的上端点和下端点。

(3) CT 系统使用的 180 个方向的确定

通过分析，发现 n_{\perp} 与 n_{\parallel} 之差恰好为 90，即 X 射线方向从水平方向转到竖直方向刚好旋转了 90 次，猜想是一度一次均匀转动，因而 X 射线初始方向与 X 轴正方向的夹角 α_1 和 X 射线转到水平方向的旋转次数 n_{\parallel} 在数值上相等，并在模型求解中给出了具体验证。

$$\begin{cases} \alpha_1 = n_{\parallel} = \frac{1}{2}(E_{column} + C_{column}) \\ \alpha_i = |\alpha_1 - (i - 1)| \quad (i = 1, 2, \dots, 180) \end{cases} \quad (6)$$

公式（6）中， α_1 为 X 射线初始方向与 x 轴正方向的夹角，一次 1° 转动，从第四象限转到第二象限， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{180}$ 分别表示 CT 系统使用的 180 个方向。

5.1.2 模型求解

根据模型，给出求解算法如下所示：

1. 将原图像的点 A 、 B 、 C 、 E 、 O 、 G 、 H 分别与附近二中 512×180 的接收信息矩阵按欧式距离最小的规则对应。
2. 通过对接收信息矩阵 $dataTable$ 遍历得到最大值得到 n_{\perp} 。
3. 通过对称性结合公式 (3) 得到 n_{\parallel} 。
4. 通过公式 (5) 求得探测器单元间距 d 。
5. 通过公式 (4) 求得旋转中心 COR 位置。
6. 通过 (6) 求得 CT 系统使用的 180 个角度。

(1) 旋转中心 COR 位置确定

经过求解，旋转中心 COR 在托盘中的位置为：距托盘左边缘 $40.8966mm$ ，距托盘下侧边缘 $55.7931mm$ (COR 位置如图 (11) 所示)。

(2) 探测器单元间距 d 确定

经过求解， $d = 0.2759mm$

(3) CT 系统使用的 180 个方向的确定

经过求解，当 X 射线方向为水平方向时，旋转次数 $n_{\parallel} = 61$ 。当 X 射线方向为竖直方向时，旋转次数 $n_{\perp} = 151$ 。发现 n_{\perp} 与 n_{\parallel} 之差恰好为 90，先假设装置是每次 1° 均匀转动，再分等间距扫描方式 (0.97° 和 1.03°) 和非等间距扫描方式 (0.5° 、 1.5° 交替进行) 进行模型检验，分别重建图像 (具体重建模型在下一小节：基于卷积反投影的 CT 图像重建中给出)，并与等间距扫描方式 (1°) 重建的图像及原始图像进行比较 (如图 7 ~ 10 所示)。

等间距扫描 (1°) 方式重建的图像如图 (7) 所示，观察发现等间距扫描方式重建的图像与原图像非常相近，还原效果好。

非等间距扫描 (0.5° 、 1.5° 交替进行) 方式重建的图像如图 (8)，观察发现重建的图像重影严重，图像已经无法识别。

等间距扫描 (0.97° 、 1.03°) 方式重建的图像如图 9、10，观察发现即便仅有 0.03° 的偏差，重建的图像轮廓已开始出现毛刺和畸变。

因而可以认为我们的假设是正确，再通过公式 (6) 求得 X 射线初始方向与 X 正半轴顺时针夹角为 61° ，经过 180 次 1° 的逆时针旋转，最终与 X 正半轴夹角 119° (如图

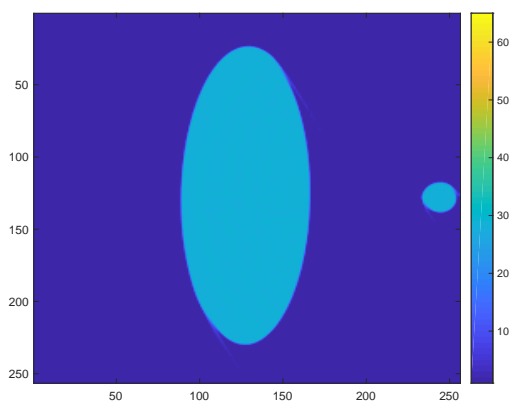


图 7 均匀间距 1° 时重建结果

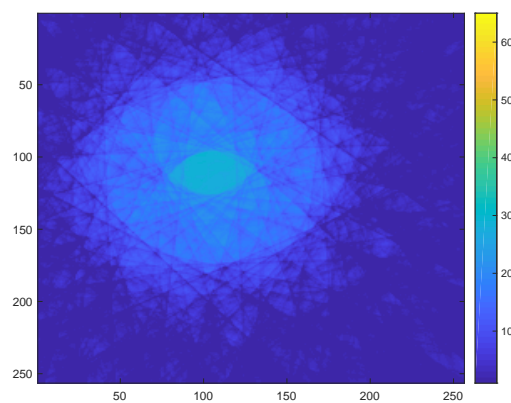


图 8 非均匀间距 $0.5^\circ/1.5^\circ$ 交替时重建结果

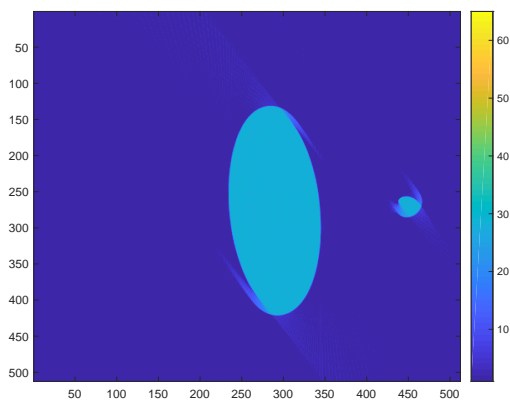


图 9 均匀间距 (1.03°) 时重建结果

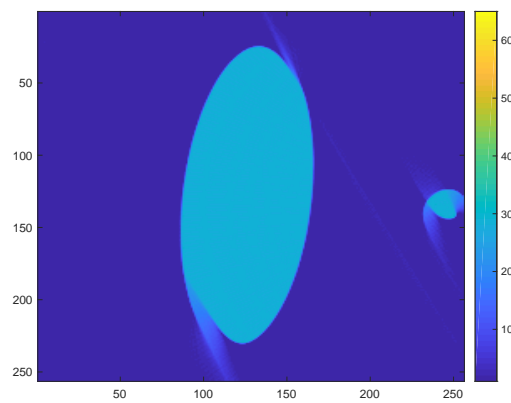


图 10 均匀间距 (0.97°) 时重建结果

(12) 所示)。

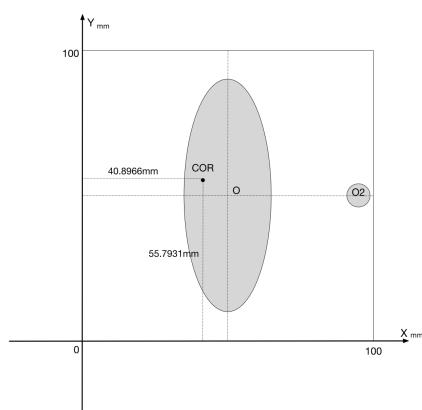


图 11 旋转中心 COR 位置示意图

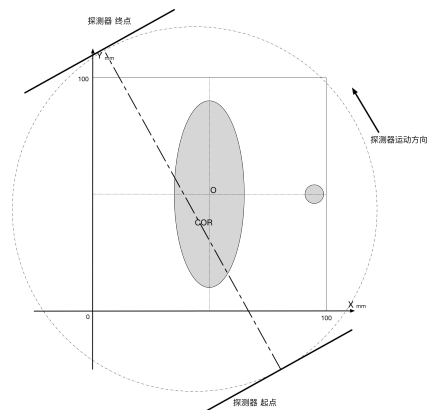


图 12 探测器旋转路径示意图

5.2 基于卷积反投影的 CT 图像重建

5.2.1 模型建立

(1) 卷积反投影法图像重建

利用卷积反投影法重建图像时, 先把由检测器上获得的原始数据与一个滤波函数进行了卷积运算, 得到各方向卷积的投影函数; 然后再把它们从各方向进行反投影, 即按其原路径平均分配到每一矩阵元上, 进行叠加后得到每一矩阵元的 CT 值; 再经过适当处理后就可以得到被扫描物体的断层图像。

设原图像的二维表达式为 $f(x, y)$, 其定义如下公式 (7) 所示。

$$f(x, y) = F^{-1}[F(\omega_1, \omega_2)] \quad (7)$$

其中 $F(\omega_1, \omega_2)$ 为 $f(x, y)$ 的二维傅立叶变换^[1] (如公式 (8) 所示)。

$$F(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy \quad (8)$$

由二维傅立叶变换逆变换可得公式 (9),

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega_1, \omega_2) e^{j2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2 \quad (9)$$

其中

$$\omega_1 x + \omega_2 y = \rho(x \cos \varphi + y \sin \varphi) \quad (10)$$

可理解为在频域进行坐标变换 (如公式 (11) 所示)。

$$\begin{cases} \omega_1 = \rho \cos \varphi \\ \omega_2 = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (11)$$

如图 (13) 所示, 对于线 L 上的点, 为坐标原点到线 L 的距离, 表示线 L 法线方向与直角坐标系 X 轴正方向的夹角。因此 $x_r = y \sin \varphi + x \cos \varphi$, 其中 $M(x, y)$ 为 X 射线通过图像中的一点, 在极坐标系中 M 的坐标也可以表示为 (r, θ) 。其中 r 为 M 与坐标原点 O 的距离, θ 为 OM 与极轴的夹角。因此, 公式 (10) 可化为如下公式 (12) 所示的形式。

$$\omega_1 x + \omega_2 y = 2\pi \rho(x \cos \varphi + y \sin \varphi) = 2\pi \rho x_r = 2\pi \rho r \cos(\theta - \varphi) \quad (12)$$

将公式 (9) 进行坐标变换, 其中 $d\omega_1 d\omega_2 = |J| d\rho d\varphi$, 雅可比行列式 $|J|$ 计算如公式 (13) 所示。

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} & \frac{\partial \omega_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial \rho} & \frac{\partial \omega_2}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\pi \cos \varphi & -2\pi \rho \sin \varphi \\ 2\pi \sin \varphi & 2\pi \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = 4\pi^2 \rho \quad (13)$$

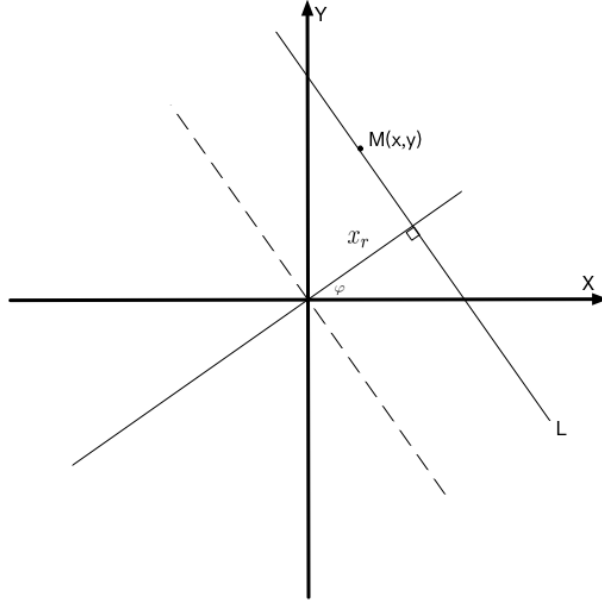


图 13 坐标关系示意图

将雅可比行列式 $|J|$ 的计算代入 $d\omega_1 d\omega_2 = |J| d\rho d\varphi$ 中，得到公式 (14)：

$$d\omega_1 d\omega_2 = |J| d\rho d\varphi = 4\pi\rho^2 \cdot d\rho d\varphi \quad (14)$$

将公式 (12、14) 代入公式 (8) 中，可得如下公式 (15)。

$$\int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) e^{j2\pi\rho r \cos(\theta-\varphi)} |\rho| d\rho d\varphi \quad (15)$$

公式 (15) 中 $P(\rho, \theta)$ 为图像 $f(x, y)$ 经过傅立叶变换 $F(\omega_1, \omega_2)$ 后在某一极角下的极坐标。根据傅里叶切片定理^[2]， $P(\rho, \theta)$ 也是 $f(x, y)$ 在某一方向投影函数的二维傅立叶变换。将公式 (15) 转换为二次积分，得到公式 (16) 如下所示。

$$\int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} |\rho| P(\rho, \theta) e^{j2\pi\rho r \cos(\theta-\varphi)} d\rho \quad (16)$$

公式 (16) 中第一次积分过程如下公式 (17) 所示。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\rho| P(\rho, \theta) e^{j2\pi\rho r \cos(\theta-\varphi)} d\rho = h(x_r) \otimes p(x_r, \varphi) = g(x_r, \varphi) \quad (17)$$

公式 (17) 的物理意义为，投影 $p(x_r, \theta)$ 经过 $|\rho| = F[h(x_r)]$ 滤波器后修正的投影 $g(x_r, \varphi)$ 在满足 $x_r = r \cos(\theta - \varphi)$ 时的值。将公式 (17) 代入公式 (16) 中得：

$$\int_0^\pi g(x_r, \varphi) d\varphi = \int_0^\pi g[r \cos(\theta - \varphi), \varphi] d\varphi = f(x, y) \quad (18)$$

公式 (18) 的物理意义可理解为经过给定 (r, θ) 所有滤波后的投影在 $\varphi = 0 \sim \pi$ 范围内的累加-反投影重建得 (r, θ) 点所在的吸收率叠加值。将 $f(x, y)$ 离散化得

$$f(x, y) = \Delta\varphi \sum_{n=0}^{N-1} g[(x \cos n\Delta\varphi + y \sin n\Delta\varphi), n\Delta\varphi] \quad (19)$$

即

$$f(i\Delta\varphi, j\Delta\varphi) = \Delta\varphi \sum_{n=0}^{N-1} g[(i\Delta x \cos n\Delta\varphi + j\Delta y \sin n\Delta\varphi), n\Delta\varphi] \quad (20)$$

公式19和20中 $\Delta\varphi$ 为托盘每次旋转的角度， N 为总旋转次数。

(2) 吸收率比例系数的构建

题中给出，具有 512 个等距单元的探测器测量待检测介质吸收衰减后的射线能量，并通过增益处理得出 180 组接收信息。因为对接收器的接收信息进行了处理，可以得出，附件二的吸收率经处理后，得出附件一中该均匀介质的吸收率为 1，方形托盘上没有放置介质的部分的单位吸收率为 0。对于第二问中某未知介质在图中特定位置的“相对吸收率”的确定，本文提出“吸收率比例系数”这一个概念，并认为“吸收率的比例系数”是系统参数，不随检测介质不同而发生改变。

定义**吸收率比例系数** η 如下公式 (21) 所示，式中分子 I 表示吸收率，分母 I_0 表示相对吸收率。

$$\eta = \frac{I}{I_0} \quad (21)$$

本文通过附件二接收信息矩阵，通过上述“卷积反投影图像重建模型”对附件一中的图像进行重构，X 射线扫描的旋转中心、初始位置、旋转次数以及每次旋转的角度均与第一问得出的系统标定参数相同。得出重构后的图像每一个像素所对应的吸收率 I 。由于原图像中仅有均匀介质和没有放置介质两部分。本文首先对得出的重构图像上各点的吸收率进行阈值分割，通过图像将吸收率小的像素点置 0，即将该部分视为没有摆放介质的部分，然后本文将对剩余吸收率集中的大多数吸收率取均值，视为该均匀介质的吸收率 I 。对剩余非常少的值本文认为是合理误差，不进行考虑。

通过上式 (21) 可以求出该系统吸收率的比例系数 η 。

(3) 模型汇总

结合基于卷积反投影的 CT 图像重建小节中前述两个模型，本文首先对附件三的吸收信息矩阵运用“滤波反投影图像重建模型”对图像进行重构，X 射线扫描的旋转中心、初始位置、旋转次数以及每次旋转的角度均与第一问得出的系统标定参数相同，得出重构后的图像及重构图像中每一个像素点的吸收率 I ，然后运用模型二求出的 η 值，通过如下公式 (22)，求出图像中每一点的相对吸收率。

$$I_0 = \frac{I}{\eta} \quad (22)$$

5.2.2 模型求解

附件 3 中给出了利用上述 CT 系统得到的某未知介质的接收信息。本文需要利用第一问中得到的标定参数，确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息。另外，需要给出附件 4 中所给的 10 个位置处的吸收率。模型建立中，本文已经给出了基于傅立叶中心切片定理通过接受信息还原未知介质二维图像的方法。其中，本文采用的卷积反投影法既还原了原始图像，又有效地滤除了噪声。

求解算法如下：

1. 读取附件 3 接收信息的数据，存入矩阵 $dataTable(512 \times 180)$ 中。
2. 构造数字滤波器，存入矩阵 $hl(1 \times 512)$ 中。
3. 角度从初始角度（方向为 x 轴正方向逆时针旋转 61° ）开始，逐次增加，步长为 1° ，即循环变量 m 初始值为 1，逐次增加，步长为 1，将 $dataTable$ 的第 m 列和 hl 卷积。
4. 对（3）中确定角度，计算反投影的二维图像，即循环变量 i, j 初始值为 1，逐次增加，步长为 1，将卷积后的结果代入反投影离散求和公式，每次循环进行累加。
5. （3）、（4）三层循环后计算出 180 次扫描对应二维图像的 180 次累加，得到还原的二维图像。
6. 利用（1）中标定将图像进行缩放平移，得到 256×256 的原图像。
7. 对原图像进行阈值处理，将背景置为 0，并参照附件三将吸收率归一化为相对吸收率。
8. 从图像中得到该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状以及附件 4 中所给的 10 个位置处的吸收率。

通过求解，得到重建的未知介质的图像如图（14）所示：

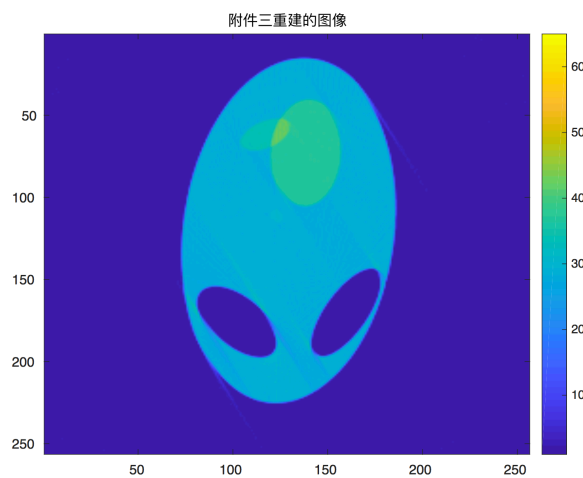


图 14 附件三重建的图像

此时得到 256×256 对应像素点的值还需要除以吸收率比例系数进行归一化成为相对吸收率。吸收率比例系数通过附件一进行计算。

(1) 吸收率比例系数，附件三相对吸收率的求解

首先对附件二重建的图像的吸收率进行分析，先以 1 为步长，得出每个吸收率范围内的像素点个数和累计的像素点个数如表（1）所示，

表 1 不同吸收率范围对应的像素点个数

吸收率范围	像素点个数	像素点累计个数
<1	49706	49706
<2	2378	52084
<3	191	52275
<4	110	52385
<5	81	52466
...
<26	48	53079
<27	47	53126
<28	3201	56327
<29	9185	65512
<30	24	65536

可见吸收率集中在 $I < 4$ 和 $I > 27$ 两个范围内。其他范围内较为稳定，可认为是受到噪声干扰的介质的过渡部分。吸收率 $I < 4$ 对应的像素点阵是受噪声干扰的无介质区域，吸收率 $I > 27$ 对应的像素点阵是标定模板的匀质区域。通过附件二可知该匀质介质吸收率为 1。

因而将吸收率 $I > 27$ 对应的均值作为吸收率比例系数 η 。计算得 $\eta = 28.1145$ ，类似附件二重建图像的做法，首先对附件三重建图像的吸收率进行分析，为阈值处理做准备（不同吸收率范围对应的像素点个数表见附件）。

可得吸收率集中在 $I < 4$ 和 $I > 25$ 两个范围内。其他范围内较为稳定，可认为是受到噪声干扰的介质的过渡部分。吸收率 $I < 4$ 对应的像素点阵是受噪声干扰的无介质

区域，吸收率 $I > 25$ 对应的像素点阵是某未知介质的区域。将受噪声干扰的无介质区域对应的 $I < 4$ 的吸收率置为 0，将剩余部分对应的吸收率 I 除以吸收率比例系数，得到相对吸收率，得到一个新的 256×256 的相对吸收率矩阵。

为避免将受噪声干扰的无介质区域对应的 $I < 4$ （相对吸收率 $I_0 < 0.1423$ ）的吸收率置为 0 对图像影响过大，重新绘制一次图形（如图（15）所示）。

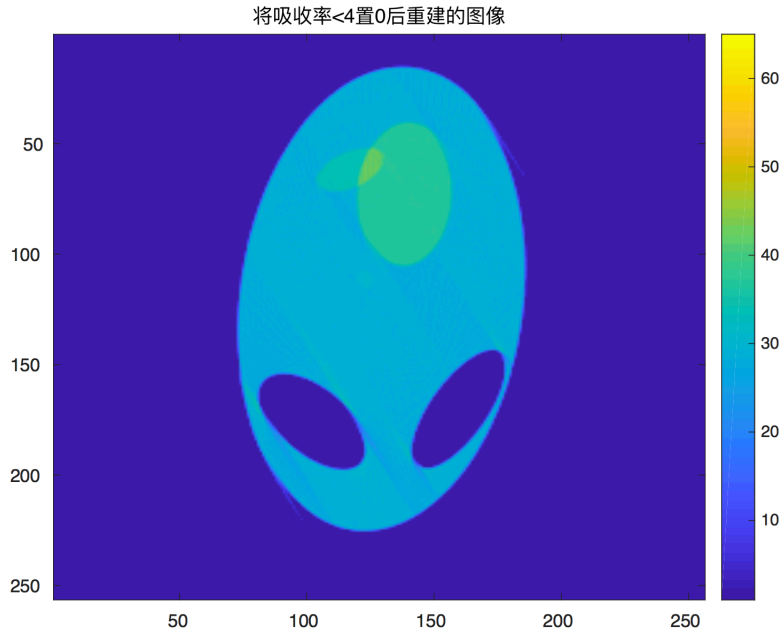


图 15 将吸收率 $I < 4$ 的像素点置 0 后重建的图像

通过观察发现发现几乎无影响，说明吸收率 $I < 4$ 对应的像素点阵的确是受噪声干扰的无介质区域。

（2）确定该未知介质在正方形托盘中的位置

该未知介质左侧距正方形托盘左边缘 $28.9044mm$ ，上侧距正方形托盘上边缘 $6.2496mm$ ，左右宽度为 $44.1378mm$ ，上下长度为 $82.0260mm$ 。

（3）确定该未知介质的几何形状

几何形状如图（15）所示，由一个大椭圆和两个小椭圆组成，其中大椭圆有两个椭圆空洞。整体看来，类似人的头骨。

(4) 确定该未知介质的相对吸收率

(1) 中得到了新的 256×256 的相对吸收率矩阵，因而只需要把 10 个位置转换成 256×256 中的坐标即可读出吸收率。原图 256×256 像素中，像素距离为 $100/256 = 0.3906mm$ 。10 个位置以 mm 为单位的横纵坐标分别除以像素距离取整即得到在原图中的坐标，进而求得要求的相对吸收率。结果如下表 (2) 所示。

表 2 无介质区吸收率置 0 时求解结果

据左侧边界距离	据下侧边界距离	相对吸收率
10.0000	18.0000	0.0000
34.5000	25.0000	0.9906
43.5000	33.0000	0.0000
45.0000	75.5000	1.1974
48.5000	55.5000	1.0705
50.0000	75.5000	1.4772
56.0000	76.5000	1.2918
65.5000	37.0000	0.0000
79.5000	18.0000	0.0000
98.5000	43.5000	0.0000

若不将受噪声干扰的无介质区域对应的 $I < 4$ 的吸收率置为 0，算出的 10 个位置的相对吸收率结果如下表 (3) 所示。

表 3 无介质区吸收率不置 0 时求解结果

据左侧边界距离	据下侧边界距离	相对吸收率
10.0000	18.0000	0.0090
34.5000	25.0000	0.9906
43.5000	33.0000	0.0027
45.0000	75.5000	1.1974
48.5000	55.5000	1.0705
50.0000	75.5000	1.4772
56.0000	76.5000	1.2918
65.5000	37.0000	0.0046
79.5000	18.0000	0.0002
98.5000	43.5000	0.0243

5.3 基于小波变换与卷积反投影图像重建模型

观察附件五中的接收信息矩阵，发现所有点均存在吸收率，因此本文认为附件五的采集数据中必然存在噪声，通过对附件五的接收信息矩阵进行卷积反投影还原，可以得出重构得图像，观察发现重构图像的轮廓不清晰，内部连续性不好，考虑可能存在非线性，非平稳信号，因此采用小波变换^[3]，对图像进行降噪处理。降噪后再进行卷积反投影重构图像，最后求出给定坐标点下的相对吸收率。

5.3.1 小波变换模型建立

有用信号通常表现为低频信号或是相对比平稳，而噪声信号通常表现为高频信号。利用小波对含噪的原始信号分解后，含噪部分主要集中在高频小波系数中，并且包含有用信号的小波系数幅值较大，但数目少；而噪声对应的小波系数幅值小，数目较多。

基于上述特点，可以应用门限阈值法对小波系数进行处理，对于较小的小波系数置 0，较大的保留，然后对图像重构达到消噪的目的。

$$W(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \otimes h\left(\frac{t - \tau}{a}\right) d\tau \quad (23)$$

公式 (23) 中 $W(a, \tau)$ 为小波变换后的表达式， $x(t)$ 为原表达式， h 为选择的小波

基, a 为尺度因子控制小波函数的伸缩, t 为小波函数的平移量。

5.3.2 模型求解

附件 5 中给出了利用上述 CT 系统得到的另一个未知介质的接收信息。本文需要利用第一问中得到的标定参数, 给出该未知介质的相关信息。另外, 需要给出附件 4 所给的 10 个位置处的吸收率。通过绘制接收信息的图, 可以发现附件 5 相比附件 3 而言接收信息轮廓很不清晰, 有明显的噪声信号。因而在卷积反投影的基础上, 本文加入了小波变换, 增加了滤波的功能。

求解算法如下:

1. 读取附件 5 接收信息的数据, 存入矩阵 $dataTable(512 \times 180)$ 中。
2. 采用 db1 小波基分解 $dataTable$ 。
3. 从系数得到近似信号。
4. 从系数得到细节信号。
5. 重构信号 $dataTable$ 。
6. 构造数字滤波器, 存入矩阵 $hl(1 \times 512)$ 中。
7. 角度从初始角度 (方向为 x 轴正方向逆时针旋转 61°) 开始, 逐次增加, 步长为 1° , 即循环变量 m 初始值为 1, 逐次增加, 步长为 1, 将 $dataTable$ 的第 m 列和 hl 卷积。
8. 对 (7) 中确定角度, 计算反投影的二维图像, 即循环变量 i 、 j 初始值为 1, 逐次增加, 步长为 1, 将卷积后的结果代入反投影离散求和公式, 每次循环进行累加。
9. (7)、(8) 三层循环后计算出 180 次扫描对应二维图像的 180 次累加, 得到还原的二维图像。
10. 利用问题一中 CT 系统参数标定将图像进行缩放平移, 得到 256×256 的原图像。
11. 对原图像进行阈值处理, 将背景置为 0, 并参照附件三将吸收率归一化为相对吸收率。
12. 从图像中得到该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状以及附件 4 中所给的 10 个位置处的吸收率。

(1) 重建图像相关信息

按照前述方法还原图像如图（16）所示。

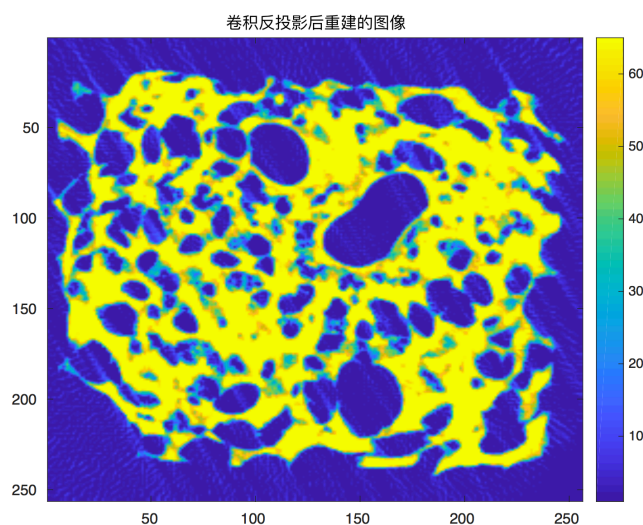


图 16 卷积反投影后重建的图像

通过观察可以看到图（16）中不再是一个形状规则的图形，也不是匀质介质，深浅也表示了不同像素点的吸收率，可能是一块不规整的组织结构。滤波后重建的图像边缘更清晰，每一块块内更连续。

(2) 重建图像的频谱分析

对表示未滤波重建的原图像和滤波后重建的原图像的矩阵分别转化成单行向量，做快速傅里叶变换进行频谱分析。由图17、18可以看到，滤波之后的频谱明显更加地平滑，更少有不连续的频率成分，说明滤波的效果很好。

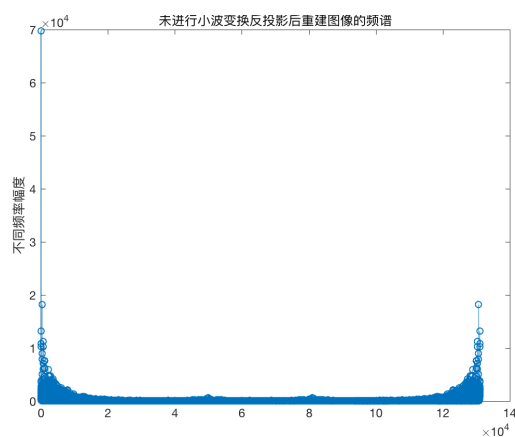


图 17 未进行小波变换重建图像的频谱

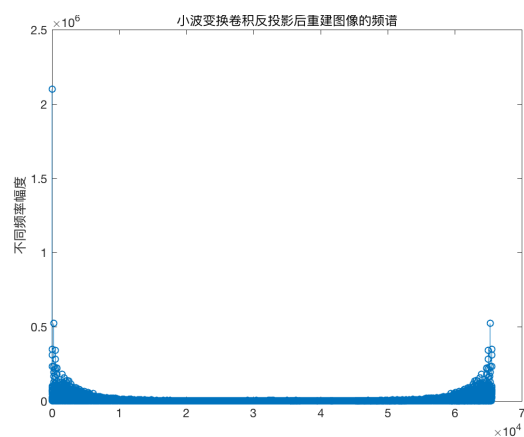


图 18 小波变换后重建图像的频谱

(3) 确定该未知介质的相对吸收率

与前一问做法相同，先分析通过附件 5 重建图像的吸收率，发现由于原图像不均匀也不规则导致吸收率的分布非常离散，此时不再进行阈值处理。直接对吸收率矩阵除以吸收率比例系数得到归一化后的相对吸收率矩阵，因而得到 10 个点的吸收率如下表 (4) 所示。

表 4 相对吸收率求解结果

据左侧边界距离	据下侧边界距离	相对吸收率
10.0000	18.0000	0.0104
34.5000	25.0000	2.4336
43.5000	33.0000	6.3433
45.0000	75.5000	0.0111
48.5000	55.5000	0.5005
50.0000	75.5000	2.4618
56.0000	76.5000	4.7460
65.5000	37.0000	0.0898
79.5000	18.0000	6.9776
98.5000	43.5000	0.1622

5.4 新标定模型的设计与评价

在 CT 仪成像中旋转中心的参数标定对于整个成像过程具有很重要的意义，因此需要选取合适的标定物对旋转中心进行系统的标定，使得对旋转中心的标定经度尽可能的高，且稳定性强。本文将设计出一种新的模板，与原模板相比对旋转中心的标定的经度高，且稳定性强。

5.4.1 标定模型的设计

(1) 标定模版外形设计

对于给定的标定物放置托盘，首先考虑提高托盘的空间利用率，以便于测量标定模版提供更多的信息。其次，通过前述各个小节分析，本文认为标定物的对称性、极值性（在某一方向上标定物线积分值最大）对于标定模版的标定效果具有显著影响。因此设计具有上述条件的标定模型并进行测试与验证。

(2) 精度与稳定性刻画模型的前提条件

由在旋转中心固定下对托盘中心的估计，与托盘中心固定下对旋转中心的估计具有相对性。因此在旋转中心确定下对托盘中心位置确定的估计的经度和稳定性，与在托盘中心下旋转中心确定的估计值的经度准确性与否和稳定性等价。

(3) 精度刻画模型的建立

本文首先给定发射器与接收器的旋转中心，将该旋转中心设置在假想的面积为 512×512 像素的旋转区域的中心，如图 (19) 所示。然后本文将假想的原尺寸为 256×256 像素的托盘（将原 $100\text{mm} \times 100\text{mm}$ 托盘视作 256×256 像素）的中心，随机置于旋转区域中心附近，使得托盘完全置于旋转区域内如图 (20) 所示。

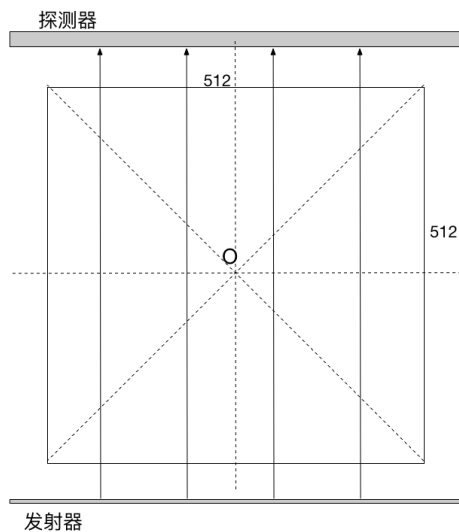


图 19 假想系统示意图

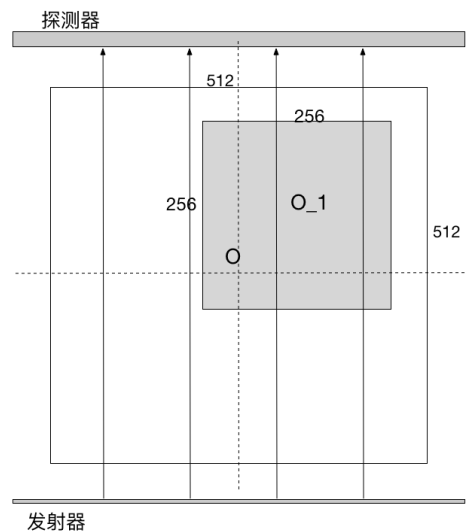


图 20 添加实际托盘后假想系统

通过图19、20，本文可以确定出托盘中心与旋转中心的相对位置，（原文中需要确定的是发射器和接收器的旋转中心在托盘中的位置，本文这样设计系统目的是取得给定托盘中心与旋转中心的相对位置）通过某给定的初始位置开始按照每次 1° ，旋转 180 次扫描，对接收器每次扫描的接受信息，放置在矩阵中，得到 512×180 接收信息矩阵。

将该接收信息矩阵进行色阶图处理，通过与第一问相同的方法，通过色阶图中的特殊位置确定出新的托盘中心的位置。该托盘位置为本文通过色阶图的到托盘中心的估计

位置，同时也就得到旋转中心在托盘中的相对估计位置。

通过改变标定模板，不断计算得出估计出托盘中心的位置与原来托盘中心确定位置间的距离。如果新设计模板的距离比原模板的距离小，可以得出新设计出的标定模板的精度大于原设计模板的精度。

因而本文对精度的衡量提出两个指标。一是托盘中心真实值 O_0 和计算值 O_0' 的差 ε ，（公式（24）所示）二是通过标定之后重建图像与原图像的重合度。（公式（25）所示）对于托盘中心真实值和计算值的差，实则是对求解旋转中心真实值和标定值之差问题的转化。标定模板均为匀质介质，因而将重建图像和原图像通过阈值分析二值化后，原图像吸收率相同的像素点个数为 Q' ，重建图像像素点个数为 Q ，重合度 S 即为 Q' 与 Q 的比值。

$$\varepsilon = |O_0' - O_0| \times 100\% \quad (24)$$

$$S = \frac{Q'}{Q} \times 100\% \quad (25)$$

（4）稳定性刻画模型的建立

由于在实际的操作过程中外界的噪声会对系统产生影响，本文通过添加不同功率的噪声，按照上述方法分别计算出不同功率噪声下的旋转中心，在本文改变噪声功率的过程中，如果新建立的模板在不同功率噪声影响下建立的出的旋转中心与不加噪声时的托盘中心的平均偏差比原模板小，则可以说明该新模板的稳定性更高。

对稳定性的讨论本文同时考虑，对于开始检测的初始角度的设置改变时系统标定参数的变动。例如：若改变初始角度时标定得到的旋转中心与实际旋转中心的距离的变化。因而本文对稳定性的衡量沿用托盘中心真实值 O_0 和计算值 O_0' 的差 ε （如公式（25）所示）。

5.4.2 标定模型的评价

本文给出一种较优的标定模版设计如图（21）所示，同时检验了其他几种不同的设计方案，但均相较于原有标定模版精度较低，以两种设计为例（如图23、23所示）。

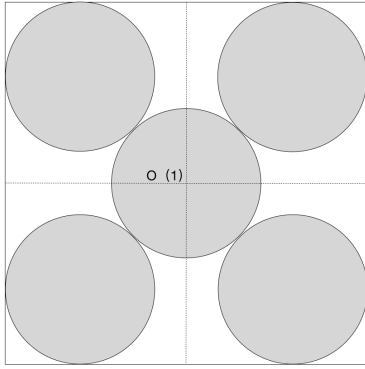


图 21 较优设计方案

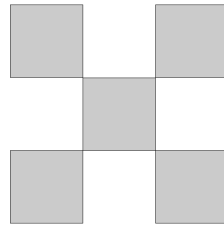


图 22 其他方案 (1)

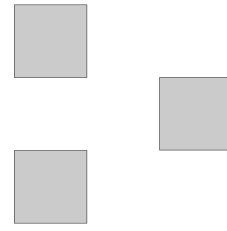


图 23 其他方案 (2)

(1) 参数标定的精度评价

对本文设计的标定模型，建立如下图 (24) 所示的平面直角坐标系：

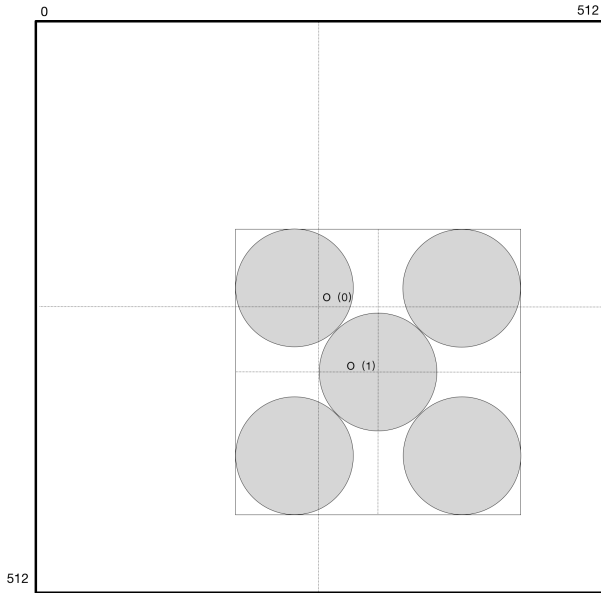


图 24 坐标系建立

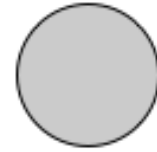


图 25 重合度测量基准图形

从图中（该图为示意图）可以看出，正方形托盘的中心在位置，整个旋转中心的位置为，对这两个中心本文预先给定。

对于中心距离差值的计算假设本文给定 O_1 坐标为 (229,279), O_0 坐标为 (256,256), 通过问题一中的初始位置（与 x 轴正方向顺时针夹角为 61° ）开始按照每次 1° ，逆时针旋转 180 次扫描，对接收器每次扫描的接受信息，放置在矩阵中，得到 512×180 接收信息矩阵，将接受信息的矩阵转换为色阶图，如下图 (26) 所示：

通过上述色阶图 (26)，本文得出确定出托盘中心位置的两个关键列分别为第 61 列和 151 列，可以得出通过色阶图确定出的 O'_0 坐标为 (231,283) 与 O_0 (229,279) 的距离经计算为 $\varepsilon_{new} = 4.4721$ 。重建图像重合

将原有标定模版所在的小托盘放置在前述方案中小托盘位置，其余计算方法参见

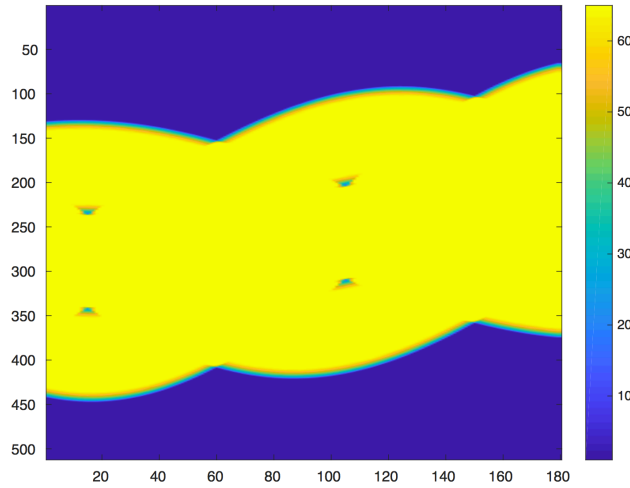


图 26 接收信息矩阵色阶图

问题一、二中的计算模型。可以得出通过色阶图确定出 O'_0 的坐标为 (234,283) 与 O_0 (229,279) 的距离经计算为 $\varepsilon_{old} = 6.4031$ 。

通过两种模板下方形托盘旋转中心的理论位置与实际位置的距离 $\varepsilon_{new} < \varepsilon_{old}$,

设置重合度计算标准模版如图 (25) 所示, 分别计算出两种方案的重合度, 新标定模版的重合度 $S_{new} = 0.9919$, 旧标定模版的重合度 $S_{old} = 0.9899$ 。

综上所述, 结合重合度和中心间距离差两个指标, 本文设计模版的精度均要好于原模板。

(2) 参数标定的稳定性评价

本文通过添加不同功率的噪声, 按照前述方法分别计算出不同功率噪声下的托盘中心, 在本文改变噪声功率的过程中, 如果某种新模板在不同功率噪声影响下建立的出的托盘中心与不加噪声时的托盘中心的平均偏差比原模板小, 则可以说明该新模板的稳定性更高。分别添加 50dB, 100 dB, 150dB, 200dB, 1000dB 的高斯白噪声, 可以得出对两种模板下, 托盘中心的测定结果, 如下表 (5) 所示:

通过上表求解发现加不同功率高斯白噪声下, 原方案计算的托盘中心坐标和实际托盘中心坐标一致。本文提的新方案计算的托盘中心坐标和实际托盘中心坐标也一致, 说明新方案的抗噪声性能很好。分析原因是因为标定模板具有对称性, 随机噪声对其影响不大。

本文探求初始参数的设置值对两种标定模板在旋转中心确定后, 通过卷积反投影图像重建重合度的影响。因此将开始检测的初始角度的设置值分别为 $61^\circ 62^\circ 71^\circ 81^\circ 90^\circ$ (其中这些角度均为与 x 正半轴顺时针夹角), 测量各初始角度下对基准图像还原的重合度如下表 (6) 所示。

表 5 不同噪声水平下模版对旋转中心标定的结果

噪声大小 (db)	原标定模版	新标定模版
50	(242,291)	(231,283)
100	(242,291)	(231,283)
150	(242,291)	(231,283)
200	(242,291)	(231,283)
1000	(243,291)	(233,283)

表 6 相对吸收率求解结果

初始角度 (°)	原标定模版	新标定模版
61	0.9899	0.9919
62	0.9899	0.9919
71	0.9899	0.9921
81	0.9899	0.9923
90	0.9899	0.9924

通过对初值的变动，最终本文得出的我们设计出的新的标定模板还原图像的重合度比原模板还原图像的重合度高，因此本文新设计出的模板的稳定性较强。

六、模型评价与改进

6.1 模型优点

1. 在参数标定的过程中，对每次的旋转角度给出估计值，并运用卷积反投影对估计出的值进行检验
2. 卷积反投影可消除单纯的反投影产生的边缘失锐效应，保证重建图像边缘清晰和内部分布均匀。
3. 运用小波变换使得图像轮廓清晰，内部分布均匀。

6.2 模型缺点

1. 没有充分考虑 180 个方向非等间隔扫描的情况。
2. 问题四中，本文对影响参数标定的因素考虑不够充分，例如标定模版对称性等。

6.3 模型改进

对于第四问设计的新模板，我们可以对探究影响标定参数经度的影响因素，如标定模板占方形托盘的面积比例，标定模板的对称性，标定物的形状对旋转中心参数标定的影响。

七、参考文献

- [1] 杨文, 何楚. 二维傅立叶变换的教学实践 [J]. 电气电子教学学报, 2014, 36(2):30-32.
- [2] 于飞. 基于断层切片的血管造影三维重建 [D]. 西安电子科技大学, 2007.
- [3] 潘泉, 孟晋丽, 张磊, 等. 小波滤波方法及应用 [J]. 电子与信息学报, 2007, 29(1):236-242.

八、附件清单

1. 通过附件二重建的吸收率矩阵中不同吸收率范围对应像素点的个数-数据表
2. 通过附件三重建的吸收率矩阵中不同吸收率范围对应像素点的个数-数据表
3. 通过附件五重建的吸收率矩阵中不同吸收率范围对应像素点的个数-数据表
4. 基于数据表格模拟图像扫描 matlab 程序
5. 基于设计图的模拟图像扫描 matlab 程序
6. 通过基准物的扫描结果数据还原图像 matlab 程序

九、附件

9.1 关键数据

通过附件二重建的吸收率矩阵中不同吸收率范围对应像素点的个数

附件二		
吸收率范围	像素点个数	像素点累计个数
<1	49706	49706
<2	2378	52084
<3	191	52275
<4	110	52385
<5	81	52466
<6	44	52510
<7	40	52550
<8	31	52581
<9	28	52609
<10	24	52633
<11	27	52660
<12	26	52686
<13	24	52710
<14	29	52739
<15	25	52764
<16	19	52783
<17	22	52805
<18	23	52828
<19	28	52856
<20	32	52888
<21	19	52907
<22	28	52935
<23	32	52967
<24	31	52998
<25	33	53031
<26	48	53079
<27	47	53126
<28	3201	56327
<29	9185	65512
<30	24	65536

图 27

通过附件三重建的吸收率矩阵中不同吸收率范围对应像素点的个数

附件三					
吸收率范围	像素点个数	像素点累计个数	吸收率范围	像素点个数	像素点累计个数
<1	43714	43714	<22	55	49644
<2	4806	48520	<23	50	49694
<3	247	48767	<24	58	49752
<4	117	48884	<25	67	49819
<5	77	48961	<26	96	49915
<6	73	49034	<27	212	50127
<7	54	49088	<28	3064	53191
<8	43	49131	<29	9209	62400
<9	35	49166	<30	765	63165
<10	35	49201	<31	122	63287
<11	36	49237	<32	58	63345
<12	26	49263	<33	61	63406
<13	33	49296	<34	233	63639
<14	26	49322	<35	45	63684
<15	42	49364	<36	55	63739
<16	26	49390	<37	1634	65373
<17	35	49425	<38	62	65435
<18	38	49463	<39	8	65443
<19	38	49501	<40	9	65452
<20	44	49545	<41	6	65458
<21	44	49589	<42	49	65507
			<43	29	65536

图 28

通过附件五重建的吸收率矩阵中不同吸收率范围对应像素点的个数

附件五	吸收率范围	像素点个数	像素点累计个数	吸收率范围	像素点个数	像素点累计个数	吸收率范围	像素点个数	像素点累计个数	吸收率范围	像素点个数	像素点累计个数
<1	7547	7547	<61	337	49520	<120	78	63631	<179	5	65405	
<2	6790	14337	<62	385	49905	<121	62	63693	<180	3	65408	
<3	5703	20040	<63	375	50280	<122	67	63760	<181	11	65419	
<4	4259	24299	<64	360	50640	<123	71	63831	<182	10	65429	
<5	2940	27239	<65	376	51016	<124	67	63898	<183	9	65438	
<6	2037	29276	<66	376	51392	<125	72	63970	<184	7	65445	
<7	1348	30624	<67	389	51781	<126	76	64046	<185	4	65449	
<8	969	31593	<68	354	52135	<127	52	64098	<186	2	65451	
<9	720	32313	<69	360	52495	<128	56	64154	<187	4	65455	
<10	522	32835	<70	372	52867	<129	58	64212	<188	6	65461	
<11	471	33306	<71	381	53248	<130	42	64254	<189	2	65463	
<12	379	33685	<72	329	53577	<131	54	64308	<190	7	65470	
<13	353	34038	<73	367	53944	<132	41	64349	<191	3	65473	
<14	328	34366	<74	337	54281	<133	52	64401	<192	3	65476	
<15	276	34642	<75	345	54626	<134	35	64436	<193	3	65479	
<16	257	34899	<76	284	54910	<135	44	64480	<194	0	65479	
<17	265	35164	<77	332	55242	<136	37	64517	<195	1	65480	
<18	275	35439	<78	333	55575	<137	48	64565	<196	6	65486	
<19	294	35733	<79	332	55907	<138	41	64606	<197	6	65492	
<20	275	36008	<80	333	56240	<139	34	64640	<198	1	65493	
<21	254	36262	<81	314	56554	<140	35	64675	<199	5	65498	
<22	242	36504	<82	281	56835	<141	29	64704	<200	3	65501	
<23	268	36772	<83	271	57106	<142	41	64745	<201	4	65505	
<24	238	37010	<84	284	57390	<143	34	64779	<202	0	65505	
<25	248	37258	<85	296	57686	<144	27	64806	<203	3	65508	
<26	257	37515	<86	274	57960	<145	31	64837	<204	1	65509	
<27	237	37752	<87	255	58215	<146	35	64872	<205	1	65510	
<28	277	38029	<88	294	58509	<147	37	64909	<206	1	65511	
<29	289	38318	<89	261	58770	<148	29	64938	<207	1	65512	
<30	247	38565	<90	255	59025	<149	27	64965	<208	0	65512	
<31	254	38819	<91	238	59263	<150	33	64998	<209	4	65516	
<32	254	39073	<92	216	59479	<151	25	65023	<210	1	65517	
<33	300	39373	<93	208	59687	<152	25	65048	<211	0	65517	
<34	280	39653	<94	225	59912	<153	15	65063	<212	2	65519	
<35	309	39962	<95	206	60118	<154	18	65081	<213	0	65519	
<36	294	40256	<96	211	60329	<155	12	65093	<214	1	65520	
<37	304	40560	<97	199	60528	<156	21	65114	<215	0	65520	
<38	319	40879	<98	191	60719	<157	21	65135	<216	2	65522	
<39	339	41218	<99	212	60931	<158	26	65161	<217	0	65522	
<40	351	41569	<100	177	61108	<159	17	65178	<218	3	65525	
<41	376	41945	<101	179	61287	<160	20	65198	<219	0	65525	
<42	361	42306	<102	173	61460	<161	19	65217	<220	2	65527	
<43	340	42646	<103	185	61645	<162	12	65229	<221	2	65529	
<44	320	42966	<104	169	61814	<163	22	65251	<222	1	65530	
<45	365	43331	<105	170	61984	<164	13	65264	<223	1	65531	
<46	366	43697	<106	147	62131	<165	17	65281	<224	1	65532	
<47	370	44067	<107	130	62261	<166	10	65291	<225	0	65532	
<48	382	44449	<108	139	62400	<167	12	65303	<226	1	65533	
<49	403	44852	<109	141	62541	<168	8	65311	<227	1	65534	
<50	393	45245	<110	120	62661	<169	12	65323	<228	0	65534	
<51	400	45645	<111	128	62789	<170	7	65330	<229	0	65534	
<52	412	46057	<112	102	62891	<171	12	65342	<230	0	65534	
<53	409	46466	<113	114	63005	<172	3	65345	<231	0	65534	
<54	386	46852	<114	113	63118	<173	11	65356	<232	0	65534	
<55	395	47247	<115	93	63211	<174	10	65366	<233	1	65535	
<56	419	47666	<116	92	63303	<175	8	65374	<234	0	65535	
<57	388	48054	<117	82	63385	<176	6	65380	<235	1	65536	
<58	369	48423	<118	90	63475	<177	9	65389				
<59	405	48828	<119	78	63553	<178	11	65400				
<60	355	49183										

图 29

9.2 程序源代码

基于数据表格模拟图像扫描

```
clear;
Ir = xlsread('1.xlsx');
A = zeros(512,512);
A(101:356,151:406)=Ir;
A1 = A;

[N,N]=size(A1);
z=2*ceil(norm(size(A1)-floor((size(A1)-1)/2)-1))+3;%?radon
Nt = 360;%角度采样点数
Nd = N;%平移数
d = N/Nd;%平移步长
x=pi/180;%步长
theta=1:Nt;
theta=1:1:Nt;
a=zeros(N);

[R,xp]=radon(A1,theta);
e=floor((z-Nd)/2)+2;
R=R(e:(Nd+e-1),:);
R1=reshape(R,512,360);
R2 = R1(:,1:180);
%figure
%image(R1);
```

基于设计图的模拟图像扫描

```
clear;
I = imread('q4-base.png');
tresh = graythresh(I);
II = im2bw(I,tresh);
imshow(II);
Ir = imresize(II(:,1:802),0.319);
Ir = ~Ir;
%Ir = awgn(double(Ir),1000);
A = zeros(512,512);
A(101:356,151:406)=Ir;
A1 = A;

[N,N]=size(A1);
z=2*ceil(norm(size(A1)-floor((size(A1)-1)/2)-1))+3;%?radon

theta=1:Nt;
theta=1:1:Nt;
a=zeros(N);
Nt = 360;%角度采样点数
Nd = N;%平移数
d = N/Nd;%平移步长
x=pi/180;%步长
[R,xp]=radon(A1,theta);
e=floor((z-Nd)/2)+2;
R=R(e:(Nd+e-1),:);
R1=reshape(R,512,360);
R2 = R1(:,1:180);
```

```
%figure  
%image(R1);
```

通过基准物的扫描结果数据还原图像

```
R1 = xlsread('q4-base-saomiaoxlsx');  
kkk = 0; %初始角度  
dataTable2 = R1(:, kkk+1: kkk+180);  
N = 512;  
Nt = 360; %角度采样点数  
Nd = N; %平移数  
d = N/Nd; %平移步长  
theta=1:1:Nt;  
a=zeros(N);  
x = pi/180; % change to test  
Q = dataTable2;  
g=-(Nd/2-1):(Nd/2);  
for i=1:N  
    if g(i)==0  
        h1(i)=1/(4*d^2);  
    else  
        if mod(g(i),2)==0  
            h1(i)=0;  
        else  
            h1(i)=(-1)/(pi^2*d^2*(g(i)^2));  
        end  
    end  
end  
  
k=Nd/2:(3*Nd/2-1);  
Nt = 180;  
a1 = -kkk;  
for m=1:Nt  
    pm=Q(:,m);  
    u=conv(h1,pm);  
    pm=u(k);  
    Cm=(N-1)/2*(1-cos((m-a1)*x)-sin((m-a1)*x));  
    for i=1:N  
        for j=1:N  
            Xrm=Cm+(j-1)*cos((m-a1)*x)+(i-1)*sin((m-a1)*x);  
            if Xrm<1  
                n=1;  
                t=abs(Xrm)-floor(abs(Xrm));  
            else  
                n=floor(Xrm);  
                t=Xrm-floor(Xrm);  
            end  
            if n>(Nd-1)  
                n=Nd-1;  
            end  
            p=(1-t)*pm(n)+t*pm(n+1);  
            a(N+1-i,j)=a(N+1-i,j)+p;  
        end  
    end  
end  
image(a);
```

```

aa = (a) >= 10;
ratio = 20/22; % main
E = imresize(aa, ratio);
TL(1) = floor(106 * ratio);
TL(2) = floor(155 * ratio);
baseP = floor(255 * ratio);
EE = E((TL(1):(TL(1)+baseP), (TL(2):(TL(2)+baseP)));
EE = imresize(EE, 1/ratio);
figure, imshow(EE);
Ir = xlsread('q4-base');
ANS = EE - Ir;
diffNum = length(find(ANS ~= 0));
diffPer = diffNum/65536

```