複雑系科学演習 (1)

ロジスティック写像：差分方程式と個体数変動

1　ロジスティック写像の差分方程式

ロジスティックモデルとは、ある生物の親の個体数と子の個体数との関係を表したものをいう。その関係を表す式を**ロジスティック方程式**という。この講義では、昆虫などの世代の重ならない生物の個体数の増減を表した差分方程式を取り上げる。その差分方程式は以下で表される。

$$x_{n+1} = \underbrace{\overset{\downarrow\,\text{最大増加率}\,(r)}{r}(1 - x_n)}_{\text{増加率}} x_n \qquad (0 \leq x_n \leq 1,\ 1 \leq r \leq 4)$$

このモデルがどのようなものであるかを具体的に考えてみると、次のようなイメージを持つことができる。

> ある決まった広さの部屋で生き物が増減することをイメージする。その部屋の中にいる個体数が少なくて空間にゆとりがあると個体はどんどん増える。一方で、個体数が多くて部屋の中がギュウギュウだと増えたくても増えられない。こんなふうに、空間内にいる個体数に応じて個体数の増加率がかわる。

こんなイメージをもって先ほどの式を眺めてみると、式の意味がわかるだろう。さらに、差分方程式のイメージを具体的にしていくために、$r = 2$ として、増加率を計算して増加率を求めてみよう。

$\underline{x_n = 0.1}$のとき
　増加率 $= r(1 - x_n) = 2 \times (1 - 0.1) = 1.8$　　個体数が少ない $\rightarrow$ 増加率 :**大**
$\underline{x_n = 0.9}$のとき
　増加率 $= r(1 - x_n) = 2 \times (1 - 0.9) = 0.2$　　個体数が多い　$\rightarrow$ 増加率 :**小**

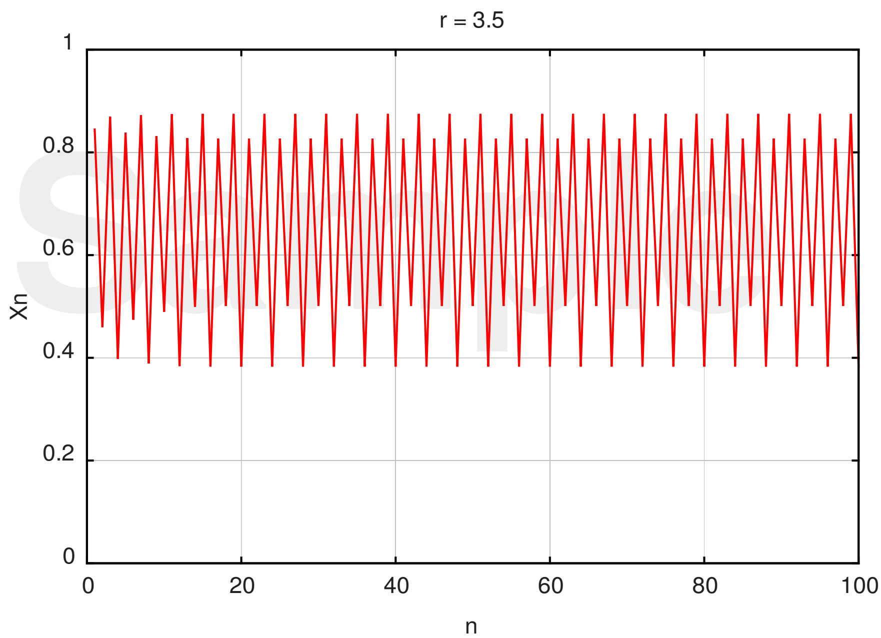
ここまでの内容で、ロジスティック写像の基本的な特徴が「空間内に存在する個体数に応じて増加率が変化する」というものであることがわかっただろう。しかし、その個体数の変動をいろいろと調べてみると、個体数の変動が最大増加率 r によって大きく異なることがわかっていく。そこで、この講義では最大増加率 r に着目して個体数変動の特徴を調べていく。

2　個体数変動をみる：時系列変化

実はまだ差分方程式についてよくわかっていない人もいるだろう。そこで、個体数変動を調べるためにも、$r = 3.2$, $x_0 = 0.6$ として $n = 1$ から $n = 5$ まで手計算で個体数を求めてみよう。

n	x_n	x_{n+1}
0	0.600	$x_1 = 3.2 \times (1 - 0.600) \times 0.600 = 0.768$
1	0.768	$x_2 = 3.2 \times (1 - 0.768) \times 0.768 = 0.570$
2	0.570	$x_3 = 3.2 \times (1 - 0.570) \times 0.570 = 0.784$
3	0.784	$x_4 = 3.2 \times (1 - 0.784) \times 0.784 = 0.541$
4	0.541	$x_5 = 3.2 \times (1 - 0.541) \times 0.541 = 0.795$
5	0.795	$x_6 = 3.2 \times (1 - 0.795) \times 0.795 = 0.522$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

$x_{n+1} = x_1$ を求めるときには $x_n = x_0$ を使って計算する。次に $x_{n+1} = x_2$ を求めるときには $x_n = x_1$ を使って計算する。このように、x_{n+1} を求めるために x_n を使って計算することで、差分方程式を解いていきます。この n は時刻と考えることができ、差分方程式ではある値の時間変化を見ることができます。このように時間的な変化 (ここでは n) に着目した変動のことを**時系列変化**といいます。この時系列変化は数字の羅列を見ても特徴をつかみにくいので、横軸に時間 n、縦軸に個体数 x_n としてグラフ化してみることにします。たとえば、$r = 3.5$ の場合で個体数変動をグラフ化してみると以下のようになります。



課題

ロジスティク写像の時系列変化を計算するプログラムを作成し、$r = 1.50$, $r = 2.60$, $r = 3.20$, $r = 3.50$, $r = 3.86$, $r = 3.90$ のとき、$x_0 = 0.7$ として個体数変動の時系列グラフを表示せよ。

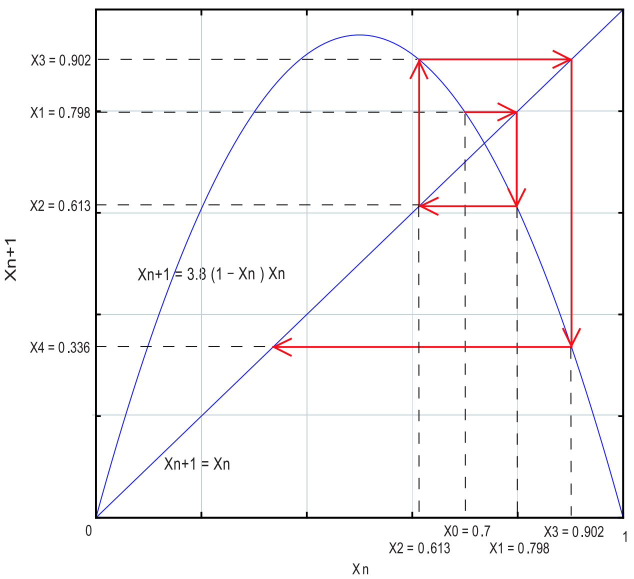
3　個体数変動をみる：リターンマップ

ロジスティックモデルの差分方程式では、現在の時刻 $n+1$ の個体数は 1 つ前の時刻 n の個体数によって決まっていた。そこで、x_n と x_{n+1} との関係を調べてみよう。横軸を x_n、縦軸を x_{n+1} としてグラフ (**リターンマップ**) を描いてみよう。ここでは、$r=3.8,\ x_0=0.7$ のとき $n=0$ から $n=3$ までのリターンマップを描いてみる。

まずは計算…

n	x_n	x_{n+1}
0	0.700	$x_1 = 3.8 \times (1 - 0.700) \times 0.700 = 0.798$
1	0.798	$x_2 = 3.8 \times (1 - 0.798) \times 0.798 = 0.613$
2	0.613	$x_3 = 3.8 \times (1 - 0.613) \times 0.613 = 0.902$
3	0.902	$x_4 = 3.8 \times (1 - 0.902) \times 0.902 = 0.336$

まず、$x_{n+1} = 3.8(1-x_n)x_n$ のグラフと $x_{n+1} = x_n$ のグラフとを書いておく。$x_1 = x_{0+1} = 3.8(1-x_0)x_0$ なので、$x_1 = 0.798$ となる。したがって、$(x_n, x_{n+1}) = (0.7, 0.798)$ の点が $x_{n+1} = 3.8(1-x_n)x_n$ のグラフ上に決まる。次に、今求めた $x_{n+1} = x_1$ は x_2 を求めるときの x_n になるので、$x_n = x_{n+1}$ つまり $x_n = x_1 = x_{0+1} = 0.798$ となる。この点は、$x_{n+1} = 3.8(1-x_n)x_n$ のグラフ上にあった $(x_n, x_{n+1}) = (0.7, 0.798)$ を $x_{n+1} = x_n$ に水平方向に平行移動した点となるので、$x_{n+1} = x_n$ のグラフ上の $(x_n, x_{n+1}) = (0.798, 0.798)$ に決まる。あとは、この一連の作業と同じことを繰り返していくと、下に示すようなリターンマップが描ける。



課題

ロジスティク写像のリターンマップを描くためのプログラムを作成し、$r=1.50$, $r=2.60$, $r=3.20$, $r=3.50$, $r=3.86$, $r=3.90$ のとき、$x_0 = 0.7$ として個体数変動のリターンマップを表示せよ。