

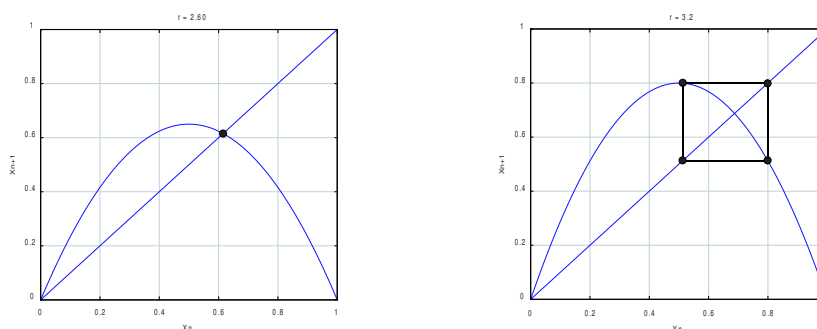
複雑系科学演習 (3)

ロジスティック写像：周期倍分岐と窓

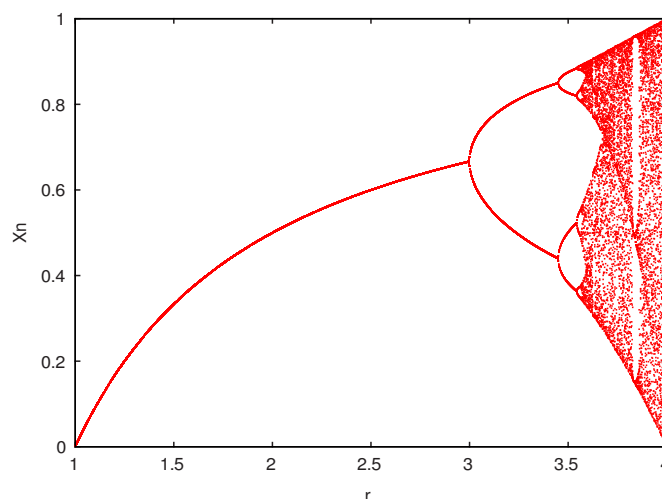
1 ロジスティック写像の差分方程式

リターンマップや時系列変化のグラフでは、しばらく時間が経過したときの値の変動にくつかのパターンがあることがわかる。たとえば、 $r = 1.5$ のときには個体数は次第に変動しなくなるし、 $r = 2.6$ のときには個体数は2つの値を行ったりきたりしている。このような初期変動の影響がなくなってからの個体数変動のパターンをグラフ化してみよう。

まず、初期変動の影響を取り除いたリターンマップを描いてみる。たとえば、 $r = 2.6$ と $r = 3.2$ のときには下のようなグラフになる。

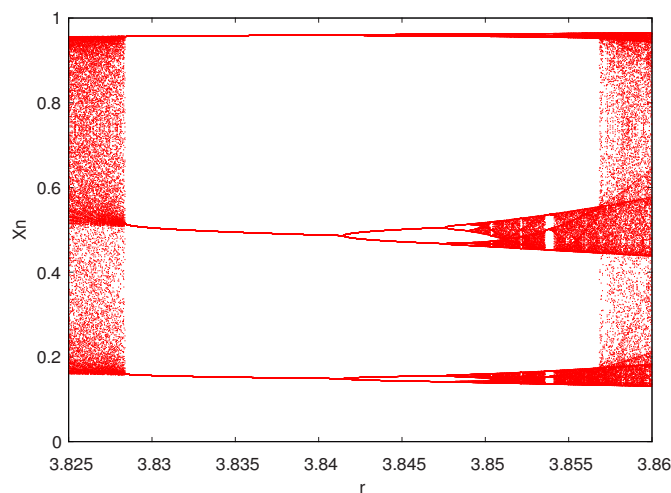


差分方程式の二次関数の線上にある黒い点の数が差分方程式の解の個数ということになる。この解とその個数が r によってどう違うのかが一目でわかる分岐図を描いてみよう。分岐図は、横軸に r 、縦軸に x_n をとったグラフである。ただし、この x_n は初期変動の影響がなくなってからの値をとる。実際分岐図は以下のようなグラフになる。



この分岐図を見てみると、ロジスティック写像の解の個数に関しての特徴がよくわかる。 $1 \leq r \leq 3$ のとき解は 1 個、 $3 \leq r \leq 3.449$ のとき解は 2 個という具合に解の個数が $1 \text{ 個} \rightarrow 2 \text{ 個} \rightarrow 4 \text{ 個} \rightarrow 8 \text{ 個} \rightarrow \dots$ と倍増していく。このような解の個数が倍々になって増えていく分岐のことを周期倍分岐という。また 1 つの解しか持たない時にその解を不動点といい、いくつかの解を順番に変動する解を周期解という。

解の個数が倍数ずつ増えていくので、分岐図は r の増大に伴って複雑になっていく。それにもかかわらず、 $r = 3.84$ 前後で周期性が現れている。これを 3 周期の窓という。その部分のグラフを見てみよう。



課題

ロジスティック写像の分岐図を描け。また、分岐図の中で 3 周期の窓が現れているグラフを描け。