

Synchronization and Collective Dynamics

Patrick Michl

Universität Heidelberg, Fakultät für Mathematik und Informatik

Seminar "Complex Networks", am 01. Juli 2010

Einleitung

Allgemein bezeichnet Synchronisation in einem Netzwerk eine gegenseitige Beeinflussung von Knoten, so dass Symmetrien auftreten. Die Modellierung erfolgt dabei mittels (zeitkontinuierlicher) gekoppelter Systeme.

Beispiele

- Gekoppelte Pendel
- Allgemeiner: Netzwerke von gekoppelten Oszillatoren (Physik, Chemie)
- Meinungsbildung in sozialen Netzwerken

- 1 Einleitung
- 2 Gekoppelte Systeme
 - Modellierung
 - Master Stability Function
 - Symmetrisch gekoppelte Systeme
 - Asymmetrisch gekoppelte Systeme
- 3 Konstruktion gekoppelter Systeme
 - Grad-abhängige Kopplung
 - Load-abhängige Kopplung
 - Asymmetrische Kopplung
 - Load-Kopplung mit Age-ordering
- 4 Desynchronisation
 - Modellierung

Modellierung gekoppelter Systeme

- Das System besteht aus N gleichen Knoten
- Jedem Knoten i wird ein m -dimensionaler Zustandsraum und eine Zustandsfunktion $x_i(t)$ zugewiesen
- Ohne Berücksichtigung der Kopplung lässt sich die Zustandsfunktion durch folgende Gleichung beschreiben:

$$\dot{x}_i = F(x_i)$$

wobei $F(x)$ die für alle Knoten identische Entwicklungsfunktion ist.

Modellierung gekoppelter Systeme

- Mit Berücksichtigung der Kopplung gilt entsprechend:

$$\dot{x}_i = F(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N C_{ij} H(x_j) \quad (1)$$

Dabei ist:

- σ die *Kopplungsstärke* (Tuningparameter)
- $H(x_i)$ eine für alle Knoten identische *Kopplungsfunktion* (Kopplungseigenschaft des Zustandsraumes)
- C die *Kopplungsmatrix* (Kopplungseigenschaft des Netzwerkes)

Modellierung gekoppelter Systeme

Dabei wird gefordert:

- Keine negative Selbstkopplung:

$$C_{ii} > 0, \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (2)$$

- Geschlossenheit des Systems:

$$\sum_{j=1}^N C_{ij} = 0, \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (3)$$

- 1 Einleitung
- 2 Gekoppelte Systeme
 - Modellierung
 - Master Stability Function
 - Symmetrisch gekoppelte Systeme
 - Asymmetrisch gekoppelte Systeme
- 3 Konstruktion gekoppelter Systeme
 - Grad-abhängige Kopplung
 - Load-abhängige Kopplung
 - Asymmetrische Kopplung
 - Load-Kopplung mit Age-ordering
- 4 Desynchronisation
 - Modellierung

- Von besonderem Interesse ist für uns die Bewertung eines gegebenen Netzwerkes bezüglich ihrer Synchronisationsfähigkeit.

- Von besonderem Interesse ist für uns die Bewertung eines gegebenen Netzwerkes bezüglich ihrer Synchronisationsfähigkeit.
- Ein adäquates Mittel hierfür bietet die sogenannte Master Stability Function

- Die Bedingungen der Gleichheit der Knoten (F und H sind unabhängig von den Knoten), sowie die Geschlossenheit des Systems (Gleichung 3) sind hinreichend für die Existenz synchroner Lösungen x_s , also $x_1 = x_2 = \dots = x_s$

- Die Bedingungen der Gleichheit der Knoten (F und H sind unabhängig von den Knoten), sowie die Geschlossenheit des Systems (Gleichung 3) sind hinreichend für die Existenz synchroner Lösungen x_s , also $x_1 = x_2 = \dots = x_s$
- x_s bildet eine m -dimensionale Hyperebene, die Menge der x_s die sogenannte Synchronisations-Mannigfaltigkeit \mathcal{S} . Diese korrespondiert zum Eigenraum des Eigenwertes 0 der Kopplungsmatrix \mathcal{C}

- Die Bedingungen der Gleichheit der Knoten (F und H sind unabhängig von den Knoten), sowie die Geschlossenheit des Systems (Gleichung 3) sind hinreichend für die Existenz synchroner Lösungen x_s , also $x_1 = x_2 = \dots = x_s$
- x_s bildet eine m -dimensionale Hyperebene, die Menge der x_s die sogenannte Synchronisations-Mannigfaltigkeit \mathcal{S} . Diese korrespondiert zum Eigenraum des Eigenwertes 0 der Kopplungsmatrix \mathcal{C}
- Um die Neigung eines Systems zur Synchronisation zu bestimmen reicht es also die Dynamik der zu den anderen Eigenräumen korrespondierenden Zustandsräume zu untersuchen

- Diese Dynamik wird mit Hilfe von Lyapunov Exponenten beschrieben. Lyapunov Exponenten sind die Geschwindigkeit, mit der sich zwei infinitesimal nahe beieinanderliegende Punkte im Zustandsraum voneinander entfernen oder annähern. Dabei bedeutet eine Entfernung stets Divergenz und eine Annäherung Konvergenz.

- Diese Dynamik wird mit Hilfe von Lyapunov Exponenten beschrieben. Lyapunov Exponenten sind die Geschwindigkeit, mit der sich zwei infinitesimal nahe beieinanderliegende Punkte im Zustandsraum voneinander entfernen oder annähern. Dabei bedeutet eine Entfernung stets Divergenz und eine Annäherung Konvergenz.
- Für jeden Knoten i lassen sich nun die m Lyapunov Exponenten $\Lambda_i^k, k \in \{1, \dots, m\}$ bezüglich $x_i - x_s$ betrachten

- Diese Dynamik wird mit Hilfe von Lyapunov Exponenten beschrieben. Lyapunov Exponenten sind die Geschwindigkeit, mit der sich zwei infinitesimal nahe beieinanderliegende Punkte im Zustandsraum voneinander entfernen oder annähern. Dabei bedeutet eine Entfernung stets Divergenz und eine Annäherung Konvergenz.
- Für jeden Knoten i lassen sich nun die m Lyapunov Exponenten $\Lambda_i^k, k \in \{1, \dots, m\}$ bezüglich $x_i - x_s$ betrachten
- Im Falle, dass alle $\Lambda_i^k, k \in \{1, \dots, m\}$ von allen Knoten i kleiner als 0 sind, werden die Zustandsfunktionen der einzelnen Knoten gegen x_s konvergieren. Dies ist abhängig vom entsprechenden Eigenwert, der Kopplungsstärke und den Funktionen F und H .

- Diese Dynamik wird mit Hilfe von Lyapunov Exponenten beschrieben. Lyapunov Exponenten sind die Geschwindigkeit, mit der sich zwei infinitesimal nahe beieinanderliegende Punkte im Zustandsraum voneinander entfernen oder annähern. Dabei bedeutet eine Entfernung stets Divergenz und eine Annäherung Konvergenz.
- Für jeden Knoten i lassen sich nun die m Lyapunov Exponenten $\Lambda_i^k, k \in \{1, \dots, m\}$ bezüglich $x_i - x_s$ betrachten
- Im Falle, dass alle $\Lambda_i^k, k \in \{1, \dots, m\}$ von allen Knoten i kleiner als 0 sind, werden die Zustandsfunktionen der einzelnen Knoten gegen x_s konvergieren. Dies ist abhängig vom entsprechenden Eigenwert, der Kopplungsstärke und den Funktionen F und H .
- Bei gegebenen Funktionen F und H wird nun in Abhängigkeit von $\nu = \sigma\lambda$ der größte Exponent $\Lambda = \max\{\Lambda_i^k\}$ betrachtet. Die Funktion $\Lambda(\nu)$ heißt Master Stability Function.

- 1 Einleitung
- 2 Gekoppelte Systeme
 - Modellierung
 - Master Stability Function
 - Symmetrisch gekoppelte Systeme
 - Asymmetrisch gekoppelte Systeme
- 3 Konstruktion gekoppelter Systeme
 - Grad-abhängige Kopplung
 - Load-abhängige Kopplung
 - Asymmetrische Kopplung
 - Load-Kopplung mit Age-ordering
- 4 Desynchronisation
 - Modellierung

Sei \mathcal{C} symmetrisch.

Sei \mathcal{C} symmetrisch.

\Rightarrow Alle Eigenwerte sind reell

Sei \mathcal{C} symmetrisch.

\Rightarrow Alle Eigenwerte sind reell

Wegen Gleichungen 2 und 3 folgt, \mathcal{C} ist positiv semidefinit

Sei \mathcal{C} symmetrisch.

\Rightarrow Alle Eigenwerte sind reell

Wegen Gleichungen 2 und 3 folgt, \mathcal{C} ist positiv semidefinit

\Rightarrow Alle Eigenwerte ungleich λ_1 sind größer als 0

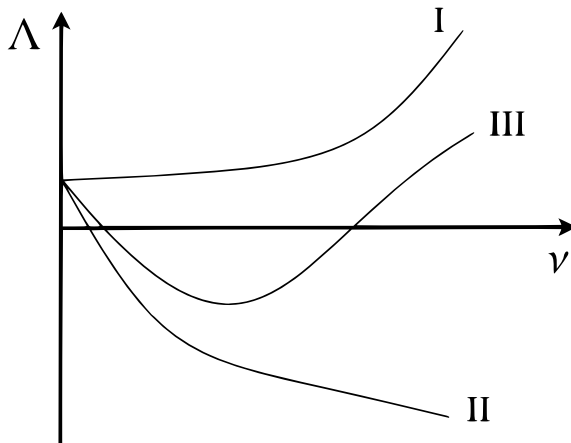
Sei \mathcal{C} symmetrisch.

\Rightarrow Alle Eigenwerte sind reell

Wegen Gleichungen 2 und 3 folgt, \mathcal{C} ist positiv semidefinit

\Rightarrow Alle Eigenwerte ungleich λ_1 sind größer als 0

Seien die Eigenwerte λ_2 bis λ_N OBdA nach Größe aufsteigend sortiert



Es ergeben sich drei typische Kurven:

- **Typ I:** Eine Synchronisation ist nicht möglich
- **Typ II:** Synchronisation ist stabil, wenn σ so gewählt wird, dass gilt: $\sigma \lambda_2 > \nu_{\min}$
- **Typ III:** Synchronisation ist stabil, wenn σ so gewählt wird, dass gilt: $\sigma \lambda_2 > \nu_{\min}$ und $\sigma \lambda_N < \nu_{\max}$

Es ergeben sich drei typische Kurven:

- **Typ I:** Eine Synchronisation ist nicht möglich
- **Typ II:** Synchronisation ist stabil, wenn σ so gewählt wird, dass gilt: $\sigma \lambda_2 > \nu_{\min}$
- **Typ III:** Synchronisation ist stabil, wenn σ so gewählt wird, dass gilt: $\sigma \lambda_2 > \nu_{\min}$ und $\sigma \lambda_N < \nu_{\max}$

Beim Typ III ist dies aber genau dann möglich, wenn gilt:

$$\frac{\lambda_N}{\lambda_2} < \frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}}$$

$\frac{\lambda_N}{\lambda_2}$ beschreibt somit die Synchronisationsfähigkeit eines Netzwerkes mit symmetrischer Kopplungsmatrix.

- 1 Einleitung
- 2 Gekoppelte Systeme
 - Modellierung
 - Master Stability Function
 - Symmetrisch gekoppelte Systeme
 - Asymmetrisch gekoppelte Systeme
- 3 Konstruktion gekoppelter Systeme
 - Grad-abhängige Kopplung
 - Load-abhängige Kopplung
 - Asymmetrische Kopplung
 - Load-Kopplung mit Age-ordering
- 4 Desynchronisation
 - Modellierung

Sei \mathcal{C} asymmetrisch.

Sei \mathcal{C} asymmetrisch.

\Rightarrow Die Eigenwerte können einen Imaginärteil haben

Sei \mathcal{C} asymmetrisch.

⇒ Die Eigenwerte können einen Imaginärteil haben

Das Synchronisations-Intervall der Master Stability Function wird in der komplexen Ebene zu einem um die ν -Achse symmetrischen Gebiet.

Sei \mathcal{C} asymmetrisch.

⇒ Die Eigenwerte können einen Imaginärteil haben

Das Synchronisations-Intervall der Master Stability Function wird in der komplexen Ebene zu einem um die ν -Achse symmetrischen Gebiet.

⇒ Die Synchronisationsfähigkeit eines Netzwerkes mit asymmetrischer Kopplungsmatrix wird daher zusammen von $\frac{\Re(\lambda_N)}{\Re(\lambda_2)}$ und $\max\{\Im(\lambda_i)\}$ beschrieben.

Im Folgenden wollen wir Netzwerke mit guter Synchronisationsfähigkeit konstruieren. Hierfür werden spezielle Kopplungsmatrizen unter der Verwendung von Tuningparametern untersucht.

1 Einleitung

2 Gekoppelte Systeme

- Modellierung
- Master Stability Function
- Symmetrisch gekoppelte Systeme
- Asymmetrisch gekoppelte Systeme

3 Konstruktion gekoppelter Systeme

- Grad-abhängige Kopplung
- Load-abhängige Kopplung
- Asymmetrische Kopplung
- Load-Kopplung mit Age-ordering

4 Desynchronisation

- Modellierung

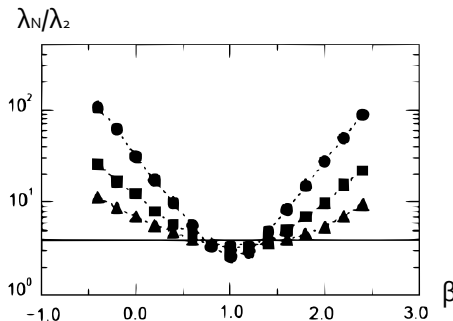
Bei dieser Konstruktion wird eine Grad-abhängige Kopplung der einzelnen Knoten verwendet, um eine gute Synchronisationsfähigkeit zu erreichen.

Modell: Grad-Kopplung

$$\dot{x}_i = F(x_i) - \sigma \sum_{j=1}^N \frac{\Lambda_{ij}}{k_i^\beta} H(x_j) \quad (4)$$

Dabei ist:

- Λ die Laplace Matrix
- β der Tuningparameter



Die Berechnung der Eigenwerte ergibt bei verschiedenen skalen freien Netzwerken eine optimale Synchronisationsfähigkeit für $\beta = 1$. Dies entspricht der Intuition, da in diesem Falle jeder Knoten gleich stark mit seiner Umgebung gekoppelt ist.

- 1 Einleitung
- 2 Gekoppelte Systeme
 - Modellierung
 - Master Stability Function
 - Symmetrisch gekoppelte Systeme
 - Asymmetrisch gekoppelte Systeme
- 3 Konstruktion gekoppelter Systeme
 - Grad-abhängige Kopplung
 - Load-abhängige Kopplung
 - Asymmetrische Kopplung
 - Load-Kopplung mit Age-ordering
- 4 Desynchronisation
 - Modellierung

Eine weitere Verbesserung der Synchronisationsfähigkeit wollen wir nun dadurch erreichen, dass wir in die Gewichtung globale Information des Netzwerkes aufnehmen. Hierfür verwenden wir zur Gewichtung einer Kopplung zweier Knoten i und j die Load l_{ij} der dazwischen liegenden Kante e_{ij} .

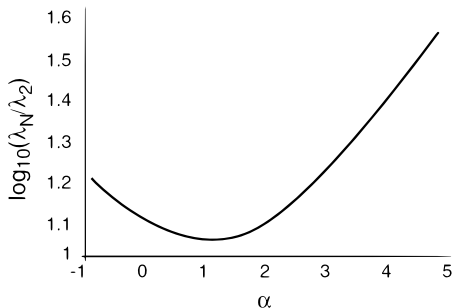
Definition: Load

Die Load l_{ij} einer Kante e_{ij} ist der Anteil der kürzesten Pfade, die e_{ij} enthalten. Sie kann somit als betweenness-Wert einer Kante aufgefasst werden.

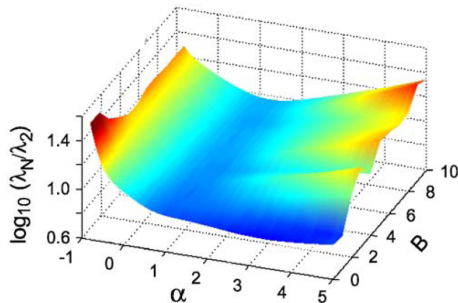
Modell: Load-Kopplung

$$\dot{x}_i = F(x_i) - \frac{\sigma}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} l_{ij}^\alpha} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} l_{ij}^\alpha [H(x_j) - H(x_i)] \quad (5)$$

- Dabei ist α der Tuningparameter. Für $\alpha = 0$ ist die Load-Kopplung identisch mit der Grad-Kopplung für $\beta = 1$
- Der Vergleich zu Gleichung (1) zeigt, dass in diesem Falle die Kopplungsmatrix \mathcal{C} nicht mehr symmetrisch ist. Mittels einer Cholesky-Zerlegung kann jedoch gezeigt werden, dass die Eigenwerte reell und positiv (bis auf λ_1) sind.

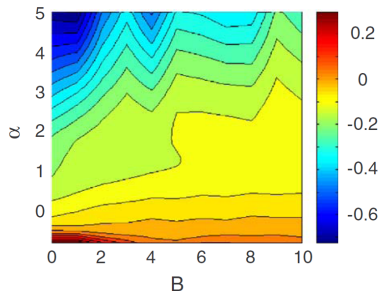


Die Berechnung der Eigenwerte ergibt bei verschiedenen Zufallsgraphen eine optimale Synchronisationsfähigkeit für $\alpha = 1$. Dabei ist die Synchronisationsfähigkeit für $\alpha = 1$ stets besser als bei der Grad-Kopplung.



Bei skalenfreien Netzwerken ergibt sich ein differenzierteres Bild.
Der zusätzliche Wert B entspringt der Konstruktion nach dem
(DMS-Modell) und parametrisiert bei festem m die Gradverteilung:

$$p(k) \sim \frac{1}{k^{3+B/m}}$$



Durch gleiche Konstruktionsparameter m lassen sich Zufallsgraphen und skalenfreien Netzwerke hinsichtlich ihrer Synchronisationsfähigkeit vergleichen. Die Farben zeigen die Differenzen der Eigenverhältnisse. Dabei bedeuten negative Werte eine bessere Synchronisationsfähigkeit skalenfreier Netzwerke.

1 Einleitung

2 Gekoppelte Systeme

- Modellierung
- Master Stability Function
- Symmetrisch gekoppelte Systeme
- Asymmetrisch gekoppelte Systeme

3 Konstruktion gekoppelter Systeme

- Grad-abhängige Kopplung
- Load-abhängige Kopplung
- Asymmetrische Kopplung
- Load-Kopplung mit Age-ordering

4 Desynchronisation

- Modellierung

Schließlich wollen wir die Beschränkung auf symmetrische Kopplung fallen lassen und richtungsabhängige Kopplungen zulassen. Als Modell verwenden wir hierfür ein *age-ordering*.

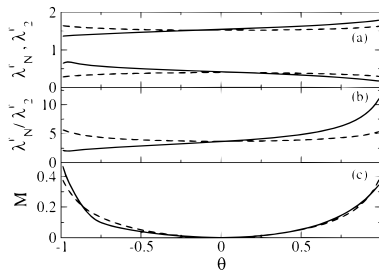
Modell: Age-ordering

$$\dot{x}_i = F(x_i) - \sigma \sum_{j=1}^N \Lambda_{ij} \frac{\Theta_{ij}}{\sum_{k \in \mathcal{N}_i} \Theta_{ik}} H(x_j) \quad (6)$$

$$\Theta_{ij} = \begin{cases} (1 - \Theta)/2, & i > j \\ (1 + \Theta)/2, & i < j \end{cases}$$

Dabei ist:

- Λ die Laplace Matrix
- Θ der Tuningparameter. Für $\Theta = 0$ ist das Age-ordering identisch mit der Grad-Kopplung für $\beta = 1$

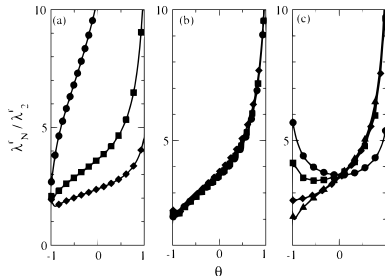


Die gestrichelte Linie entspricht einem Zufallsgraphen, die durchgezogene einem skalenfreien Netzwerk. Beim Zufallsgraphen zerstört das Age-ordering die Synchronisationsfähigkeit, beim skalenfreien Netzwerk fördert eine dominante Kopplung von älteren zu jüngeren Knoten die Synchronisationsfähigkeit.

Dieses Verhalten kann intuitiv nachvollzogen werden:

- Bei Skalenfreien Netzwerken haben ältere Knoten einen höheren Grad als jüngere
- Betrachtet man als Beispiel nun den Hub-Knoten einer Sterntopologie, dann wird sich dieser immer chaotisch verhalten, wenn er gleichzeitig viele starke Impulse von den Knoten bekommt
- Wenn jedoch die Kopplung von dem Hub-Knoten zu den anderen dominiert, so werden sich diese ihm anpassen

- 1 Einleitung
- 2 Gekoppelte Systeme
 - Modellierung
 - Master Stability Function
 - Symmetrisch gekoppelte Systeme
 - Asymmetrisch gekoppelte Systeme
- 3 Konstruktion gekoppelter Systeme
 - Grad-abhängige Kopplung
 - Load-abhängige Kopplung
 - Asymmetrische Kopplung
 - Load-Kopplung mit Age-ordering
- 4 Desynchronisation
 - Modellierung



- (a) Skalenfreie Netzwerke unter Variation von m
- (b) Skalenfreie Netzwerke unter Variation von B
- (c) (Kreise) Zufallsgraph, (Quadrate) Zufallsgraph mit Age-ordering nach Gradanzahl, (Karus) Skalenfrei getrennt in zwei Teilnetze, (Dreiecke) Skalenfrei

- 1 Einleitung
- 2 Gekoppelte Systeme
 - Modellierung
 - Master Stability Function
 - Symmetrisch gekoppelte Systeme
 - Asymmetrisch gekoppelte Systeme
- 3 Konstruktion gekoppelter Systeme
 - Grad-abhängige Kopplung
 - Load-abhängige Kopplung
 - Asymmetrische Kopplung
 - Load-Kopplung mit Age-ordering
- 4 Desynchronisation
 - Modellierung

Plan B:

