МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
з курсу "Чисельні методи"
для студентів спеціальності
113 "Прикладна математика"

Львів 2018

ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

Метод найменших квадратів

Нехай в результаті вимірювань величини, яка описується функцією $y(x)$ при $x = x_1, x = x_2, ..., x = x_n$, $x_i \in [a,b], i = \overline{1,n}$ отримаємо таблицю значень $y_i, i = \overline{1,n}$. За даними таблиці треба побудувати аналітичну формулу

$$\bar{y}(x) = f(x, a_1, ..., a_m), \tag{1}$$

яка залежить від m $(m < n)$ параметрів $a_i, i = \overline{1,m}$, причому функція $\bar{y}(x)$ має “досить добре” наближувати функцію $y(x)$ на всьому проміжку $[a,b]$. Вигляд функції f і кількість параметрів у деяких випадках відомі на основі додаткових міркувань. В інших випадках вони визначаються за графіком, побудованим за відомими значеннями $y(x_i)$ так, щоб залежність (1) була досить простою і добре відображала результати спостережень.

Якщо система рівнянь

$$\begin{array}{l} y_1 = f(x_1, a_1, ..., a_m), \\ .... \\ y_n = f(x_n, a_1, ..., a_m) \end{array} \tag{2}$$

має єдиний розв′язок, то він може бути знайдений з яких-небудь m рівнянь системи (2). Однак, у загальному випадку значення $y_i, x_i, i = \overline{1,n},$ є наближеними і точний вигляд залежності $\bar{y}(x)$ невідомий і через це система (2) переважно є несумісною. Тому визначимо параметри $a_1, ..., a_m$ так, щоб у деякому розумінні всі рівняння системи (2) задовольнялися з найменшою похибкою, точніше, щоб мінімізувати функцію

$$S(a_1, ..., a_m) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a_1, ..., a_m)]^2 .$$

Такий метод розв′язання системи (2) називається методом найменших квадратів.

Якщо функція $S(a_1, ..., a_m)$ досягає абсолютного мінімуму в області зміни параметрів $a_1, ..., a_m$, то, розв′язуючи систему

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = -2\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a_1, ..., a_m)] \frac{\partial f(x_i, a_1, ..., a_m)}{\partial a_k} = 0, \quad k = \overline{1,m},$$

знаходимо точки, в яких може бути екстремум. Вибравши той розв′язок, який належить області зміни параметрів $a_1, ..., a_m$ і в якому функція $S(a_1, ..., a_m)$ має абсолютний мінімум, знаходимо незалежні значення $a_1, ..., a_m$.

Якщо $f(x, a_1, ..., a_m)$ лінійно залежить від параметрів $a_1, ..., a_m$, тобто

$$f(x, a_1, ..., a_m) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x) a_j ,$$

то система (2) набуває вигляду

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} f_j(x_i) a_j , \quad i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Метод найменших квадратів розв’язування системи (3) полягає у тому, щоб визначити невідомі, які мінімізують суму квадратів нев’язок, тобто суму вигляду

$$S(a_1,...,a_m)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\sum_{j=1}^{m}f_j(x_i)a_j\right]^2 .$$

З умови мінімуму величини *S* як функції від $a_1,...,a_m$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial S}{\partial a_k}=-2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\sum_{j=1}^{m}f_j(x_i)a_j\right]f_k(x_i)=0,\ k=\overline{1,m}$$

або

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}f_j(x_i)a_j\right]f_k(x_i)=\sum_{i=1}^{n}f_k(x_i)y_i,\ k=\overline{1,m} . \qquad (4)$$

Розв'язок системи *m* лінійних алгебраїчних рівнянь (4) з *m* невідомими вважаємо наближеним розв'язком системи (3).

Приклад 1. Методом найменших квадратів для функції заданої таблицею

x_i	0	1/4	1/2	3/4	1
y_i	1	2	1	0	1

побудувати лінійний і квадратичний многочлени.

Розв'язування. Для наближення функції використаємо лінійний многочлен

$$\bar{y}(x)=a_1+a_2x .$$

Тоді

$$S(a_1,a_2)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a_1-a_2x_i)^2 .$$

Необхідна умова мінімуму функції S — виконання співвідношень

$$\frac{\partial S}{\partial a_1}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-a_1-a_2x_i)=0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2}=-2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-a_1-a_2x_i)=0.$$

Згрупувавши разом коефіцієнти при a_1 і a_2, отримаємо систему двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} n\cdot a_1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot a_2=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot a_1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\cdot a_2=\sum\limits_{i=1}^{n}y_ix_i. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи можна знайти за формулами Крамера

$$a_1=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\sum\limits_{i=1}^{n}y_i-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\sum\limits_{i=1}^{n}y_ix_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}=\frac{\frac{15}{8}\cdot 5-2\cdot\frac{5}{2}}{5\cdot\frac{15}{8}-\frac{25}{4}}=\frac{7}{5};$$

$$a_2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{5\cdot 2 - 5\cdot \frac{5}{2}}{5\cdot\frac{15}{8} - \frac{25}{4}} = -\frac{4}{5}.$$

У випадку квадратичного многочлена необхідно знайти мінімум функції

$$S(a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_1 - a_2 x_i - a_3 x_i^2)^2 .$$

Тоді

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_1 - a_2 x_i - a_3 x_i^2) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - a_1 - a_2 x_i - a_3 x_i^2) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_3} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 (y_i - a_1 - a_2 x_i - a_3 x_i^2) = 0.$$

Цю систему запишемо у вигляді

$$\begin{cases} n\cdot a_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot a_3 = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot a_2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \cdot a_3 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot a_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \cdot a_2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \cdot a_3 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2. \end{cases}$$

Розв’язавши її за наших даних, знайдемо $a_1 = 7/5, a_2 = -4/5, a_3 = 0$. Отже, квадратичний многочлен у цьому випадку не дає ніякого покращення у порівнянні з лінійною інтерполяцією.

ПОСЛІДОВНІСТЬ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Одержати варіант завдання.
2. Вивчити теоретичну частину.
3. Використовуючи будь-яку з відомих Вам мов програмування, написати та відлагодити програму, яка повинна:

   а) побудувати наближення методом найменших квадратів многочленами 0-го і 1-го степеня таблично задану функцію;

   б) обчислити максимальну похибку наближення і суму квадратів відхилень наближуваної функції і отриманого многочлена;

   в) зробити візуалізацію вхідних даних і отриманого многочлена.

ЗМІСТ ЗВІТУ

1. Постановка задачі (конкретний варіант).
2. Алгоритм наближення функції методом найменших квадратів (розрахункові формули).
3. Текст програми.
4. Результати обчислення на комп'ютері.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.:Наука, 1987.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.:Наука, 1978.
3. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М.:Мир, 2001.
4. Кутнів М. В. Чисельні методи: Навчальний посібник.– Львів: Видавництво «Растр-7», 2010.– 288 с.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.:Наука, 1986.
6. https://vns.lpnu.ua/course/view.php?id=5368

Варіанти завдань для лабораторної роботи:

Функція А

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,0	0,00000	0,5	0,47942
0,1	0,09983	0,6	0,56464
0,2	0,19866	0,7	0,64421
0,3	0,29552	0,8	0,71735
0,4	0,38941	0,9	0,78332

Відсутні точки

№ вар.	Значення точок		
1	0,0	0,3	0,7
2	0,2	-	-
3	0,1	0,9	-
4	0,3	0,4	0,8
5	0.1	0,5	-
6	0,6	-	-
7	0,1	0,7	0,9
8	0,4	0,6	-
9	0,3	0,6	0,7
10	0,0	0,5	0,7

Функція В

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,0	2,00000	0,5	1,07073
0,1	1,95533	0,6	0,77279
0,2	1,82533	0,7	0,49515
0,3	1,62160	0,8	0,26260
0,4	1,36235	0,9	0,09592

Відсутні точки

№ вар.	Значення точок		
1	0,2	0,3	0,6
2	0,2	0,9	-
3	0,1	-	-
4	0,4	0,7	0,8
5	0.0	0,5	-
6	0,8	-	-
7	0,1	0,5	0,9
8	0,3	0,8	-
9	0,2	0,6	0,7
10	0,0	0,2	0,5

Функція C

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,0	0,00000	0,5	1,71828
0,1	0,22140	0,6	2,32011
0,2	0,49182	0,7	3,05519
0,3	0,82211	0,8	3,95303
0,4	1,22554	0,9	5,04964

Відсутні точки

№ вар.	Значення точок		
1	0,2	0,3	-
2	0,0	0,8	-
3	0,1	0,4	0,7
4	0,2	0,6	0,8
5	0.3	0,6	-
6	0,5	-	-
7	0,0	0,3	0,9
8	0,3	-	-
9	0,4	0,6	-
10	0,1	0,3	0,6