МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ КВАДРАТУРНИХ ФОРМУЛ НЬЮТОНА-КОТЕСА

Методичні вказівки

до лабораторної роботи з курсу "Чисельні методи"
для студентів базового напрямку
6.0802 "Прикладна математика"

Затверджено
на засіданні кафедри
прикладної математики
Протокол № 5 від 26.11.2009

Львів – 2009

Наближене обчислення інтегралів за допомогою квадратурних формул Ньютона-Котеса: Методичні вказівки до лабораторної роботи з курсу "Чисельні методи" для студентів базового напрямку 6.0802 "Прикладна математика" / Укл.: М.В. Кутнів, Я.В. Пізюр – Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2009. — 17 с.

Укладачі Кутнів М.В., доктор фіз.-мат. наук, проф.
Пізюр Я.В., канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний за випуск Костробій П.П., докт. фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент Каленюк П.І., доктор. фіз.-мат. наук, проф.

ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

§1. Наближене обчислення інтегралів. Інтерполяційні квадратурні формули

Нехай потрібно обчислити інтеграл

$$I = \int_a^b \rho(x) f(x) dx, \tag{1}$$

де $\rho(x) > 0$ — задана інтегровна на (a,b) вагова функція, $f(x)$ — задана достатньо гладка на $[a,b]$ функція. Для наближеного обчислення (1) будемо розглядати формули вигляду

$$I \approx \sum_{i=0}^{n} c_i^{(n)} f(x_i), \tag{2}$$

які називаються квадратурними формулами. Числа $x_i, i = \overline{0,n}$ називають вузлами квадратурної формули, а числа $c_i^{(n)}$ — коефіцієнтами, або ваговими коефіцієнтами. Величина

$$R_n = I - \sum_{i=0}^{n} c_i^{(n)} f(x_i),$$

називається залишковим членом, або похибкою квадратурної формули.

Якщо залишковий член квадратурної формули дорівнює нулю для будь-якого многочлена не вище m-го степеня, то кажуть, що квадратурна формула має алгебраїчну степінь точності m.

Якщо функцію $f(x)$ на $[a,b]$ замінити інтерполяційним поліномом Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

то одержимо квадратурну формулу інтерполяційного типу. У цьому випадку

$$c_i^{(n)} = \int_a^b \rho(x) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx. \tag{3}$$

Очевидно, що алгебраїчна степінь точності квадратурної формули інтерполяційного типу (2) з ваговими коефіцієнтами (3) є щонайменше n.

Дійсно, якщо $f(x)$ — многочлен степеня n, то його можна записати у вигляді інтерполяційного многочлена Лагранжа, а тому $R_n = 0$.

Дамо оцінку похибки квадратурної формули інтерполяційного типу. Запишемо функцію $f(x)$ у вигляді $f(x) = L_n(x) + r_n(x)$, де $r_n(x)$ — похибка інтерполяції. Тоді

$$\int_a^b \rho(x) f(x)dx = \int_a^b \rho(x)L_n(x)dx + \int_a^b \rho(x)r_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i^{(n)} f(x_i) + \int_a^b \rho(x)r_n(x)dx.$$

Отже, залишковий член R_n квадратурної формули інтерполяційного типу дорівнює

$$R_n = \int_a^b \rho(x)r_n(x)dx = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi(x))dx,$$

де $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)...(x - x_n)$. Звідси, якщо $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1}$ $\forall x \in [a,b]$, то для залишкового члена квадратурної форми інтерполяційного типу справджується оцінка

$$R_n \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_a^b \rho(x)\left|\omega_{n+1}(x)\right|dx. \tag{4}$$

§2. Квадратурні формули Ньютона–Котеса

Якщо у квадратурній формулі (2) з ваговими коефіцієнтами (3) для інтегралів (1) з $\rho(x) \equiv 1$ вузли рівновіддалені, тобто $x_{i+1} - x_i = h$, $i = \overline{0, n-1}$, $n = 1,2,...$, то така формула називається квадратурною формулою Ньютона–Котеса. У формулах Ньютона–Котеса крок $h = (b-a)/n$. Тоді квадратурна формула (2), (3) буде мати вигляд

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i^{(n)} f(a+ih), \tag{1}$$

де

$$c_i^{(n)} = \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j\ne i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx.$$

Зробимо заміну змінних $x = a + ht$. Тоді $x - x_j = h(t - j)$ і

$$\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}=$$

$$=\frac{t(t-1)\ldots(t-i+1)(t-i-1)\ldots(t-n)}{(-1)^{n-i}i!(n-i)!}.$$

Отже,

$$c_i^{(n)}=h\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n t(t-1)\ldots(t-i+1)(t-i-1)\ldots(t-n)dt,\quad i=\overline{0,n}.$$

Позначимо

$$c_i^{(n)}=(b-a)D_i^{(n)},\tag{2}$$

тоді

$$D_i^{(n)}=\frac{(-1)^{n-i}}{ni!(n-i)!}\int_0^n t(t-1)\ldots(t-i+1)(t-i-1)\ldots(t-n)dt,\quad i=\overline{0,n}.\tag{3}$$

Коефіцієнти $D_i^{(n)}$ не залежать від проміжку інтегрування $[a,b]$ і можуть бути обчислені один раз.

Оцінка залишкового члена квадратурних формул Ньютона–Котеса має вигляд

$$\left|R_n\right|\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_a^b\left|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\right|dx.\tag{4}$$

На практиці використовують часткові випадки формул Ньютона–Котеса при невеликих n, оскільки при великих n деякі коефіцієнти $c_i^{(n)}$ стають від'ємними, що призводить до великих похибок заокруглень.

Розглянемо детальніше формули Ньютона–Котеса. Нехай $n=0,\ x_0=a$, тобто підінтегральну функцію замінимо інтерполяційним многочленом нульового степеня $f(x_0)$, тоді

$$I\approx I_L=(b-a)f(a).$$

Ця формула називається формулою лівих прямокутників. Якщо $x_0=b$, то одержимо формулу правих прямокутників

$$I\approx I_R=(b-a)f(b).$$

А при $x_0=(a+b)/2$ будемо мати формулу середніх прямокутників (див. рис. 1.)

$$I\approx I_M=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

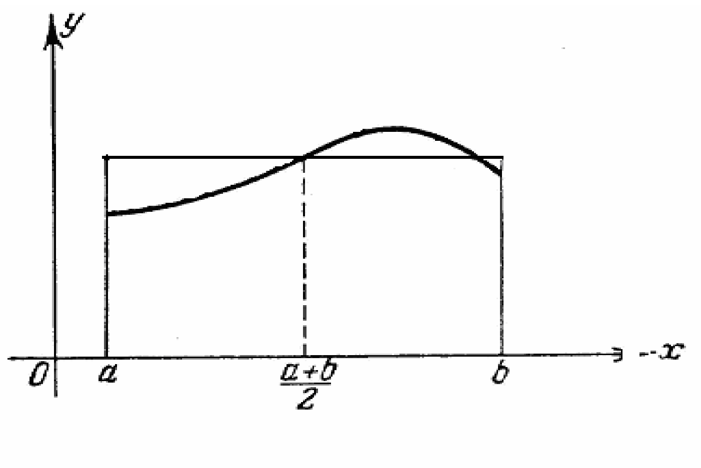

Рис. 1. Геометрична інтерпретація формули середніх прямокутників

Оцінка залишкового члена (4) при $n = 0, x_0 = a$ (тобто для формули лівих прямокутників) буде мати вигляд

$$|R_L| \le M_1 \int_a^b |x-a| dx = \left.\frac{M_1 (x-a)^2}{2}\right|_a^b = \frac{M_1 (b-a)^2}{2}.$$

Ця оцінка не зміниться, якщо $x_0 = b$. Застосуємо (4) до формули середніх прямокутників

$$|R_M| \le M_1 \int_a^b \left| x - \frac{a+b}{2} \right| dx = M_1 \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - x \right) dx + M_1 \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} M_1 \left(\frac{a+b}{2} - x \right)^2 \Bigg|_a^{\frac{a+b}{2}} + \frac{1}{2} M_1 \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \Bigg|_{\frac{a+b}{2}}^b =$$

$$= \frac{1}{2} M_1 \frac{(b-a)^2}{4} + \frac{1}{2} M_1 \frac{(b-a)^2}{4} = \frac{M_1 (b-a)^2}{4}.$$

Якщо від підінтегральної функції $f(x)$ існує неперервна друга похідна $f''(x)$, то для формули середніх прямокутників можна одержати іншу оцінку точності. Для цього розкладемо $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки $(a+b)/2$:

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2} \right) + \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f'\left(\frac{a+b}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 f''(\xi),$$

$$R_M = I - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2} \right) =$$

$$= \int_a^b \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi) \right] dx -$$

$$-(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\Bigg|_a^b +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 f''(\xi)\Bigg|_a^b - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{8} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(a-b)^2}{8} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{48} f''(\xi) -$$

$$- \frac{(a-b)^3}{48} f''(\xi) = \frac{(b-a)^3 f''(\xi)}{24},$$

де $\xi \in [a,b]$. Тоді

$$|R_M| \le \frac{M_2 (b-a)^3}{24}.$$

Покладемо в (3) $n = 1$, тоді

$$D_0^{(1)} = -\int_0^1 (t-1)dt = -\frac{(t-1)^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}; \quad D_1^{(1)} = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2};$$

$$c_0^{(1)} = \frac{b-a}{2}; \quad c_1^{(1)} = \frac{b-a}{2}.$$

Підставимо коефіцієнти $c_0^{(1)}, c_1^{(1)}$ у (1), тоді одержимо формулу трапецій (див. рис.2)

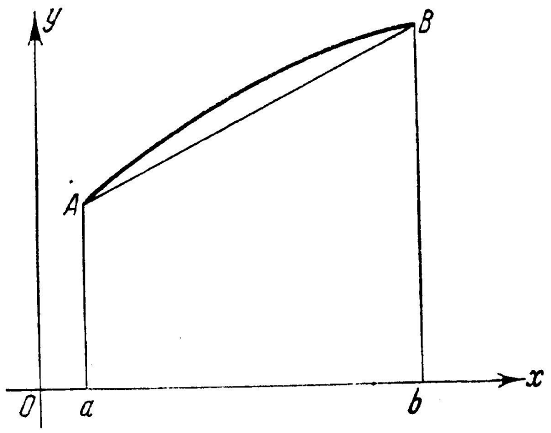

Рис. 2. Геометрична інтерпретація формули трапецій

$$I \approx I_T = \frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)]$$

з оцінкою залишкового члена

$$|R_T| \le \frac{M_2}{2!}\int_a^b |(x-a)(x-b)|dx = \frac{M_2}{2!}\int_a^b [-x^2+(a+b)x-ab]dx =$$

$$= \frac{M_2}{2}\left[-\frac{x^3}{3}+(a+b)\frac{x^2}{2}-abx\right]\Bigg|_a^b = \frac{M_2}{2}\left[-\frac{b^3}{3}+(a+b)\frac{b^2}{2}-ab^2+\right.$$

$$\left.+\frac{a^3}{3}-(a+b)\frac{a^2}{2}+a^2b\right] = \frac{M_2}{12}(b^3-3ab^2+3a^2b-a^3) = \frac{M_2}{12}(b-a)^3.$$

Нехай $n = 2$, тоді

$$D_0^{(2)} = \frac{1}{4}\int_0^2 (t-1)(t-2)dt = \frac{1}{4}\int_0^2 (t^2-3t+2)dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{3}-3\frac{t^2}{2}+2t\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{6};$$

$$D_1^{(2)} = -\frac{1}{2}\int_0^2 t(t-2)dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}-t^2\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3};$$

$$D_2^{(2)} = \frac{1}{4}\int_0^2 t(t-1)dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{6};$$

$$c_0^{(2)} = \frac{b-a}{6}; \quad c_1^{(2)} = \frac{2(b-a)}{3}; \quad c_2^{(2)} = \frac{b-a}{6}.$$

Отже, одержимо формулу

$$I \approx I_S = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right],$$

яка називається формулою Сімпсона (парабол) (див. рис.3). Якщо припустити, що існує неперервна четверта похідна від підінтегральної функції $f(x)$, то аналогічно як для формули середніх прямокутників можна показати, що:

$$|R_s| \le \frac{M_4(b-a)^5}{2880}.$$

В усі отримані оцінки похибок входять степені довжини відрізка $[a,b]$. Якщо ця довжина не буде малою, то, взагалі кажучи, не будуть малими ці оцінки. Однак на практиці будемо застосовувати квадратурні формули тільки на досить малих відрізках, які одержуються в результаті розбиття

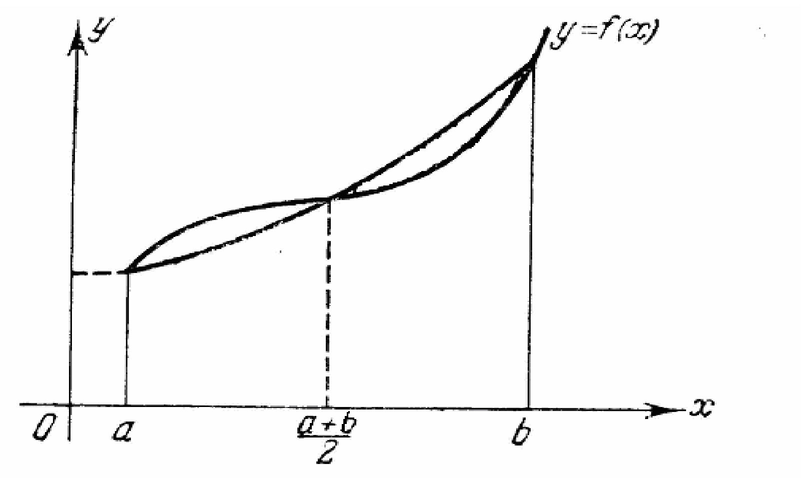

Рис. 3. Геометрична інтерпретація формули Сімпсона

даного відрізка $[a,b]$. Розбиваючи $[a,b]$ на N рівних частин довжини $h=(b-a)/N$, матимемо

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx,$$

де $x_i = a + ih, i=\overline{0,N-1}, x_N = b$. Якщо тепер на кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ застосувати формулу лівих прямокутників, то одержимо *складену* формулу лівих прямокутників

$$I \approx I_{CL} = h\sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1})$$

з оцінкою залишкового члена

$$|R_{CL}| \le \frac{M_1}{2}\sum_{i=1}^{N} h^2 = \frac{M_1(b-a)}{2}h.$$

Застосовуючи до кожної частини відрізка $[a,b]$ відповідну формулу, отримаємо складені формули середніх прямокутників і трапецій

$$I \approx I_{CM} = h\sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) = h\sum_{i=1}^{N} f\left(a + \frac{2i-1}{2}h\right), \quad |R_{CM}| \le \frac{M_2}{24}(b-a)h^2,$$

$$I \approx I_{CT} = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right] = h\left[\frac{1}{2}(f(a)+f(b)) + \sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih)\right],$$

$$|R_{CT}| \le \frac{M_2}{12}(b-a)h^2,$$

де $f_i = f(x_i), i=\overline{0,N}$. Поклавши $h=(b-a)/2N, x_i = a+2ih,$ маємо складену формулу Сімпсона (парабол)

$$I \approx I_{CS} = \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{N}\left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right] =$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b)\right] =$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{N} f(a+(2i-1)h) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(a+2ih) + f(b)\right],$$

$$\left|R_{CS}\right| \le \frac{M_4}{2880}\sum_{i=1}^{N}(2h)^5 = \frac{M_4(b-a)h^4 2^4}{2880} = \frac{M_4(b-a)h^4}{180}.$$

§3. Практична оцінка похибки квадратурних формул

У багатьох практичних задачах похідні високих порядків від підінтегральної функції знайти важко, крім того підінтегральна функція може навіть не задаватися аналітичною формулою, а її значення знаходяться за допомогою довгого ланцюжка обчислень. Тоді оцінки залишкових членів, виведені в попередньому параграфі, практично непридатні. В будь-якій реальній задачі похибка оцінюється на основі числових (а не аналітичних) даних. Розповсюджений метод отримання практичних оцінок похибки полягає в комбінаціїї двох або більшої кількості квадратурних формул. У найпростішому випадку застосовують дві формули і за оцінку похибки менш точної з них застосовують модуль різниці двох наближень. Наприклад, якщо застосувати складені формули трапецій і Сімпсона, то різницю отриманих наближень можна використати для оцінки першої. Нижче буде показано, як для оцінки похибки можна використати квадратурні формули з різною кількістю елементарних відрізків.

Нехай необхідно обчислити інтеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

за допомогою деякої квадратурної формули I_h. Припустимо $f(x) \in C^{p+1}[a,b]$, тоді можна показати, що

$$I = I_h + Ch^p + O(h^{p+1}), \tag{2}$$

де C не залежить від h, $p=2$ для формули середніх прямокутників і трапецій і $p=4$ для формули Сімпсона. Величина Ch^p називається головною частиною похибки квадратурної формули. Проведемо обчислення за квадратурною формулою з кроками h і $\theta h, \theta > 0$. Тоді справджується формула (2) і

$$I = I_{\theta h} + C\theta^p h^p + O(h^{p+1}). \tag{3}$$

Віднімемо (3) від (2), тоді одержимо

$$I_h - I_{\theta h} = Ch^p(\theta^p - 1) + O(h^{p+1}).$$

Звідси для похибки квадратурної формули при достатньо малих h виконується наближена рівність

$$I - I_h \approx Ch^p = \frac{I_h - I_{\theta h}}{\theta^p - 1}. \tag{4}$$

Отже, використання квадратурної формули з кроками h і θh дозволяє оцінити головний член похибки I_h. Зокрема, якщо вибрати $\theta = 2$, тоді для формули середніх прямокутників і трапецій маємо оцінку похибки

$$I - I_h^* \approx \frac{I_h - I_{2h}}{3},$$

а для формули Сімпсона

$$I - I_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{15}.$$

Можна виключити знайдену похибку (4) з формули (2) і одержати результат з вищою точністю

$$I_h^* = I_h + \frac{I_h - I_{\theta h}}{\theta^p - 1},$$

а саме з похибкою

$$I - I_h = O(h^{p+1}).$$

§4. Алгоритм наближеного обчислення означених інтегралів з заданою точністю за допомогою правила Рунге (стратегії $h - h/2$)

Алгоритм обчислює наближене значення означеного інтеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

за допомогою квадратурних формул Ньютона — Котеса з заданою точністю ε. Для практичної оцінки похибки та вибору величини кроку використовується метод описаний в §3, який ще називають правилом Рунге або стратегією $h - h/2$.

1. **Ввести значення** a, b, ε.

2. $N := 8$.

3. **Обчислити величину кроку** h **та вузли** x_i **квадратурної формули.**

4. **Обчислити наближене значення інтеграла** I_h **за однією із складених формул середніх прямокутників, трапецій або Сімпсона.**

5. Вивести N, h, I_h**.**

6. $N := 2N; \quad h := h/2$.

7. **Обчислити наближене значення** $I_{h/2}$ **за тією ж формулою.**

8. If $|I_h - I_{h/2}| > (2^p - 1)\varepsilon$ then

   begin $I_h = I_{h/2}$; go to 5 end

9. **Уточнити наближене значення інтеграла за формулою**

$$I_h = I_{h/2} + \frac{I_{h/2} - I_h}{2^p - 1}.$$

10. **Вивести** N, h, I_h.

11. **Кінець алгоритму**.

ПОСЛІДОВНІСТЬ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Одержати варіант завдання.

2. Вивчити теоретичну частину.

3. Використовуючи будь-яку з відомих Вам мов програмування, написати та відлагодити програму наближеного обчислення означеного інтеграла за допомогою квадратурних формул Ньютона-Котеса з заданою точністю $\varepsilon = 10^{-5}$.

4. Для відлагодження програми потрібно вибрати таку підінтегральну функцію і межі інтегрування, щоб інтеграл обчислювався точно, наприклад $\int_{0,5}^{1} \frac{dx}{x} = \ln 2$. Якщо точність ε досягнута, то вивести на друк величину похибки $\left| I_h - I \right|$.

Вимоги до програми:

1. Алгоритм обчислення наближеного значення інтеграла з заданною точністю повинен бути оформлений у вигляді підпрограми-процедури.

2. В програмі повинна використовуватися процедура-функція для обчислення значень підінтегральної функції.

Зауваження. Для отримання достатньо ефективної програми потрібно врахувати, що в формулах трапецій і Сімпсона при подвоєнні кількості вузлів N (зменшенні величини кроку h в два рази) немає необхідності обчислювати значення підінтегральної функції заново в усіх вузлах сітки, отримані значення при кількості вузлів N, є вузлами сітки і при кількості кроків, рівній $2N$.

ЗМІСТ ЗВІТУ

1. Постановка задачі (конкретний варіант).
2. Алгоритм наближеного обчислення інтеграла для заданої квадратурної формули.
3. Текст програми.
4. Результати обчислення на комп'ютері.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.:Наука, 1987.
2. Гаврилюк І.П., Макаров В.Л. Методи обчислень. – К.:Вища школа, 1995, ч.1, ч.2.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.:Наука, 1978.

4. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М.:Мир, 2001.
5. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.:Наука, 1982.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.:Наука, 1986.
7. Трифонов Н.П., Пасхин Е.Н. Практикум работы на ЭВМ. – М.: Наука, 1982.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

1. Квадратурні формули:

1). Складена формула середніх прямокутників

$$I_{CM} = h(f_1 + f_2 + \ldots + f_N),$$

де $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + (i - 1/2)h$, $i = \overline{1, N}$, $h = (b-a)/N$.

2). Складена формула трапецій

$$I_{CT} = h\left[\frac{1}{2}(f_0 + f_N) + f_1 + f_2 + \ldots + f_{N-1}\right],$$

де $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, $i = \overline{0, N}$, $h = (b-a)/N$.

3). Складена формула Сімпсона

$$I_{CS} = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{N-1}) + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{N-2}) + f_N\right],$$

де $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + 2ih$, $i = \overline{0, N}$, $h = (b-a)/2N$.

2. Функції $f(x)$, значення a, b.

№ варіанта	$f(x)$	a	b
1.	$\sqrt{e^x - 1}$	0,1	2
2.	$e^x \sin x$	0	π
3.	$(x^2 - 1)\cdot 10^{-2x}$	0	1
4.	$x\sqrt[3]{1+x}$	1	9
5.	$\frac{1}{3 + 2\cos x}$	0	π
6.	$\frac{1}{x \ln^2 x}$	2	3
7.	$\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$	0,2	0,3
8.	$x^3 e^{2x}$	0	1
9.	$\mathrm{tg}^3\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$	0	$\pi/4$
10.	$x \,\mathrm{arctg}\, x$	0	$\sqrt{3}$

11.	$\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$	0	4
12.	$\dfrac{1}{5-3\cos x}$	0	2π
13	$\dfrac{2^x}{1-4^x}$	-2	-1
14.	$\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$	0	3/4
15.	$\dfrac{x^3}{x^8+1}$	0	1
16.	$\dfrac{1+\sqrt{x}}{x^2}$	1	4
17.	$\sqrt{1+x^3}$	0	2
18.	$\sqrt{1+x^5}$	0	2
19.	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$	0	0,5
20.	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$	0	0,6
21.	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$	2	10
22.	$\sqrt{x(1-x)}$	0	1
23.	$x\ln(1+x)$	0	1
24.	e^{x^2}	0	1
25.	e^{x^3}	0	1
26.	$\mathrm{tg}(x)\,\mathrm{e}^{2x}$	0	1
27.	$\cos(x)\,\mathrm{e}^{-x}$	0	1
28.	$\ln x / \sin(2x)$	2	3
29.	$\ln(5x) / \arctan x$	1	2
30.	$\arctan(1+x) / \ln x$	0	0,9

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ КВАДРАТУРНИХ ФОРМУЛ НЬЮТОНА-КОТЕСА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторної роботи з курсу "Чисельні методи"
для студентів базового напрямку
6.08.02 "Прикладна математика"

Укладачі Кутнів Мирослав Володимрович
Пізюр Ярополк Володимирович

Редактор
Компютерне верстання