НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ

до виконання лабораторних робіт

для студентів

спеціальності 113 Прикладна математика

Затверджено

на засіданні кафедри

прикладної математики

Протокол № 1 від 1.09.2020 р.

2020

Методи оптимізації: Методичні вказівки та завдання до виконання лабораторних робіт для студентів спеціальності 113 Прикладна математика / Уханська О.М., Манзій О.С., Тесак І.Є. – Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2020. – 74с.

Укладачі

Уханська О.М., канд. фіз.-мат. наук, доц.

Манзій О.С., канд. фіз.-мат. наук, доц.

Тесак І.Є., ст.викл.

Відповідальний за випуск Гладун В.Р., канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензенти Гайдучок О.В., канд. ек. наук, доц.,

Дрогомирецька Х.Т., канд. фіз.-мат. наук, доц.

Метою методичних вказівок є закріплення теоретичного матеріалу з курсу "Методи оптимізації" і розширення навиків студентів у практичному застосуванні теоретичного матеріалу. Робота складається із завдань до чотирнадцяти лабораторних робіт, кожне з яких містить по тридцять варіантів, і вказівок до їх виконання. Зміст методичних вказівок повністю відповідає програмі з курсу "Методи оптимізації" для студентів вузів напряму "Прикладна математика".

До задач оптимізації належать задачі, переважно економічного характеру, в яких необхідно знайти екстремуми функцій або функціоналів при виконанні певних умов. Суть цих задач полягає у тому, щоб із множини можливих варіантів досліджуваного процесу вибрати за деякою ознакою найкращий (оптимальний) варіант.

Задачі оптимізації можна поділити на такі класи: задачі математичного програмування; задачі варіаційного числення; задачі оптимального керування.

Постановка загальної задачі математичного програмування.

Позначимо через z величину, якою вимірюється ступінь досягнення мети системою, а через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – кількісні характеристики, від яких залежить досягнення мети. Тоді зв'язок між z і $x_j\ (j = \overline{1,n})$ можна подати у вигляді функціональної залежності

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

Така функція називається **цільовою функцією** або **функцією мети**.

Задача математичного програмування полягає у тому, щоб знайти екстремум функції z при обмеженнях, які накладені на змінні x_j:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \{\le, =, \ge\}\ 0,\ \ i = \overline{1,m}. \qquad (2)$$

Система нерівностей (2) називається **системою основних обмежень** або **системою основних умов** задачі. Крім основних, задача математичного програмування може мати обмеження невід'ємності або цілочисловості змінних.

Точка $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-вимірного простору, яка задовольняє систему обмежень, називається **допустимою точкою** або **допустимим планом** задачі математичного програмування. Сукупність усіх розв'язків системи обмежень, тобто множина всіх планів, утворює **область допустимих планів** або **область визначення** задачі математичного програмування. Допустимий план, що надає цільовій функції екстремального значення, називається **оптимальним**.

Лабораторна робота № 1.

Тема: "Математична модель задачі лінійного програмування ".

Побудувати загальну математичну модель задачі лінійного програмування.

Приклад. Підприємство може виготовляти два види виробів (№ 1 і № 2), використовуючи для їх виготовлення обмежену кількість ресурсів (виду А і В відповідно не більше 1650кг і 1200кг) і обладнання (у кількості 2060 станко-годин). Для виготовлення одиниці продукції № 1 необхідно 10кг сировини виду *A*, 30кг сировини виду *B*, 23ст.-год. обладнання. Для виготовлення одиниці продукції № 2 необхідно 10кг сировини виду *A*, 20кг сировини виду *B*, 18ст.-год. Прибуток від реалізації одиниці продукції № 1 – 34у.о., № 2 – 40у.о. Необхідно визначити, скільки виробів №1 і №2 повинне виготовити підприємство, щоб отримати найбільший прибуток, за умови, що виробів №1 має бути виготовлено не менше 20, а виробів №2 – не менше 15. Побудувати математичну модель задачі.

► Побудуємо математичну модель задачі. Нехай x_1, x_2 – кількість виробів №1 і №2 відповідно, які повинне виготовити підприємство (шукані невідомі). Очевидно, що x_1, x_2 повинні задовольняти умови

$$\begin{cases} 10x_1 + 30x_2 \le 1650, \\ 10x_1 + 20x_2 \le 1200, \\ 23x_1 + 18x_2 \le 2060. \end{cases}$$

Перша умова вказує на те, що кількість сировини виду А, яка йде на виготовлення x_1 виробів №1 та x_2 виробів №2, не повинна перевищувати наявної кількості сировини виду А. Наведені нерівності є умовами обмеження ресурсів. Крім того, невідомі x_1 і x_2 пов'язані обмеженнями асортименту $x_1 \ge 20,\ \ x_2 \ge 15$.

Математичну модель задачі можна сформулювати так: серед множини розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 10x_1 + 30x_2 \le 1650; \\ 10x_1 + 20x_2 \le 1200; \\ 23x_1 + 18x_2 \le 2060; \\ x_1 \ge 20, \quad x_2 \ge 15 \end{cases}$$

знайти такий, для якого цільова функція $L = 34x_1 + 40x_2$ досягає найбільшого значення. ◄

Варіанти завдань до виконання лабораторної роботи № 1.

1. Фірма випускає два види апаратури. Моніторинг ринку збуту показав, що апаратури першого виду необхідно виготовити на суму не менше 1800 тис. у.о., а другого – не менше 2100 тис. у.о. Сумарний план випуску апаратури за один місяць становить 160 штук за обсягів прибутку 240-320 тис. у.о. Вартість, величина прибутку та витрати на виробництво одиниці кожного виду апаратури наведені у таблиці. План повинен враховувати, що витрати на виробництво повинні бути мінімальними.

Показники	Вид апаратури	
	1	2
Вартість, тис. у.о.	25	40
Прибуток, тис. у.о.	1	3
Витрати, тис. у.о.	3	4

2. Підприємство випускає два види виробів – А і В. Для їх виготовлення необхідно чотири види ресурсів, запаси яких обмежені: 5700 верстатогодин роботи токарних верстатів, 3300 – фрезерних, 5000 верстатогодин слюсарно-складальних робіт та 610кг напівфабрикатів. Для виготовлення одного виробу типу А необхідно верстатогодин: 300 токарних, 200 фрезерних, 200 слюсарно-складальних робіт та 10кг напівфабрикатів. Для виготовлення одного виробу типу В необхідно верстатогодин: 400 токарних, 100 фрезерних, 500 слюсарно-складальних робіт та 70кг напівфабрикатів. Мінімальна кількість виробів типу А, які повинні бути виготовлені, становить 10 одиниць, а випуск виробів типу В не лімітований. Прибуток від реалізації виробу типу А становить 3 тис.грн., а типу В – 8 тис.грн. План виробництва повинен бути спрямованим на отримання максимального сумарного прибутку від реалізації виготовленої продукції.

3. На ринок привозять картоплю з трьох фермерських господарств за цінами 2.85, 2.35, 1.95 гривень за 1кг. На завантаження 1 тонни картоплі у господарствах витрачається по 2, 6 та 5хв. Замовлено 14т картоплі, для своєчасної доставки якої необхідно, щоб на її завантаження витрачалося не більше 42хв. План доставки картоплі повинен враховувати, що загальна вартість закупівлі картоплі повинна бути мінімальною, а фермери можуть виділити для продажу 10, 8 та 6 тонн відповідно.

4. Фермерське господарство володіє земельною ділянкою, яка поділена на три зони. Для вирощування певної культури господарство придбало три види добрив: фосфорні, азотні і калійні. Площа зон, приріст урожайності на 1гектар кожної зони, кількість одиниць кожного виду добрива, яке

вноситься на 1 площі кожної зони і запаси добрив наведено у таблиці. Визначити скільки площі кожної зони необхідно удобрити, щоб забезпечити максимальний сумарний приріст урожайності культур.

Зони	Посівна площа, га	Витрати добрив на 1га, ц			Приріст урожайності на 1га, ц
		Фосфорні	Азотні	Калійні	
I	100 000	2	1.2	1	13
II	150 000	1.1	2	1.25	15
III	200 000	1.3	0.6	0	11
Запаси добрив, ц		400 000	350 000	150 000	

5. Для виробництва фарб двох видів підприємство використовує два види сировини А і В. Максимальні добові витрати сировини, норми витрат сировини на виробництво 1т фарби і прибуток від продажу 1т фарби кожного виду наведено у таблиці. Моніторинг ринку збуту показав, що попит на фарбу другого виду не повинен перевищувати 2т на добу. Підприємство планує отримати максимальний прибуток.

Вид сировини	Витрати сировини на 1т фарби, т		Добовий запас сировини, т
	Фарба № 1	Фарба № 2	
A	0.8	0.9	6
B	0.5	1	8
Прибуток від реалізації 1т фарби, тис.у.о.	3	2	

6. На підприємстві необхідно зі стандартних дерев'яних плит вирізати 22, 26 і 16 заготовок A, B, C різних розмірів відповідно. Плити можна розрізати двома різними способами. Кількість заготовок і площу відходів за кожного способу розрізання однієї плити наведено у таблиці. Необхідно так розрізати плити, щоб отримати потрібну кількість заготовок за умови мінімальної кількості відходів.

Заготовки	Кількість вирізаних заготовок	
	Спосіб розрізання 1	Спосіб розрізання 2
A	2	6
B	4	4
C	2	3
Площа відходів, $см^2$	11	17

7. Учасник експедиції визначає, які продукти йому необхідно взяти. У розпорядженні є м'ясо, борошно, сухе молоко і цукор. У наплічнику залишилося вільними 45 дм^3 об'єму, які можна заповнити не більше, ніж 35кг продуктів. Лікар експедиції рекомендував, щоб м'яса за масою було більше, ніж борошна принаймні удвічі; борошна не менше, ніж молока; молока хоча б у 8 разів більше, ніж цукру. Скласти продукти у наплічник так, щоб сумарна калорійність продуктів була найбільшою. Характеристики продуктів наведено у таблиці.

Показники	Продукт			
	м'ясо	борошно	молоко	цукор
Об'єм, дм^3	1	1.5	2	1
Калорійність, ккал/кг	1500	5000	5000	4000

8. Молокозавод, який виготовляє молоко, кефір і сметану, розфасовані у пляшки, може використати для їх виробництва 136 000кг молока. На виробництво 1т молока, кефіру і сметани необхідно відповідно 1010кг, 1010кг і 9450кг молока. Витрати робочого часу при розфасовці 1т молока і кефіру складають 0.18 і 0.19 машино-годин. Розфасовку 1т сметани проводять на спеціальному автоматі протягом 3.25 год. Основне обладнання може бути зайняте протягом 21.4 машино-годин, а спеціальний автомат – впродовж 16.25год. Прибуток від реалізації 1т молока, кефіру і сметани становить 30, 22 і 136 у.о. відповідно. Завод повинен щодня виготовляти не менше 100т молока, розфасованого у пляшки. На виробництво іншої продукції немає жодних обмежень. Прибуток від реалізації продукції повинен бути максимальним.

9. Підприємство використовує у виробництві 140т піску, який постачається з трьох кар'єрів. Для забезпечення безперебійної роботи підприємства необхідно, щоб сумарний час завантаження піску не перевищував 4год. Час завантаження і вартість 1т піску наведено у таблиці. Цілодобове постачання сировини не повинне бути меншим за 25т піску з першого кар'єру, 45т – з другого і 35т – з третього. Сумарні витрати на закупівлю піску повинні бути мінімальними.

Номер кар'єру	1	2	3
Час завантаження 1т піску, хв.	1.1	1.4	0.4
Вартість 1т піску, у.о.	0.6	0.7	0.9

10. Підприємство виготовляє два види будівельних сумішей «Ферозіт 15» і «Ферозіт 25». Сумарне виробництво цих сумішей повинне бути у діапазоні від 1 до 6 тонн. Обсяг виробництва суміші «Ферозіт 25» не

повинен бути більшим 20% від обсягу виробництва суміші «Ферозіт 15». Вартість реалізації 1т суміші «Ферозіт 15» становить 20 у.о., а суміші «Ферозіт 25» – 25 у.о. Сумарна вартість реалізації обох сумішей повинна бути максимальною.

11. Фірма випускає дві моделі книжкових полиць – КП1 і КП2, які обробляються верстатами двох типів. Час обробки однієї полиці кожної моделі, час роботи верстатів за тиждень та прибуток фірми від реалізації однієї полиці наведено у таблиці. Моніторинг ринку показав, що тижневий попит на книжкові полиці моделі КП1 не перевищує попиту на моделі КП2 більше, ніж на 30 од., а попит на книжкові полиці моделі КП2 не перевищує 70 од. на тиждень. Фірма хоче отримати максимальний прибуток від реалізації готових виробів.

Верстати	Час обробки полиці, хв.		Час роботи, верстатів, год.
	КП1	КП2	
1	25	18	40
2	13	25	36
Прибуток від 1 прод.	55	35	

12. Стандартом передбачається, що октанове число бензину А-76 має бути не нижчим 76, а вміст сірки у ньому – не більшим, ніж 0.3%. Для виготовлення такого бензину на заводі змішують чотири компоненти. Дані про обсяги запасів компонент, їх вартості, октанові числа та вміст сірки наведені у таблиці. Необхідно виготовити 1000т бензину А-76 з мінімальною собівартістю.

Показники	Компоненти бензину			
	1	2	3	4
Октанове число	68	72	80	90
Вміст сірки, %	0.35	0.35	0.3	0.2
Наявний обсяг, т	700	600	500	300
Вартість за 1т, у.о.	40	45	60	90

13. Деякому заводу необхідно скласти такий оптимальний виробничий план випуску двох видів деталей при певних можливостях чотирьох типів обладнання, щоб від реалізації випущеної продукції одержати найбільший прибуток. План повинен враховувати, що 1-й тип обладнання щоденно повинен обробляти продукцію протягом часу, що не перевищує 18 год., 2-й – 12 год., 3-й – 12 год. Четвертий тип обладнання повинен працювати протягом 9 год. Час, необхідний для обробки кожного виду деталей вказаними типами обладнання наведений у таблиці.

Вид виробу	Тип обладнання				Прибуток від реалізації 1 виробу, у.о.
	1	2	3	4	
I	1.2	0.7	1.1	1.3	7
II	1	1	0	1	10

14. Комерційна фірма рекламує свою продукцію на радіо і телебаченні. На рекламу в бюджеті фірми планують витратити 1000$ на місяць. Хвилина радіореклами коштує 6$, а телереклами – 92$. Фірма має намір використовувати радіорекламу принаймні вдвічі частіше, ніж рекламу на телебаченні. Досвід показав: обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв. телереклами, у 32 рази перевищує обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв. радіореклами. Скласти такий план розподілу коштів, які щомісяця мають витрачатися на рекламу, за якого обсяг збуту продукції буде найбільшим.

15. Підприємство випускає три види виробів. Місячний план становить 200 виробів 1-го виду, 1800 – другого, 1500 – третього. Для випуску виробів використовують матеріали, щомісячні витрати яких не можуть перевищувати 61000кг. На один виріб 1-го виду витрачається 8кг матеріалу, 2-го – 10кг, 3-го – 11кг. Оптова ціна одного виробу 1-го виду становить 7 у.о., 2-го – 10 у.о., 3-го – 19 у.о. Підприємство хоче отримати максимальний виторг від реалізації виготовленої продукції.

16. Завод випускає шестерні і карданні вали. Обробка цих деталей ведеться на токарних і фрезерних верстатах. Для обробки шестерні на токарному верстаті потрібно 0.9год., а на фрезерному – 1.1год.; на обробку карданного валу – відповідно по 0.6год. Фонд часу токарного верстата – 360год., фрезерного – 420год. Визначити кількість оброблених деталей, при якій сумарний час простою обох видів обладнання буде мінімальним.

17. Для забезпечення нормальної життєдіяльності людина повинна у добу споживати білків не менше, ніж 120 у.о., жирів – не менше, ніж 70 у.о. і вітамінів – не менше 10 у.о. Вміст цих речовин у кожній одиниці продуктів П1 і П2 відповідно дорівнює 0.2; 0.75; 0.25 у.о. і 0.1; 0.1; 0.15 у.о. Вартість одиниці продукту П1 становить 15 грн., продукту П2 – 25 грн. Побудувати математичну модель задачі, яка дозволяє так організувати харчування, щоб його вартість була мінімальною, а організм отримав необхідну кількість поживних речовин.

18. Процес виготовлення двох видів виробів А і В підприємством вимагає послідовної обробки на токарних і фрезерних верстатах і використання сировини: сталі і кольорових металів. Потреби кожного ресурсу на одиницю виробу і загальні запаси ресурсів наведено у таблиці. Визначити такий план випуску продукції, який забезпечить максимальний прибуток

за умови, що час роботи токарних верстатів повинен бути використаний повністю.

Ресурси		Витрати на 1 виробу		Запаси
		А	В	
Матеріал, кг	сталь кольорові метали	10 20	70 50	350 450
Обладнання, хв.	токарні верстати фрезерні верстати	300 200	400 100	6400 3700
Прибуток від реалізації 1 виробу, тис.грн.		5	9	

19. При відгодівлі худоби кожна тварина щоденно повинна отримувати не менше 10 од. поживної речовини А, не менше 9 од. речовини В і від 13 до 16 од. речовини С. Для складання денного раціону використовують два види кормів. Вміст кількості одиниць поживних речовин в 1кг кожного виду корму і вартість 1кг кожного виду корму наведені у таблиці. Скласти такий денний раціон худоби, щоб він задовольняв вимогам вмісту поживних речовин, а витрати на нього були мінімальними.

Поживна речовина	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму	
	Корм №1	Корм №2
А	3	1
В	1	2
С	1.5	4
Вартість 1кг корму	4	6

20. Площа фермерського господарства становить 200га. Її вирішили засіяти соняшником та гречкою, причому гречки потрібно отримати не менше, ніж 1000ц., а соняшника – не більше 1000ц. Господарство закупило 900 ц мінеральних добрив. Середня врожайність, норми внесення мінеральних добрив і прибуток у розрахунку на 1 центнер соняшникового насіння та гречки наведено у таблиці. Визначити варіант розміщення культур на земельній ділянці, який максимізує прибуток господарства.

Показники	Соняшник	Гречка
Середня врожайність, ц/га	300	200
Внесені добрива, ц/га	0.2	0.4
Прибуток, у.о. за 1ц	5	7

21. На меблевій фабриці із стандартних листів фанери потрібно вирізати 25, 29 і 18 заготовок трьох різних розмірів. Лист фанери можна розрізати двома способами. Кількість отриманих заготовок та площу відходів при кожному способі розрізання одного листа фанери наведено у таблиці. Визначити кількість листів фанери, які слід розрізати обома способами, щоб отримати потрібну кількість заготовок з мінімальними відходами.

Заготовка	Кількість отриманих заготовок, шт.	
	Першим способом	Другим способом
1	3	6
2	4	5
3	1	3
Площа відходів,см^2	11	17

22. Фірма спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема вона випускає столи і шафи, які обробляються на верстатах 1 і 2. Тривалість обробки одного стола і однієї шафи, час роботи верстатів на тиждень та прибуток фірми від реалізації одиниці продукції кожного виду наведено у таблиці. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на столи ніколи не перевищує попиту на шафи більш як на 15 од., а попит на шафи не перевищує 85 од. на тиждень. Визначити такі обсяги виробництва офісних меблів різних моделей, щоб отримати максимальний прибуток від реалізації продукції.

Верстати	Тривалість обробки одиниці прод., хв.		Час роботи, год.
	Столи	Шафи	
1	12	20	32
2	25	18	36
Прибуток, у.о.	27	31	

23. Паперовий комбінат виконав план виробництва паперу різних сортів і зекономив сировину. Залишились невикористаними 52т целюлози, 83 т деревної маси і 2.5т каоліну. У таблиці вказані норми витрат у кілограмах целюлози, деревної маси і каоліну для виробництва 1т паперу різних видів. Прибуток від реалізації 1т типографського паперу становить 5 у.о., письмового паперу – 8 у.о. Скільки і якого виду паперу необхідно виготовити, щоб комбінат отримав максимальний прибуток?

	Целюлоза, кг	Деревна маса, кг	Каолін, кг
Типогр. папір	200	800	20
Письм. папір	500	500	10

24. Фірма, що спеціалізується на виробництві електроприладів, отримала замовлення на виготовлення 100 електроплит. Конструкторами запропоновано до випуску три моделі плит А, В, С за ціною відповідно 100$, 60$, 50$. Норми витрат сировини для виготовлення однієї електроплити різних моделей та запас сировини на фірмі наведено у таблиці. Визначити оптимальні обсяги виробництва електроплит різних моделей, що максимізують дохід фірми.

Сировина	Норми витрат сировини, у.о. для моделей електроплит			Запаси сировини, у. о.
	А	В	С	
І	10	4.2	5	750
ІІ	4	3	1.5	460

25. Компанія спеціалізується на виготовленні хокейних ключок і наборів шахів. Кожна ключка приносить компанії прибуток у розмірі 2 у.о., а кожен шаховий набір – 4 у.о. На виготовлення однієї ключки необхідно 4 години роботи на ділянці А і 2 години роботи на ділянці Б. Шаховий набір виготовляється з витратами 6 години роботи на ділянці А, 6 години роботи на ділянці Б і 1 години на ділянці В. Доступні виробничі потужності ділянок на день становлять: для ділянки А – 120 н-годин, для ділянки Б – 72 н-годин, для ділянки В – 10 н-годин. Побудувати щоденний план випуску хокейних ключок і наборів шахів, щоб отримувати максимальний прибуток.
26. Фермерське господарство на земельній ділянці площею 195га спеціалізується на вирощуванні капусти і помідорів, використовуючи при цьому фосфатні і калійні добрива. Господарство закупило 6т фосфорних і 9т калійних добрив. Середня врожайність, норми внесення мінеральних добрив і прибуток у розрахунку на 1ц капусти і помідорів наведено у таблиці. Визначити варіант розміщення культур на земельній ділянці, який максимізує прибуток господарства.

Показники	Капуста	Помідори
Середня врожайність, ц/га	250	150
Внесені фосфорні добрива, кг/га	150	350
Внесені калійні добрива, кг/га	450	250
Прибуток, у.о. за 1ц	8	21

27. Фірма випускає радіоприймачі трьох видів А, В, С. Прибуток від реалізації одного приймача кожного виду становить 40, 75, 125 у.о. відповідно. На виготовлення 10 приймачів моделі А необхідно 3год. для виготовлення деталей, 4год. на складання і 1год. на пакування. Відповідні показники для 10 приймачів моделі В – 3,5; 5 і 1,5год., а для 10 приймачів

моделі С – 5; 8 і 3год. Впродовж тижня фірма може витратити 160год. на виробництво радіодеталей, 210год. – на складання, 62год. – на пакування. Побудувати план випуску приймачів за тиждень, який би забезпечував фірмі найбільший прибуток.

28. До добового раціону відгодівлі тварин входять два продукти харчування $П_1$ і $П_2$, причому продукту $П_1$ можна використати не більше 410 одиниць. У цих продуктах містяться поживні речовини A і B. Кожна тварина щоденно повинна отримувати не менше 320 од. поживної речовини A і не менше 490 од. поживної речовини B. Вартість одиниці продуктів харчування $П_1$ і $П_2$ та вміст поживних речовин в одиниці кожного продукту наведено у таблиці. Скласти добовий раціон відгодівлі тварин, який матиме мінімальну вартість.

Поживні речовини	Вміст пож. реч. в 1 продукції	
	$П_1$	$П_2$
A	3	1
B	2	3
Вартість 1 прод., у.о.	5	4

29. Кондитерська фабрика випускає два види шоколаду: ″Молочний″ та ″Особливий″ . Для виробництва 1т шоколаду ″Молочний″ необхідно 0.5т цукру, 0.35т масла-какао, 0.15т знежиреної маси какао-бобів, а для виробництва 1т шоколаду ″Особливий″ – 0.55т цукру, 0.4т масла-какао, 0.05т знежиреної маси какао-бобів. Місячні запаси цих продуктів на фабриці відповідно становлять: 225т, 217т, 48т. Договірна ціна 1т шоколаду ″Молочний″ – 26000у.о., шоколаду ″Особливий″ – 37000у.о. Побудувати такий план випуску фабрикою шоколаду ″Молочний″ та ″Особливий″ за місячний період діяльності, щоб отримати найбільший прибуток, за умови, що масло-какао буде використане у виробництві повністю.

30. У наплічнику учасника експедиції залишилося вільне місце об’ємом 50 $дм^3$, яке можна заповнити не більше, ніж 38кг продуктів – м'ясом, борошном, сухим молоком і цукром. За рекомендаціями лікаря необхідно м’яса взяти принаймні удвічі більше, ніж борошна; борошна стільки ж, як і молока; молока – хоча б у 7 разів більше, ніж цукру. Характеристики продуктів наведено у таблиці. Сумарна калорійність продуктів повинна бути максимальною.

Показники	Продукт			
	м’ясо	борошно	молоко	цукор
Об’єм, $дм^3$	1	1.4	1.9	1
Калорійність, ккал/кг	1500	5000	5000	4000

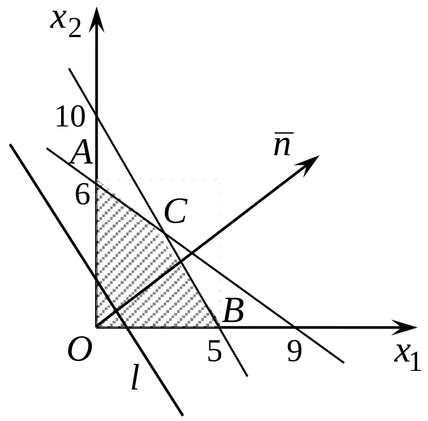
Лабораторна робота № 2.

Тема: “Пошук оптимального розв’язку задачі лінійного програмування графічним і симплексним методами”.

Побудувати математичну модель задачі лінійного програмування і знайти її оптимальний план графічним і симплексним методами. Перевірити отриманий результат за допомогою пакету прикладних програм SYMPLEX2007.

Приклад 1. Знайти екстремальні значення функції $L = -10 + 3x_1 + 2x_2$ за обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + \ \ x_2 \le 10, \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0.$$



► Побудуємо многокутник розв’язків $ACBO$. Будуємо вектор нормалі $\overline{n} = (3;2)$ і гіперпряму l: $3x_1 + 2x_2 - 10 = 0$. Зміщуючи гіпер-пряму у напрямку нормалі $\overline{n}$ до перетину з останньою вершиною многокутника $ACBO$, знаходимо, що максимального значення функція досягає у точці *C(3;4)*, а мінімумального – у точці *O*. Обчислюємо оптимальні значення:

$$L_{\max} = L(C) = 7; \quad L_{\min} = L(O) = -10.$$ ◄

Приклад 2. Знайти симплекс-методом оптимальний план задачі лінійного програмування, математична модель якої має вигляд:

$$L = 3x_1 + 2x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ \ 2x_1 - x_2 \le 4, \end{cases} \quad x_j \ge 0, \ j = 1{,}2.$$

► Зведемо задачу до канонічного вигляду. Для цього введемо у нерівності системи обмежень додаткові невід’ємні змінні $x_j \ge 0, \ j = \overline{3{,}4}$:

$$L = 3x_1 + 2x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad\ = 1{,}2 \\ 2x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 4, \end{cases} \quad x_j \ge 0, \ j = \overline{1{,}4}.$$

Оскільки ранг матриці системи обмежень дорівнює 2, то матимемо два базисні вектори. За базисні змінні приймемо x_3, x_4 (P_3, P_4 базисні вектори), а змінні x_1, x_2 є вільними. Запишемо першу симплекс-таблицю:

№	Б	$C_б$	P_0	3	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	12	2	3	1	0
2	P_4	0	4	$\boxed{2}$	-1	0	1
3		$L_0=0$	0	-3	-2	0	0

Початковий опорний план має вигляд $X_0=(0;0;12;4)$ і $L_0=L(X_0)=0$. Обчислимо значення Δ_j : $\Delta_1=0\cdot2+0\cdot2-3=-3$, $\Delta_2=0\cdot3+0\cdot(-1)-2=-2$, $\Delta_3=\Delta_4=0$. Серед значень Δ_j є від'ємні, а серед коефіцієнтів у відповідному стовпці є додатні елементи, тому переходимо до нового опорного плану. Оскільки $\max\limits_{\Delta_j<0}|\Delta_j|=|\Delta_1|=3$, то в базис вводимо вектор P_1. Вектор, який виводиться з базису, визначається найменшим відношенням вільних членів (чисел стовпчика P_0) до відповідних додатних чисел ключового стовпчика (P_1): 12/2=6, 4/2=2. Елемент, що стоїть на перетині стовпця P_1 і рядка P_4, буде ключовим, з базису виводимо вектор P_4. Переходимо до наступної ітерації.

Кожен елемент ключового рядка, починаючи зі стовпчика P_0, ділимо на ключовий елемент 2 і результат записуємо в нову таблицю у другий рядок. Відповідно до правил обчислюємо решта елементів і заповнюємо таблицю. Отримуємо новий опорний план $X_1=(2,0,8,0)$, для якого $L_1=L(X_1)=6$, $\Delta_1=\Delta_3=0$, $\Delta_2=-7/2$, $\Delta_4=3/2$ і який не є оптимальним, тому переходимо до побудови нового опорного плану. У базис вводимо вектор P_2, а виводимо з базису вектор P_3. Ключовий елемент дорівнює 4. Остаточно отримуємо опорний план $X_2=(3,2,0,0)$, для якого $L_2=L(X_2)=13$, $\Delta_1=\Delta_2=0$, $\Delta_3=7/8$, $\Delta_4=5/8$.

№	Б	$C_б$	P_0	3	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	8	0	$\boxed{4}$	1	-1
2	P_1	3	2	1	-1/2	0	1/2
3			6	0	-7/2	0	3/2
1	P_2	2	2	0	1	1/4	-1/4
2	P_1	3	3	1	0	1/8	3/8
3			13	0	0	7/8	5/8

Оскільки в останній симплекс-таблиці всі значення $\Delta_j\geq0$ $\left(j=\overline{1,4}\right)$, то опорний план є оптимальним: $x_1=3$, $x_2=2$, $X_{опт}=(3;2)$, $L_{max}=13$. ◄

Варіанти завдань до виконання лабораторної роботи № 2.

Для виготовлення продукції видів $П_1$ і $П_2$ використовують сировину видів B_1, B_2 , B_3. Запаси сировини, норми їх витрат і прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду задано у таблиці. Знайти максимальний прибуток, який можна отримати за наявності даних запасів сировини.

№ варіанта	Витрати ресурсів на одиницю продукції						Запаси ресурсів			Прибуток від реалізації одиниці продукції	
	B_1		B_2		B_3						
	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$	B_1	B_2	B_3	$П_1$	$П_2$
1.	13	7	17	16	4	9	36	52	24	11	8
2.	3	2	4	3	1	2	8	6	3	24	36
3.	3	2	2	3	1	1	10	9	8	20	27
4.	4	13	5	6	11	5	37	19	33	25	12
5.	3	1	9	4	3	4	15	14	26	9	8
6.	14	15	1	2	9	5	40	29	22	21	18
7.	11	6	1	2	15	14	32	6	50	10	7
8.	2	1	1	5	4	15	4	10	42	12	9
9.	3	8	7	2	1	1	18	14	9	10	6
10.	2	7	1	1	6	1	18	6	12	20	15
11.	9	4	3	2	2	2	17	16	12	15	10
12.	2	3	2	2	3	2	20	15	21	10	12
13.	5	2	2	3	1	8	12	8	15	12	10
14.	3	2	4	1	7	8	6	7	23	30	20
15.	2	2	7	2	3	8	28	32	35	15	21
16.	1	1	12	5	1	4	8	36	10	12	9
17.	2	1	2	5	3	4	4	15	9	9	7
18.	4	7	5	14	2	1	19	35	6	15	30
19.	14	15	2	1	6	11	50	6	32	14	10
20.	14	3	2	2	2	13	28	6	26	15	18
21.	3	2	2	2	2	3	7	38	8	17	18
22.	5	2	4	3	3	6	35	28	12	18	19
23.	1	2	4	1	2	15	10	12	30	6	9
24.	2	5	4	3	2	4	8	9	6	15	12
25.	18	15	5	11	13	4	59	33	37	12	22
26.	13	7	17	16	4	9	32	50	23	10	8
27.	1	1	4	7	1	4	10	45	5	14	26
28.	3	2	2	3	1	1	11	9	4	17	14
29.	4	13	5	6	11	5	38	19	32	23	13
30.	3	1	9	4	3	4	4	14	10	11	9

Лабораторна робота № 3.

Тема: "Застосування методу штучного базису до розв'язування задачі лінійного програмування".

Записати математичну модель задачі; методом штучного базису знайти її початковий опорний план; розв'язати задачу симплекс-методом. Перевірити отриманий результат за допомогою пакету прикладних програм SYMPLEX2007.

Приклад. Знайти оптимальний план задачі, математична модель якої має вигляд:

$$L = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 16, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right).$$

► Оскільки система обмежень не містить одиничної матриці, то вводимо штучні змінні x_5, x_6 і будуємо розширену задачу:

$$L^* = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - Mx_5 - Mx_6 \rightarrow max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \qquad = 18, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad + x_6 = 16, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right).$$

Початковий опорний план задачі

$$X_0 = (0,0,0,0,18,16),$$

для якого $L^* = L_0 + L_0^* = 0 - 34M$, $L_0 = 0$, $L_0^* = -34M$.
Обчислимо

$$\Delta_1 = -2 - 7M, \ \Delta_2 = 1 + M, \ \Delta_3 = 1 - 4M.$$

Ітераційний процес розпочинаємо з четвертого рядка першої симплекс-таблиці. Оскільки найменше від'ємне значення дорівнює -7, то вводимо у базис вектор P_1. Визначимо, який вектор необхідно вивести з базису. Обчислюємо

$$min\left\{\frac{18}{4}, \frac{16}{3}\right\} = \frac{18}{4} = 4.5.$$

Отже, з базису необхідно вивести вектор P_5.

Результати обчислень записуємо у симплекс-таблицю.

№	*Б*	$C_б$	P_0	2	-1	3	-1	$-M$	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_5	$-M$	18	$\boxed{4}$	-2	1	3	1	0
2	P_6	$-M$	16	3	1	2	1	0	1
3			L_0=0	-2	1	-3	1	0	0
4			-34	-7	1	-3	-4	0	0
1	P_1	2	9/2	1	-1/2	1/4	3/4		0
2	P_6	$-M$	5/2	0	$\boxed{5/2}$	5/4	-5/4		1
3			9	0	0	-5/2	5/2		0
4			-5/2	0	-5/2	-5/4	5/4		0
1	P_1	2	5	1	0	1/2	1/2		
2	P_2	-1	1	0	1	$\boxed{1/2}$	-1/2		
3			9	0	0	-5/2	5/2		
4			0	0	0	0	0		
1	P_1	2	4	1	-1	0	1		
2	P_3	3	2	0	2	1	-1		
3			14	0	5	0	0		

Отже, всі штучні вектори виведені з базису. У 4-му рядку третьої симплекс-таблиці немає від'ємних значень Δ_j, оптимальний план розширеної задачі має вигляд $X^*_{опт} = (5{,}1{,}0{,}0{,}0{,}0)$, а план $X_0 = (5{,}1{,}0{,}0)$ – початковий опорний план для вихідної задачі. З останньої симплекс-таблиці знаходимо оптимальний план $X_{опт} = (4{,}0{,}2{,}0)$, $L_{max} = 14$. ◄

Варіанти завдань до виконання лабораторної роботи № 3.

№ варі-анта	Коефіцієнти рівнянь системи обмежень										Коефіцієнти цільової функції				
	1					2									
	x_1	x_2	x_3	x_4	b_1	x_1	x_2	x_3	x_4	b_2	c_1	c_2	c_3	c_4	
1.	-1	-2	1	3	16	2	1	-2	1	18	-4	-1	1	2	*max*
2.	2	1	-1	3	15	1	4	3	-2	10	3	2	-1	2	*max*
3.	3	-2	2	1	24	1	4	3	-2	3	2	2	3	2	*min*
4.	-3	-5	2	-1	-12	4	-3	-2	3	12	-3	4	1	2	*min*
5.	-4	-1	2	1	20	1	2	-1	1	14	3	0	1	2	*min*
6.	-2	1	1	2	-8	1	-1	1	3	12	2	-3	4	-1	*max*
7.	-1	3	2	-2	-21	5	-4	-5	2	14	3	3	2	2	*max*
8.	1	1	4	5	30	-2	-1	4	-2	-10	1	-2	2	1	*min*
9.	5	2	3	1	40	1	3	1	-1	10	2	2	2	2	*max*
10.	2	-2	1	4	14	2	-1	2	3	20	-1	0	1	2	*max*
11.	1	-1	-1	2	18	-1	4	2	3	26	4	-3	2	1	*max*
12.	0	2	3	4	20	1	2	4	-2	18	3	-2	1	0	*min*
13.	-2	1	-2	-1	-26	2	1	-3	1	20	-3	-2	-1	2	*max*
14.	3	2	1	1	18	4	0	2	3	30	-2	1	2	3	*max*
15.	2	2	2	1	40	-4	-1	3	1	20	-1	1	1	0	*min*
16.	1	-3	-2	-1	-18	2	2	1	3	36	2	-3	4	1	*max*
17.	1	3	1	-1	12	2	1	-2	1	40	1	-1	1	2	*min*
18.	2	1	2	3	14	-2	1	1	2	14	3	2	-1	2	*max*
19.	-1	4	2	3	12	-1	3	2	-2	10	2	2	-3	2	*min*
20.	1	2	4	-2	14	2	3	4	5	20	3	4	1	-2	*max*
21.	2	1	-3	1	-10	-5	-5	-3	-1	-26	3	0	1	2	*max*
22.	-1	1	2	3	10	2	2	-1	4	18	2	-3	4	1	*max*
23.	3	2	-1	1	25	1	-1	-1	2	40	3	-3	2	2	*min*
24.	3	-2	-1	-5	-18	1	2	3	4	36	2	-1	3	0	*max*
25.	3	2	-1	6	32	0	2	3	4	46	2	-1	3	0	*max*
26.	4	-2	1	3	18	3	1	2	1	16	2	-1	3	-1	*max*
27.	2	1	-1	3	18	1	4	3	-2	10	3	2	-1	2	*max*
28.	3	-2	2	1	20	1	4	3	2	15	-2	-2	3	-2	*min*
29.	-3	-2	2	-1	-12	4	-3	-2	2	12	3	4	5	-2	*min*
30.	2	1	-2	1	20	1	2	-1	1	16	3	6	1	2	*min*

Лабораторна робота № 4.

Тема: “Двоїста задача лінійного програмування, її економічна інтерпретація”.

Записати математичні моделі прямої та двоїстої задач. Знайти оптимальний план прямої задачі. Визначити інтервали стійкості двоїстих оцінок по відношенню до зміни ресурсів кожного виду. Перевірити отриманий результат за допомогою пакету прикладних програм EIZLP2.

Приклад. Знайти оптимальний виробничий план випуску чотирьох видів продукції, для виготовлення яких використовують сировину видів A,B,C, щоб отримати максимум товарної продукції, і оцінити кожний вид сировини так, щоб оцінка сировини, що використовується, була мінімальною, а сумарна оцінка сировини, яка йде на виготовлення одиниці продукції кожного виду, – не меншою від ціни одиниці продукції даного виду.

Вид сировини	К-ть сировини	Норма сировини на одиницю продукції				Ціна одиниці сировини
		1	2	3	4	
A	35	4	2	2	3	y_1
B	30	1	1	2	3	y_2
C	40	3	1	2	1	y_3
Ціна одиниці продукції		14	10	14	11	

► Позначимо через x_j $\left(j=\overline{1,4}\right)$ кількість одиниць кожного з видів продукції, що випускається. Запишемо задачу лінійного програмування:

$$L = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4 \to max\,;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 35, \\ \ \ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 30, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + \ x_4 \le 40, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = 1,4\right).$$

Побудуємо двоїсту задачу. Оцінимо кожну одиницю використовуваних ресурсів, які визначають максимальні виробничі можливості підприємства, тобто одиниці сировини кожного виду поставимо у відповідність умовну двоїсту оцінку: y_1, y_2, y_3. Тоді загальна оцінка сировини, що використовується на випуск продукції, буде дорівнювати:

$$L^* = 35y_1 + 30y_2 + 40y_3 \to min.$$

Двоїсті оцінки повинні бути такими, щоб сумарна оцінка сировини, яка йде на виготовлення одиниці продукції кожного виду, була не меншою від ціни одиниці продукції даного виду, тобто y_i повинні задовольняти систему нерівностей:

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 14, \\ 2y_1 + y_2 + \quad y_3 \ge 10, \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 14, \\ 3y_1 + 3y_2 + \quad y_3 \ge 11, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \ \left(i = \overline{1,3}\right).$$

Отже, пряма задача полягає у визначенні оптимального плану випуску продукції за заданих обмежених ресурсах сировини, що забезпечує максимальний прибуток від реалізації товарної продукції, а двоїста – у визначенні оцінок одиниці кожного з ресурсів за умови їх мінімальної сумарної вартості.

Розв’язавши пряму задачу симплекс-методом, отримаємо останню симплекс-таблицю:

№	Б	$C_б$	P_0	14	10	14	11	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_2	10	5	3	1	0	-2	1	-1	0
2	P_3	14	25/2	-1	0	1	35/14	-1/2	1	0
3	P_7	0	10	2	0	0	-2	0	-1	1
4			225	2	0	0	4	3	4	0

Оптимальний план $X_{опт} = (0; 5; 12.5; 0; 0; 0; 10)$, при якому виготовляється 5 одиниць виробів 2-го виду і 12.5 одиниць 3-го виду, забезпечує підприємству максимальний прибуток $L_{max} = 225$. При цьому залишається невикористаним 10 одиниць сировини виду C ($x_7 = 10$). З таблиці бачимо, що оптимальний розв’язок двоїстої задачі (оцінки для одиниці кожного з видів сировини) має вигляд: $y_1^* = 3,\ y_2^* = 4,\ y_3^* = 0$.

Додатні двоїсті оцінки вказують на дефіцитність сировини: $y_1^* = 3,\ y_2^* = 4$ означають, що сировина видів A та B використовується повністю. Крім того, додатні умовні двоїсті оцінки вказують на скільки одиниць збільшиться L_{max} прямої задачі при збільшенні використання відповідних ресурсів на одиницю. Так збільшення використання ресурсів виду A на 1 одиницю приведе до нового оптимального плану, для якого $L_{max} = 225 + 3 = 228$ ($y_1^* = 3$) за рахунок того, що збільшиться випуск продукції 2-го виду на 1 одиницю і зменшиться кількість випущеної продукції 3-го виду на 1/2; при цьому кількість використаної сировини виду C не зміниться. Аналогічно збільшення використання сировини виду B на 1 одиницю приведе до збільшення L_{max} на

4 одиниці $\left(y_2^* = 4\right)$ за рахунок зменшення випуску продукції 2-го виду на 1 одиницю і збільшення випуску продукції 3-го виду на 1 одиницю; при цьому використання сировини виду C збільшиться на 1 одиницю. Умовна двоїста оцінка $y_3^* = 0$ означає, що сировина виду C повністю не використовується при даному оптимальному плані виробництва (ця сировина є у надлишку).

Підставивши значення умовних двоїстих оцінок $y_1^* = 3,\ y_2^* = 4,\ y_3^* = 0$ у цільову функцію і в систему обмежень двоїстої задачі, отримаємо $L_{min}^* = 225$ і :

$$16 > 14;\ \ 10 = 10;\ \ 14 = 14;\ \ 21 > 11.$$

Перша строга нерівність означає, що вартість сировини, яка йде на випуск одиниці виробу 1-го виду, є вищою від вартості цього виробу, тому випускати продукцію першого виду економічно невигідно ($x_1 = 0$). Аналогічно невигідно випускати і продукцію четвертого виду (четверта нерівність; $x_4 = 0$). Рівності означають, що з економічної точки зору вигідно випускати продукцію 2-го і 3-го виду (двоїсті оцінки сировини, що використовуються для виробництва одиниці виробів відповідно 2-го і 3-го видів, точно дорівнюють їх цінам; в оптимальному плані маємо, що $x_2 \neq 0,\ x_3 \neq 0$).

Визначимо інтервали стійкості двоїстих оцінок по відношенню до зміни ресурсів кожного типу для останнього прикладу. Знайдемо компоненти вектора

$$P^{-1}\begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ .... \\ b_m + \Delta b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 35 + \Delta b_1 \\ 30 + \Delta b_2 \\ 40 + \Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + \Delta b_1 - \Delta b_2 \\ 12.5 - 0.5\Delta b_1 + \Delta b_2 \\ 10 - \Delta b_2 + \Delta b_3 \end{pmatrix}$$

(компоненти матриці P^{-1} записані у стовпцях P_5, P_6, P_7, оскільки ці вектори утворюють початковий базис прямої задачі). З умови невід'ємності компонент знаходимо:

$$\begin{cases} 5 + \Delta b_1 - \Delta b_2 \geq 0, \\ 12.5 - 0.5\Delta b_1 + \Delta b_2 \geq 0, \\ 10 - \Delta b_2 + \Delta b_3 \geq 0. \end{cases}$$

Нехай $\Delta b_1 = \Delta b_3 = 0$. Тоді $\begin{cases} \Delta b_2 \leq 5, \\ \Delta b_2 \geq -12.5, \\ \Delta b_2 \leq 10, \end{cases} \Rightarrow\ -12.5 \leq \Delta b_2 \leq 5\ \Rightarrow\ 17.5 \leq b_2 \leq 35.$

Якщо кількість ресурсів виду B належить вказаному інтервалові, а кількість решти видів ресурсів не змінюється, то двоїста задача має такий самий оптимальний план $Y_{опт} = (3; 4; 0)$.

Нехай $\Delta b_2 = \Delta b_3 = 0$. Тоді $\begin{cases} \Delta b_1 \geq -5 \\ \Delta b_1 \leq 25 \end{cases} \Rightarrow\ -5 \leq \Delta b_1 \leq 25\ \Rightarrow\ 30 \leq b_1 \leq 60.$

Нехай $\Delta b_2 = \Delta b_1 = 0$. Тоді $\{\Delta b_3 \geq -10 \quad \Rightarrow \quad 30 \leq b_3 \leq 50$.

Остання нерівність означає: якщо кількість сировини виду C буде збільшено чи зменшено в межах 10 одиниць, оптимальний план двоїстої задачі не зміниться.

Знайдемо тепер як зміниться значення цільової функції, якщо збільшити кількість сировини виду B на 4 одиниці, а кількість сировини видів A і C залишити незмінними. Оскільки $\Delta b_2 = 4,\ \ \Delta b_2 \in [-12.5; 5]$, то вказані зміни у використанні сировини можна вносити (оптимальний план двоїстої задачі при цьому не зміниться). Знайдемо приріст функції L^*_{max}:

$$\Delta L^*_{max} = y_1^* \Delta b_1 + y_2^* \Delta b_2 + y_3^* \Delta b_3 = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 16.$$

Це означає, що значення цільової функції збільшиться на 16 одиниць, тобто, збільшивши використання сировини виду B на 4 одиниці, можна побудувати такий план виробництва продукції, що прибуток від реалізації буде на 16 одиниць вищим від запланованого при початково заданих кількостях сировини.

Нехай тепер одночасно змінюється використання всіх трьох видів сировини: кількість сировини виду A зменшується на 2 одиниці, а кількість сировини видів B, C збільшується відповідно на 2 і 5 одиниць, тобто $\Delta b_1 = -2;\ \Delta b_2 = 2;\ \Delta b_3 = 5$. Щоб з'ясувати, чи залишиться $Y_{опт} = (3; 4; 0)$ оптимальним планом двоїстої задачі при вказаних змінах у використанні сировини, перевіримо чи виконуються умови невід'ємності:

$$\begin{cases} 5 + \Delta b_1 - \Delta b_2 = 1 > 0, \\ 12.5 - 0.5\Delta b_1 + \Delta b_2 = 15.5 > 0, \\ 10 - \Delta b_2 + \Delta b_3 = 7 > 0. \end{cases}$$

Отже, вказані зміни можна проводити. Знайдемо приріст функції L^*_{max}:

$$\Delta L^*_{max} = y_1^* \Delta b_1 + y_2^* \Delta b_2 + y_3^* \Delta b_3 = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 5 = 2.$$

Це означає, що зменшивши використання сировини виду A на 2 од. і збільшивши використання сировини видів B та C відповідно на 2 і 5 одиниць, можна побудувати такий план виробництва продукції, що прибуток від її реалізації буде на 2 од. вищим від запланованого при початково заданих ресурсах. Зауважимо, що збільшення кількості сировини виду C не впливає на величину прибутку, в той час як збільшення кількості сировини виду B на 2 од. веде до збільшення значення L^*_{max} на 8од., а. зменшення кількості сировини виду A на 2 од. веде до зменшення L^*_{max} на 6 од. ◄

Варіанти завдань до виконання лабораторної роботи № 4.

Для виготовлення продукції видів $П_1$ і $П_2$ використовують сировину видів A_1, A_2 і A_3. Побудувати пряму та двоїсту задачі, знайти їх оптимальні плани. Визначити інтервали стійкості двоїстих оцінок. Оцінити значення цільової функції при збільшенні використання сировини виду A_1 на a_1 од., виду A_2 - на a_2 од., і зменшенні використання сировини виду A_3 на a_3 од.

№ варіанта	Витрати ресурсів на одиницю продукції						Запаси ресурсів			Прибуток від реалізації одиниці продукції				
	A_1		A_2		A_3									
	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$	A_1	A_2	A_3	$П_1$	$П_2$	a_1	a_2	a_3
1.	13	7	17	16	4	9	361	520	248	11	8	10	25	15
2.	1	1	4	7	1	4	18	93	48	24	36	2	9	5
3.	3	2	2	3	1	1	101	99	37	27	24	9	8	4
4.	4	13	5	6	11	5	379	197	335	25	12	23	19	21
5.	3	1	9	4	3	4	45	144	96	9	8	7	16	13
6.	14	15	1	2	9	5	400	49	220	21	18	20	3	14
7.	11	6	1	2	15	14	324	60	500	10	7	29	8	31
8.	2	1	1	5	4	15	48	100	225	12	9	5	11	19
9.	3	8	7	2	1	1	187	143	29	10	6	18	17	2
10.	2	7	1	1	6	1	126	30	120	20	15	9	1	14
11.	9	4	3	2	2	2	175	65	60	15	10	16	4	6
12.	2	3	2	2	3	2	80	58	75	10	12	11	6	3
13.	5	2	2	3	1	8	125	83	152	12	10	17	7	18
14.	3	2	4	1	7	8	65	70	235	30	20	8	9	15
15.	2	2	7	2	3	8	58	143	197	15	21	4	8	16
16.	1	1	12	5	1	4	37	360	100	12	9	3	24	11
17.	2	1	2	5	3	4	34	105	91	9	7	2	12	13
18.	4	7	5	14	2	1	196	350	68	15	30	16	27	9
19.	14	15	2	1	6	11	500	60	324	14	10	29	1	17
20.	14	3	2	2	2	13	280	62	260	15	18	14	8	13
21.	3	2	2	2	2	3	75	58	80	15	18	5	3	9
22.	5	2	4	3	3	6	98	84	91	18	10	6	4	10
23.	1	2	4	1	2	15	51	120	300	6	9	2	7	15
24.	2	5	4	3	2	4	80	91	68	15	12	9	8	4
25.	18	15	5	11	13	4	591	335	379	12	22	31	13	15
26.	13	7	17	16	4	9	320	510	238	10	8	13	30	12
27.	1	1	4	7	1	4	20	95	52	14	26	1	3	2
28.	3	2	2	3	1	1	110	96	47	17	14	7	6	2
29.	4	13	5	6	11	5	381	199	325	23	13	19	10	22
30.	3	1	9	4	3	4	48	149	101	11	9	2	8	6

Лабораторна робота № 5.

Тема: “Розв’язування задачі лінійного програмування двоїстим симплекс-методом”.

Побудувати двоїсту до задачі лінійного програмування. Розв’язати пряму задачу двоїстим симплекс-методом. Записати оптимальний план двоїстої задачі, використовуючи симплекс-таблицю, яка відповідає оптимальному плану прямої задачі. Перевірити отриманий результат за допомогою пакету програм SYMPLEX2007.

Приклад. Знайти оптимальний план задачі:

$$L = x_1 + x_2 + 2x_3 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \quad \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \ \geq 6, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1,3}\right).$$

► Перепишемо систему обмежень у вигляді

$$\begin{cases} \ \ x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + x_2 \ \ \leq -4, \\ -x_1 - 2x_2 \leq -6, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1,3}\right),$$

звідки маємо

$$\begin{cases} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + x_2 + \ \ x_4 \ = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + \ \ x_5 = -6, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1,5}\right).$$

Побудуємо двоїсту задачу

$$L^* = 8y_1 - 4y_2 - 6y_3 \to min;$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 \geq 1, \\ y_1 + y_2 - 2y_3 \geq 1, \\ \quad y_1 \geq 2, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \ \left(i = \overline{1,3}\right).$$

Результати розв'язування прямої задачі запишемо у симплекс-таблиці.

№	*Б*	$C_б$	P_0	1	1	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	2	8	1	1	1	0	0
2	P_4	0	-4	-1	1	0	1	0
3	P_5	0	-6	-1	$\boxed{-2}$	0	0	1
4			L_0=16	1	1	0	0	0
1	P_3	2	5	1/2	0	1	0	1/2
2	P_4	0	-7	$\boxed{-3/2}$	0	0	1	1/2
3	P_2	1	3	1/2	1	0	0	-1/2
4			13	1/2	0	0	0	1/2
1	P_3	2	8/3	0	0	1	1/3	2/3
2	P_1	1	14/3	1	0	0	-2/3	-1/3
3	P_2	1	2/3	0	1	0	1/3	-1/3
4			32/3	0	0	0	1/3	2/3

У першій симплекс-таблиці всі значення $\Delta_j \ge 0$ і початковий псевдоплан має вигляд $X_0 = (0,0,8,-4,-6)$, для якого $L_0 = 16$. Від'ємних елементів тут є два (-4 і –6) і більшим по модулю є другий, тому розглядаємо елементи 3-го рядка. Серед них є від'ємні. Це означає, що з базису виводимо вектор P_5. Оскільки $min\left(\frac{-1}{-1}, \frac{-1}{-2}\right) = \frac{1}{2}$, то в базис вводиться вектор P_2 і ключовий елемент дорівнює -2. Продовживши обчислення, з останньої таблиці отримаємо, що $L_{max} = L^*_{min} = 10\frac{2}{3}$, а оптимальний план $X^* = \left(\frac{14}{3}; \frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Оптимальний план двоїстої задачі матимемо, розглянувши оцінки опорного плану вихідної задачі, які відповідають початковому базисові P_3, P_4, P_5. З останньої симплекс-таблиці з четвертого рядка і стовпців векторів P_3, P_4, P_5 знаходимо компоненти

$$y_1^* = 0 + 2 = 2,\ y_2^* = 1/3 + 0 = 1/3,\ y_3^* = 2/3 + 0 = 2/3 .$$

Отже, $Y^* = \left(2; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Оскільки всі значення $y_i \ge 0$, то всі види сировини використовуються повністю. ◄

Варіанти завдань до виконання лабораторної роботи № 5.

Варіант №1.	Варіант №2.
$L = x_1 + 0.25x_4 \to min$; $\begin{cases} x_1 - 8x_4 + x_5 = -1; \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1; \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = -2; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$L = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 \to min$; $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 \ge 8; \\ -x_2 - 3x_3 + 6x_4 \ge 4; \\ 2x_1 + x_2 - x_4 \ge 0; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$
Варіант №3	**Варіант №4.**
$L = x_1 + 10x_2 \to min;$ $\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_5 = -1; \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -2; \\ -4x_1 + 2x_2 + x_4 = -3; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$L = 8x_2 - 15x_4 + x_6 \to max$; $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_6 = -12; \\ 4x_1 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = -14; \\ 5x_1 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$
Варіант №5.	**Варіант №6.**
$L = x_1 + 5x_4 \to min$; $\begin{cases} -4x_1 + x_4 + x_5 = -3; \\ x_1 + x_3 - 3x_4 = -3; \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = -1; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$L = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to max$; $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 4; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 6; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$
Варіант №7.	**Варіант №8.**
$L = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \to min;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_3 \ge 1; \\ x_1 + x_2 \ge 1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$	$L = -x_1 - 3x_2 - 5x_4 \to max$; $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 28; \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30; \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$
Варіант №9.	**Варіант №10.**
$L = -x_1 - 10x_2 \to min$; $\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_5 = -1; \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = -2; \\ -4x_1 - 2x_2 + x_4 = -10; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	$L = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \to max;$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3; \\ 2x_1 - 2x_4 - x_5 \le -2; \\ 4x_1 - 2x_4 + x_5 \ge 3; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

Варіант №11. $L = 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to min;$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 3; \\ 3x_2 + x_3 \le 4; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \ge 0; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,3}.$	**Варіант №12.** $L = 2x_1 + 3x_2 \to min;$ $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 16; \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 12; \\ 2x_1 + 4x_2 \ge -16; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,2}.$
Варіант №13. $L = 3x_1 + 2x_2 \to min;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8; \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 6; \\ x_1 + 3x_2 - x_5 = 4; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,5}.$	**Варіант №14.** $L = 3x_1 + 2x_3 + 6x_6 \to min;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = -4; \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = -4; \\ -x_1 - 3x_3 + x_5 + 4x_6 = -3; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,6}.$
Варіант №15. $L = 2x_1 + x_2 + 7x_3 \to min;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 4; \\ -x_1 - 4x_2 + 10x_3 \ge 7; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,3}.$	**Варіант №16.** $L = x_1 + 2x_2 \to min;$ $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \le 12; \\ -x_1 + 2x_2 \le 8; \\ x_1 + x_2 \ge 10; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,2}.$
Варіант №17. $L = -5x_1 + 4x_2 \to min;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6; \\ x_1 + 3x_2 \le 4; \\ x_1 - x_2 \le 2; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,2}.$	**Варіант №18.** $L = 7x_1 + x_2 \to min;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3; \\ 5x_1 + x_2 \ge 5; \\ x_1 + 5x_2 \ge 6; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,2}.$
Варіант №19. $L = -12x_1 - 3x_2 \to min;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4; \\ 2x_1 + x_2 \ge 6; \\ x_1 + 3x_2 \ge 4; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,2}.$	**Варіант №20.** $L = 2x_1 - 3x_2 \to max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4; \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 6; \\ x_1 + 3x_2 - x_5 = 4; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,5}.$

Варіант №21. $L = 2x_1 - 9x_2 - 6x_3 + x_4 \to max$; $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = 12; \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_5 = 10; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \le -15; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	**Варіант №22.** $L = -3x_1 - 2x_2 - x_3 \to max;$ $\begin{cases} -7x_1 + x_2 + x_3 \ge 3; \\ 4x_1 - x_3 \le 3; \\ x_2 - 2x_3 \ge 1; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$
Варіант №23. $L = -2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 \to max$; $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1; \\ x_1 - 5x_2 + x_5 = -1; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	**Варіант №24.** $L = 2x_3 + x_4 \to min;$ $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = -1; \\ x_2 - 8x_3 + x_4 = -2; \\ x_3 - 2x_4 + x_5 = -1; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$
Варіант №25. $L = -2x_1 + 9x_2 + 6x_3 - x_4 \to min$; $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = 10; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \le -12; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 15; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$	**Варіант №26.** $L = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to min;$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 10; \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 15; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$
Варіант №27. $L = 2x_1 + x_2 + 5x_4 \to max$; $\begin{cases} -6x_1 + x_2 - x_3 = 12; \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10; \\ 3x_1 - 5x_2 - x_5 = 8; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$	**Варіант №28.** $L = 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to min;$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \ge 1; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$
Варіант №29. $L = -3x_1 - 2x_3 - 6x_6 \to max$; $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 24; \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = -24; \\ x_1 + 3x_3 - x_5 - 4x_6 = 36; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$	**Варіант №30.** $L = x_1 + x_2 + 2x_3 \to min;$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge 6; \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 7; \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$

Лабораторна робота № 6.

Тема: "Пошук опорного плану транспортної задачі методами північно-західного кута та найменшої вартості і оптимального плану методом потенціалів".

Знайти початковий опорний план транспортної задачі методами північно-західного кута та найменшої вартості. Методом потенціалів знайти оптимальний план задачі. Перевірити отриманий результат за допомогою пакету прикладних програм TRANSPORT.

Приклад 1. Знайти початковий опорний план транспортної задачі методами північно-західного кута та найменшої вартості. Дані наведені у таблиці:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	**3**	**1**	**3**	**4**	**3**	**65**
A_2	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**68**
A_3	**3**	**5**	**2**	**2**	**4**	**40**
Потреби	**27**	**53**	**21**	**42**	**30**	$\sum = 173$

► а) <u>Метод північно-західного кута</u>.

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	**3** 27	**1** 38	**3**	**4**	**3**	**65**
A_2	**2**	**3** 15	**1** 21	**2** 32	**3**	**68**
A_3	**3**	**5**	**2**	**2** 10	**4** 30	**40**
Потреби	**27**	**53**	**21**	**42**	**30**	$\sum = 173$

Запаси пункту A_1 становлять 65 од., а потреби пункту B_1 – 27 од., тому можна завезти з пункту A_1 в пункт B_1 27 од. продукції $\left(x_{11} = min(27;65) = 27\right)$.

Потреби B_1 задовольняться повністю, а запаси A_1 зменшаться до 65-27=38 од., Потреби пункту призначення B_2 – 53 од. Після того, як у пункт B_2 завеземо 38 од. товару $\left(x_{12} = min(38;53) = 38\right)$, ми вичерпаємо запаси пункту A_1 і одночасно зменшимо потреби пункту B_2 до 15од., які можна задовольнити запасами пункту A_2 $\left(x_{22} = min(68;15) = 15\right)$. Тоді запаси в пункті A_2 зменшаться до 68-15=53од. Потреби пункту B_3 – 21од. Відправивши 21 од. продукції з пункту A_2 в пункт B_3, його потреби будуть задоволені $x_{23} = min(53;21) = 21$. Тоді у пункті A_2 залишиться 53-21=32 од. товару. Пункт призначення B_4 потребує 42од. продукції, а задовольнити їх можна 32од. з пункту A_2 $\left(x_{24} = min(32;42) = 32\right)$ і 10од. з пункту постачання A_3 $\left(x_{34} = min(40;42-32\,) = min(40;10) = 10\right)$. В результаті у пункті постачання A_3 залишиться 40-10=30 од. продукції, яку завеземо в пункт B_5 $\left(x_{35} = min(30;30) = 30\right)$.

Кількість базових клітинок дорівнює $m+n-1 = 3+5-1 = 7$, що узгоджується з умовою оцінки опорності плану. Отже, опорний план має вигляд

$$X_0 = \begin{pmatrix} 27 & 38 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 21 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$

і значення лінійної функції

$$L_0 = 3\cdot 27 + 1\cdot 38 + 3\cdot 15 + 1\cdot 21 + 2\cdot 32 + 4\cdot 30 + 2\cdot 10 = 389.$$

б) <u>Метод найменшої вартості</u>.

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	**3**	**1** 53	**3**	**4**	**3** 12	**65**
A_2	**2** 27	**3**	**1** 21	**2** 20	**3**	**68**
A_3	**3**	**5**	**2**	**2** 22	**4** 18	**40**
Потреби	**27**	**53**	**21**	**42**	**30**	$\sum = 173$

Спочатку серед клітинок із найменшою собівартістю перевезень (клітинки (1;2), (2;3)) заповнюємо довільну, наприклад, спочатку (1;2), а потім – (2;3). Наступна мінімальна вартість перевезень є в клітинках (2;1), (2;4), (3,3), (3,4), але заповнити можна тільки (2;1), (2;4), (3,4), оскільки потреби споживача B_3 задоволені повністю. Заповнювати клітинки (2;1), (2;4) потрібно, враховуючи запаси постачальника A_2, а клітинку (3,4) – потреби споживача B_4. Поточна мінімальна вартість 3 од. знаходиться в клітинках (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,5), (3,1), а заповнити можемо лише клітинку (1,5) (65-53=12). Далі заповнюємо клітинку із собівартістю 4 одиниці (3,5) (30-12=18). Отже, опорний план має вигляд

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 53 & 0 & 0 & 12 \\ 27 & 0 & 21 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & 18 \end{pmatrix}, \quad m+n-1=3+5-1=7,$$

$$L_0 = 1\cdot 53 + 3\cdot 12 + 2\cdot 27 + 1\cdot 21 + 2\cdot 20 + 2\cdot 22 + 4\cdot 18 = 320 \text{од.}$$

в) <u>Метод потенціалів.</u> Нехай початковий опорний план знайдений методом мінімального елемента. Побудуємо для базових клітинок систему потенціалів

$$\begin{array}{ll} (1,2): & \\ (1,5): & \\ (2,1): & \\ (2,3): & \\ (2,4): & \\ (3,4): & \\ (3,5): & \end{array} \begin{cases} u_1 + v_2 = 1, \\ u_1 + v_5 = 3, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_5 = 4. \end{cases} \qquad (1)$$

Ця система складається з 7 рівнянь ($m+n-1=3+5-1=7$), і містить 8 невідомих. Покладемо $u_1 = 0$. Тоді $u_2 = 1, u_3 = 1, \ v_1 = 1,$ $v_2 = 1, v_3 = 0, v_4 = 1, v_5 = 3$. Для того щоб опорний план був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб для вільних клітинок коефіцієнти $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$. Знайдемо значення Δ_{ij}:

$$\Delta_{11} = 2, \ \Delta_{13} = 3, \ \Delta_{14} = 3, \ \Delta_{22} = 1, \ \underline{\Delta_{25} = -1,} \ \Delta_{31} = 1, \Delta_{32} = 3, \Delta_{33} = 1.$$

і запишемо їх у таблицю, позначаючи рамками.

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси	u_i
A_1	**3** $\boxed{2}$	**1** **53**	**3** $\boxed{3}$	**4** $\boxed{3}$	**3** **12**	65	0
A_2	**2** **27**	**3** $\boxed{1}$	**1** **21**	**2** - **20**	**3** + $\boxed{-1}$	68	1
A_3	**3** $\boxed{1}$	**5** $\boxed{3}$	**2** $\boxed{1}$	**2** + **22**	**4** - **18**	40	1
Потреби	27	53	21	42	30	173	
v_j	1	1	0	1	3		

Оскільки $\Delta_{25} < 0$, то опорний план не є оптимальним. Зробимо перерозподіл перевезень. Будуємо цикл перерахунку (1), починаючи з клітинки (2,5). Очевидно, що перевезення у клітинці (2,5) можна лише збільшити, тому вибираємо знак "+". Виберемо у від'ємних вершинах найменше базове значення: $min(20,18)=18$. Отже, $\theta = 18$. У додатних вершинах циклу додаємо число 18, а у від'ємних – віднімаємо. В результаті перерозподілу θ ми отримали новий невироджений опорний план, який має вигляд

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	**3**	**1** 53	**3**	**4**	**3** 12
A_2	**2** 27	**3**	**1** 21	**2** 2	**3** 18
A_3	**3**	**5**	**2**	**2** 40	**4**

Перевіримо знайдений план на оптимальність. Для цього знову знайдемо потенціали u_i та v_j, записавши систему рівнянь (1) для базових клітин:

$$\begin{array}{ll}
(1,2): & \\
(1,5): & \\
(2,1): & \\
(2,3): & \\
(2,4): & \\
(2,5): & \\
(3,4): &
\end{array}
\left\{\begin{array}{l}
u_1+v_2=1,\\
u_1+v_5=3,\\
u_2+v_1=2,\\
u_2+v_3=1,\\
u_2+v_4=2,\\
u_2+v_5=3,\\
u_3+v_4=2.
\end{array}\right.$$

Поклавши $u_1=0$, обчислюємо: $u_2=0$, $u_3=0$, $v_1=2, v_2=1, v_3=1, v_4=2, v_5=3$. Аналізуючи останню таблицю, бачимо, що всі коефіцієнти $\Delta_{ij} \geq 0$ для вільних клітинок, тому опорний план буде оптимальним

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 53 & 0 & 0 & 12 \\ 27 & 0 & 21 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{min}=299. ◄$$

Приклад 2. Знайти розв'язок транспортної задачі, опорний план якої має вигляд:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	Запаси
A_1	**7**	**5**	**5** 40	**4** 200	**6**	**6**	240
A_2	**4** 170	**6**	**4**	**7**	**3**	**2** 250	420
A_3	**5**	**3** 250	**7** 140	**5**	**5**	**6**	390
A_4	**3** 30	**4**	**5**	**6**	**2** 300	**3**	330
Потреби	200	250	180	200	300	250	

► Оскільки $m+n-1=9$, а заповнених клітинок є 8, то план є виродженим. Тому одну із вільних клітинок заповнюємо фіктивним нульовим перевезенням. Клітинки (1;2), (2;5), (3;4) і (4;6) не можна вважати заповненою, бо заповнення будь-якої з них призводить до появи у таблиці циклу, утвореного із заповнених клітин. Приймемо клітинку (2;3) за базисну і застосуємо до “розширеного” опорного плану метод потенціалів. Покладемо $v_3=0$. Тоді $u_1=5;$ $u_2=4;$ $u_3=7;$ $u_4=3;$ $v_1=0;$ $v_2=-4;$ $v_4=v_5=-1;$ $v_6=-2$. Будуємо цикл перерахунку, починаючи з клітинки (3;1).

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	u_i
A_1	**7** $\boxed{2}$	**5** $\boxed{4}$	**5** 40	**4** 200	**6** $\boxed{2}$	**6** $\boxed{3}$	5
A_2	**4** - 170	**6** $\boxed{6}$	**4** + 0	**7** $\boxed{4}$	**3** $\boxed{2}$	**2** 250	4
A_3	**5** + $\boxed{-2}$	**3** 250	**7** - 140	**5** $\boxed{-1}$	**5** $\boxed{-1}$	**6** $\boxed{1}$	7
A_4	**3** 30	**4** $\boxed{5}$	**5** $\boxed{2}$	**6** $\boxed{4}$	**2** 300	**3** $\boxed{2}$	3
v_j	0	-4	0	-1	-1	-2	

Перемістивши перевезення $\theta=min(170,140)=140$ вздовж циклу, отримаємо новий невироджений план, який перевіряємо на оптимальність.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	u_i
A_1	**7** $\boxed{2}$	**5** $\boxed{2}$	**5** 40	**4** 200	**6** $\boxed{2}$	**6** $\boxed{3}$	5
A_2	**4** 30	**6** $\boxed{4}$	**4** 140	**7** $\boxed{4}$	**3** $\boxed{0}$	**2** 250	4
A_3	**5** 140	**3** 250	**7** $\boxed{2}$	**5** $\boxed{1}$	**5** $\boxed{1}$	**6** $\boxed{3}$	5
A_4	**3** 30	**4** $\boxed{3}$	**5** $\boxed{2}$	**6** $\boxed{4}$	**2** 300	**3** $\boxed{2}$	3
v_j	0	-2	0	-1	-1	-2	

Оскільки всі $\Delta_{ij}\geq 0$ для вільних клітинок, то знайдений план буде оптимальним. ◄

Варіанти завдань до виконання лабораторної роботи № 6.

Варіант №1.	**Варіант №2.**
$C=\begin{pmatrix} 16 & 30 & 17 & 10 & 16 \\ 30 & 27 & 26 & 9 & 23 \\ 13 & 4 & 22 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 24 \end{pmatrix}$, $a=(4 \quad 6 \quad 10 \quad 10)$, $b=(7 \quad 7 \quad 7 \quad 7 \quad 2)$.	$C=\begin{pmatrix} 15 & 1 & 22 & 19 & 1 \\ 21 & 18 & 11 & 4 & 3 \\ 26 & 29 & 23 & 26 & 24 \\ 21 & 10 & 3 & 19 & 27 \end{pmatrix}$, $a=(20 \quad 20 \quad 20 \quad 20)$, $b=(19 \quad 19 \quad 19 \quad 19 \quad 4)$.
Варіант №3.	**Варіант №4.**
$C=\begin{pmatrix} 17 & 20 & 29 & 26 & 25 \\ 3 & 4 & 5 & 15 & 24 \\ 19 & 2 & 22 & 4 & 13 \\ 20 & 27 & 1 & 17 & 19 \end{pmatrix}$, $a=(15 \quad 15 \quad 15 \quad 15)$, $b=(11 \quad 11 \quad 11 \quad 11 \quad 16)$.	$C=\begin{pmatrix} 20 & 26 & 24 & 26 & 19 \\ 15 & 20 & 26 & 26 & 23 \\ 4 & 10 & 27 & 30 & 4 \\ 9 & 16 & 29 & 20 & 3 \end{pmatrix}$, $a=(13 \quad 17 \quad 17 \quad 13)$, $b=(12 \quad 12 \quad 12 \quad 12 \quad 12)$.
Варіант №5.	**Варіант №6.**
$C=\begin{pmatrix} 21 & 22 & 2 & 13 & 7 \\ 27 & 10 & 4 & 24 & 9 \\ 3 & 16 & 25 & 5 & 4 \\ 28 & 11 & 17 & 10 & 29 \end{pmatrix}$, $a=(16 \quad 14 \quad 17 \quad 13)$, $b=(8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 28)$.	$C=\begin{pmatrix} 10 & 17 & 9 & 20 & 30 \\ 13 & 4 & 24 & 16 & 26 \\ 22 & 24 & 30 & 27 & 29 \\ 25 & 12 & 11 & 24 & 23 \end{pmatrix}$, $a=(16 \quad 15 \quad 19 \quad 6)$, $b=(9 \quad 20 \quad 9 \quad 9 \quad 9)$.

Варіант №7.	Варіант №8.
$C=\begin{pmatrix}30&24&11&12&25\\26&4&29&20&24\\27&14&14&10&81\\6&14&28&8&2\end{pmatrix}$, $a=(21\quad 19\quad 15\quad 25)$, $b=(15\quad 15\quad 15\quad 15\quad 20)$.	$C=\begin{pmatrix}5&15&3&6&11\\23&8&13&27&12\\30&1&5&24&25\\8&26&7&28&9\end{pmatrix}$, $a=(9\quad 11\quad 14\quad 16)$, $b=(8\quad 10\quad 12\quad 8\quad 12)$.
Варіант №9.	**Варіант №10.**
$C=\begin{pmatrix}10&15&14&28&1\\16&7&30&8&29\\1&21&22&19&12\\8&25&28&5&19\end{pmatrix}$, $a=(14\quad 14\quad 12\quad 16)$, $b=(11\quad 11\quad 11\quad 8\quad 15)$.	$C=\begin{pmatrix}30&20&5&6&15\\5&29&9&5&7\\16&24&14&6&26\\13&28&4&25&8\end{pmatrix}$, $a=(16\quad 15\quad 14\quad 15)$, $b=(6\quad 6\quad 13\quad 20\quad 15)$.
Варіант №11.	**Варіант №12.**
$C=\begin{pmatrix}12&11&25&17&21\\22&18&14&8&1\\9&13&2&28&15\\26&21&3&4&27\end{pmatrix}$, $a=(17\quad 14\quad 21\quad 43)$, $b=(19\quad 22\quad 23\quad 17\quad 14)$.	$C=\begin{pmatrix}24&23&6&29&3\\20&8&13&2&27\\30&17&10&23&28\\4&7&23&27&26\end{pmatrix}$, $a=(34\quad 35\quad 21\quad 10)$, $b=(20\quad 20\quad 15\quad 15\quad 30)$.
Варіант №13.	**Варіант №14.**
$C=\begin{pmatrix}2&24&4&2&3\\20&10&15&27&7\\15&15&12&25&19\\2&6&3&5&15\end{pmatrix}$, $a=(23\quad 18\quad 15\quad 30)$, $b=(27\quad 16\quad 25\quad 11\quad 7)$.	$C=\begin{pmatrix}15&6&25&11&12\\13&14&20&27&30\\16&7&19&10&21\\1&29&23&25&18\end{pmatrix}$, $a=(9\quad 18\quad 23\quad 26)$, $b=(11\quad 20\quad 31\quad 8\quad 6)$.

Варіант №15. $C=\begin{pmatrix}30&9&29&6&13\\23&13&3&28&7\\4&3&11&6&9\\3&10&11&10&28\end{pmatrix}$, $a=(17\quad 17\quad 17\quad 17)$, $b=(13\quad 13\quad 13\quad 13\quad 16)$.	**Варіант №16.** $C=\begin{pmatrix}33&22&14&34&19\\26&16&7&29&16\\28&18&17&23&30\\35&25&11&22&9\end{pmatrix}$, $a=(16\quad 17\quad 21\quad 16)$, $b=(14\quad 14\quad 14\quad 18\quad 10)$.
Варіант №17. $C=\begin{pmatrix}22&23&16&12&14\\17&30&1&8&25\\27&15&13&23&22\\3&12&21&26&7\end{pmatrix}$, $a=(19\quad 19\quad 19\quad 19)$, $b=(17\quad 17\quad 17\quad 17\quad 8)$.	**Варіант №18.** $C=\begin{pmatrix}17&16&15&29&9\\6&27&20&25&20\\6&15&12&8&14\\10&24&23&5&22\end{pmatrix}$, $a=(25\quad 25\quad 15\quad 15)$, $b=(16\quad 16\quad 16\quad 16\quad 16)$.
Варіант №19. $C=\begin{pmatrix}13&7&19&18&27\\1&21&8&20&12\\51&17&14&23&21\\7&4&29&18&22\end{pmatrix}$, $a=(15\quad 19\quad 15\quad 11)$, $b=(12\quad 18\quad 10\quad 10\quad 10)$.	**Варіант №20.** $C=\begin{pmatrix}39&28&37&27&46\\21&4&20&4&14\\25&27&25&24&29\\12&26&10&5&22\end{pmatrix}$, $a=(33\quad 17\quad 15\quad 15)$, $b=(13\quad 13\quad 13\quad 21\quad 20)$.
Варіант №21. $C=\begin{pmatrix}3&25&11&22&16\\9&15&4&26&12\\13&22&15&12&27\\6&19&8&11&8\end{pmatrix}$, $a=(23\quad 25\quad 12\quad 30)$, $b=(18\quad 18\quad 18\quad 18\quad 18)$.	**Варіант №22.** $C=\begin{pmatrix}22&24&25&23&29\\1&21&10&7&19\\2&26&18&30&27\\22&10&29&26&23\end{pmatrix}$, $a=(24\quad 14\quad 19\quad 17)$, $b=(22\quad 9\quad 12\quad 13\quad 18)$.

Варіант №23. $$C=\begin{pmatrix}6&11&20&17&8\\1&25&3&18&17\\9&39&16&30&31\\23&15&4&3&28\end{pmatrix},$$ $a=(12\quad 17\quad 18\quad 13)$, $b=(10\quad 8\quad 12\quad 14\quad 16)$.	**Варіант №24.** $$C=\begin{pmatrix}21&17&12&24&30\\6&11&9&5&9\\7&5&24&6&13\\29&22&21&5&7\end{pmatrix},$$ $a=(19\quad 19\quad 19\quad 19)$, $b=(15\quad 15\quad 16\quad 15\quad 15)$.
Варіант №25. $$C=\begin{pmatrix}7&10&16&27&19\\30&18&8&29&15\\3&18&28&19&15\\9&12&2&25&21\end{pmatrix},$$ $a=(17\quad 19\quad 11\quad 13)$, $b=(5\quad 15\quad 11\quad 9\quad 20)$.	**Варіант №26.** $$C=\begin{pmatrix}4&21&12&8&1\\20&8&25&15&23\\17&1&11&5&3\\23&10&24&6&5\end{pmatrix},$$ $a=(21\quad 21\quad 23\quad 23)$, $b=(22\quad 22\quad 22\quad 11\quad 11)$.
Варіант №27. $$C=\begin{pmatrix}14&5&27&29&23\\17&7&16&19&2\\20&12&15&29&5\\14&24&18&7&13\end{pmatrix},$$ $a=(18\quad 14\quad 16\quad 12)$, $b=(8\quad 11\quad 11\quad 9\quad 21)$.	**Варіант №28.** $$C=\begin{pmatrix}5&3&24&10&25\\30&2&22&16&7\\30&24&27&29&10\\15&17&21&2&3\end{pmatrix},$$ $a=(24\quad 15\quad 16\quad 24)$, $b=(12\quad 13\quad 14\quad 31\quad 9)$.
Варіант №29. $$C=\begin{pmatrix}21&19&11&12&12\\26&29&14&1&26\\39&1&22&8&25\\33&23&40&26&28\end{pmatrix},$$ $a=(24\quad 12\quad 18\quad 16)$, $b=(11\quad 13\quad 26\quad 10\quad 10)$.	**Варіант №30.** $$C=\begin{pmatrix}19&9&14&17&9\\4&20&27&8&29\\22&30&4&1&24\\10&22&3&5&27\end{pmatrix},$$ $a=(17\quad 17\quad 16\quad 10)$, $b=(9\quad 9\quad 9\quad 9\quad 24)$.

Лабораторна робота № 7.

Тема: "Пошук оптимального плану задачі лінійного цілочислового програмування методом Гоморі".

Знайти оптимальний план задачі лінійного цілочислового програмування методом Гоморі. Перевірити отриманий результат, використовуючи пакет прикладних програм SIMPLEX.

Приклад. Знайти оптимальний цілочисловий план задачі

$$L = 7x_1 + 3x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 4x_2 \le 38, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ (j = 1;2).$$

► Знайдемо спочатку оптимальний план задачі без урахування умови цілочисловості (результати обчислень записуємо у симплекс-таблицю):

$$L = 7x_1 + 3x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 20, \\ 8x_1 + 4x_2 \quad + x_4 = 38. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1;4}\right).$$

Початковий опорний план $X_0 = (0;0;20;38)$. Остання симплекс-таблиця має вигляд

№	*Б*	*Сб*	*P₀*	7	3	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_1	7	1	1	0	1	-1/2
2	P_2	3	15/2	0	1	-2	5/4
3			59/2	0	0	1	1/4

З останньої сиплекс-таблиці знаходимо оптимальний план $X = (1;7.5;0;0)$, але він не є цілочисловим. Тому переходимо до пункту 2. Нецілочисловому плану відповідає обмеження (яке ми отримуємо з рядка P_2): $0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 5/4 \cdot x_4 = 15/2$. Запишемо нерівність Гоморі

$$\{1\} \cdot x_2 + \{-2\} \cdot x_3 + \{5/4\} \cdot x_4 \ge \{15/2\} \quad \Rightarrow \quad 1/4 \cdot x_4 \ge 1/2.$$

Додаємо обмеження Гоморі до обмежень початкової задачі і отриману розширену задачу знову розв'язуємо симплекс-методом. Оскільки кожній симплекс-таблиці відповідає своя канонічна форма, то для зменшення обчислень використаємо канонічну форму останньої симплекс-таблиці:

$$L = 59/2 - x_3 - 1/4\, x_4 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_3 - 1/2\, x_4 = 1, \\ x_2 - 2x_3 + 5/4 x_4 = 15/2, \\ 1/4 x_4 \ge 1/2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;4}\right).$$

Розв'язок останньої задачі знайдемо двоїстим симплекс-методом:

$$L = 59/2 - x_3 - 1/4\, x_4 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_3 - 1/2\, x_4 = 1, \\ x_2 - 2x_3 + 5/4 x_4 = 15/2, \\ -1/4 x_4 + x_5 = -1/2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;5}\right).$$

Б	*Сб*	*P₀*	0	0	-1	-1/4	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	0	1	1	0	1	-1/2	0
P_2	0	15/2	0	1	-2	5/4	0
P_5	0	-1/2	0	0	0	$\boxed{-1/4}$	1
		L_0=59/2	0	0	1	1/4	0
P_1	0	2	1	0	1	0	-2
P_2	0	5	0	1	-2	0	5
P_4	-1/4	2	0	0	0	1	-4
		29	0	0	1	0	1

Серед компонент плану, отриманого з останньої симплекс-таблиці, немає від'ємних чисел і всі компоненти є цілими. Отже, план є оптимальним:

$$X^* = (2;5;0;2;0),\quad X_{опт} = (2;5),\quad L_{max} = 29. \blacktriangleleft$$

Варіанти завдань до виконання лабораторної роботи № 7.

Варіант №1. $L = x_1 + 4x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 7, \\ 10x_1 + 3x_2 \le 15, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №2.** $L = 2x_1 + 3x_2 \to max;$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 14, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №3.** $L = x_1 + 2x_2 \to max;$ $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 21, \\ -x_1 + 3x_2 \le 8, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$
Варіант №4. $L = x_1 + x_2 \to max;$ $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 20, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №5.** $L = x_1 + 2x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \le 36, \\ x_1 + x_2 \le 7, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №6.** $L = 8x_1 + 6x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 11, \\ 4x_1 - x_2 \le 10, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$
Варіант №7. $L = x_1 + 3x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 17, \\ 10x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №8.** $L = x_1 + 2x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 9, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №9.** $L = x_1 + x_2 \to max;$ $\begin{cases} 10x_1 - 6x_2 \le 50, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$
Варіант №10. $L = x_1 + 2x_2 \to max;$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №11.** $L = x_1 + x_2 \to max;$ $\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 \le 75, \\ 12x_1 + 7x_2 \le 55, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №12.** $L = 2x_1 + x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$
Варіант №13. $L = 2x_1 + x_2 \to max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 + 7x_2 \le 5, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №14.** $L = x_1 + x_2 \to max;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 2x_1 - x_2 \le 16, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №15.** $L = x_1 + x_2 \to max;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 2x_1 - 4x_2 \le 15, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$
Варіант №16. $L = 2x_1 + x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №17.** $L = x_1 + x_2 \to max;$ $\begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 30, \\ 2x_1 - 2x_2 \le 5, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №18.** $L = 5x_1 + 10x_2 \to max;$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 8, \\ -x_1 + 5x_2 \le 3, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$

Варіант №19. $L = x_1 + 2x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 16, \\ -2x_1 + 6x_2 \le 9, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №20.** $L = 5x_1 + 3x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 15, \\ 5x_1 - x_2 \le 10, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №21.** $L = 5x_1 + 6x_2 \to max;$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 6x_2 \le 17, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$
Варіант №22. $L = 5x_1 + 6x_2 \to max;$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 16, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №23.** $L = 2x_1 + x_2 \to max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №24.** $L = 6x_1 + 5x_2 \to max;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 14, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$
Варіант №25. $L = 5x_1 + 6x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 12, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №26.** $L = 12x_1 + 15x_2 \to max;$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 13, \\ -2x_1 + 5x_2 \le 10, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №27.** $L = x_1 + x_2 \to max;$ $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \le 25, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 30, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$
Варіант №28. $L = x_1 + x_2 \to max;$ $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \le 25, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №29.** $L = x_1 + 2x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \le 36, \\ x_1 + x_2 \le 7, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$	**Варіант №30.** $L = x_1 + 2x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 17, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 9, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ \left(j = \overline{1;2}\right).$

Лабораторна робота № 8.

Тема: “Пошук оптимального розв’язку задачі нелінійного програмування методом множників Лагранжа”.

Знайти оптимальний план задачі нелінійного програмування методом множників Лагранжа.

Приклад. Підприємство повинне виготовити 180 одиниць виробів, які можна виготовляти двома технологічними способами. При виготовленні x_1 одиниць виробів першим способом витрати складають $4x_1 + x_1^2$ грн., а при виготовленні x_2 одиниць виробів другим способом – $8x_2 + x_2^2$ грн. Знайти скільки виробів слід виготовляти першим і другим способом, щоб загальні витрати на виробництво були мінімальними.

► Математична модель задачі має вигляд:

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \to min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 180, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Запишемо функцію Лагранжа і необхідні умови існування екстремуму, враховуючи, що $g(x_1, x_2, b) = 180 - x_1 - x_2$,

$$L = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0.$$

Розв’язавши систему рівнянь, знаходимо координати $x_1 = 91$, $x_2 = 89$, $\lambda = 186$ точки, підозрілої на екстремум. Використовуючи другі частинні похідні, можна показати, що в точці $(91,89)$ функція f має умовний мінімум. Значення функції в цій точці $f(91,89) = 17278$. Перевіривши значення функції на межі, робимо висновок, що $X_{опт} = (91;89)$ і $f_{min} = f(91,89) = 17278$.◄

Варіанти завдань до виконання лабораторної роботи № 8.

1.	$F(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2\to extr,\quad x_1+x_2=1.$
2.	$F(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2\to extr,\quad 2x_1+3x_2=5.$
3.	$F(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2\to extr,\quad \frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{3}=1.$
4.	$F(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-4x_1\to extr,\quad -x_1+2x_2=1.$
5.	$F(x_1,x_2)=3x_1^2+x_2^2--2x_1-4x_2+10\to extr,\quad 2x_1-2x_2=7.$
6.	$F(x_1,x_2)=-5x_1^2-x_2^2+2x_1-4x_2+12\to extr,\quad x_1-2x_2=4.$
7.	$F(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2-2x_1-4x_2+10\to extr,\quad x_1+2x_2=3.$
8.	$F(x_1,x_2)=-2x_1^2-5x_1x_2-3x_2^2-2x_1+x_2+4\to extr,\quad x_1-x_2=5.$
9.	$F(x_1,x_2)=-2x_1x_2+4x_2^2+x_1-4x_2+17\to extr,\quad 3x_1+2x_2=3.$
10.	$F(x_1,x_2)=-5x_1^2-8x_1x_2-5x_2^2+18x_1+18x_2\to extr,\quad x_1-2x_2=4.$
11.	$F(x_1,x_2)=4x_1^2+6x_2^2+20x_2\to extr,\quad x_1+x_2=2.$
12.	$F(x_1,x_2)=-x_1^2+x_1x_2-x_2^2+5x_1-2x_2\to extr,\quad -x_1+2x_2=1.$
13.	$F(x_1,x_2)=3x_1^2+x_1x_2+x_2^2+20x_1+10x_2\to extr,\quad x_1-x_2=1.$
14.	$F(x_1,x_2)=2x_1^2-x_1x_2+x_2^2-5x_1+6x_2\to extr,\quad x_1+x_2=7.$
15.	$F(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+5x_1-6x_2\to extr,\quad 2x_1+x_2=4.$
16.	$F(x_1,x_2)=2x_1^2+3x_2^2-40x_1-48x_2\to extr,\quad x_1+2x_2=3.$
17.	$F(x_1,x_2)=-3x_1^2-x_1x_2-5x_2^2+18x_1+16x_2\to extr,\quad x_1+x_2=4.$
18.	$F(x_1,x_2)=2x_1^2-3x_1x_2+2x_2^2+5x_1+6x_2\to extr,\quad x_1-2x_2=5.$
19.	$F(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2+8x_1+8x_2-32\to extr,\quad x_1-x_2=3.$
20.	$F(x_1,x_2)=-x_1^2+x_1x_2-2x_2^2-6x_2-15\to extr,\quad 3x_1+2x_2=6.$
21.	$F(x_1,x_2)=3x_1^2+2x_2^2-3x_1+1\to extr,\quad x_1+x_2=1.$
22.	$F(x_1,x_2)=(x_1-3)^2+(x_2-5)^2\to extr,\quad x_1-2x_2=5.$
23.	$F(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2\to extr,\quad x_1-x_2=4.$
24.	$F(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2\to extr,\quad x_1+x_2=1.$
25.	$F(x_1,x_2)=6\left((x_1-2)^2+(x_2-3)^2\right)\to extr,\quad x_1+x_2=7.$
26.	$F(x_1,x_2)=2(x_1-1)^2+3(x_2-3)^2\to extr,\quad x_1+x_2=6.$

27.	$F(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-2x_1+3x_2+4\to extr$, $\quad x_1+2x_2=3$.
28.	$F(x_1,x_2)=-5x_1^2-8x_1x_2-5x_2^2+18x_1+18x_2\to extr$, $\quad x_1+x_2=1$.
29.	$F(x_1,x_2)=exp(-x_1+2x_2)\to extr$, $\quad 2x_1+3x_2=4$.
30.	$F(x_1,x_2)=-x_1^2+x_1x_2-2x_2^2-6x_2-15\to extr$, $\quad 2x_1+3x_2=6$.

Лабораторна робота № 9.

Тема: “Задачі опуклого програмування ”.

Розв’язати задачу опуклого програмування графічним методом.

Приклад. Знайти максимальне і мінімальне значення функції

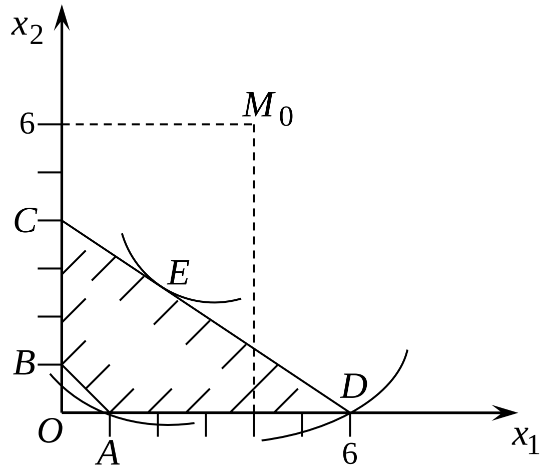
$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2$$

за обмежень

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

► Область допустимих розв’язків – чотирикутник $ABCD$.



Покладемо $f(x_1, x_2) = const = a^2$. Тоді лініями рівня будуть кола з центром у точці $M_0(4;6)$ і радіусом a: $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 = a^2$.

Із збільшенням (зменшенням) a значення функції $f(x_1, x_2)$ буде зростати (спадати). Провівши з точки M_0 кола різних радіусів, отримаємо, що мінімального значення $f_{min} = \frac{196}{13}$ функція $f(x_1, x_2)$ досягає у точці $E\left(\frac{24}{13}; \frac{36}{13}\right)$, де лінія рівня дотикається до області допустимих розв’язків, а максимального – у точці $A(1;0)$: $f_{max} = 45$. Зауважимо, що функція $f(x_1, x_2)$ має два локальних максимуми – у точці A і у точці $D(6;0)$, в якій $f(D) = 40$.◄

Варіанти завдань до виконання лабораторної роботи № 9.

Варіант № 1	**Варіант № 2**
$F = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$	$F = 2(x_1 - 7)^2 + 4(x_2 - 3)^2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 11, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$
Варіант № 3	**Варіант № 4**
$F = 4(x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 2)^2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$	$F = 3(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$
Варіант № 5	**Варіант № 6**
$F = x_1 \cdot x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$ $x_1 > 0, x_2 > 0.$	$F = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \to extr,$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ x_1 - x_2 \ge 6, \\ x_2 \le 4, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$
Варіант № 7	**Варіант № 8**
$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 9)^2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 18, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$	$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to extr,$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ 10x_1 - x_2 \le 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \le 12, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Варіант № 9	Варіант №10
$F=(x_1-10)^2+(x_2-11)^2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1+x_2 \le 14, \\ x_1+x_2 \le 9.5, \\ x_1+3x_2 \ge 4, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$	$F=3(x_1-10)^2+6(x_2-11)^2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1+x_2 \le 9, \\ x_1+3x_2 \ge 4, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$
Варіант № 11	**Варіант № 12**
$F=(x_1-2)^2+(x_2-6)^2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1+2x_2 \le 8, \\ 3x_1+x_2 \le 15, \\ x_1+2x_2 \ge 1, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$	$F=2(x_1-4)^2+4(x_2-6)^2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1+2x_2 \ge 2, \\ x_1+x_2 \le 6, \\ 2x_1+x_2 \le 11, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$
Варіант № 13	**Варіант № 14**
$F=4(x_1-2)^2+2(x_2-3)^2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1+x_2 \le 7, \\ 2x_1+x_2 \le 8, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$	$F=3(x_1-4)^2+(x_2-5)^2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1+x_2 \le 6, \\ 2x_1-x_2 \le 8, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$
Варіант № 15	**Варіант № 16**
$F=x_1 \cdot x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1+2x_2 \ge 2, \\ x_1+x_2 \le 7, \\ 2x_1+x_2 \le 10, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$	$F=4(x_1-5)^2+9(x_2-6)^2 \to extr,$ $\begin{cases} 3x_1+2x_2 \ge 12, \\ x_1-x_2 \le 6, \\ x_2 \le 3, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Варіант № 17	Варіант № 18
$F=(x_1-12)^2+(x_2-2)^2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2 \ge 6, \\ 3x_1-2x_2 \le 18, \\ -x_1+2x_2 \le 8, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$F=2(x_1-3)^2+4(x_2-4)^2 \to extr,$ $\begin{cases} 3x_1+2x_2 \ge 7, \\ 10x_1-x_2 \le 8, \\ -18x_1+4x_2 \le 12, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
Варіант № 19	**Варіант №20**
$F=(x_1+2)^2+(x_2-6)^2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1+x_2 \le 14, \\ x_1+x_2 \le 9.5, \\ x_1+3x_2 \ge 4, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$F=(x_1-10)^2+(x_2-11)^2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1+x_2 \le 9, \\ x_1+3x_2 \ge 6, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
Варіант № 21	**Варіант № 22**
$F=(x_1-8)^2+(x_2-7)^2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1+2x_2 \ge 2, \\ x_1+x_2 \le 6, \\ 2x_1+x_2 \le 10, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$F=3(x_1-9)^2+5(x_2-14)^2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1+x_2 \le 12, \\ 3x_1+2x_2 \ge 5, \\ x_1+x_2 \le 8.5, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
Варіант № 23	**Варіант № 24**
$F=(x_1-7)^2+(x_2-6)^2 \to extr,$ $\begin{cases} 0.5x_1+x_2 \ge 2, \\ x_1+x_2 \le 6, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	$F=3(x_1-8)^2+7(x_2-10)^2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1+x_2 \le 8, \\ 2x_1+2x_2 \ge 3, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Варіант № 25	Варіант № 26
$F = x_1 \cdot x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 11, \end{cases}$ $x_1 > 0, x_2 > 0.$	$F = (x_1 - 9)^2 + (x_2 - 10)^2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$
Варіант № 27	**Варіант № 28**
$F = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 9)^2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \le 5.5, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$	$F = 3(x_1 - 10)^2 + 6(x_2 - 11)^2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$
Варіант № 29	**Варіант №30**
$F = 3(x_1 - 1)^2 + 5(x_2 - 9)^2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$	$F = 3(x_1 - 8)^2 + 2(x_2 - 7)^2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Лабораторна робота № 10.

Тема: “Задачі квадратичного програмування”.

Знайти максимальне значення квадратичної форми.

Приклад. Знайти максимальне значення функції $f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$ за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0.$$

► Функція f є опуклою вгору як сума лінійної функції $f_1 = 2x_1 + 4x_2$, яку можна розглядати як опуклу вгору, і від’ємно визначеної квадратичної форми $f_2 = -x_1^2 - 2x_2^2$. Система обмежень містить лише лінійні нерівності. Отже, до розв’язування задачі можна застосувати теорему Куна-Такера. Запишемо функцію Лагранжа

$$L = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2).$$

Необхідні і достатні умови існування сідлової точки для функції Лагранжа L дають систему нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \ge 0; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2) = 0, \\ x_2 \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0, \\ \lambda_2 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,2}\right), \ \lambda_i \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,2}\right).$$

Перепишемо систему нерівностей (1) у вигляді:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 2, \\ 4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12. \end{cases}$$

і введемо додаткові невід'ємні змінні v_1, v_2, w_1, w_2. Отримаємо:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 = 2, \\ 4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - v_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12. \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \geq 0.$$

Крім того, повинні виконуватися умови

$$v_1 x_1 = 0, \; v_2 x_2 = 0, \; w_1 \lambda_1 = 0, \; w_2 \lambda_2 = 0.$$

Введемо у перше і друге рівняння системи (2) додаткові невід'ємні змінні y_1, y_2 (штучні змінні) і розглянемо задачу лінійного програмування:

$$F = -My_1 - My_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 + y_1 = 2, \\ 4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - v_2 + y_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12, \end{cases}$$

$$v_1 x_1 = 0, \; v_2 x_2 = 0,$$

$$w_1 \lambda_1 = 0, \; w_2 \lambda_2 = 0,$$

$$x_1, x_2, \; \lambda_1, \lambda_2, \; v_1, v_2, \; w_1, w_2, \; y_1, y_2 \geq 0,$$

яку розв'яжемо методом штучного базису. Результати обчислень записуємо у симплекс-таблиці:

№	Б	$C_б$	P_0	0	0	0	0	0	0	0	0	-M	-M
				P_1	P_2	P_{λ_1}	P_{λ_2}	P_{v_1}	P_{v_2}	P_{w_1}	P_{w_2}	P_{y_1}	P_{y_2}
1	P_{y_1}	-M	2	2	0	1	2	-1	0	0	0	1	0
2	P_{y_2}	-M	4	0	$\boxed{4}$	2	-1	0	-1	0	0	0	1
3	P_{w_1}	0	8	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
4	P_{w_2}	0	12	2	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6			-6	-2	-4	-3	-1	1	1	0	0	0	0
1	P_{y_1}	-M	2	$\boxed{2}$	0	1	2	-1	0	0	0	1	0
2	P_2	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
3	P_{w_1}	0	6	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$
4	P_{w_2}	0	13	2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	0	$\frac{1}{4}$
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6			-2	-2	0	-1	-2	1	0	0	0	0	1
1	P_1	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0		
2	P_2	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0		
3	P_{w_1}	0	5	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0		
4	P_{w_2}	0	11	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	1		
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0		

З останньої симплекс-таблиці маємо, що $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 1$, $w_1 = 5$, $w_2 = 11$, $\lambda_1^0 = \lambda_2^0 = v_1 = v_2 = 0$, $F = 0$. Оскільки $x_1^0 v_1 = 0, x_2^0 v_2 = 0$, $\lambda_1^0 w_1 = 0, \lambda_2^0 w_2 = 0$, то $(X_0, \lambda_0) = (1,1,0,0)$ є сідловою точкою функції Лагранжа. Отже, $X_0 = (1;1)$ – оптимальний план задачі і $f_{max} = 3$.◄

Варіанти завдань до виконання лабораторної роботи № 10.

1.	$F = x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ x_2 \le 5, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
2.	$F = x_1 + 4x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + x_2 \le 15, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
3.	$F = 3x_1 - 2x_2 + x_1x_2 - 0.5x_1^2 - x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} -2x_1 - x_2 \le -2, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
4.	$F = 8x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
5.	$F = 3x_1 - 2x_2 + x_1x_2 - 0.5x_1^2 - x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
6.	$F = 4x_1 + 8x_2 + 2x_1x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \le 4, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
7.	$F = 11x_1 + 8x_2 - x_1x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 0, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 12, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
8.	$F = 3x_1 - 2x_2 + x_1x_2 - 0.5x_1^2 - x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 1, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
9.	$F = -4x_1 + 8x_2 + 2x_1x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \le 1, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
10.	$F = -x_1 + 6x_2 + 3x_1x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
11.	$F = -4x_1 + 8x_2 + 2x_1x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 4, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
12.	$F = -x_1 + 6x_2 + 3x_1x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
13.	$F = -x_1 + 6x_2 + 3x_1x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 0, \\ x_2 \le 5, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
14.	$F = 2x_1 + 2x_2 + 2x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_2 \le 3, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
15.	$F = 6x_2 - 2x_1x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

16.	$F = 2x_1 - 2x_2 + 2x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 2, \end{cases}$	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
17.	$F = 6x_2 + 2x_1x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 \le 4, \end{cases}$	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
18.	$F = 2x_1 + 2x_2 + 2x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_2 \le 4, \end{cases}$	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
19.	$F = 4x_1 + 4x_2 + 2x_1x_2 - 3x_1^2 - 2x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \end{cases}$	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
20.	$F = 4x_1 + 4x_2 + 2x_1x_2 - 3x_1^2 - 2x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \le 18, \\ x_1 - 4x_2 \le 4, \end{cases}$	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
21.	$F = 6x_2 + 2x_1x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ -x_1 - 2x_2 \le -2, \end{cases}$	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
22.	$F = 18x_1 + 20x_2 - x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \le 3, \end{cases}$	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
23.	$F = 26x_1 + 20x_2 + 4x_1x_2 - 3x_1^2 - 2x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
24.	$F = 8x_1 + 12x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} -2x_1 - x_2 \le -4, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 10, \end{cases}$	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
25.	$F = 4x_1 + 4x_2 + 2x_1x_2 - 3x_1^2 - 2x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ x_1 \le 4, \end{cases}$	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
26.	$F = 3x_1 - 2x_2 + x_1x_2 - 0.5x_1^2 - x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} -2x_1 - x_2 \le -2, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \end{cases}$	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
27.	$F = 6x_1 + 4x_2 - x_1x_2 - x_1^2 - 0.5x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
28.	$F = 18x_1 + 12x_2 - 2x_1x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
29.	$F = 8x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \end{cases}$	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.
30.	$F = 8x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \to max$,	$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \le 3, \end{cases}$	$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Лабораторна робота № 11

Тема: “Варіація функціонала”.

Знайти варіації заданих функціоналів. У прикладі 1 знайти варіацію за двома означеннями.

Приклад 1. Знайти варіацію δI функціонала $I[y]=\int_a^b y^2dx$.

► Знайдемо приріст функціонала

$$\Delta I = I[y+\delta y]-I[y]=\int_a^b (y+\delta y)^2dx-\int_a^b y^2dx = 2\int_a^b y\cdot\delta y dx+\int_a^b \delta y^2dx.$$

Відповідно до означення варіації функціонала $\delta I = 2\int_a^b y\delta y dx$ (другий доданок є нелінійним).

Знайдемо тепер варіацію функціонала, використовуючи похідну за параметром:

$$\delta I = \frac{d}{d\alpha}I[y(x)+\alpha\cdot\delta y]_{\alpha=0}\Bigg| = \frac{d}{d\alpha}\left[\int_a^b (y+\alpha\delta y)^2dx\right]_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\int_a^b \left(y^2+2\alpha y\delta y+\alpha^2\delta y^2\right)dx\Bigg|_{\alpha=0} = 2\int_a^b y\delta y dx. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. Знайти варіацію δI функціонала $I[y]=\int_a^b \left(y'^2-y^2+x^2\right)dx$.

► Варіація функціонала $I[y]=\int_a^b F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)dx$ обчислюється за формулою

$$\delta I = \int_a^b \left(F'_y\delta y+F'_{y'}\delta y'+...+F'_{y^{(n)}}\delta y^{(n)}\right)dx.$$

Тоді $\delta I = \int_a^b (-2y\delta y+2y'\delta y')dx$. ◄

Варіанти завдань до виконання лабораторної роботи № 11.

Варіант № 1	Варіант № 2
1. $I[y]=y^3(0)+\int\limits_0^2\left(x+3y^2+y\,\mathrm{sh}x\right)dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_0^2\left(y'^2+3xy''+\sqrt{x+y^3}\right)dx$.	**1.** $I[y]=2y^2(1)-\int\limits_1^5\left(x^2y+y^2\ln x\right)dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_0^{\pi}\left(y'\sin y+2y''+\sqrt{x}\right)dx$.
Варіант № 3	**Варіант № 4**
1. $I[y]=y(1)+3y^2(4)+\int\limits_1^4\left(x^3+y^2\sqrt{x}\right)dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_0^1\left(xy+y'^3+y''\ln(x+2)\right)dx$.	**1.** $I[y]=5y^3(3)+\int\limits_0^3\left(\cos x+y+2y^2\right)dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_a^b\left(y^2-y'^2+4e^xy''+x\right)dx$.
Варіант № 5	**Варіант № 6**
1. $I[y]=y(0)+\int\limits_{-1}^1\left(y^3-3x^4y\right)dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left(y''\sin x+y'^3\ln^2x+2\sqrt{y}\right)dx$.	**1.** $I[y]=3y^2(0)+\int\limits_0^1 y(x+3y)dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_0^1\left(5x^2y''+y'^2\mathrm{tg}\,x+4y^5\right)dx$.
Варіант № 7	**Варіант № 8**
1. $I[y]=y^3(3)+\int\limits_1^3\left(y\,\mathrm{ch}x-2y^2\right)dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_2^3\left(xy+y^2-2y^2y'+3y''\right)dx$.	**1.** $I[y]=\int\limits_a^b\left(e^xy^2+2y\sqrt{x}\right)dx-2y^2(a)$. **2.** $I[y]=\int\limits_0^1\left(2xy'+yy'^2+y''^2\ln(x+2)\right)dx$.
Варіант № 9	**Варіант № 10**
1. $I[y]=y(0)+\int\limits_0^6\left(2xy-y^2\sin x+y\right)dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_0^6\left(2xy-y'^2+\left(3x+e^x\right)y''^3\right)dx$.	**1.** $I[y]=\int\limits_{-1}^1\left(ye^{x+1}+3x^2y^3\right)dx-4y^2(-1)$. **2.** $I[y]=\int\limits_0^1\left(e^x\sqrt{1+y'^2}+4y^5-xy''^3\right)dx$.

Варіант № 11	Варіант № 12
1. $I[y]=y^3(0)+\int\limits_0^4\left(xy^2+3y+5\cos x\right)dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_0^1\left(12xy+yy'+e^{-x}y''^2\right)dx$.	**1.** $I[y]=2y^2(3)+\int\limits_1^3\left(7xy^2+3e^x y\right)dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_0^1\left(12xy''+y^3y'+5y\right)dx$.
Варіант № 13	**Варіант № 14**
1. $I[y]=y^3(1)+\int\limits_1^2\left(0.5y+\left(y^2+1\right)\cos x\right)dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_0^T\left(y^2-4y\sin x+y'^2-7y''^3\right)dx$.	**1.** $I[y]=2y(0)-3y(1)+\int\limits_0^1\left(x^2y+e^x y^2\right)dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_1^2\left(x^2y'^2+\sqrt{y+1}+e^{y''}\right)dx$.
Варіант № 15	**Варіант № 16**
1. $I[y]=y^2(2)+\int\limits_1^2\left(y^2\cos(x+1)+e^x y\right)dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_0^{\pi}\left(4y\sin x+2y'^2+\sqrt[5]{y''^3+1}\right)dx$.	**1.** $I[y]=4y^3(0)+\int\limits_0^1(y+x)^2dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_{-1}^1\left(y'^2-2xy+\cos y''\right)dx$.
Варіант № 17	**Варіант № 18**
1. $I[y]=y(0)+3y(1)+\int\limits_0^1\left(x+y+2y^3\right)dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_1^e\left(xy'+yy'+y\sqrt{y''}\right)dx$.	**1.** $I[y]=y^3(0)+\int\limits_0^6\left(y+e^x\right)^2dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_1^2\left(\sqrt[3]{y'}+x^2y'^2+2yy''\right)dx$.
Варіант № 19	**Варіант № 20**
1. $I[y]=y^2(5)-\int\limits_1^5\left(\ln x+8y^2+xy\right)dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_0^1\left(e^x\left(y^2+0.5y'^2\right)+4y''\right)dx$.	**1.** $I[y]=y(0)+y^2(1)+\int\limits_0^1(y+1)^2\sin x\,dx$. **2.** $I[y]=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sqrt{y'^5}+y''\cos x+x^2y^3\right)dx$.

Варіант № 21 **1.** $I[y]=2y^2(0)+\int\limits_0^1\left(2xy+y^2\right)dx.$ **2.** $I[y]=\int\limits_a^b\left(xy''^3+4x^2y'+\sqrt{y}\ln x\right)dx.$	**Варіант № 22** **1.** $I[y]=9y^3(4)+\int\limits_2^4\left(e^{-x}y+\mathrm{tg}x+y^2\right)dx.$ **2.** $I[y]=\int\limits_0^{\pi/2}\left(y'\cos y+y'y''^3\right)dx.$
Варіант № 23 **1.** $I[y]=7y(0)+5y(1)+\int\limits_0^1(y-2)^3dx.$ **2.** $I[y]=\int\limits_0^1\left(x^3y+2y'^2+y'''\sqrt{x+y}\right)dx.$	**Варіант № 24** **1.** $I[y]=y^2(2)+\int\limits_1^2\left(2x^4+xy^3\right)dx.$ **2.** $I[y]=\int\limits_a^b\left(x-xy^2-y'^2+\sqrt{y''}\cdot\mathrm{ch}y\right)dx.$
Варіант № 25 **1.** $I[y]=y(0)+\int\limits_{-2}^1\left(2y^3-3x^2y\right)dx.$ **2.** $I[y]=\int\limits_2^6\left(y''^3\sqrt{x+1}+\sqrt{1+y'^2}-y\right)dx.$	**Варіант № 26** **1.** $I[y]=y^3(0)+\int\limits_0^1x\left(x+y^2\right)dx.$ **2.** $I[y]=\int\limits_1^e\left(\sqrt{y}-2x^3y'^2+y\sqrt{y''^3}\right)dx.$
Варіант № 27 **1.** $I[y]=y^2(1)+\int\limits_{-1}^1\left(x^2-7y-xy^3\right)dx.$ **2.** $I[y]=\int\limits_2^4\left(y\ln x+y'^2+y''^4y'''\right)dx.$	**Варіант № 28** **1.** $I[y]=y(0)-2y(1)+\int\limits_0^1\left(y^3-xy\right)dx.$ **2.** $I[y]=\int\limits_a^b\left(3yy''-y'\cos x+\ln\left(y'^2\right)\right)dx.$
Варіант № 29 **1.** $I[y]=2y^2(0)-\int\limits_{-3}^0\left(x^5y-(y+1)^2\right)dx.$ **2.** $I[y]=2\int\limits_0^1\left(x^3y-y'''y'^2+\sqrt{y''^3}\right)dx.$	**Варіант № 30** **1.** $I[y]=y^3(2)+\int\limits_0^2\left(e^{2x}+y\right)^2dx.$ **2.** $I[y]=\int\limits_0^1\left(e^{2x}\sqrt{4y+y'^3}+y''\right)dx.$

Лабораторна робота № 12.

Тема: “Екстремалі функціонала”.

Знайти допустимі екстремалі для заданих функціоналів.

Приклад 1. Знайти екстремалі функціонала

$$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left(y'^2-y^2\right)dx,\ y(0)=0,\ y\left(\pi/2\right)=1.$$

► Маємо $F(x,y,y')=y'^2-y^2$, $F'_y=-2y;\ F'_{y'}=2y'$. Розв’язок рівняння Ейлера $y''+y=0$ має вигляд: $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. З умов $y(0)=0,\ y\left(\pi/2\right)=1$ знаходимо $C_1=0, C_2=1$. Отже, екстремум досягається лише на кривій $y=\sin x$.◄

Приклад 2. Знайти екстремалі функціонала

$$I[y]=\int_0^{\pi/2}y(2x-y)\,dx,\ y(0)=0,\ y\left(\pi/2\right)=\pi/2.$$

► Тут $F(x,y,y')=y(2x-y)$ і рівняння Ейлера для заданої задачі має вигляд: $\frac{\partial F}{\partial y}=0\ \Rightarrow\ 2x-2y=0\ \Rightarrow\ y=x$. Крива задовольняє граничні умови, тому функціонал може досягати естремуму на цій кривій. Зауважимо, що при інших граничних умовах, наприклад, $y(0)=0,\ y\left(\pi/2\right)=1$, така варіаційна задача не має розв’язку.◄

Приклад 3. Серед кривих, що з’єднують точки $A(1{,}3), B(2{,}5)$ знайти таку, на якій може досягатися екстремум функціонала

$$I[y]=\int_1^2 y'\left(1+x^2y'\right)dx.$$

► Запишемо рівняння Ейлера $\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$. Тоді

$$\frac{d}{dx}\left(1+2x^2y'\right)=0\Rightarrow 1+2x^2y'=C_0\ \Rightarrow\ y'=\frac{C_0-1}{2x^2}\ \Rightarrow\ y(x)=\frac{C_1}{x}+C_2,$$

де $C_1=\frac{1-C_0}{2}$. Отже, екстремалями є сімейство гіпербол. З граничних умов знаходимо, що $C_1=-4, C_2=7$ і шукана екстремаль, на якій може досягатися екстремум функціонала, має вигляд: $y(x)=7-\frac{4}{x}$.◄

Варіанти завдань до виконання лабораторної роботи № 12.

Варіант № 1 $I[y]=\int\limits_0^1 (1+y^2)y'^2dx,$ $y(0)=0,\ y(1)=\sqrt{3}.$	**Варіант № 2** $I[y]=\int\limits_0^{\ln 2}(2ye^{2x}+y^2+2y'+y'^2)dx,$ $y(0)=\frac{1}{3},\ y(\ln 2)=-\frac{1}{6}.$
Варіант № 3 $I[y]=\int\limits_0^1 (4xy+y'^2e^{-x})dx,$ $y(0)=2,\ y(1)=1.$	**Варіант № 4** $I[y]=\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{y'^2}{2x}+yy'+y\cos x\right)dx,$ $y(0)=0,\ y(\pi)=0.5\pi.$
Варіант № 5 $I[y]=\int\limits_0^{\ln 2}(y'^2+3y^2+2ye^{2x})e^{2x}dx$ $y(0)=0.2,\ y(\ln 2)=2.675.$	**Варіант № 6** $I[y]=\int\limits_0^1 (yy'^2+2y')dx,$ $y(0)=1,\ y(1)=4.$
Варіант № 7 $I[y]=\int\limits_0^{\pi}(4y\cos x+y'^2-y^2)dx,$ $y(0)=0,\ y(\pi)=0.$	**Варіант № 8** $I[y]=\int\limits_1^e (x^2y'^2+2y^2+2xy)dx,$ $y(1)=0,\ y(e)=\frac{1}{3}e^4.$
Варіант № 9 $I[y]=\int\limits_0^T (y'^2+y^2-4y\sin x)dx,$ $y(0)=0,\ y(T)=1.$	**Варіант № 10** $I[y]=\int\limits_0^{\sqrt{2}}(2y^2+y'^2+2x^2y)dx,$ $y(0)=-0.5,\ y(\sqrt{2})=\mathrm{sh}\,2-1.5.$
Варіант № 11 $I[y]=\int\limits_0^1 (y'^3+3y)dx,$ $y(0)=0,\ y(1)=\frac{2}{3}.$	**Варіант № 12** $I[y]=\int\limits_0^1 (y^2+2ye^x+y'^2)dx,$ $y(0)=0,\ y(1)=-0.5e.$

Варіант № 13 $$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left(y^2-2y\sin x-y'^2\right)dx,$$ $$y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2.$$	**Варіант № 14** $$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left(y'^2+y^2+2y\sin x\right)dx,$$ $$y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}-0.5.$$
Варіант № 15 $$I[y]=\int_0^{\ln 3}\left(xy+8y^2-2y'^2\right)dx,$$ $$y(0)=0,\ y(\ln 3)=\frac{15\ln 3}{16}.$$	**Варіант № 16** $$I[y]=\int_1^2\left(x^2y'^2+6y^2-2xy\right)dx,$$ $$y(1)=\frac{1}{4},\ y(2)=\frac{35}{8}.$$
Варіант № 17 $$I[y]=\int_1^2\left(x^2y'^2+12y^2\right)dx.$$ $$y(1)=1,\ y(2)=8.$$	**Варіант № 18** $$I[y]=\int_0^1 yy'^2dx,$$ $$y(0)=3,\ y(1)=\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}.$$
Варіант № 19 $$I[y]=\int_0^2\left(y'^2+4y^2-2x^2y\right)dx,$$ $$y(0)=\frac{1}{8},\ y(2)=3.$$	**Варіант № 20** $$I[y]=\int_0^1\left(y'^2-y^2+12\left(x^2+1\right)y\right)dx,$$ $$y(0)=-6,\ y(1)=\sin 1.$$
Варіант № 21 $$I[y]=\int_0^1\left(y^2+y'^2+2ye^x\right)dx,$$ $$y(0)=0,\ y(1)=1.$$	**Варіант № 22** $$I[y]=\int_0^1\left(0.5y'^2+y^2+8y\cos x\right)e^xdx,$$ $$y(0)=-1,\ y(1)=-\cos 1-3\sin 1+\frac{1-e^3}{e}.$$
Варіант № 23 $$I[y]=\int_0^1\left(2e^xy'+y'^2+y^2\right)dx,$$ $$y(0)=0,\ y(1)=0.5e^{-1}.$$	**Варіант № 24** $$I[y]=\int_1^e x^4(1+y'x)y'dx,$$ $$y(1)=0,\ y(e)=-0.5+\frac{e^2+1}{e^4}.$$

Варіант № 25	**Варіант № 26**
$I[y]=\int\limits_0^{\pi/2}\left(-2y\cos x+y'^2-y^2\right)dx$, $y(0)=1,\ y(\pi/2)=0$.	$I[y]=\int\limits_0^{\pi/2}\left(y'^2+5yx-5y^2\right)e^{2x}dx$, $y(0)=1,\ y(\pi/2)=e^{-\pi/2}+\pi/2-0.4$.
Варіант № 27	**Варіант № 28**
$I[y]=\int\limits_0^1(1+x)\left(y'^2+2xy\right)dx$, $y(0)=0,\ y(1)=\dfrac{1}{36}$.	$I[y]=\int\limits_0^1 y^2y'^2dx$, $y(0)=\sqrt{2},\ y(1)=2$.
Варіант № 29	**Варіант № 30**
$I[y]=\int\limits_1^e\left(x^2y'^2+2y^2+2y\right)dx$, $y(1)=-0.5,\ y(e)=-0.5+\dfrac{e^2+e+1}{e^2}$.	$I[y]=\int\limits_0^1\left(2x^2y+y'^2+2yy'-16y^2\right)dx$ $y(0)=0,\ y(1)=\dfrac{7}{64}$.

Лабораторна робота № 13.

Тема: “Найпростіша задача варіаційного числення. Екстремум функціонала”.

Дослідити на екстремум функціонал, використовуючи достатні умови Якобі або Лежандра, і знайти I_{extr}.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функціонал

$$I[y]=\int_0^1\left(y'^3-y'\right)dx,\ y(0)=0,\quad y(1)=-2.$$

► Функція F залежить лише від y', тому екстремалями є прямі $y=C_1x+C_2$. З граничних умов маємо: $C_1=-2,\ C_2=0$ і $y=-2x$. На екстремалі $y=-2x$ функція $F''_{y'y'}=6y'=-12<0$. Отже, на кривій $y=-2x$ функціонал досягає слабкого максимуму. Для довільних значеннях y' знак $F''_{y'y'}$ не зберігається, тому достатня умова сильного максимуму не виконується. ◄

Приклад 2. Дослідити на екстремум функціонал

$$I[y]=\int_0^T\left(y^2-y'^2\right)dx,\ y(0)=0,\ y(T)=y_1.$$

► Запишемо рівняння Ейлера:

$$2y-\frac{d}{dx}(-2y')=0\ \Rightarrow\ y''+y=0\ \Rightarrow\ y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

З умов $y(0)=0,\ y(T)=y_1$ знаходимо значення сталих інтегрування $C_1=0$, $C_2=\dfrac{y_1}{\sin T}$ при $T\neq k\pi, k\in Z$ і $y=\dfrac{y_1}{\sin T}\sin x$. Якщо $T=k\pi$ і $y_1\neq 0$, то допустимих екстремалей немає.

Враховуючи, що $F''_{yy}=2,\ F''_{yy'}=0,\ F''_{y'y'}=-2$, знаходимо, що розв’язок рівняння Якобі $u''+u=0$ за умов $u(0)=0,\ u'(0)=1$ має вигляд $u=\sin x$. Перевіримо виконання умов теореми Якобі. Спряженою з точкою $x=0$ є точка $x=\pi$. Якщо $T<\pi$, то умови Якобі виконуються, якщо ж $T\geq\pi$, то умови Якобі не виконуються. Отже, для $0<T<\pi$ функціонал досягає максимуму на кривій $y=y_1\dfrac{\sin x}{\sin T}$ і $I_{max}=\displaystyle\int_0^T\left(\frac{y_1^2}{\sin^2 T}\sin^2 x-\frac{y_1^2}{\sin^2 T}\cos^2 x\right)dx=-y_1^2 ctgT$. Для $T\geq\pi$ існують спряжені точки з точкою $a=0$, а значить екстремуму немає. ◄

Варіанти завдань до виконання лабораторної роботи № 13.

Варіант № 1	Варіант № 2
$I[y]=\int_1^2 y'\left(1+x^2y'\right)dx,$ $y(1)=0,\ y(2)=1$ (умови Якобі)	$I[y]=\int_0^{\pi/8}\left(y'^2+2yy'-16y^2\right)dx,$ $y(0)=1,\ y(\pi/8)=2$ (умови Якобі)
Варіант № 3	**Варіант № 4**
$I[y]=\int_0^{\sqrt{2}}\left(y'^2+2y^2+2xy\right)dx,$ $y(0)=0,\ y(\sqrt{2})=2sh2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (умови Якобі)	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left(y'^2-2y\sin x+y^2\right)dx,$ $y(0)=0,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2sh\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}$ (умови Якобі)
Варіант № 5	**Варіант № 6**
$I[y]=\int_0^3 y^2y'^3dx,$ $y(0)=1,\ y(3)=0$ (умови Лежандра)	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left(y^2-y'^2+4y\cos x\right)dx,$ $y(0)=0,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ (умови Якобі)
Варіант № 7	**Варіант № 8**
$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left(y'^2-y^2-2y\right)dx,$ $y(0)=1,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ (умови Якобі)	$I[y]=\int_0^1 y^2y'^2dx$ $y(0)=1,\ y(1)=\sqrt{2}$ (умови Лежандра)
Варіант № 9	**Варіант № 10**
$I[y]=\int_0^T\left(y'^2+y^2\right)dx,$ $y(0)=0,\ y(T)=\xi$ (умови Якобі)	$I[y]=\int_0^2\left(y'^2+xy'\right)dx,$ $y(0)=0,\ y(2)=2$ (умови Якобі)
Варіант № 11	**Варіант № 12**
$I[y]=\int_0^1(1+x)y'^2dx,$ $y(0)=0,\ y(1)=1$ (умови Якобі)	$I[y]=\int_1^2 x^2y'^2dx,$ $y(1)=3,\ y(2)=1$ (умови Якобі)

Варіант № 13 $$I[y]=\int_0^6\left(2xy-y'^2\right)dx,$$ $y(0)=1,\ y(6)=1$ (умови Якобі)	**Варіант № 14** $$I[y]=\int_0^3 y'^3dx,$$ $y(0)=0,\ y(3)=6$ (умови Якобі)
Варіант № 15 $$I[y]=\int_0^1 yy'^2dx,$$ $y(0)=5,\ y(1)=5$ (умови Якобі)	**Варіант № 16** $$I[y]=\int_1^{\pi/8}\left(y'^2+4yy'+64y^2\right)dx,$$ $y(0)=0,\ y\left(\pi/8\right)=-2sh\pi$ (умови Якобі)
Варіант № 17 $$I[y]=\int_0^{\pi/\sqrt{2}}\left(2y'^2-y^2+x\right)dx,$$ $y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)=1$ (умови Якобі)	**Варіант № 18** $$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left(xy-y'^2+y^2\right)dx,$$ $y(0)=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ (умови Якобі)
Варіант № 19 $$I[y]=\int_0^3 y^2y'^3dx,$$ $y(0)=1,\ y(3)=(12)^{3/4}$ (умови Лежандра)	**Варіант № 20** $$I[y]=\int_1^2 x^3(1+y'x)y'dx,$$ $y(1)=0,\ y(2)=-\frac{1}{2}ln2+\frac{7}{6}$ (умови Якобі)
Варіант № 21 $$I[y]=\int_0^1 (y+1)y'^2dx,$$ $y(0)=-1,\ y(1)=\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}-1$ (умови Лежандра)	**Варіант № 22** $$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left(y^2+y'^2-2y\cos x\right)dx,$$ $y(0)=\frac{1}{2},\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2sh\frac{\pi}{2}$ (умови Якобі)
Варіант № 23 $$I[y]=\int_2^4\left(2x^2y-\frac{1}{3}y'^2+x\right)dx,$$ $y(2)=0,\ y(4)=-50$ (умови Якобі)	**Варіант № 24** $$I[y]=\int_0^1\left(y^2y'^2\right)dx,$$ $y(0)=1,\ y(1)=\sqrt{2}$ (умови Якобі)

Варіант № 25 $I[y]=\int_0^{\pi}\left(xy-y^2-y'^2\right)dx,$ $y(0)=0,\;\; y(\pi)=2sh\pi+\frac{\pi}{2}$ (умови Якобі)	**Варіант № 26** $I[y]=\int_0^{\pi/2}\left(y'^2-y^2\right)dx,$ $y(0)=0,\; y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ (умови Якобі)
Варіант № 27 $I[y]=\int_0^{\pi/2}\left(y^2-y'^2+4y\sin x\right)dx,$ $y(0)=1,\;\; y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ (умови Якобі)	**Варіант № 28** $I[y]=\int_0^{1}(1+y)y'^3dx,$ $y(0)=0,\; y(1)=-1$ (умови Лежандра)
Варіант № 29 $I[y]=\int_0^{1}\left(x^2y+y^2+y'^2\right)dx,$ $y(0)=-2,\;\; y(1)=2sh1-3$ (умови Якобі)	**Варіант № 30** $I[y]=\int_0^{2}y'^4dx,$ $y(0)=1,\; y(2)=\sqrt[3]{2}+1$ (умови Якобі)

Лабораторна робота № 14.

Тема: "Екстремум функціонала, який залежить від функції та її похідних старших порядків".

Дослідити на екстремум функціонал.

Розглянемо функціонал

$$I[y]=\int_a^b F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)dx, \qquad (1)$$

де підінтегральна функція F є диференційованою $n+2$ рази за всіма аргументами, а граничні умови мають вигляд

$$y^{(k)}(a)=y_a^{(k)},\ y^{(k)}(b)=y_b^{(k)},\ k=\overline{0,n-1}, \qquad (2)$$

Екстремаль $y=y(x)$ функціонала (1) за умов (2) є розв'язком **рівняння Ейлера-Пуассона**

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F'_{y''}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F'_{y^{(n)}}\equiv 0. \qquad (3)$$

Приклад. Знайти екстремалі функціонала $I[y]=\int_0^1\left(360x^2y-y''^2\right)dx$ за умов

$$y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=0,\ y'(1)=2.5.$$

► Розв'язок рівняння Ейлера-Пуассона

$$360x^2+\frac{d^2}{dx^2}(-2y'')=0 \ \Rightarrow\ y^{(4)}(x)=180x^2$$

має вигляд

$$y(x)=\frac{1}{2}x^6+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4.$$

З граничних умов, отримуємо, що екстремум може досягатися на кривій

$$y(x)=\frac{1}{2}x^6+\frac{3}{2}x^3-3x^2+x. \ ◄$$

Умова Лежандра (посилена умова Лежандра): для того, щоб функціонал (1) досягав мінімуму, достатньо, щоб у всіх точках екстремалі функціонала виконувалася умова

$$F''_{y^{(n)}y^{(n)}}\geq 0 \quad \left(F''_{y^{(n)}y^{(n)}}>0\right).$$

Варіанти завдань до виконання лабораторної роботи № 14.

Варіант № 1	**Варіант № 2**
$I[y]=\int_0^1 (x+1)^2 y''^2 dx,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0,$ $y(1)=1-\ln 2,\ y'(1)=0.5.$	$I[y]=\int_0^1 e^{-x} y''^2 dx,$ $y(0)=0,\ y'(0)=1,$ $y(1)=e,\ y'(1)=2e.$
Варіант № 3	**Варіант № 4**
$I[y]=\int_0^1 \left(y^2+2y'^2+y''^2\right)dx,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0,$ $y(1)=\mathrm{sh}1,\ y'(1)=\mathrm{ch}1.$	$I[y]=\int_0^1 \left(y^2+y''^2\right)dx,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0,$ $y(1)=\mathrm{sh}1,\ y'(1)=\mathrm{ch}1.$
Варіант № 5	**Варіант № 6**
$I[y]=\int_1^e x^2 y''^2 dx,$ $y(1)=0,\ y'(1)=0,$ $y(e)=0,\ y'(e)=-\frac{e^2-3e+1}{e}.$	$I[y]=\int_0^{\pi/2} \left(y^2-2y'^2+y''^2\right)dx,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0,$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi^2}{4}.$
Варіант № 7	**Варіант № 8**
$I[y]=\int_0^{\ln 2} \left(y'^2+y''^2\right)dx,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0,$ $y(\ln 2)=2-3\ln 2,\ y'(\ln 2)=0.$	$I[y]=\int_2^3 (x-1)^2 y''^2 dx,$ $y(2)=0,\ y'(2)=0,$ $y(3)=2\ln^2 2-1,\ y'(3)=0.$
Варіант № 9	**Варіант № 10**
$I[y]=\int_0^{\pi\sqrt{2}/4} \left(4y^2-4y'^2+y''^2\right)dx,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0,$ $y\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)=0,\ y'\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\pi^2-4}{\pi\sqrt{2}}.$	$I[y]=\int_0^{\pi} \left(y^2-y''^2\right)dx,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0,$ $y(\pi)=0,\ y'(\pi)=-2\left(e^{-\pi}+1\right).$

Варіант № 11 $I[y]=\int\limits_0^1\left(240xy-y'''^2\right)dx,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0,$ $y(1)=\frac{1}{42},\ y'(1)=\frac{1}{6},\ y''(1)=\frac{61}{60}.$	**Варіант № 12** $I[y]=\int\limits_1^2 x^3y''^2dx,$ $y(1)=0,\ y'(1)=0,$ $y(2)=0,\ y'(2)=\frac{3\ln 2-2}{8(\ln 2-1)}.$
Варіант № 13 $I[y]=\int\limits_0^1 e^{-2x}y''^2dx,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0,$ $y(1)=0,\ y'(1)=\frac{e^4-6e^2+1}{4\left(e^2-3\right)}.$	**Варіант № 14** $I[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi\sqrt{2}}{2}}\left(y^2-4y'^2+4y''^2\right)dx,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0,$ $y\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi^2-4}{4},\ y'\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right)=0.$
Варіант № 15 $I[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi\sqrt{2}}{2}}\left(y'^2-2y''^2\right)dx,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0,$ $y\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right)=0,\ y'\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{4-\pi}{2}.$	**Варіант № 16** $I[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(16y^2-y''^2\right)dx,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0,$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2\left(4+3e^{-\pi}+e^{\pi}\right)}{e^{\pi}+1}.$
Варіант № 17 $I[y]=\int\limits_1^2 x\cdot y''^2dx,$ $y(1)=0,\ y'(1)=0,$ $y(2)=\frac{3\ln 2-2}{2},\ y'(2)=0.$	**Варіант № 18** $I[y]=\int\limits_0^{\pi}\left(y^2-8y'^2+16y''^2\right)dx,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0,$ $y(\pi)=0\cdot,\ y'(\pi)=\frac{4-\pi^2}{4}.$
Варіант № 19 $I[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}\left(16y'^2-y''^2\right)dx,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0,$ $y\left(\frac{\pi}{8}\right)=0,\ y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=2(\pi-4).$	**Варіант № 20** $I[y]=\int\limits_0^{\frac{1}{2}\ln 2}\left(2y'^2+\frac{1}{2}y''^2\right)dx,$ $y(0)=0,\ y'(0)=0,$ $y\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=0,\ y'\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac{3\ln 2-2}{\ln 2-1}.$

Варіант № 21

$$I[y]=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(81y^2-y''^2\right)dx\ ,$$
$$y(0)=0,\ y'(0)=-6,$$
$$y\left(\frac{\pi}{6}\right)=0,\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0.$$

Варіант № 22

$$I[y]=\int_2^3(x-1)^2y''^2dx,$$
$$y(2)=0,\ y'(2)=0,$$
$$y(3)=0,\ \ y'(3)=\frac{2\ln^2 2-1}{2(\ln 2-1)}.$$

Варіант № 23

$$I[y]=\int_0^{\ln 4}\left(y^2+8y'^2+16y''^2\right)dx,$$
$$y(0)=0,\ y'(0)=0,$$
$$y(\ln 4)=0,\ y'(\ln 4)=-\frac{4\ln^2 4--3\ln 4+9}{6\ln 4}.$$

Варіант № 24

$$I[y]=\int_0^{\ln 4}\left(4y'^2+y''^2\right)dx,$$
$$y(0)=0,\ y'(0)=0,$$
$$y(\ln 4)=30\ln 4,\ y'(\ln 4)=0.$$

Варіант № 25

$$I[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(24y\cos 2x-y'^2+y''^2\right)dx,$$
$$y(0)=-1,\ y'(0)=0,$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi-4}{2}.$$

Варіант № 26

$$I[y]=\int_2^3(x-1)^3y''^2dx,$$
$$y(2)=0,\ y'(2)=0,$$
$$y(3)=0,\ \ y'(3)=\frac{4-9\ln 2}{2}.$$

Варіант № 27

$$I[y]=\int_0^1 e^{3x}\cdot y''^2dx,$$
$$y(0)=0,\ y'(0)=0,$$
$$y(1)=0,\ y'(2)=\frac{e^{-6}-11e^{-3}+1}{9\left(e^{-3}+2\right)}.$$

Варіант № 28

$$I[y]=\int_0^{\ln 2}\left(-24e^{2x}y+y'^2+y''^2\right)dx,$$
$$y(0)=1,\ y'(0)=2,$$
$$y(\ln 2)=4+(2-3\ln 2),\ y'(\ln 2)=8.$$

Варіант № 29

$$I[y]=\int_{-1}^0\left(240x-y'''^2\right)dx,$$
$$y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0,$$
$$y(-1)=\frac{1}{360},\ y'(-1)=-\frac{1}{168},\ y''(-1)=0.$$

Варіант № 30

$$I[y]=\int_e^{e^2}\frac{y''^2}{\ln x}dx,$$
$$y(e)=0,\ y'(e)=0,$$
$$y(e)=\frac{7e^6-9e^4+8e^3}{36},\ y'\left(e^2\right)=\frac{e^4-e^2}{4}.$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Адамян В.М., Сушко М.Я. Варіаційне числення. – Одеса: Астропринт, 2005. – 128 с.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986. – 309 с.
3. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – Санкт-Петербург: Из-во Лань Санкт-Петербург, 2012. – 448 с.
4. Б.Банди. Основи линейного программирования.– М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.
5. Барвінський А.Ф., Олексів І.Я. та ін. Математичне програмування. – Львів: НУ "ЛП", 2004. – 448 с.
6. Бейко И.В. и др. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации.- К.: Вища школа, 1983. – 512 с.
7. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування. – Київ: КНЕУ, 2001. – 248 с.
8. Гетманцев В.Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування. – Київ: Либідь, 2001. – 256 с.
9. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації. Навчальний посібник. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.
10. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2009. – 380 с.
11. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Методы оптимизации. – М.: Из-во Юрайт, 2014. – 367 с.
12. Уханська О.М. Тексти лекцій з курсу "Методи оптимізації". – Львів: В-во НУ "ЛП", 2003. – 113 с.
13. Уханська О.М., Гладун В.Р. Елементи варіаційного числення: посібник. – Львів: Растр-7, 2020. – 214 с.
14. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування. - Львів: Світ, 1995. – 215 с.
15. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ

до виконання лабораторних робіт

для студентів

спеціальності 113 Прикладна математика

Укладачі Уханська Оксана Михайлівна
Манзій Олександра Степанівна
Тесак Ірина Євгенівна

Редактор

Комп’ютерне складання