# Basic maths

Fisart

24 de enero de 2024

## Índice

# 1. Lógica

## 1.1. Preliminares

**Definición 1.** Una proposición es un enunciado cuya propiedad fundamental es la de ser verdadera $V$ o falsa $F$, pero no ambas simultáneamente.

Una proposición se representa simbólicamente por letras minúsculas tales como: $p$, $q$, $r$, etc (llamadas variables proposicionales). Cuando se trata de representar muchas proposiciones similares se usan subíndices para indicar cada una de ellas, esto es

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

Si $p$ es una proposición, su valor de verdad se denotará con $V(p)$ y escribiremos: $V(p) = V$ y se queremos expresar que es falsa escribiremos: $V(p) = F$.

1. Si $p$: César Vallejo nació en París. $V(p) = F$

   *a)* Si $p$: $p(x) = 3x$ entonces $p(2) = 6$. Entonces $V(p) = V$

   *b)* $p$: $1 + 1 = 3$ $V(p) = F$

   *c)* $q$: La tierra es una esfera perfecta $V(q) = F$

   *d)* $r$: La cinta de Mobius es una superficie orientable $V(r) = F$

**Definición 2.** Las proposiciones simples, llamadas también **atómicas o elementales**, son aquellos enunciados que tienen un solo sujeto y un solo predicado.

El valor de verdad $V$ o $F$ de estas proposiciones se obtienen de la disciplina o suceso de donde provienen.

**Definición 3.** Las proposiciones compuestas, llamadas también **moleculares o coligativas** son aquellas que están constituidas por dos o más proposiciones simples.

El valor de verdad de la proposición compuesta depende del valor de verdad de cada una de las proposiciones componentes, sin que esta dependencia de verdades tenga que ver con la naturaleza, la significación o la estructura de las proposiciones componentes. Por esta propiedad, a las proposiciones compuestas se les llama también funciones veritativas.

En la composición de proposiciones simples, estas están ligadas por ciertas palabras tales como y, o, si, entonces, si y sólo si, no, pero etc. Estas constantes proposicionales son llamados **conectivos lógicos**.

*Observación* 1. Dado que el valor de una proposición molecular depende únicamente de los valores de verdad de las proposiciones componentes, el número de combinaciones para el valor de verdad de aquella es $2^n$, donde $n$ es el número de proposiciones simples que tiene la proposición compuesta. Así, para dos proposiciones simples $p$ y $q$, las posibilidades de combinación de $V$ o $F$ son $2^2 = 4$ formas posibles. Para tres proposiciones simples $p, q$ y $r$ ($n = 3$) tenemos: $2^3 = 8$ formas posibles.

## 1.2. Operaciones con proposiciones

Lo operadores lógicos tienen cierta relación con lo operadores algebraicos. Lo operadores lógicos son 5:

1. Conjuncion $\vee$ (Se lee o)
2. Disyuncion inclusiva $\wedge$ (Se lee y)
3. Implicación $\rightarrow$ (Se lee entonces)
4. Bicondicional $\leftrightarrow$ (Se lee si y solo si)
5. Disyuncion exclusiva $\nleftrightarrow$ (Se lee o .. o)

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ | $p \veebar q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V \wedge F \equiv V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V \wedge F \equiv F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V \wedge F \equiv F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V \wedge F \equiv F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ |

Figura 1: Tablas de los conectores lógicos

**Ejemplo 1.** Determinar el valor de verdad de la proposición: $r$: "$2 + 3 + 5 = 11$ y $4 + 8 > 5 + 6$"

**Solución 1.** Sean $p : 2 + 3 + 5 = 11$ entonces $V(p) = F$ además $q : 4 + 8 > 5 + 6$ entonces $V(q) = V$ Luego, según la tabla de verdad de la conjunción:

$$V(r) = V(p \wedge q) = F$$

## 1.3. Signos de agrupación

El objetivo de los signos de agrupación es evitar ambiguedad en proposiciones moleculares por ejemplo

$$p \wedge q \vee r$$

puede significar dos posibilidades $(p \wedge q) \vee r$ o $p \wedge (q \vee r)$ Ademas estos signos de agrupación ***jerarquizan*** a los conectores lógicos en una estructura compuesta

*Observación* 2. La combinación de las variables y los operadores o conectivos proposicionales por medio de los signos de los signos de agruÂpación se denomina **esquema molecular**. En cada esquema molecular solo uno de los operadores es el de mayor jerarquía y es el que le da nombre a dicho esquema. Por ejemplo, en los esquenas moleculares: $A = \neg p \to (q \vee r)$, $B = [(p \wedge q) \vee \neg r] \leftrightarrow p$ y $C = \neg[(p \wedge q) \to (\neg p \vee r)]$. Podemos notar que los ***operadores de mayor jerarquía*** en A, B y C son: $\to$, $\leftrightarrow$ y $\neg$ y los nombres que llevan cada uno de estos esquemas son: esquema condicional, esquema bicondicional y esquema negativo, respectivamente. www

***Ejercicios subsección (1.3)***

1. Si $p\#q$ es verdadera si el antecedente es falsa y el consecuente es falsa, y en los demás casos es falsa. Hallar la traducción de $\neg p\#q$

   **Solución 2.** De acuerdo a la tabla se deduce que

   | $p$ | $q$ | $p\#q$ |
   |---|---|---|
   | $V$ | $V$ | $F$ |
   | $V$ | $F$ | $F$ |
   | $F$ | $V$ | $F$ |
   | $F$ | $F$ | $V$ |

   $p\#q \equiv \neg(p \vee q)$. Además

   | $\neg p$ | $q$ | $\neg p\#q$ |
   |---|---|---|
   | $F$ | $V$ | $F$ |
   | $F$ | $F$ | $V$ |
   | $V$ | $V$ | $F$ |
   | $V$ | $F$ | $F$ |

   De acuerdo a la ultima tabla se deduce que $\neg p\#q \equiv \neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$.

   **Ejemplo 2.** Si $p\alpha q \equiv \neg(p \leftrightarrow q)$ hallar la traducción de

   $$\neg(p\alpha q) \equiv p \leftrightarrow q$$

2. Si la proposición $(\neg p \to q) \vee (s \to \neg r)$ es falsa; cuáles de los siguientes esquemas moleculares son falsos

   *a)* $A = [(r \to q) \wedge q] \leftrightarrow [(\neg q \vee r) \wedge s]$

   *b)* $B = \neg(p \vee q) \vee \neg q$

   *c)* $C = \neg[(p \vee q) \wedge \neg q] \to \neg(p \to q)$

   **Solución 3.** De la hipotesis se deduce que $(\neg p \to q) \equiv F$ ademas $(s \to \neg r) \equiv F$ por lo tanto $p = F$, $q = F$, $s = V$ y $r = V$ entonces sustituyendo en los esquemas moleculares

   *a)* $A = [(V \to F) \wedge F] \leftrightarrow [(\neg F \vee V) \wedge V] \equiv F \leftrightarrow V \equiv F$

*b)* $B = \neg(F \vee F) \vee \neg F \equiv V \vee V \equiv V$

*c)* $C = \neg[(F \vee F) \wedge \neg F] \rightarrow \neg(F \rightarrow F) \equiv V \rightarrow F \equiv F$

**Ejemplo 3.** Si $(p \wedge r) \rightarrow (w \rightarrow (s \vee j)) \equiv F$ halle los valores de verdad de las proposicones atomicas, ademas halle el valor de verdad de la siguiente proposicion molecular

$$[(p \wedge r) \rightarrow j] \leftrightarrow (w \vee j)$$

**Solución 4.** Dada $(p \wedge r) \rightarrow (w \rightarrow (s \vee j)) \equiv F$ entonces $p \wedge r \equiv V$ por lo tanto $p = V, r = V$ ...

Sustituyendo estos valores en

$$\begin{aligned}
[(p \wedge r) \rightarrow j] \leftrightarrow (w \vee j) &\equiv [(V \wedge V) \rightarrow F] \leftrightarrow (V \vee F) \\
&\equiv F \leftrightarrow V \\
&\equiv F
\end{aligned}$$

3. Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

   *a)* $(3 + 5 = 8) \vee (5 - 3 = 4) \equiv V \vee F \equiv V$

   *b)* $(3 + 8 = 11) \wedge (7 - 4 > 1) \equiv V$

   *c)* $(5 - 3 = 8) \rightarrow (1 - 7 = 8) \equiv V$

   *d)* $(4 + 6 = 9) \leftrightarrow (5 - 2 = 4) \equiv V$

   **Ejemplo 4.** Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

   *a)* $(|4| = 4) \leftrightarrow (5 - \sqrt{4} = 3) \equiv$

   *b)* $\neg(3 + 8 = 11) \not\leftrightarrow (7 - 4 > 1) \equiv$

   *c)* $\neg[(5 - 3^0 = 4) \rightarrow ((1 - 7)^0 = 8)] \equiv$

   *d)* $[(4 + 6 = 9) \leftrightarrow (5 - 2 = 4)] \rightarrow ((9 = 9) \wedge (p \wedge \neg p)) \equiv$

4. Si las proposiciones $A = (p \leftrightarrow s) \leftrightarrow \neg s$ y $B = [(p \rightarrow s) \not\leftrightarrow \neg p] \not\leftrightarrow s$, son verdaderas, hallar los valores de verdad de $p$,$s$ y $p \not\leftrightarrow s$, en ese orden.

   - $s \equiv V$ entonces

$$A = (\overbrace{\underbrace{p}_{F} \leftrightarrow \underbrace{s}_{V}}^{F}) \leftrightarrow \overbrace{\neg s}^{F} \equiv V \tag{1}$$

$$B = [\overbrace{(\underbrace{\underbrace{p}_{F} \rightarrow \underbrace{s}_{V}}_{V}) \not\leftrightarrow \underbrace{\neg p}_{V}}^{F}] \not\leftrightarrow \overbrace{s}^{V} \equiv V \tag{2}$$

$$B = [\overbrace{(\underbrace{\underbrace{p}_{V} \to \underbrace{s}_{V}}_{V}) \nleftrightarrow \underbrace{\neg p}_{F}}^{V}] \nleftrightarrow \overbrace{s}^{V} \not\equiv V$$

- $s \equiv F$ entonces

$$A = (\overbrace{\underbrace{p}_{F} \leftrightarrow \underbrace{s}_{F}}^{V}) \leftrightarrow \overbrace{\neg s}^{V} \equiv V$$

$$B = [\overbrace{(\underbrace{\underbrace{p}_{F} \to \underbrace{s}_{F}}_{V}) \nleftrightarrow \underbrace{\neg p}_{V}}^{F}] \nleftrightarrow \overbrace{s}^{F} \not\equiv V$$

$$B = [\overbrace{(\underbrace{\underbrace{p}_{V} \to \underbrace{s}_{F}}_{F}) \nleftrightarrow \underbrace{\neg p}_{F}}^{F}] \nleftrightarrow \overbrace{s}^{F} \not\equiv V$$

De 1 y 2 se tiene que los valores de verdad son $s \equiv V$, $p \equiv F$ y $p \nleftrightarrow q \equiv V$

## 1.4. Tablas moleculares y equivalencias

## 1.5. Evaluación de tablas moleculares

Las combinaciones de todas las posibilidades de $V$ y $F$ se hacen en las columnas de referencia al margen izquierdo del esquema, luego se procede aplicar la regla a cada uno los operadores, empezando por el de menor alcance, hasta llegar al de mayor alcance.

$$(p \wedge q) \to r$$

evaluar

| $p$ | $p$ | $r$ | $(p \wedge q)$ | $\to$ | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| | | | 1 | 3 | 2 |

*Observación* 3. Según el resultado que se obtenga en el operador de mayor jeÂ rarquía, los esquemas moleculares se clasifican en **contingentes** (consistentes), **tautológicos** y **contradictorios**.

Un esquema molecular es **contingente** cuando en su resultado hay por lo menos una verdad y una falsedad. Un esquema molecular es **tautológico** cuando los valores de verdad de su operador principal son todos verdaderos. Un esquema molecular es **contradictorio** cuando en el resultado todos los valores de verdad son falsos

### 1.5.1. Proposiciones equivalentes

Dos proposiciones compuestas $P$ y $Q$ se dicen que son equivalentes si unidas por el bicondicional $\leftrightarrow$ resulta una tautología es decir que $P$ y $Q$ tiene los mismos valores de verdad en su operador principal se escribe:

$$P \equiv Q \text{ o } P \leftrightarrow Q$$

y se lee: $P$ es equivalente a $Q$ o $Q$ es equivalente a $P$.

**Ejemplo 5.** la proposición w: $p \to q$ es equivalente a t: $\neg p \vee q$ en efecto

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $\leftrightarrow$ | $\neg p \vee q$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |

### 1.5.2. Inferencia lógica

En matemáticas llamamos razonamiento a un par ordenado $(p_i, q)$, donde $p_i, i = 1, 2, \ldots, n$ conjunto de premisas finita y $q$ conclusión

Una inferencia es valida si y solo si

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$$

es una tautología

$p$: «Esta lloviendo» $q$: «Esta mojado»

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\to$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |

$(p \wedge q) \to p$ : «Esta lloviendo y esta mojado por lo tanto esta lloviendo»

### 1.5.3. Método tabular

**Ejemplo 6.** Determinar la validez de la inferencia: "Si el triángulo es isósceles entonces tiene dos lados iguales. Pero, el triángulo no tiene dos lados iguales; por lo tanto, no es isósceles".

**Solución**. Sean: $p$: El triángulo es isósceles $q$: El triángulo tiene dos lados iguales Entonces, el esquema de la inferencia es:

$$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$$

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q \qquad} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

| $p$ | $q$ | $(p \to q) \wedge \neg q$ | $\to$ | $\neg p$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |

Como el resultado de la tabla de verdad es una tautología, la inferencia es válida.

### 1.5.4. Metodo abreviado

Es un procedimiento que evita la laboriosa tarea de construir la tabla de valores para determinar la validez de las inferencias. Este método consiste en suponer la conjunción de premisas verdadera y la conclusión falsa, única posibilidad que invalida la implicación

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$$

En la prueba de éste método se aplica los siguientes pasos:

1. Asignar el valor de verdad $V$ a cada una de las premisas y de falsedad $F$ a la conclusión.
$$(\overbrace{p_1}^{V} \wedge \overbrace{p_2}^{V} \wedge \ldots \wedge \overbrace{p_n}^{V}) \to \overbrace{q}^{F}$$

2. Deducir la validez de cada una de las variables proposicionales en función de las reglas veritativas, **empezando por la conclusión o por el operador de una de las premisas que ofrece una sola posibilidad**.

3. Si cada una de las variables cumple **una sola función veritativa**, se haÂprobado que la conjunción de premisas es verdadera y la conclusión falsa; por lo que, la *inferencia no será válida* (No hay implicación).

4. Si una variable tiene **dos valores de verdad y falsedad a la vez**, quedará demostrado que no es posible que la conjunción de premisas sea verdadera y la conclusión falsa. Por lo que, hay implicación y la *inferencia será válida*.

**Ejemplo 7.** Sea

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

$$[\underbrace{(\overbrace{p}^{V} \to \overbrace{q}^{V})}_{V} \wedge \underbrace{\neg q}_{V}] \to \underbrace{\neg p}_{F}$$

$V(p) = V$, esto en la primera premisa $V \to q \equiv V$ entonces $V(q) = V$ y en la segunda premisa $V(q) = F$.

Como la variable $q$ tiene los valores de verdad y falsedad a la vez, concluimos afirmando que la inferencia **es válida**.

**Ejemplo 8.** Sea

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

$$[\underbrace{(p \leftrightarrow q)}_{V} \wedge \underbrace{q}_{V}] \to \underbrace{\neg p}_{F}$$

$V(p) \equiv V$, esto en la primera premisa $V(V \leftrightarrow q) \equiv V$ entonces $V(q) \equiv V$ lo cual coincide con el valor de la segunda premisa.

Como cada una de las variables cumple una sola función veritativa, decidimos que la inferencia **no es** válida.

***Ejercicios subsección (1.5)***

1. Construya inferencias validas y verifique mediante los dos métodos

2. Traducir a forma simbólica y comprobar la validez de los siguientes enunciados:

   *a*) Si trabajo, no puedo estudiar. Estudio o paso matemáticas, pero trabajé Por tanto, pasé matemáticas

   **Solución 5.** Sea $p$: Yo trabajo Sea $q$: Yo estudio Sea $r$: paso matemáticas Simbolicamente

   $$[(p \wedge \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge p] \to r$$

   *b*) Si trabajo no puedo estudiar, trabajo o apruebo matemáticas, pero aprobé matemáticas. Por tanto, estudié.

   *c*) Si Londres no está en Dinamarca, entonces París no está en Francia. Por tanto, Londres está en Dinamarca.

   *d*) Juan trabaja y juega.

### 1.5.5. Principales leyes lógicas y equivalencias

### 1.5.6. Leyes lógicas

Una forma proposicional es una ley lógica si y sólo si *cualquiera que sea la interpretación formalmente correcta* que se haga de la misma, se obtiene como resultado una **verdad lógica**. En lógica, las tautologías son conocidas con el nombre de leyes o principios lógicos y son las siguientes.

1. Ley de **identidad**
$$p \to p, \text{ y } p \leftrightarrow p$$
2. Ley de **contradicción**
$$\neg(p \wedge \neg p)$$
3. Ley del **tercio excluido**
$$\neg p \vee p$$

### 1.5.7. Equivalencias notables

1. Ley de la involucion
$$\neg(\neg p) \equiv p$$
2. Ley de la idempotencia
$$p \wedge p \equiv p \text{ y } p \vee p \equiv p$$
3. Leyes conmutativas
   *a)* $p \wedge q \equiv q \wedge p$
   *b)* $p \vee q \equiv q \vee p$
   *c)* $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$
4. Ley asociativas
   *a)* $(p \wedge q) \wedge r \equiv q \wedge (p \wedge r)$
   *b)* $(p \vee q) \vee \equiv q \vee (p \vee r)$
   *c)* $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv q \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$
5. Leyes distributivas
   - $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   - $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   - $p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$
   - $p \to (q \vee r) \equiv (p \to q) \vee (p \to r)$
6. Ley de Morgan

- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

7. Ley de la condicional

   a) $p \to q \equiv \neg p \vee q$

   b) $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

8. Ley de la bicondicional

   a) $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

   b) $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)$ En efecto

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \\ &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \\ &\equiv [\neg p \wedge (\neg q \vee p)] \\ &\quad \vee [q \wedge (\neg q \vee p)] && \text{Distributiva} \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) && \text{Absorción} \\ &\equiv \neg(p \vee q) \vee (q \wedge p) && \text{Morgan} \\ &\equiv (p \wedge q) \vee \neg(p \vee q) && \text{Commutativa} \end{aligned}$$

   c) $p \nleftrightarrow q \equiv \neg(p \leftrightarrow q) \equiv \neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$

   d) Ademas se tiene

$$\begin{aligned} p \nleftrightarrow q &\equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \\ &\equiv (p \to \neg q) \wedge (\neg p \to q) && \text{Condicional} \\ &\equiv (q \to \neg p) \wedge (\neg p \to q) && \text{Transposición} \\ &\equiv q \leftrightarrow \neg p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \nleftrightarrow q &\equiv (p \to \neg q) \wedge (\neg p \to q) \\ &\equiv (p \to \neg q) \wedge (\neg q \to p) && \text{Transposición} \\ &\equiv \neg q \leftrightarrow p. \end{aligned}$$

9. Leyes de absorción

   a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

   b) $p \wedge (\neg p \vee q) \equiv p \wedge q$

   c) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

   d) $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$

      1) $(p \to q) \wedge (p \to q) \vee [(p \to w) \wedge \neg p] \equiv p \to q$
      2) $\neg p \wedge (p \vee q) \equiv \neg p \wedge q$

10. Ley de transposición

    *a)* $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

    *b)* $p \leftrightarrow q \equiv \neg q \leftrightarrow \neg p$

11. Ley de exportación

    *a)* $(p \wedge q) \to r \equiv p \to (q \to r)$

    *b)* En general

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to r \equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \to (p_n \to r)$$

12. Elementos neutros de la contradicción $C$ y la tautología $T$

    *a)* $p \wedge C \equiv C$

    *b)* $C \vee T \equiv T$

    *c)* $p \vee T \equiv T$

13. Formas normales para la conjunción y la disyunción.

    **Forma normal de la conjunción**. Es una conjunción de un conjunto finito cualquiera de disyunciones elementales diferentes entre sí.

    *a)* $T \wedge T \equiv T$

    *b)* $T \wedge P \equiv P$

    *c)* $C \wedge P \equiv C$

    **Forma normal de la disyunción**. Es una disyunción de un conjunto finito cualquiera de conjunciones elementales diferentes entre sí

    *a)* $C \vee C \equiv C$

    *b)* $C \vee P \equiv P$

    *c)* $T \vee P \equiv T$

**Ejemplo 9.** Se define el conectivo lógico $\downarrow$ como

| $p$ | $p$ | $p \downarrow q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

entonces podemos deducir que $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$. Con esta equivalencia se pueden obtener otras en funcion al operador $\downarrow$ y $\neg$, por ejemplo

$$\begin{aligned} p \not\leftrightarrow q &\equiv \neg(p \leftrightarrow q) \\ &\equiv \neg[(p \wedge q) \vee \neg(p \vee q)] \\ &\equiv \neg[\neg(\neg p \vee \neg q) \vee (p \downarrow q)] \\ &\equiv (\neg p \downarrow \neg q) \downarrow (p \downarrow q). \end{aligned}$$

También

$$
\begin{aligned}
p \to q &\equiv \neg p \vee q \\
&\equiv \neg[\neg(\neg p \vee q)] \\
&\equiv \neg(\neg p \downarrow q)
\end{aligned}
$$

**Ejemplo 10.** Construir proposiciones equivalentes, más complejas, con las leyes lógicas, a partir de las convencionales.

$$
\begin{aligned}
\neg p \wedge q &\equiv \neg(p \vee \neg q) \wedge T && \text{Normal connjuntiva} \\
&\equiv \neg(p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg p) && \text{Tercio excluido} \\
&\equiv [\neg(p \vee \neg q) \wedge p] \\
&\quad \vee [\neg(p \vee \neg q) \wedge \neg q] && \text{Distributiva} \\
&\equiv \dots
\end{aligned}
$$

Consecutivamente.

***Ejercicios subsección (1.5)***

1. Complejizar la proposición compuesta $p \wedge \neg q$

2. Enunciar una proposición $t$, lo mas sencilla posible, que sea equivalente a $R \to S$, siendo:
$$R = (p \wedge q) \vee [\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \to q)]$$
$$S = \neg[\neg p \wedge (\neg p \to q)]$$

3. Cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas

   *a)* $\neg[\neg(p \wedge q) \to \neg q] \equiv (p \to q)$
   
   *b)* $\neg[\neg p \leftrightarrow q] \equiv (p \leftrightarrow q)$
   
   *c)* $\neg(p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg p \vee q)) \equiv (p \to \neg q)$

4. Si $p \wedge q \wedge r \equiv F$, demuestre que la proposicion mas simplificada de
$$[\neg p \to (q \vee r)] \wedge [p \wedge \neg(\neg q \vee \neg r)] \wedge (p \vee \neg p)$$
   es la proposicion $p \vee q \vee r$

5. Si se tiene la tabla de verdad de $*$ definida por $p * q \equiv \neg(p \to q)$, simplifique
$$(\neg p * q) \vee \neg(p * q) * \neg[\neg(p * q) * (\neg p * q)] \vee \neg p$$

### 1.5.8. Implicaciones notables

1. **Ley de Modus Ponens**. Si se *afirma el antecedente* de una premisa condicional se concluye en la afirmación del consecuente.

$$[(p \to q) \land p] \to q$$

2. **Ley de Modus Tollens**. Si se *niega el consecuente* de una premisa condicional, se concluye en la negación del antecedente.

$$[(p \to q) \land \neg q] \to \neg p$$

3. **Ley del silogismo disyuntivo**. Si se niega uno de los miembros de una *premisa disyuntiva*, se concluye en la afirmación del otro miembro.

$$[(p \lor q) \land \neg p] \to q$$

$$[(p \lor q) \land \neg q] \to p$$

4. **Ley de la inferencia equivalente**. Si uno de los miembros de la premisa bicondicional es verdadera, entonces es verdadera el otro miembro.

$$[(p \leftrightarrow q) \land q] \to p$$

$$[(p \leftrightarrow p) \land q] \to q$$

5. **Ley del silogismo hipotético**. Si $p \to q$ es verdadero y $q \to r$ es verdadero, entonces $p \to r$ es verdadero. Esta ley indica que el condicional es transitivo.

$$[(p \to q) \land (q \to r)] \to (p \to r)$$

6. **Ley de la transitividad simétrica**. Si $p \leftrightarrow q$ es verdadero y $q \leftrightarrow r$ es verdadero, entonces $p \leftrightarrow r$ es verdadero. Esta ley indica que el bicondicional es transitivo.

$$[(p \leftrightarrow q) \land (q \leftrightarrow r)] \to (p \leftrightarrow r)$$

7. **Ley de la simplificación**. De una premisa conjuntiva se puede concluir en cualquiera de sus componentes.

$$(p \land q) \to p$$

$$(p \land q) \to q$$

8. **Ley de la adición**. Una disyunción está implicada por cualquiera de sus miembros.

$$p \to (p \lor q)$$

$$q \to (p \lor q)$$

9. **Ley del absurdo**. Si una contradicción se deduce de una premisa condicional, se concluye en la negación del antecedente.

$$[p \to (q \land \neg q)] \to \neg p$$

$$[\neg p \to (q \land \neg q)] \to p$$

***Ejercicios sección (1.5)***

1. Deducir conclusiones validas a partir de las siguientes premisas $p \to (q \vee \neg r)$, $p$ y $r$

2. Escriba 3 premisas y deduzca conclusiones

### 1.5.9. Demostración matemática

Ya hemos visto la importancia que tiene, en matemáticas, el uso de las **proposiciones implicativas** en diversas demostraciones, específicamente en la de teoremas.

Fundamentalmente existen dos formas de demostración matemática: **la directa y la indirecta**.

### 1.5.10. Demostración directa

Según la tabla de verdad de la **implicación**, si $p$ es falso, la proposición $p \to q$ es válida, cualquiera que sea el valor de verdad de $q$, entonces no habría nada que demostrar. Luego, interesan los casos con **antecedente verdadero**.

Cuando a partir de la verdad de $p$ o de un *conjunto de premisas* de la forma

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \to q,$$

se deduce la **verdad de la conclusión** $q$, se dice que se ha usado una demostración directa.

**Teorema 1.** *Si $m$ y $n$ son números enteros pares entonces $mn$ es un numero entero par.*

*Demostracion.* Sean $p$ : «$m$ y $n$ son números enteros pares» y $q$ : «$mn$ es un numero entero par»

Demostremos mediante el método directo. Sean $m = 2k$ y $n = 2j, k, j \in \mathbb{Z}$ luego $mn = 4jk = 2(2kj) = 2t$, donde $t = 2kj \in \mathbb{Z}$ esto implica que $mn$ es par

### 1.5.11. Demostración indirecta

Una demostración indirecta se emplea también en enunciados o inferencias lógicas válidas que tienen la forma

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q \tag{3}$$

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Introducir la negación de la conclusión deseada como una nueva premisa

2. De esta premisa adicional, Junto con las premisas dadas, deducir una contradicción.

3. Establecer la conclusión deseada como deducción lógica de las premisas originales.

$$(\neg q \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to \neg p_1 \tag{4}$$

*Observación* 4. La ecuación 3 es equivalente a 4

$$\begin{aligned}(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q &\equiv \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee q \\ &\equiv \neg p_1 \vee \neg(p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee q \\ &\equiv q \vee \neg(p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee \neg p_1 \\ &\equiv \neg(\neg q \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee \neg p_1 \\ &\equiv (\neg q \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to \neg p_1\end{aligned}$$

Existen varios *métodos indirectos* en este caso se consideran dos métodos el contrareciproco y el de reducción al absurdo.

1. **Constrareciproco**. Demostrar que $p \to q$ equivale a demostrar su equivalente, el contrareciproco $\neg q \to \neg p$, y proceder con los pasos propios de la demostración directa.

   **Teorema 2.** *Si $mn$ es un numero entero impar entonces $m$ y $n$ son números enteros impares.*

   *Demostración.* Sean $p$ : «$mn$ es un numero entero impar» y $q$ : «$m$ y $n$ son números enteros impares»

   El contrareciproco es «$m$ y $n$ son números enteros pares» entonces «$mn$ es un numero entero par» demostremos mediante el método directo. Sean $m = 2k$ y $n = 2j$, $k, j \in \mathbb{Z}$ luego $mn = 4jk = 2(2kj) = 2t$, donde $t = 2kj \in \mathbb{Z}$ esto implica que $mn$ es un número entero par. □

2. **Reducción al absurdo** (Negar la tesis y llegar a una contradicción). Lo que se desea demostrar es $p \to q \equiv V$, entonces el método ofrece negar el valor de verdad de la proposición anterior $p \to q \equiv F$ esto ocurre si solo si $p \equiv V$ y $\neg q \equiv V(q \equiv F)$.

   Entonces el proceso consiste en dotarle del valor de verdad $V$ a la negación de la tesis $\neg p$ además considerar verdadera la hipótesis $p$ y bajo estas suposiciones llegar en algún punto a negar la hipótesis (o alguna de las premisa en el caso de hipótesis con premisas).

   **Teorema 3.** *Si $mn$ es un numero entero par entonces $m$ o $n$ es un número entero par.*

   *Demostración.* Sean $p$ : «$mn$ es un numero entero par» y $q$ : «$m$ o $n$ son números enteros pares»

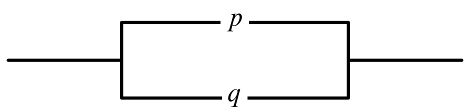
   Suponiendo que la negación de la conclusión $q$ «$m$ y $n$ son números enteros impares» además $p$ : «$mn$ es un numero entero par» son verdaderas. Sean $m = 2k + 1$ y $n = 2j + 1$, $k, j \in \mathbb{Z}$ luego $mn = 4jk = 2(2kjk + j) + 1 = 2t + 1$, donde $t = 2kj + k + j \in \mathbb{Z}$ esto implica que $\neg p$ : «$mn$ es un número entero impar» □

### 1.5.12. Circuitos lógicos

El valor de verdad de una proposición puede asociarse al pasaje de corriente en un circuito eléctrico controlado por un interruptor. En efecto, para representar un interruptor mediante una conjunción y disyunción se tiene as siguientes representaciones

$$p \wedge q$$

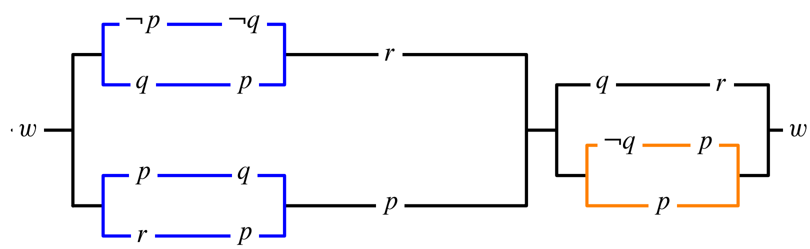

$$p \vee q$$




**Ejemplo 11.** Sea la proposición molecular

$$w \wedge [((\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)) \wedge r] \vee [((p \wedge q) \vee (r \wedge p)) \wedge p] \wedge \\ (q \wedge r) \vee [(\neg q \wedge p) \vee p] \wedge w$$

su representación es

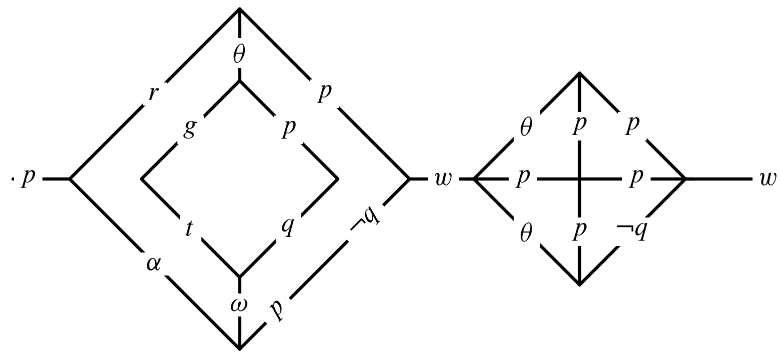



**Ejemplo 12.** Sea la proposición

$$p \wedge r \wedge [p \vee [\theta \wedge ((p \wedge q) \vee (g \wedge t)) \wedge (\omega \wedge (p \wedge \neg q))]] \wedge \\ w \wedge P \vee Q \vee R$$

donde los valores

$$P = \theta \wedge [p \vee [p \wedge (p \vee (p \wedge \neg q))]]$$
$$Q = p \wedge [(p \wedge p) \vee p \vee (p \wedge \neg q)]$$
$$R = P = \theta \wedge [\neg q \vee [p \wedge (p \vee (p \wedge \neg q))]]$$

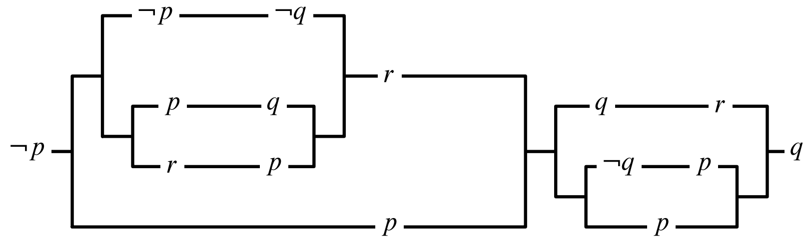



***Ejercicios subsección (1.5)***

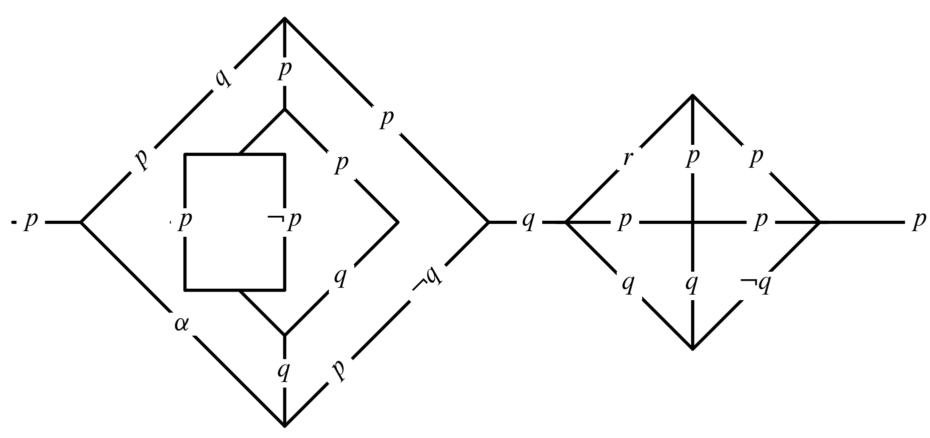
1. Construir el circuito lógico equivalente al esquema

$$[(P \rightarrow q) \vee p] \wedge [(p \rightarrow q) \vee \neg p]$$

2. Halle el esquema molecular del siguiente circuito




3. Halle el esquema molecular del siguiente circuito



## *Ejercicios sección (1)*

1. Construir un esquema equivalente a $[(p \to \neg q) \to t] \vee p$ y verificar mediante tabla

   **Solución 6.** Usando leyes lógicas

$$
\begin{aligned}
[(p \to \neg q) \to t] \vee p &\equiv [(q \to \neg p) \to t] \vee p && \text{Transp} \\
&\equiv [(q \to \neg p) \vee t] \vee p && \text{Cond} \\
&\equiv \neg\neg[(\neg q \vee \neg p) \vee t] \wedge \neg p && \text{Tran. y Morgan}
\end{aligned}
$$

2. Si $p * q \equiv \neg(\neg p \to \neg q) \vee p$ re escriba $(q \leftrightarrow p) \vee t$ en función de $*$ y $\neg$

   **Solución 7.** $p * q \equiv p \vee q$

$$
\begin{aligned}
(q \leftrightarrow p) \vee t &\equiv [(q \to p) \wedge (p \to q)] \vee t \\
&\equiv [(\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q)] \vee t \\
&\equiv [(\neg q * p) \wedge (\neg p * q)] \vee t \\
&\equiv \neg[\neg(\neg q * p) \vee \neg(\neg p * q)] * t \\
&\equiv \neg[\neg(\neg q * p) * \neg(\neg p * q)] * t
\end{aligned}
$$

3. Si $p * q \equiv \neg(\neg p \star \neg q) \vee p$ y $p \star q \equiv \neg p \vee q$ hallar la tabla de $[(q \star p) * t] \leftrightarrow \neg t$

   **Solución 8.** Se tiene que $p \star q \equiv \neg p \vee q \equiv p \to q$ además $p * q \equiv \neg(p \vee \neg q) \vee p \equiv (\neg p \wedge q) \vee p \equiv p \vee q$ entonces

| $p$ | $q$ | $t$ | $q \star p$ | $*$ | $t$ | $\leftrightarrow$ | $\neg t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |

4. Infiera conclusiones válidas de las proposiciones $(p \to q)$, $\neg q$ y $p \vee q$ y verifique

   **Solución 9.** Ordenando

$$(p \to q) \tag{5}$$
$$\neg q \tag{6}$$
$$p \vee q \tag{7}$$

de 5 y 6 se deduce (Modus Tollens)

$$\neg p \tag{8}$$

de 7 y 8 se deduce (Silogismo disyuntivo)

$$q \tag{9}$$

Por lo tanto

$$[(p \to q) \wedge \neg q \wedge (p \vee q)] \to q,$$
$$[(p \to q) \wedge \neg q \wedge (p \vee q)] \to \neg p$$

son conclusiones válidas.

5. Demostrar, por la tabla de valores o por el método abreviado, si el esquema es una inferencia validad o no

$$[(p \leftrightarrow q) \wedge (\neg q \to r)] \to (p \leftrightarrow r)$$

6. Si $\neg[(r \wedge t) \to (p \vee q)] \equiv V$ Hallar el valor de verdad de

$$[(p \vee q) \to t] \leftrightarrow r$$

7. Represente mediante circuito lógico la siguiente proposición

$$(p \leftrightarrow q) \to (r \leftrightarrow \neg w)$$

**Solución 10.** Usando leyes lógicas

$$\begin{aligned}(p \leftrightarrow q) \to (r \leftrightarrow \neg w) &= \neg(p \leftrightarrow q) \vee (r \leftrightarrow \neg w)\\ &= \neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)] \vee \\ &\quad [(\neg r \vee w) \wedge (w \vee r)]\\ &= [(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)] \vee \\ &\quad [(\neg r \vee w) \wedge (w \vee r)]\end{aligned}$$

8. Represente dos circuitos lógicos equivalentes

1. **Genere un nuevo operador lógico en función a los operadores lógicos convencionales ($\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\vee$, $\neg$ justifique que hay proposiciones implícitas que contienen operadores en consideración), luego reescriba una proposición molecular cualesquiera (de tres niveles), en la cual aparezca dos operadores dos veces cada una en el nivel dos, en función al operador que definió y la negación.**

2. **Genere tres operadores lógicos donde el primero dependa unicamente de los convencionales, el segundo dependa del primero unicamente finalmente el tercero dependa del primero, el segundo y los convencionales. Hallar la tabla de verdad de una proposición molecular (de tres niveles donde el operador de segundo nivel se represente dos veces y en el tercer nivel aparezca el operador condicional) cualesquiera en función a los operadores convencionales y los nuevos operadores definidos**

3. **Genere tres o mas proposiciones condicionales e infiera dos conclusiones válidas (método clásico), haciendo uso de al menos 2 implicaciones notables en cada uno. Además verifique las conclusiones mediante tablas de verdad (Tautología). Construya los circuitos lógicos de las negaciones de las correspondientes conclusiones** $\neg p \equiv p \rightarrow (\neg q \wedge q) \equiv \neg p \vee F$

4. **Genere un proposición molecular conjuncional (con cinco proposiciones atómicas distintas) y asígnele un valor de verdad, de manera que restrinja los valores de verdad de las proposiciones atómicas que la componen, a un único valor de verdad. Luego halle el valor de verdad de una *nueva proposición condicional* (use los cinco operadores convencionales), en función a las proposiciones atómicas que componen la proposición molecular anterior (con valores de verdad opuestas a las ya identificadas).**

# 2. Conjuntos

## 2.1. Preliminares

Un conjunto es una colección de elementos, objetos o entidades que comparten una característica en común. Los elementos pueden ser números, letras, palabras, objetos físicos, personas, entre otros.

Los conjuntos se suelen representar mediante llaves y se escriben separando sus elementos por comas o punto y coma. Por ejemplo, el conjunto de letras del alfabeto se representa como $A = a; 1{,}2; c; d; ....$

Es importante destacar que en un conjunto no puede haber elementos repetidos y el orden de los elementos no afecta a la definición del conjunto. Además, un conjunto puede ser finito (tener un número limitado de elementos) o infinito (no tener límite de elementos).

Los conjuntos son uno de los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos y son utilizados en diversas ramas de las matemáticas, la lógica y otras disciplinas. Son una herramienta útil para organizar y clasificar elementos de manera lógica y precisa.

Se tiene que $a \in A$ indica que $a$ es un elemento de $A$ o $a$ pertenece a $A$. De otro lado $a \notin A$ indica que $a$ no es un elemento de $A$ o $a$ no pertenece a $A$

### 2.1.1. Representación de conjuntos

1. **Extensión**. Un conjunto queda determinado por extensión cuando **se conocen individualmente todos sus elementos**

2. **Comprensión**. Un conjunto queda determinado por comprensión, cuando éste se define por medio de una **propiedad** la cual deben satisfacer cada uno de sus elementos. Si denotamos por $x$ a un elemento cualquiera del conjunto $A$ y por $P$ a la propiedad característica, se escribe:

$$A = \{x | x \text{ tiene la propiedad} P\}$$

**Ejemplo 13.**

$$
\begin{aligned}
A &= \{x|x \text{ es una vocal}\} \\
&= \{x|x\text{es una letra del alfabeto, } x \text{ es una vocal}\} \\
&= \{x|x\text{es una vocal cerrada o } x \text{ es una vocal abierta}\} \\
&= \{a, e, i, o, u\}
\end{aligned}
$$

entiéndase que la coma como y.

### 2.1.2. Conjuntos básicos

- **Conjunto finito**. Aquel que tiene número de elementos finitos $A = z|z$ es un día de la semana
- **Conjunto infinito**. Aquel que tiene infinitos elementos o incontables por ejemplo $A = \{z|z \text{ número real}\}$
- **Conjunto nulo**. Aquel que no tiene elementos $A = \; = \emptyset = x|x = x, x \neq x = x|x$es un marciano en el salón de la serie de ?
- **Conjunto unitario**. Aquel que tiene un elemento $\phi$,

$$w, (w/w^2)w^2, \frac{2w}{2}$$

- **Conjunto universo**. Es un conjunto que contiene a todos los elementos con una característica general, de la cual se pueden concluir características particulares.

  Los conjuntos más importantes en matemáticas son los conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ en ese orden.

### 2.1.3. Conjuntos numéricos

1. El conjunto de los números naturales

$$\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

$$\mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

2. El conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots = \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N})$$

Los enteros negativos, positivos y los enteros positivos incluido el cero son respectivamente

$$\mathbb{Z}^+ = 1, \ldots, n, \ldots = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z}^- = \ldots, -3, -2, -1 = -\mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z}_0^- = \ldots, -3, -2, -1, 0 = -\mathbb{N}_0$$

$$\mathbb{Z}_0^+ = 0, 1, \ldots, n, \ldots = \mathbb{N}_0.$$

Enteros pares e impares

$$2\mathbb{Z} = x|x = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2\mathbb{Z} + 1 = x|x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

3. El conjunto de los números racionales

$$\begin{aligned}\mathbb{Q} &= x|x = \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\\ &= x|bx - a = 0, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\end{aligned}$$

$$p : \frac{-3}{4} \in \mathbb{Q}$$

$$p : -3 = \frac{-3}{1} \in \mathbb{Q}$$

esto es $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

4. El conjunto de los números irracionales

$$\begin{aligned}\mathbb{I} &= x|x \neq \frac{a}{b}|a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\\ &= x|bx + a \neq 0, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\end{aligned}$$

$$\sqrt{2}, \pi, \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618... \in \mathbb{I}$$

5. **El conjunto de los números reales**. Este incluye a todos los números racionales (números enteros y fraccionarios) y los números irracionales (números que no pueden ser representados como fracciones exactas). Estos números se pueden representar en la recta numérica y contienen infinitos puntos entre dos números consecutivos.

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}\\ &= x|x = \lim_{n\to\infty} x_n, x_n \in \mathbb{Q}\end{aligned}$$

6. El conjunto de los números complejos

$$\mathbb{C} = a + bi|a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$$

7. El conjunto de los cuaterniones

$$\mathbb{H} = a + bi + cj + dk|a, b, c, d \in \mathbb{R}, i = j = k = \sqrt{-1}$$

**Definición 4** (Función proposicional)**.** Una función proposicional es todo **enunciado abierto** de la forma $p(x)$ que tiene la propiedad de *convertirse* en una proposición al ser sustituido la variable $x$ por una constante $c$ específica.

El conjunto de todos los valores convenidos para la variable $x$ recibe el nombre de dominio de la variable. Esto es, si representamos por $D$ el dominio, diremos que $x$ pertenece a $D$ mediante la notación conocida: $x \in D$. Entonces, según la definición de **enunciado abierto**, función proposicional sobre $D$ es toda expresión $p(x)$ tal que $p(c)$ es verdadera o falsa para todo $c \in D$.

1. $p(x) : x + 5 > 11 \leftrightarrow x > 6$. Entonces si $x \in \mathbb{R}$

$$V(p(x)) \equiv V \to x \in ]6, \infty[$$

   *a*) $q(x) : 2x^2 + 1 = x - 3$. Entonces si $x \in \mathbb{C}$

$$V(q(x)) \equiv V \leftrightarrow x \in 1/4 + \sqrt{31}/4i, 1/4 - \sqrt{31}/4i$$

$$V(q(x)) \equiv F \leftrightarrow x \notin 1/4 + \sqrt{31}/4i, 1/4 - \sqrt{31}/4i$$

   *b*) $p(x, y) : 2x + 5 = 11y$

   *c*) $p(x) : x$ es azul

*Observación* 5. No se debe confundir entre el **valor de verdad** de una proposición ($V$ o $F$) del **valor de una función proposicional**, para un cierto valor de la variable.

## 2.2. Cuantificadores

### 2.2.1. Cuantificador existencial

Este cuantificador es una generalización de la *disyunción inclusiva*. Por ello, es verdadero cuando al menos un valor de $x$ perteneciente al Dominio de $A$, es Verdadero. Se denota; $\exists x/P(x)$ Se lee: «Existe al menos un $x$», «Algunos $x$», «Hay $x$», «Existe un $x$», etc.

### 2.2.2. Cuantificador universal

Este cuantificador es una generalización de la *conjunción*. Debido a esto es verdadero cuando todos los valores de $x$ que pertenecen al dominio de $A$ son **verdaderos**. Se denota: $\forall x; p(x)$ Se lee: «Para todo $x$», «Para cada $x$», «Todos(as) las $x$», «Todo $x$».

**Ejemplo 14.** Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la función proposicional $3x - 2 < 12$ entonces las proposiciones

1. $p$:$\forall x \in A | 3x - 1 < 14$ entonces $V(p) \equiv F$
2. $q$: $\exists\, x \in A : 3x - 2 < 4$ entonces $V(q) \equiv V$

son falsa y verdadera respectivamente

### 2.2.3. Proposición universal

Una proposición universal es aquella que está provista de un cuantificador universal, y tiene cualquiera de la formas equivalentemente forma

$$\forall x \in A : p(x) \equiv \forall x \in A | p(x) \equiv (\forall x \in A)[p(x)]$$

### 2.2.4. Proposición existencial

Una proposición existencial es aquella que está provista de un cuantificador existencial, y tiene cualquiera de la formas equivalentemente forma

$$\exists x \in A : p(x) \equiv \exists x \in A | p(x) \equiv (\exists x \in A)[p(x)]$$

*Observación* 6. Cambiando el cuantificador universal por el cuantificador existencial, o viceversa, es decir

$$\neg \exists x \in A : P(x) \equiv \forall x \in A : \neg P(x)$$

$$\neg \forall x \in A : P(x) \equiv (\exists\ x \in A)[\neg P(x)]$$

La negación del cuantificador universal es equivalente a la afirmación de un cuantificador existencial respecto de la función proposicional negada.

La negación de un cuantificador existencial es equivalente a la afirmación de un cuantificador universal respecto de la función proposicional negada.

**Definición 5.** La aplicación de $n$ cuantificadores correspondientes a las $n$ variables de una función proposicional, produce una proposición que tiene un valor de verdad. Por ejemplo:

$$\forall x, \exists y | P(x, y) \text{ o } \forall x, \forall y, \exists z | P(x, y, z)$$

El orden en que se aplican los cuantificadores es esencial; en algunos casos, al cambiar el orden de los cuantificadores cambia la proposición (o la función proposicional) obtenida.

*Observación* 7. La negación de una proposición cuantificada que contiene más de una variable puede averiguarse así:

$$\begin{aligned}
\neg[\forall x, \forall y, \exists z | P(x, y, z)] &\equiv \exists x \neg[\forall y, \exists z | P(x, y, z)] \\
&\equiv \exists x, \neg \forall y [\exists z | P(x, y, z)] \\
&\equiv \exists x, \exists y, \neg[\exists z | P(x, y, z)] \\
&\equiv \exists x, \exists y, \forall z | \neg P(x, y, z)]
\end{aligned}$$

**Ejemplo 15.** Dada la proposición: «Si todos los números primos son impares, los números positivos son mayores que $-1$»

1. Expresarla simbólicamente x
2. Negar la proposición y reescribirla

**Solución 11.** Sea $p(x)$ : «los números primos son impares» y $q(x)$ : «números positivos son mayores que $-1$»

Simbólicamente $\forall x : [p(x) \rightarrow q(x)] \equiv \forall x : p(x) \rightarrow \forall x : q(x)$, negando se obtiene

$$\begin{aligned}
\neg \{\forall x : [p(x) \rightarrow q(x)]\} &\equiv \neg \{\forall x : p(x) \rightarrow \forall x : q(x)\} \\
&\equiv \neg\neg[\forall x : p(x)] \vee [\forall x : q(x)] \\
&\equiv [\forall x : p(x)] \wedge [\exists x : \neg q(x)]
\end{aligned}$$

que se lee: «Todos los números primos son impares y algunos números no son mayores que $-1$»

**Ejemplo 16.** Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} : -14 < x < 27\}$. Hallar el valor de verdad de

$$s = [(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)] \leftrightarrow (\neg p \vee r)$$

si

$$\begin{aligned} p &\equiv (\forall x \in A, \exists y \in A, \forall z \in A)[x^2 - z^2 > y^2] \\ q &\equiv (\exists y \in A, \forall z \in A, \exists x \in A)[2x - 4y < -z] \\ r &\equiv (\forall z \in A, \exists x \in A, \forall y \in A)[3x^2 - z^2 > y] \end{aligned}$$

**Solución 12.** $A = \{1, 2, 3, \ldots, 26\}$ luego el valor de $\mathrm{V}(p) = F$, $\mathrm{V}(q) = V$ y $\mathrm{V}(r) = V$ pues

1. Si $y = 1$ (mínimo de $A$) entonces

   $$x^2 - z^2 > y^2 \equiv x^2 > 1 + z^2$$

   lo cual no es válido $\forall x, z \in A$ entonces $\boxed{\mathrm{V}(p) = F}$

2. Si $y = 25 \in A$ y $x = 1 \in A$ entonces

   $$2x - 4y < -z \equiv 2 + z < 100$$

   lo cual es válido $\forall z \in A$ entonces $\boxed{\mathrm{V}(q) = V}$

3. Si $x = 26 \in A$ entonces

   $$3x^2 - z^2 > y \equiv 3(26)^2 > z^2 + y$$

   lo cual es válido $\forall z, y \in A$ entonces $\boxed{\mathrm{V}(r) = V}$

Entonces

$$\begin{aligned} V(s) &\equiv V[((\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)) \leftrightarrow (\neg p \vee r)] \\ &\equiv [(V \wedge F) \rightarrow (F \wedge F)] \leftrightarrow (V \vee V) \\ &\equiv [F \rightarrow F] \leftrightarrow V \\ &\equiv V \end{aligned}$$

***Ejercicios subsección (2.2)***

1. Dada la proposición: «Obtendré un puntaje aprobatorio si y solo si estudio concienzudamente el curso»

   *a*) Expresarla simbólicamente

   *b*) Negar oracionalmente la proposición

2. Negar la proposición:«Para todo número racional $r$, entonces existe un número entero $n$ tal que $n < r < n + 1$»

3. Negar oracionalmente: «Para todo número real $x$, existe un número entero $M$ tal que $x^2 < M + 1$ siempre que($\rightarrow$) $x < M$»

4. Dado el conjunto $G = \{x \in \mathbb{Z}^+ : -14 < 2x < 20\}$. Hallar el valor de verdad de

$$s = (p \wedge \neg q) \rightarrow [(\neg q \wedge \neg r) \leftrightarrow (\neg p \vee r)]$$

si

$$\begin{aligned} p &\equiv (\forall x \in A, z \in \mathbb{N}_0)[xz \in \mathbb{Z}] \\ q &\equiv (\forall z \in A, \exists x \in A)[x \neq y] \\ r &\equiv (\forall z \in A, \forall y \in A)[yx^2 > 500] \end{aligned}$$

## 2.3. Relación entre conjuntos

### 2.3.1. Igualdad de conjuntos

Dos cunjuntos son iguales si tienen los mismo elementos

$$\begin{aligned} A = B &\equiv (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A) \\ &\equiv x \in A \leftrightarrow x \in B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \neq B &\equiv (\exists x \in A | x \notin B) \vee (\exists x \in B | x \notin A) \\ &\equiv (\forall x \in A | x \in B) \rightarrow (\exists x \in B | x \notin A) && \text{Condicional} \\ &\equiv \neg(\forall x \in A | x \in B) \wedge (\forall x \in B | x \in A) \end{aligned}$$

*Observación* 8. Las propiedades de la igualdad de dos conjuntos son la simétrica, reflexiva y transitiva

1. $A = A$

2. $A = B \leftrightarrow B = A$

3. $A = B$ y $B = C$ entonces $A = C$

### 2.3.2. Equivalencia de conjuntos

$A \equiv B$ si tienen el **mismo numero de elementos**, es decir hay una correspondencia **viunívoca** entre los elementos de $A$ y $B$. $A = 1, 2, 3$ y $B = a, b, c$ la correspondencia son $1 \rightarrow a$, $2 \rightarrow b$ y $3 \rightarrow c$ por lo tanto los conjuntos $A$ y $B$ son equivalentes (su representación es $A \equiv B$ en caso contrario $\not\equiv$)

1. $A = B \rightarrow A \equiv B$

   *a*) $A \equiv B \nrightarrow A \neq B$

### 2.3.3. Inclusión de conjunto

Un conjunto se incluye en otra si la otra contiene a todos sus elementos.

$$\begin{aligned} A \subset B &\equiv x \in A \to x \in B \\ &\equiv \forall x \in A, x \in B \end{aligned}$$

$$A \not\subset B \equiv x \in A | x \notin B$$

$$A \not\supset B \equiv \exists x \in B | x \notin A$$

**Definición 6.** Los conjuntos $A$ y $B$ son iguales si y solo si $A \subset B$ y $A \supset B$ es decir

$$A = B \equiv (A \subset B) \wedge (A \supset B) \equiv (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

Si $A \subset B$ y $A \neq B$ se dice que $A$ es un subconjunto propio de $B$

*Observación* 9. Las propiedades de la inclusión propia de conjuntos son la simétrica, anti simétrica $((A \subset B) \wedge (B \subset A) \to A = B)$ y transitiva. En efecto

1. Simétrica: $A \subset A$
2. Anti simétrica $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \to A = B$
3. Transitiva $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$

*Observación* 10. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier otro excepto de si mismo

$$\forall A \to \emptyset \subset A.$$

$A \neq \emptyset$. En efecto debido a que la proposición es siempre verdadera

$$\emptyset \subset A$$

$$\forall x | \underbrace{x \in \emptyset}_{F} \to x \in A$$

por tanto $\emptyset \subset A$ para cualquier conjunto $A \neq \emptyset$

### 2.3.4. Conjunto disjuntos

Dos conjuntos son disjuntos si no tienen elementos en común

$$\forall x \in A \to x \notin B$$

### 2.3.5. Conjuntos comparables

Dos conjuntos son comparables si $A \subset B$ o $B \subset A$. En caso contrario $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$. Se tiene que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$ son comparables con $\mathbb{C}$

### 2.3.6. Conjunto de conjuntos

Es el conjunto que tiene como elementos a otros conjuntos. Se le denomina también: familia, colección o clase de conjuntos. Por ejemplo $C = \{\emptyset, \{\emptyset\} \{3\}, \{3, 5\}\}$ es un conjunto de conjuntos, de otro lado el conjunto $G = \{3, \{7, 1\}\}$ no es conjunto de conjuntos.

### 2.3.7. Conjunto potencia

Dado un conjunto $A$, se denomina conjunto potencia o conjunto de partes de $A$, al. conjunto de todos los subconjuntos del conjunto $A$. Se denota: $P(A)$.

$$P(A) = X|X \subset A$$

es un conjunto de conjuntos.

$$X \in P(A) \leftrightarrow X \subset A.$$

El conjunto potencia de $A = 1, 2, 3, \emptyset$ es

$$P(A) = \emptyset, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, \emptyset, 3, \emptyset, A, \emptyset$$

1. El número de elementos de $P(A)$ es igual a $2^n$, donde $n$ es el número de elementos del conjunto $A$.

   *a*) $\emptyset \in P(A)$, puesto que $\emptyset \subset A$

   *b*) $A \in P(A)$, puesto que $A \subset A$

1. $P(\emptyset) = \emptyset$

   *a*) $A \subset B \leftrightarrow P(A) \subset P(B)$

   *b*) $A = B \leftrightarrow P(A) = P(B)$

*Observación* 11. Supongamos que $X \in P(A) \rightarrow X \in A \subset B$ entonces $X \in P(B)$

**Ejercicio 1.** Halle el conjunto potencia del conjunto

$$A = 1, 3, 4, 3, 3$$

Ademas halle los valores de verdad de las siguiente proposiciones

1. $\exists X \in P(A)|1 \in X \equiv$
2. $\forall X \in P(A)|\emptyset \subset X \equiv$
3. $\forall X \in P(A)|\emptyset \subset X \equiv$

## 2.4. Representación gráfica de conjuntos

Con el objeto de mostrar los elementos de los conjuntos o para visualizar relaciones entre éstos, existen los llamados *diagranas de Venn Euler*, que son regiones del plano limitados por líneas geométricas. El conjunto universal $U$ suele representarse por un rectángulo, y los subconjuntos de $U$ por circunferencias, elipses, triángulos, etc.

***Ejercicios subsección (2.4)***

## 2.5. Operaciones con conjuntos

### 2.5.1. Unión de conjuntos

Formado por aquellos elementos que están en ambos conjuntos.

$$A \cup B = x : x \in A \vee x \in B$$

*Observación* 12 (Propiedades de la unión). Tiene las siguientes propiedades

1. $A \cup A \equiv A$
2. $A \cup \emptyset \equiv A$
3. $A \cup U \equiv U$
4. $A \cup B \equiv B \cup A$
5. $(A \cup B) \cup C \equiv B \cup (A \cup C)$

### 2.5.2. Intersección de conjuntos

Formado por aquellos elementos que estan tanto en el primer y segundo conjunto

$$A \cap B = x : x \in A \wedge x \in B$$

*Observación* 13 (Propiedades de la interseccion). Tiene las siguientes propiedades

1. $A \cap A \equiv A$
2. $A \cap \emptyset \equiv \emptyset$
3. $A \cap U \equiv A$
4. $A \cap B \equiv B \cap A$
5. $(A \cap B) \cap C \equiv B \cap (A \cap C)$
6. $$P(A \cap B) \equiv P(A) \cap P(B) \tag{10}$$

*Observación* 14 (Propiedades de la unión e intersección). Tiene las siguientes propiedades

1. $A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C)$

*Observación* 15 (Propiedades de la absorción). Tiene las siguientes propiedades

1. $A \cap (A \cup B) \equiv A$
2. $A \cup (A \cap B) \equiv A$

### 2.5.3. Diferencia de conjuntos

Formado por aquellos elementos que unicamente estan el primer conjunto.

$$A - B = x : x \in A \wedge x \notin B$$

*Observación* 16 (Propiedades de la interseccion). Tiene las siguientes propiedades

1. $A - A \equiv \emptyset$
2. $A - \emptyset \equiv A$
3. $(A - B) \subset A$
4. $A - B \equiv (B \cup A) - B = A - (A \cap B)$
5. $B \cap (A - B) = \emptyset$
6. $P(A \cap B) \equiv P(A) \cap P(B)$

**Ejemplo 17.** Usando propiedades de conjuntos, demostrar que: $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

**Solución 13.**

$$\begin{aligned}
(A - B) \cup (B - A) &= (A \cap B') \cup (B \cap A') \\
&= ((A \cap B') \cup B) \cap ((A \cap B') \cup A') \\
&= ((A \cup B) \cap U) \cap ((B' \cup A') \cap U) \\
&= (A \cup B) \cap (B' \cup A') \\
&= (A \cup B) \cap (B \cap A)' \\
&= (A \cup B) - (A \cap B)
\end{aligned}$$

### 2.5.4. Diferencia simétrica

Formado por aquellos elementos que no estan en la intersección de dos conjuntos cualesquiera

$$A \dot{-} B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$A \dot{-} B = x|(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)$$

*Observación* 17 (Propiedades de la diferencia simétrica). Son las siguientes

1. $A \dot{-} A \equiv \emptyset$
2. $A \dot{-} \emptyset = A$
3. $A \dot{-} B = B \dot{-} A$
4. $(A \dot{-} B) \dot{-} C = A \dot{-} (B \dot{-} C)$
5. $(A \dot{-} B) \cap C = A \dot{-} (B \dot{-} C)$

## 2.6. Cardinal de un conjunto

Dado un conjunto $A$, la familia de elementos de este conjunto se llama número cardinal de $A$ y se denota por: Card$(A)$ o $n(A)$, las propiedades que verifica son:

1. Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
2. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
3. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

### *Ejercicios subsección (2.6)*

1. Sean $A$ y $B$ dos conjuntos tales que: $n(AUB) = 24, n(A-B) = 10, n(B-A) = 6$, hallar: $5n(A) - 4n(B)$.

   **Solución 14.**

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 24 \tag{11}$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 10 \tag{12}$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 6 \tag{13}$$

   $n(A) = 14$ de las ecuaciones 11 y 12 además $n(B) = 18$ de las ecuaciones 11 y 13 entonces $5n(A) - 4n(B) = 5 \cdot 14 + 4 \cdot 18$

2. Si $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ y $n(A \cap B) = 2$, hallar la suma: $n[P(A) \cup P(B)] + n[P(A \cup B)]$.

   **Solución 15.** Se sabe que,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5$$

   entonces $n(P(A \cup B)) = 2^5 = 32$. Además haciendo uso de la ecuación

$$P(A \cap B) \equiv P(A) \cap P(B)$$

   se tiene

$$\begin{aligned} n[P(A) \cup P(B)] &= n(P(A)) + n(P(B)) - n[P(A) \cap P(B)] \\ &= n(P(A)) + n(P(B)) - n[P(A \cap B)] \\ &= 2^4 + 2^3 - 2^2 = 16 + 8 - 4 = 20 \end{aligned}$$

   Por lo tanto $n[P(A) \cup P(B)] + n[P(A \cup B)] = 20 + 32 = 52$

### 2.6.1. Complemento de conjuntos

Si $A \subset B$ entonces se define $\mathcal{C}_A B \equiv A'_B \equiv B - A$ (se lee como el complemento del conjunto $A$ con respecto a $B$), a la diferencia $B - A$

$$\mathcal{C}_A B = x | x \in B \wedge x \notin A = B - A$$

$$\mathcal{C}_B A = x | x \in A \wedge x \notin B = A - B$$

en particular $A = U$ se denota con $\mathcal{C}B = B'$

*Observación* 18 (Propiedades del complemento). Son las siguientes

1. $\mathcal{C}_A B \subset B$ y $A' \cap A = U$ o $B \cup \mathcal{C}_B A = A$
2. $U' = \emptyset$ o $\mathcal{C}_A A = \emptyset$
3. $\emptyset' = U$ o $\mathcal{C}_\emptyset A = A - \emptyset = A$
4. $(A')' = A$
5. $A - B = A \cap B'$
6. $A \subset B \to B' \subset A'$
7. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
8. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

# 3. Números reales

La estructuración del sistema de los números reales se enfoca usualmente de dos formas; una de ellas es el método usado por Dedekind, que introduce primeramente en forma axiomática el estudio de los números naturales, para extenderse luego a los números enteros, racionales, y en base a estos últimos definir los números reales. La otra forma, define axiomaticamente el sistema de los números reales y luego demostrar que los números racionales, enteros y naturales son subconjuntos de los números reales. En este libro usaremos la ultima forma.

## 3.1. Preliminares

$\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ Se llama sistema de números reales a un conjunto no vacío $\mathbb{R}$ dotado de dos operaciones internas, llamadas **adición** y **multiplicación**, denotadas por:

$$\begin{aligned} (+)\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) &\longmapsto a + b \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} (\cdot)\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) &\longmapsto a \cdot b \end{aligned}$$

y una relación de orden mayor, denotada por $>$, que satisface los axiomas siguientes:

### 3.1.1. Axioma de la adición

**A.1** Clausura $\forall x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x + y \in \mathbb{R}$

**A.2** Conmutativa $\forall x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x + y = y + x$

**A.3** Asociativa $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$

**A.4** Elemento neutro aditivo: $\exists!0 \in \mathbb{R}|a + 0 = 0 + a = a; \forall a \in \mathbb{R}$

**A.5** Elemento inverso aditivo: $\forall a \in \mathbb{R}; \exists!(-a) \in \mathbb{R}|a + (-a) = (-a) + a = 0$

### 3.1.2. Axioma de la multiplicación

**M.1** Clausura $\forall x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x \cdot y \in \mathbb{R}$

**M.2** Conmutativa $\forall x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x \cdot y = y \cdot x$

**M.3** Asociativa $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ entonces $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

**M.4** Elemento neutro multiplicativo: $\exists!1 \in \mathbb{R}|a \cdot 1 = 1 \cdot a = a; \forall a \in \mathbb{R}$

**M.5** Elemento inverso multiplicativo: $\forall a \in \mathbb{R}; \exists!a^{-1} \in \mathbb{R}|a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

### 3.1.3. Axioma distributivas

**D.1** $a(b + c) = ab + ac$

**D.2** $(a + b)c = ac + bc = ca + cb$

### 3.1.4. Axioma de igualdad

**I.1** DicotomíaÂ $a = b$ o $a \neq b$

**I.2** Reflexiva $\forall a \in \mathbb{R}, a = a$

**I.3** Simetría $\forall a, b \in \mathbb{R}, a = b \equiv b = a$

**I.4** Transitividad $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a = b) \wedge (b = c) \rightarrow a = c$

**I.5** Unicidad de la adición: Si $a = b$ entonces $a + c = b + c, \forall c \in \mathbb{R}$

**I.6** Unicidad de la multiplicación: Si $a = b$ entonces $a \cdot c = b \cdot c, \forall c \in \mathbb{R}$

### 3.1.5. Axioma de orden

**O.1** Tricotomía: Solo se cumple unicamente uno de las opciones $a < b, a = b$ o $a > b$

**O.2** Transitiva: $a < b \wedge b < c \rightarrow a < c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

**O.3** Leyes de monotonía:

1. Si $a < b$ entonces $\forall c \in \mathbb{R}, a + c < b + c$ (Consistencia aditiva)
2. Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ab < bc$ (Consistencia multiplicativa)
3. Si $a < b$ y $c \leq 0$ entonces $ab \geq bc$ (Consistencia multiplicativa)

**O.4** Existe un conjunto $\mathbb{R}^+$ tal que $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ (Conjunto de números reales positivos) que cumplen las siguientes propiedades

1. Si $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^+$ entonces $a + b \in \mathbb{R}^+$ y $ab \in \mathbb{R}^+$
2. Para cada $a \neq 0 : a \in \mathbb{R}^+$ o $-a \in \mathbb{R}^+$, pero no ambos.
3. $0 \notin \mathbb{R}^+$

### 3.1.6. Axioma del supremo

Si $S$ es un conjunto no vacío de elementos de $\mathbb{R}$ superiormente acotado, entonces $S$ tiene un supremo en $\mathbb{R}$. Este último axioma nos garantiza que los números reales $\mathbb{R}$ incluyen los racionales $\mathbb{Q}$ y que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y los números reales.

A continuación, haciendo uso de los axiomas, probaremos algunas de las propiedades del sistema de los números reales y veremos también sus aplicaciones en el álgebra elemental.

## 3.2. Teorema sobre la adición

**Teorema 4** (Unicidad del elemento neutro aditivo)**.** *El elemento* ***neutro aditivo*** $e = 0$ *es único El único* ***elemento neutro para la adición*** *en* $\mathbb{R}$ *se llama cero, se denota 0, de modo que* $\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 - 0 + a = a$

**Definición 7.** El único **elemento inverso aditivo** de $a$ se llama el opuesto de $a$, denotado con $-a$ de modo que $\forall a \in \mathbb{R} : a + (-a) - (-a) + a = 0$

**Teorema 5** (Cancelación para la adición)**.** *Si* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *se tiene que* $a + c = b + c \rightarrow a = b$

**Corolario 1.** $a + b = 0 \rightarrow b = -a$

**Teorema 6.** $-(-a) = a$

**Teorema 7.** $-(a + b) = (-a) + (-b)$

**Definición 8.** $a - b = a + (-b)\ \forall a, b \in \mathbb{R}$

## 3.3. Teorema sobre la multiplicación

**Teorema 8** (Unicidad del elemento neutro multiplicativo)**.** *El elemento neutro multiplicativo $e = 1$ es único.*

**Definición 9.** El único **elemento neutro para la multiplicación** en $\mathbb{R}$ se llama uno o unidad, se denota 1, de modo que $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 - 1 \cdot a = a$

**Teorema 9** (Unicidad del elemento inverso multiplicativo)**.** *Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, el **elemento inverso multiplicativo** de $a$ es único.*

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

**Teorema 10** (Cancelación para la multiplicación)**.** *Si $ab = bc, b \neq 0 \to a = c$*

**Teorema 11.** *$a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ $ab = 1 \leftrightarrow a = b^{-1}$*

**Teorema 12.** $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$

**Teorema 13.** *$a, b, x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ entonces $ax = b$ implica $x = a^{-1}b$*

**Teorema 14.** $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

**Teorema 15.** $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{a}{b} = ab^{-1} \tag{14}$$

**Teorema 16.** *Para los números $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades.*

1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
2. $(a - c)b = ba - bc$
3. $-a = (-1)a$, $\forall a \in \mathbb{R}$
4. $a(-b) = -(ab) = (-a)b$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$
5. $(-a)(-b) = ab$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$
6. $ab = 0 \leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$

**Teorema 17.** *Para los números $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades.*

1. $\left(\frac{b}{a}\right) a = b$ si $a \neq 0$
2. $\frac{a}{bc} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right) = \left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right)$
3. $a = b, c = d \to (ac = bd) \vee (\frac{a}{c} = \frac{b}{d})$ si $c, d \neq 0$
4. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc$ si $b \neq 0$ $d \neq 0$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$

6. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ si $b \neq 0$ y $c \neq 0$

7. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$

8. $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$ si $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$

**Ejercicio 2.** Sumar $9x-5$ y $-4x+2$ Aplicaremos los axiomas de adición y distribución procediendo de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
(9x-5)+(-4x+2) &= [9x+(-5)]+(-4x+2) && \text{Def. 8}\\
&= 9x+[(-5)+(-4x+2)] && \text{Asoc Sum}\\
&= 9x+[((-5)+(-4x))+2] && \text{Asoc Sum}\\
&= 9x+[[(-4x)+(-5)]+2] && \text{Comm Sum}\\
&= [9x+(-4x)]+[(-5)+2] && \text{Asoc}\\
&= [9+(-4)]x+[-5+2] && \text{Distrib}\\
&= 5x+(-3) && \text{Def 8 Pr sum}\\
&= 5x-3
\end{aligned}
$$

## *Ejercicios subseccion (3.3)*

1. Haciendo uso de los axiomas de la adición y multiplicación de números reales, efectuar las operaciones indicadas,

2. describiendo los pasos dados y escribiendo los resultados en la forma más simple.

   *a)* $3x+5-[-(6x-3)+5]$ Sea $w = 3x+5-[-(6x-3)+5]$

$$
\begin{aligned}
w &\equiv 3x+5+-[-(6x+(-3))+5] && \text{Def 8}\\
&\equiv 3x+5+-[(-(6x))+(-(-3))+5] && \text{T 7}\\
&\equiv 3x+5+-[(-(6x))+3+5] && \text{T 6}\\
&=\\
&=\\
&=
\end{aligned}
$$

   *b)* $(2x+1)(x-3)(a+3)$

3. Haciendo uso de los axiomas de la adición y multiplicación de números reales, demostrar que

   *a)* $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$

   *b)* Si $a = b$ y $c = d$ entonces $a+c = b+d$ De $a = b$ se tiene

$$
\begin{aligned}
a = b &\equiv a+c = b+c && \text{I.5}\\
&\equiv a+c = b+d && c = d
\end{aligned}
$$

c) Si $a = b$ y $c = d$ entonces $ac = bd$. De $a = b$ se tiene

$$\begin{aligned} a = b &\equiv ac = bc && \text{I.6} \\ &\equiv ac = bd && c = d \end{aligned}$$

4. Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones lineales

a) $5x - (3x - 7) - [4 - 2x - (6x - 3)] = 10$ Sea $p : 5x - (3x - 7) - [4 - 2x - (6x - 3)] = 10$

$$\begin{aligned} p &\equiv 5x + (-3x + (-(-7))) \\ &\quad + [-4 + (-(-2x)) + (-(-(6x - 3)))] = 10 && \text{Def 8 T 7} \\ &\equiv 5x + (-3x + 7) + [-4 + 2x + (6x + (-3))] = 10 && \text{Def 8 T 6} \\ &\equiv (5x + (-3x) + 2x + 6x) + (7 + (-4) + (-3)) = 10 && \text{A.3} \\ &\equiv (5x - 3x + 2x + 6x) + (7 - 4 - 3) = 10 && \text{Def 8} \\ &\equiv (10x) + (0) = 10 \\ &\equiv x = 10 \cdot 10^{-1} = 1 && \text{T 13} \end{aligned}$$

b) $a - \frac{m+n}{x} = b - \frac{m-n}{x}$, $x \neq 0$ contenidos...

**Definición 10.** Si $n \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces $b^n$, llamada $n$-sima potencia de $b$, representa el producto de $n$ factores iguales a $b$, esto es:

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ veces}}$$

en donde, el exponente $n$ indica las veces que se debe repetir la base $b$ como factor.

**Teorema 18.** *Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ entonces*

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(a^n)^m = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
5. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

Efectuar $\left(2x^3\right)\left(5xy^3\right)\left(x^2y\right)^3$

$$\begin{aligned} \left(2x^3\right)\left(5xy^3\right)\left(x^2y\right)^3 &= 10(x^3 \cdot x \cdot x^6)(y^3 \cdot y^3) && \text{T 18(2,3) M.2 M.3} \\ &= 10 \cdot x^{10} \cdot y^6 && \text{T 18(1)} \end{aligned}$$

Efectuar $(2x^3-1)(5xy^3)(x^2y)^3$

$$\begin{aligned}
(2x^3-1)(5xy^3)(x^2y)^3 &= (2x^3-1)5x^7y^6 && \text{T 18(2,3,1) M.2 M.3}\\
&= 2x^3\cdot 5x^7y^6 - 5x^7y^6 && \text{D.2}\\
&= 10x^{10}y^6 - 5x^7y^6 && \text{T 18(1), M2, M3}\\
&= 10x^3x^7y^6 - 5x^7y^6 && \text{T 18(1)}\\
&= \left(10x^3-5\right)x^7y^6 && \text{D.2}
\end{aligned}$$

*Observación* 19. Identidades notables

1. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ $(2+3)(2-3)=2^2-3^2=4-9=-5$
2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
3. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
5. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
6. $(a+b)^3+(a-b)^3=2a^3+6ab^2$
7. $(a+b)^3-(a-b)^3=26a^2b+2b^3$
8. $(ax+cy)(bx-dy)=abx^2+(ad+bc)xy+cdy^2$
9. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
10. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
11. $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$
12. $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

Demostrar que $(w-z+y+t)^2+(w+z-y-t)^2=2w^2+2(z-y-t)^2$ Haciendo uso de propiedades

$$\begin{aligned}
(w-z+y+t)^2+(w+z-y-t)^2 &= (w-(z-y-t))^2\\
&\quad + (w+(z-y-t))^2 && \text{A.3}\\
&= 2w^2+2(z-y-t)^2 && \text{IN.7}\\
&= 2\left(w^2+(z-y-t)^2\right)
\end{aligned}$$

Demostrar que $(x-y+3y)^2+(x-y-3y)^2=2x^2-4xy+20y^2$ En efecto $(x-y+3y)^2+(x-y-3y)^2=2((x-y)^2+(3y)^2)=2(x^2-2xy+y^2+9y^2)=2x^2-4xy+20y^2$

$$\begin{aligned}
(x-y+3y)^2+(x-y-3y)^2 &= 2((x-y)^2+(3y)^2) && \text{IN.7}\\
&= 2(x^2-2xy+y^2+9y^2) && \text{IN.2}\\
&= 2x^2-4xy+20y^2 && \text{D.1}
\end{aligned}$$

**Definición 11.** Si $c, x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $x$ se llama raíz $n$-ésima principal de $x$, se denota $x = \sqrt[n]{c}$, si y solo si $x^n = c$, bajo la condición de que si $n$ es par, entonces $x > 0$ y $c > 0$. Formalmente $x = \sqrt[n]{c} \leftrightarrow x^n = c$. Si $n$ par entonces $x > 0, c > 0$

$$\sqrt{c^2} = |c| = \begin{cases} c & \text{Si } c \geq 0 \\ -c & \text{Si } c < 0 \end{cases} \tag{15}$$

$$-(-3)^{2^2} \neq 3^2 \tag{16}$$

1. Si $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{4a^2} = |2a| = 2\,|a|$
2. Si $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{4a^4} = 2a^2$ pues $a^2 > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$

**Definición 12.** Si $c, x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$, con la condición de que si $n$ es par, $c \geq 0$

1. $(-16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16}$ No existe en $\mathbb{R}$
2. $(-125)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-125} = -5$

**Definición 13.** Si $c, x \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $c^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{c})^m = \sqrt[n]{c^m}$, con la condición de que si $n$ es par, $c > 0$

1. $(-9)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt[2]{-9})^3$ No existe en $\mathbb{R}$
2. $(-8)^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{-8})^4 = (-2)^4 = 16$

**Teorema 19.** *Si $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, y ningún radicando es negativo si $n$ es par, entonces*

1. $\begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = a & \text{Si } n \text{ es impar} \\ \sqrt[n]{a^n} = |a| & \text{Si } n \text{ es par} \end{cases}$
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

**Definición 14** (Racionalización)**. Racionalización** es el procedimiento para transformar una expresión con denominador irracional en otra equivalente cuyo denominador sea racional. Denominadores de las formas : $\sqrt[n]{c^m}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ y $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ se racionalizan con los correspondientes: $\sqrt[n]{c^{n-m}}$, $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ y $\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt{ab} + \sqrt[3]{b^2}$

Racionalice $\frac{5}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^{3-1}}}{\sqrt[3]{5^{3-1}}} = \frac{5\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^{1+2}}} = \frac{5\sqrt[3]{5^2}}{5}$ Racionalice

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3}+5\sqrt[2]{5}} &= \frac{1}{\sqrt{3}+5\sqrt[2]{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}-5\sqrt[2]{5}}{\sqrt{3}-5\sqrt[2]{5}} \\
&= \frac{\sqrt{3}-5\sqrt{5}}{(\sqrt{3})^2-(5\sqrt[2]{5})^2} \\
&= \frac{\sqrt{3}+5\sqrt{5}}{3-125} \\
&= \frac{\sqrt{3}+5\sqrt{5}}{-122}
\end{aligned}
$$

Racionalice

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[3]{3}-5\sqrt[3]{5}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5\cdot 125}} \cdot \frac{\sqrt{3}+5\sqrt[2]{5}}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt{15\cdot 125}+\sqrt[3]{125^2}} \\
&=?
\end{aligned}
$$

**Definición 15** (Homogenización del indice)**.** La **homogenización de radicales** es una operación mediante el cual se transforma radicales de distinto índice a radicales homogÃ©neos (**igual índice**), y que consiste en hallar el **mínimo común múltiplo** de los índices (común índice), luego dividir entre cada índice original de las raíÂces y el resultado multiplicar por el exponente correspondiente a cada exponente de cada factor del radicando.

**Ejercicio 3.** Sea $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{ax^6}$ y $\sqrt[4]{xy^2}$ homogenizar indices $\mathrm{MCM}(2,3,4) = 12$ entonces con los indices homogÃ©neos equivalen a $\sqrt[12]{x^6}$, $\sqrt[12]{a^4x^{24}}$ y $\sqrt[12]{x^3y^6}$. Homogenizar indices y racionalizar $\frac{\sqrt[5]{x^2yz}}{\sqrt[3]{x^5yz^{-1}}}$

**Definición 16** (Ecuaciones cuadráticas)**.** Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes y $a \neq 0$, entonces la función $f$, definida por la ecuación de 2do grado

$$f(x) = ax^2 + bx + c. \tag{17}$$

Se llama **función de segundo grado**

Las raíÂces de la ecuación de segundo grado se obtiene al obtener valores de $x$ que verifiquen

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \tag{18}$$

Los mÃ©todos para resolver ecuaciones cuadráticas son tres:

1. **Método de factorización.** Consiste en convertir en dos factores la función de segundo grado $ab = 0 \leftrightarrow a = \vee b = 0$

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 3x - 6 = 0 \equiv \underset{\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}}{3}\ x^2 \quad \underset{\begin{bmatrix}-6\\3\end{bmatrix}}{-3}\ x \quad \underset{\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}}{-6} &= 0 \equiv (x-2)(3x+3) = 0 \\
&\equiv [(x-2)=0] \vee [(3x+3)=0] \\
&\equiv (x=2) \vee (x=-1)
\end{aligned}
$$

2. **Método de completar cuadrados.** Podemos completar el cuadrado pasando el término independiente al segundo miembro, luego sumar a cada extremo, la mitad del coeficiente de $x$ elevado al cuadrado, esto es:

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 2x + 3 = 0 \equiv \frac{3x^2 - 2x + 3}{3} &= \frac{0}{3} \equiv x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{-3}{3} \\
&\equiv x^2 - \frac{2}{3}x + (\frac{\frac{2}{3}}{2})^2 = -1 + (\frac{\frac{2}{3}}{2})^2 \equiv (x - \frac{2}{6})^2 = -1 + \frac{4}{36} \\
&\equiv x = \sqrt{\frac{-32}{36}} + \frac{2}{6} \notin \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

3. **Fórmula**.

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 &\equiv ax^2 + bx = -c \equiv x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a} \\
&\equiv x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = \frac{-c}{a} + (\frac{b}{2a})^2 \\
&\equiv (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{-c}{a} + (\frac{b}{2a})^2 \equiv (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{-4a^2c + ab^2}{4a^3} \\
&\equiv x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}} \equiv x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-4ac + b^2}}{2a} \\
&\equiv x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

El numero $\delta = b^2 - 4ac$ se llama discriminante de la ecuación de segundo grado. Ademas

1. Si $\delta > 0$ la ecuación admite dos soluciones reales y diferentes
2. Si $\delta = 0$ la ecuación admite dos raíces iguales (raíz única)
3. Si $\delta < 0$ la ecuación no admite raíces reales

Si la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, la reescribimos como $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ con $a \neq 0$, admite soluciones $r$ y $s$ en $\mathbb{R}$, se verifican

1. $\alpha = r + s = -\frac{b}{a}$
2. $\beta = rs = \frac{c}{a}$
3. $\theta = |s - r| = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$

Si la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, se escribe $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ de modo tal que el coeficiente de $x^2$ sea la unidad, entonces, *la suma de las raíces es igual al coeficiente de $x$ con signo diferente y el producto de las raíces es igual al término constante*. Luego, la ecuación $x^2 - \alpha x + \beta = 0$

La observación anterior resulta de mucha utilidad para formar ecuaciones cuadráticas cuando son dadas sus raíces. Por ejemplo hallar la ecuación cuadrática cuyas raíces son $1 \pm \sqrt{3}$. Entonces la ecuación es

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \left[\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)\right]x + \left[\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)\right] \\ &= x^2 - 2x - 2 \end{aligned}$$

**Definición 17** (Ecuaciones reducibles a cuadráticas)**.** Son aquellas ecuaciones que no son cuadráticas, pero, como su nombre lo indica, mediante sustituciones adecuadas se transforman en ecuaciones cuadráticas. Como ilustración veamos algunos ejemplos

1. Resolver. $\frac{x^2-6}{x} - \frac{5x}{x^2-6} = 4$. Sea $m = \frac{x^2-6}{x} \to \frac{1}{m} = \frac{x}{x^2-6}$

$$\begin{aligned} \frac{x^2-6}{x} - \frac{5x}{x^2-6} = 4 &\equiv m - 5\frac{1}{m} = 4 \\ &\equiv m^2 - 5 - 4m = 0 \\ &\equiv m = -5 \vee m = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2-6}{x} = -5 &\equiv x^2 - 6 + 5x = 0 \\ &\equiv x = -5 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2-6}{x} = 1 &\equiv x^2 - 6 - x = 0 \\ &\equiv x = -3 \vee x = 2 \end{aligned}$$

2. $x^2 + 2\sqrt{x^2+6x} = 24 - 6x$

3. $(x-5)(x+7)(x-2)(x+5)$

## 3.4. Orden en los números reales

Según los Axiomas de Orden: O.1 al O.4, ya establecidos anteriormente, podemos dar una definición más detallada de los símbolos $<$, $>$, $\geq$ y $\leq$, como sigue:

Se conoce con el nombre de **desigualdad** a toda proposición donde aparece la relación $<$ (es menor que) o cualquiera de las relaciones: $>$ (es mayor que), $\leq$ (es menor o igual que) y $\geq$ (es mayor o igual que) definidas de la manera siguiente para $a, b, c \in \mathbb{R}$, $P(x) < 0$ en particular $x^3 - 2x + 8 < 9$

1. Si $a > 0$ es equivalente a «$a$ es positivo»

2. Si $a < 0$ es equivalente a «$a$ es negativo»

3. Si $a < b$ es equivalente a «$b - a$ es positivo»

4. Si $a > b$ es equivalente a «$b - a$ es negativo»
5. Si $a \leq b \equiv a < b \wedge a = b$
6. Si $a \geq b \equiv a > b \wedge a = b$
7. Si $a < b < c \equiv a < b \wedge b < c$
8. Si $a < b \leq c \equiv (a < b) \wedge (b < c \wedge b = c)$

**Teorema 20.** *Si $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple*

*1.* $a < b \equiv a - b < 0$

*2.* $a < 0 \equiv -a > 0$

*3.* $a > 0 \equiv -a < 0$

**Teorema 21.** *Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a + b > 0$ y $ab > 0$*

1. Si $a > 0$ y $b < 0$ o $a < 0$ y $b > 0$ entonces $ab < 0$
2. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a + b < 0$ y $ab > 0$
3. $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$ se tiene que $a^2 > 0$
4. Si $a \lesseqgtr 0$ entonces $a^{-1} \lesseqgtr 0$ Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $a < b \wedge c < d \rightarrow a + c < b + d$
5. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a + c < b + c \rightarrow a < b$
6. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \lesseqgtr b \wedge c < 0 \rightarrow ac \gtreqless bc$
7. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \lesseqgtr b \wedge c > 0 \rightarrow ac \lesseqgtr bc$
8. Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \lesseqgtr b \lesseqgtr 0$ entonces $\frac{1}{a} \gtreqless \frac{1}{b}$.
   Ejemplo, si $-1 < -\frac{1}{2} < 0$ entonces $\frac{1}{-1} > \frac{1}{-\frac{1}{2}}$ y si $3 > 2 > 0$ entonces $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

**Teorema 22.** *$a, b \in \mathbb{R}$ se cumple*

1. $ab > 0 \longleftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
2. $ab < 0 \longleftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$

$(x - 1)(2x + 6) > 0 \equiv ((x - 1 > 0) \wedge (2x + 6 > 0)) \vee ((x - 1 < 0) \wedge (2x + 6 < 0))$

$a, b \in \mathbb{R}$ se cumple

1. $ab > 0 \equiv \frac{a}{b} > 0$ y $b \neq 0 \longleftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
2. $\frac{a}{b} < 0$ y $b \neq 0 \longleftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$

**Teorema 23.** *Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$ entonces $a^2 > b^2 \longleftrightarrow a > b$ o $a^2 < b^2 \longleftrightarrow a < b$*

**Teorema 24.** $b \geq 0$ *entonces*

1. $a^2 > b \leftrightarrow a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b}$
2. $a^2 \geq b \longleftrightarrow a \geq \sqrt{b} \vee a \leq -\sqrt{b}$

**Teorema 25.** *Si* $b > 0$ *entonces*

1. $a^2 < b \longleftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$
2. $a^2 \leq b \longleftrightarrow -\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$

**Teorema 26.**

1. Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$ entonces $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \longleftrightarrow 0 \leq a \leq b$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - 3x + 1} \leq \sqrt{2x - 3} &\equiv 0 \leq x^2 - 3x + 1 \leq 2x - 3 \\
&\equiv \left(0 \leq x^2 - 3x + 1\right) \wedge \left(x^2 - 3x + 1 \leq 2x - 3\right) \\
&\equiv \left(x \leq \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \wedge \left(x^2 - 5x + 4 \leq 0\right) \\
&\equiv \left(x \leq \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \wedge (1 \leq x \leq 4) \\
&\equiv (x \leq 0{,}381 \vee x \geq 2{,}618) \wedge (1 \leq x \leq 4) \\
&\equiv 2{,}618 \leq x \leq 4 \equiv [2{,}62, 4]
\end{aligned}
$$

2. Si $a \geq 0$ y $b > 0$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b} \longleftrightarrow 0 \leq a < b$

**Teorema 27.** *Si* $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$ *Entonces*

1. Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$ entonces $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \longleftrightarrow 0 \leq a \leq b$
2. Si $a \geq 0$ y $b > 0$ entonces $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \longleftrightarrow 0 \leq a < b$

**Teorema 28.** *Si* $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$ *Entonces*

1. $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \longleftrightarrow a \leq b$
2. $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \longleftrightarrow a < b$
3. $\sqrt[n]{a} > 0 \longleftrightarrow a > 0$
4. $\sqrt[n]{a} < 0 \longleftrightarrow a < 0$

**Teorema 29.** *Si* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *Entonces*

*1.* $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0 \longleftrightarrow a \geq 0 \wedge b \geq 0$

*2.* $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq 0 \longleftrightarrow a=0 \wedge b=0$

**Teorema 30.** *Si* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *Entonces*

*1.* $\sqrt{a} \leq b \longleftrightarrow a \geq 0 \wedge (b>0 \wedge a \leq b^{2})$

*2.* $\sqrt{a} < b \longleftrightarrow a \geq 0 \wedge (b>0 \wedge a < b^{2})$

**Teorema 31.** *Si* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *Entonces*

*1.* $\sqrt{a} \geq b \longleftrightarrow a \geq 0 \wedge \left[b<0 \vee (b \geq 0 \wedge a \geq b^{2})\right]$

*2.* $\sqrt{a} > b \leftrightarrow a \geq 0 \wedge [b<0 \vee (b \geq 0 \wedge a > b^{2})]$

### 3.4.1. In-ecuaciones lineales

Una in-ecuación lineal o de primer grado en una variable $x$, es una desigualdad de la forma:

$$p(x): ax+b>0 \text{ o } p(x): ax+b<0$$

$$\begin{aligned}
3x-2>0 &\leftrightarrow 3x-2+2>0+2\\
&\leftrightarrow 3x>2\\
&\leftrightarrow \frac{3}{3}x>\frac{2}{3}\\
&\leftrightarrow x>\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

**Ejemplo 18.** Sea la operación binaria interna $*$ definida con:

$$\begin{aligned}
*: \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\
(a,b) &\longmapsto a*b=a+b-3
\end{aligned}$$

Si $c^{\circ}$ representa el inverso de $c$, respecto de la operación $*$, Hallar el conjunto solución de la in-ecuación: $2x*7>(x*1)*2^{\circ}$.

El inverso de $a \in \mathbb{R}$ con la operación $*$ es $ae=a+e-3=a \leftrightarrow e=3$

$$\begin{aligned}
2x*7>(x*1)*2^{\circ} &\equiv 2x*7*2>(x*1)*2^{\circ}*2\\
&\equiv 2x*7*2>(x*1)*3\\
&\equiv 2x*(7+2-3)>(x+1-3)*3\\
&\equiv 2x+6-3>(x-2)+3-3\\
&\equiv 2x+3>x-2\\
&\equiv x>-5
\end{aligned}$$

### 3.4.2. In-ecuaciones cuadráticas

Son de la forma $p(x)=ax^{2}+bx+c=(cx+d)(ax+b) \gtrless 0$,para resolverlas tenemos dos casos

**Factorización** Se usa el Teorema

$$ab > 0 \leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$
$$ab < 0 \leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}
x^2 + x - 6 < 0 &\equiv (x-2)(x+3) < 0 \\
&\equiv (x-2 > 0 \wedge x+3 < 0) \vee (x-2 < 0 \wedge x+3 > 0) \\
&\equiv (x > 2 \wedge x < -3) \vee (x < 2 \wedge x > -3) \\
&\equiv F \vee (x < 2 \wedge x > -3) \\
&\equiv (x < 2 \wedge x > -3) \\
&\equiv -3 < x < 2
\end{aligned}$$

**Completar cuadrados** Se usa el Teorema 24 y 25

$$a^2 > b \leftrightarrow a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b}$$
$$a^2 < b \leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$$

**Ejemplo 19.** Sea $x^2 - 2x + 1$ complete cuadrados y halle los valores de $x$ para los cuales se verifique la in-ecuación $x^2 - 2x + 1 > 0$. $\delta = 4 - 4$ el polinomio $x^2 - 2x + 1$ tiene una raíz

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x + 1 > 0 &\equiv x^2 - 2x > -1 \equiv x^2 - 2x + 1 > -1 + 1 \\
&\equiv (x-1)^2 > 0 \equiv (x-1) > \sqrt{0} \vee (x-1) < -\sqrt{0} \\
&\equiv x > 1 \vee x < 1 \\
&\equiv CS = \mathbb{R} - \{1\}
\end{aligned}$$

Ademas

$$\begin{aligned}
x^2 + x - 6 < 0 &\equiv x^2 + x < 6 \equiv x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 < 6 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&\equiv \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{25}{4} \equiv -\sqrt{\frac{25}{4}} < \left(x + \frac{1}{2}\right) < \sqrt{\frac{25}{4}} \\
&\equiv -\frac{5}{2} < x + \frac{1}{2} < \frac{5}{2} \\
&\equiv -3 < x < 2.
\end{aligned}$$

Ademas.

$$
\begin{aligned}
x^2+x-6>0 &\equiv x^2+x>6\\
&\equiv x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2>6+\left(\frac{1}{2}\right)^2\\
&\equiv \left(x+\frac{1}{2}\right)^2>\frac{25}{4}\\
&\equiv \left(x+\frac{1}{2}\right)>\sqrt{\frac{25}{4}}\vee\left(x+\frac{1}{2}\right)<-\sqrt{\frac{25}{4}}\\
&\equiv \left(x+\frac{1}{2}>\frac{5}{2}\right)\vee\left(x+\frac{1}{2}<-\frac{5}{2}\right)\\
&\equiv (x>2)\vee(x<-3)
\end{aligned}
$$

### 3.4.3. In-ecuaciones racionales

1. De la forma, $\frac{a}{bc}<0\equiv abc<0, b$ y $c\neq 0$

$$\frac{ax+b}{cx+d}\gtrless 0\equiv (ax+b)(cx+d)\gtrless 0;$$

ademas si $\frac{ax+b}{cx+d}\lesseqqgtr 0; cx-d\neq 0$. La equivalencia surge debido a que $a^{-1}$ tiene el mismo signo que $a$. Sea

$$
\begin{aligned}
\frac{2x-1}{x-3}>0 &\equiv (2x-1)(x-3)>0,\\
&\equiv ((2x-1>0)\wedge(x-3>0))\vee((2x-1<0)\wedge(x-3<0))\\
&\equiv \left(\left(x>\frac{1}{2}\right)\wedge(x>3)\right)\vee\left(\left(x<\frac{1}{2}\right)\wedge(x<3)\right)\\
&\equiv (x>3)\vee\left(x<\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

además se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{2x-1}{x-3}\geq 0 &\equiv (2x-1)(x-3)>0, x\neq 3\\
&\equiv ((2x-1\geq 0)\wedge(x-3\geq 0))\vee((2x-1\leq 0)\wedge(x-3\leq 0)), x\neq 3\\
&\equiv \left(\left(x\geq\frac{1}{2}\right)\wedge(x>3)\right)\vee\left(\left(x\leq\frac{1}{2}\right)\wedge(x\leq 3)\right), x\neq 3\\
&\equiv (x\geq 3)\vee\left(x\leq\frac{1}{2}\right), x\neq 3\\
&\equiv (x>3)\vee\left(x\leq\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

2. De la forma $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} < 0 \equiv (ax^2+bx+c)(a'x^2+b'x+c') \gtrless 0$; ademas si $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \lesseqgtr 0$; $a'x^2+b'x+c' \neq 0$
   Uno de los dos trinomios no tiene soluciones reales o tiene una raíz doble. Es decir, si $\delta = b1 - 4ac \leq 0$; entonces, $ax^2+bx+c$ y $a'x^2+b'x+c'$ tienen signo fijo.

   **Resolver** $\frac{-x^2+x-5}{2x^2-3x-1} > 0$

   $\delta_1 = b^2 - 4ac = 1 - 24 = -23 < 0 \to -x^2 + x + 6 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

   y $\delta_2 = b^2 - 4ac = 25 + 40 > 0$. Entonces

$$
\begin{aligned}
(2x^2-5x-5)(-x^2+x-6) < 0 \equiv 2x^2 - 5x - 5 > 0 \\
\left(x - \frac{5-\sqrt{15}}{4}\right)\left(x - \frac{5+\sqrt{15}}{4}\right) > 0 \\
\equiv x < \frac{5-\sqrt{15}}{4} \vee x > \frac{5+\sqrt{15}}{4}
\end{aligned}
$$

3. Ambos trinomios tienen raíces reales y distintas, entonces la in-ecuación equivalente se transforma en una in-ecuación polinómica.

4. La in-ecuación racional tiene la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \gtrless 0$donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios no nulos de grado mayor que dos.

## 3.5. Intervalos

Se define los subconjuntos de $\mathbb{R}$, generadas con la **relación de orden** en $\mathbb{R}$.

1. **Cerrado** $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ o si $x \in [a,b] = a \leq x \leq b$.

2. **Abierto** $]a,b[ = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ o si $x \in ]a,b[ = a < x < b$.

3. **Abierto por la izquierda** $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ o si $x \in ]a,b] = a < x \leq b$.

4. **Abierto por la derecha** $[a,b[ = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ o si $x \in [a,b[ = a \leq x < b$ .

### 3.5.1. Operaciones con intervalos

Siendo los intervalos **subconjuntos de los números reales**, es posible realizar con ellos las propiedades operativas de conjuntos, como son la intersección, unión, diferencia y complementación.

Sean los conjuntos

$$
\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{R} | -3 < x < 2\} \\
B &= \left\{x \in \mathbb{R} | (x-1)^2 - 4 \leq 0\right\} \text{ y} \\
C &= \{x \in \mathbb{R} | -4 < x \leq 6\}.
\end{aligned}
$$

Efectuar $C - (A \cap B)$, $(A - B)' - C$ y $(B \cap C)' - (A \cup B)'$ Simplificando

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} | -3 < x < 2\} = ]-3, 2[ \\ B &= \left\{x \in \mathbb{R} | (x-1)^2 \leq 4\right\} = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x - 1 \leq 2\} \\ &= [-1, 3] \text{ y} \\ C &= \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 6\} = ]-3, 6]\,. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} C - (A \cap B) &= ]-3, 6] - (]-3, 2[ \cap [-1, 3]) \\ &= ]-3, 6] - [-1, 2[ \\ &= ]-3, -1[ \cup [2, 6] \end{aligned}$$

$$(A - B)' - C = (]-3, 2[ - [-1, 3])' - ]-3, 6]$$

Sea $W = (B \cap C)' - (A \cup B)'$. Propiedad $A' - B' = B - A$

$$\begin{aligned} W &= (]-1, 3[ \cap [-3, 6])' - (]-3, 2[ \cup [-1, 3])' \\ &= ]-1, 3[' - ]-3, 3]' \\ &= ]-3, 3] - ]-1, 3[ \\ &= ]-3, -1[ \cup [3, 3] \end{aligned}$$

#### 3.5.2. Resolución gráfica de in-ecuaciones

Cuando realizamos el estudio de la técnica para resolver in-ecuaciones cuadráticas y racionales, habíamos visto como estas se podían resolver en forma sencilla aplicando el Teorema 22. Obviamente,si el producto hubiera consistido de tres o más factores lineales la aplicación de este teorema se haría muy difícil y complicado por el mayor número de alternativas que aparecerá. Para evitar esta dificultad existe un método de resolver in-ecuaciones en $\mathbb{R}$ haciendo uso de la **representación grafica** de los números reales en la recta real, y consiste en lo siguiente:

1. Dada una in-ecuación en $\mathbb{R}$, se descompone esta en factores lineales dándole la forma $ab < 0$ o $ab > 0$

2. Se resuelve la ecuación $ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ (Las raíces de esta ecuación se llaman valores o puntos críticos de la in-ecuación dada)

3. Se ordena los puntos críticos en forma creciente, determinando en ella los intervalos de variación, luego se estudia el signo de cada factor en dichos intervalos, por el criterio siguiente: Por ejemplo, si $c$ es un punto crítico: A la **derecha** de $c$,$\forall x \in \mathbb{R} : x > c \rightarrow (x - c) > 0$, se escribe $(+)$. A la **izquierda** de $c$, $\forall x \in \mathbb{R} : x < c \rightarrow (x - c) < 0$ escribe $(-)$

4. Se determina el signo de cada intervalo multiplicando verticalmente los signos de cada factor. El resultado se ubica en la recta real.

5. Según sea el sentido de la desigualdad dada se eligen el o los intervalos que constituirán el conjunto solución.

Si la in-ecuación tiene la forma $P(x) < 0$, el conjunto solución lo conforman la unión de los intervalos donde aparece el signo $(-)$.

Si la in-ecuación es de la forma $P(x) > 0$, el conjunto solución esta dada por la unión de los intervalos donde aparece el signo $(+)$.

Resolver $\frac{2x^2+3x-2}{x^2+4x-12} \geq 0$

1. Se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{2x^2+3x-2}{x^2+4x-12} \geq 0 &\equiv \frac{(2x-1)(x+2)}{(x+6)(x-2)} \geq 0\\ &\equiv (2x-1)(x+2)(x+6)(x-2) \geq 0, \quad x \notin \{-6, 2\}\end{aligned}$$

2. Sea $P(x) = (2x-1)(x+2)(x+6)(x-2) = 0 \leftrightarrow x \in \left\{-6, -2, \frac{1}{2}, 2\right\}$; son los puntos críticos de los cuales deben ser excluidos $x = -6$ y $x = 2$.

3. Determinando el signo de cada factor en los intervalos. Determinando el signo de cada intervalo

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+6$ | $-$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $2x-1$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| | | $\circ$ | | $\bullet$ | | $\bullet$ | | $\circ$ | |
| $P(x)$ | $\{+\}$ | $-6$ | $\{-\}$ | $-2$ | $\{+\}$ | $\frac{1}{2}$ | $\{-\}$ | $2$ | $\{+\}$ |

4. En este caso $P(x) \geq 0$, entonces interesa los intervalos con signo positivo. Es decir $CS = ]-\infty, -6[ \cup \left[-2, \frac{1}{2}\right] \cup ]2, \infty[$

Resuelva $(2x-3)(x+2)(-x-1) \leq 0$

$$\begin{aligned}(2x-3)(x+2)(-x-1) \leq 0 &\equiv (2x-3)(x+2)(x+1) \geq 0\\ &\equiv [-2, -1] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[\end{aligned}$$

### 3.5.3. In-ecuaciones polinómicas

Las in-ecuaciones polinómicas tienen la forma

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \gtreqless 0$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n$ existen $n$ números reales $r_1, r_2, \ldots, r_n$ (no necesariamente distintos) tales que:

$$P(x) = a(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n) \tag{19}$$

Si uno de los factores de la ecuación 19 es $(x - r)$, entonces se dice que $r$ es un cero o raíz de $P(x)$; si $m$ de estos factores son precisamente $(x - r)$, $r$ se llama un cero de multiplicidad $m$. Se dice que un valor crítico es un cero simple si su multiplicidad es uno, en todo caso, se dice que es un cero múltiple. Por ejemplo

$$P(x) = (x - 3)(x + 5)^2(x + 6)^5$$

$3, 5, -6$ son ceros de multiplicidad 1,2 y 5 respectivamente

Existen tres casos para resolver in-ecuaciones polinómicas y son los siguientes:

1. Los ceros del polinomio $P(x)$ son de **multiplicidad simple**, es decir, son reales y diferentes.

   *a*) Se halla los valores críticos factorizando el polinomio $P(x)$ y resolviendo la ecuación $P(x) = 0$.

   *b*) Se ubica los valores críticos sobre una recta real y se seÃ±alan los intervalos de variación.

   *c*) Si $a_0 > 0$, se anota con signo $(+)$ el ultimo intervalo $]r_n, \infty[$, luego en los demás intervalos se alterna los signos $(-), (+), (-), \ldots$, de derecha a izquierda.

   *d*) El conjunto solución lo conforman la unión de intervalos con signo $(+)$ si $P(x) > 0$, o la unión de intervalos con signo $(-)$ si $P(x) < 0$.

      1) $(x + 2)(x - 1)(x - 3)(x + 4) < 0 \equiv w$
      2) $(x + 2)(x - 1)(x - 3)(x + 4) > 0 = ]-\infty, -4[ \cup ]-2, 1[ \cup ]3, \infty[$

2. Los factores de $P(x)$ son todos lineales y algunos son ceros de **multiplicidad múltiple**. Supongamos que $(x - r_i)$ es el factor que se repite $m$ veces, entonces puede ocurrir lo siguiente.

   *a*) Si $m$ es par, los signos de los intervalos donde figure $r_i$ son iguales, es decir, no son alternados. Entonces se elimina el factor $(x - r_i)$ y se trabaja con los demás factores como en el caso anterior. Esto es, si: $(x-r_i)^m(x-a)(x-b) \gtrless 0 \leftrightarrow (x - a)(x - b) \gtrless 0 \wedge x \neq r_i$ $(x - r_i)^m(x - a)(x - b) \gtreqqless 0 \leftrightarrow (x - a)(x - b) \gtreqqless 0 \vee x \neq r_i$

   $$\begin{aligned} (x + 2)(x - 1)(x - 3)(x + 4)^2 < 0 &\equiv (x + 2)(x - 1)(x - 3) < 0, x \neq -4 \\ &\equiv ]-\infty, -2[ \cup ]1, 3[ - \{-4\} \\ &\equiv (]-\infty, -4[ \cup ]-4, -2[) \cup ]1, 3[ \end{aligned}$$

   *b*) Si $m$ es impar, el factor $(x - r_i)^m$ tiene el mismo signo del factor $(x - r_i)$, en consecuencia, la in-ecuación se resuelve como en el primer caso, esto es si $(x - r_i)^m(x - a)(x - b) \gtrless 0 \leftrightarrow (x - r_i)(x - a)(x - b) \gtrless 0$

   $$\begin{aligned} (x + 2)(x - 1)(x - 3)^7 < 0 &\equiv (x + 2)(x - 1)(x - 3) < 0 \\ &\equiv ]-\infty, -2[ \cup ]1, 3[ - \{-4\} \end{aligned}$$

3. Cuando los factores de $P(x)$ son **lineales y cuadráticos**, siendo los ceros del factor cuadrático **no reales** ($P(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

   Resolver $(x+2)(x-1)(x-3)(x^2+4) < 0$

$$\begin{aligned}(x+2)(x-1)(x-3)(x^2+4) < 0 &\equiv (x+2)(x-1)(x-3) < 0\\ &\equiv \left]-\infty,-2\right[ \cup \left]1,3\right[ - \{-4\}\end{aligned}$$

### 3.5.4. In-ecuaciones con radicales

**Definición 18** (Ecuaciones con radicales)**.** Son aquellas en que la variable aparece bajo un signo radical. Por ejemplo, si $p(x)$ es una proposición que contiene a la variable $x$, entonces: $\sqrt[n]{p(x)} = a$ es una ecuación con radical

**Teorema 32.** *Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces $\sqrt{a} = b \leftrightarrow a \geq 0 \wedge (b \geq 0 \wedge a = b^2)$.*

**Resolver**. Sea $P(x) = \sqrt{x^2-4x-5}$ y $Q(x) = 2x-15$ entonces

$$\begin{aligned}P(x) = Q(x) &\equiv x^2-4x-5 \geq 0 \wedge \Big(2x-15 \geq 0 \wedge x^2-4x-5 = (2x-15)^2\Big)\\ &\equiv x^2-4x-5 \geq 0 \wedge \big(2x-15 \geq 0 \wedge x^2-4x-5 = 4x^2-60x+225\big)\\ &\equiv x^2-4x-5 \geq 0 \wedge \big(2x-15 \geq 0 \wedge 0 = 3x^2-56x+230\big)\\ &\equiv (x \leq -1 \vee x \geq 5) \wedge \left(x \geq \frac{15}{2} \wedge \left(x = \frac{57 \pm \sqrt{56^2 - 12 \cdot 230}}{6}\right)\right)\\ &\equiv (x \leq -1 \vee x \geq 5) \wedge \left(x \geq \frac{15}{2} \wedge \left(x = \frac{5 \pm \sqrt{376}}{6}\right)\right)\\ &\equiv (x \leq -1 \vee x \geq 5) \wedge (x \geq 7{,}5 \wedge (x = 12{,}56 < \vee x = 6{,}10))\\ &\equiv (x \leq -1 \vee x \geq 5) \wedge (x = 12{,}56)\\ &\equiv x = 12{,}56\end{aligned}$$

**Resolver**. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-2}$. Los universos parciales $2x-3 \geq 0$, $x-1 \geq 0$ y $3x-2 \geq 0$

$$\begin{aligned}U &= \left\{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{3}{2}\right\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{2}{3}\right\}\\ &= \left\{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{3}{2}\right\}\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros tenemos $\sqrt{2x^2-5x+3} = 1$ Aplicando el teorema

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x^2-5x+3}=1 &\equiv 2x^2-5x+3\geq 0 \wedge \left[1\geq 0 \wedge \left(2x^2-5x+2=0\right)\right] \\
&\equiv \left(x\leq 1 \vee x\geq \frac{3}{2}\right) \wedge \left[\mathbb{R} \wedge \left(x=2 \vee x=\frac{1}{2}\right)\right] \\
&\equiv \left(x\leq 1 \vee x\geq \frac{3}{2}\right) \wedge \left[x=2 \vee x=\frac{1}{2}\right] \\
&\equiv x=2 \vee x=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

**Definición 19** (In-ecuaciones con radicales)**.** En la resolución de in-ecuaciones con radicales se sigue el mismo criterio para resolver ecuaciones con radicales, pero fundamentalmente mediante la aplicación de los Teoremas 26, 28, 29, 30, 31.

1. $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}\leftrightarrow 0\leq a\leq b\equiv 0\leq a\wedge a\leq b$
2. $\sqrt{a}<\sqrt{b}\leftrightarrow 0\leq a<b$

   **Resolver**. $\sqrt{x^2-5x-3}\geq\sqrt{-4x+1}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2-5x-3}>\sqrt{-4x+1} &\equiv -4x+1>0 \wedge -4x+1>x^2-5x-3 \\
&\equiv -4x+1>0 \wedge \left(0>x^2-x-2\right) \\
&\equiv \left(x<\frac{1}{4}\right) \wedge (x<-1 \vee x>2) \\
&\equiv x<-1 \\
&\equiv ]-\infty,-1[
\end{aligned}$$

   **Resolver**. $\sqrt{x-1\}}\leq\sqrt{3x-2}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1}\leq\sqrt{3x-2} &\equiv x-1\geq 0 \wedge x-1\leq 3x-2 \\
&\equiv x\geq 1 \wedge x\geq\frac{1}{2} \\
&\equiv x\geq 1
\end{aligned}$$

Si $n=2m$, $m\in\mathbb{N}$ Entonces

1. $\sqrt[n]{a}\leq\sqrt[n]{b}\leftrightarrow 0\leq a\leq b$
2. $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\leftrightarrow 0\leq a<b$

   **Resolver**. $\sqrt[8]{x-1}\geq\sqrt[8]{3x-2}$

$$\begin{aligned}
\sqrt[8]{x-1}\geq\sqrt[8]{3x-2} &\equiv 3x-2\geq 0 \wedge x-1>3x-2 \\
&\equiv x\geq\frac{2}{3} \wedge x\leq\frac{1}{2} \\
&\equiv \emptyset
\end{aligned}$$

**Resolver**. $\sqrt[8]{x-1} \leq \sqrt[8]{3x-2}$

$$\begin{aligned}\sqrt[8]{x-1} \leq \sqrt[8]{3x-2} &\equiv x-1 \geq 0 \wedge x-1 \leq 3x-2\\ &\equiv x \geq 1 \wedge x \geq \frac{1}{2}\\ &\equiv x \geq 1\end{aligned}$$

Si $n = 2m+1, m \in \mathbb{N}$ Entonces

1. $\sqrt[2n+1]{a} \leq \sqrt[2n+1]{b} \leftrightarrow a \leq b$

$$\begin{aligned}\sqrt[2n+1]{(2x+2)} \leq \sqrt[2n+1]{(x^2-x-2)} &\equiv (2x+2) \leq (x^2-x-2)\\ &\equiv 0 \leq x^2-3x-4\\ &\equiv 0 \leq (x-4)(x+1)\\ &\equiv ]-\infty,-1] \cup [4,\infty[\end{aligned}$$

2. $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \longleftrightarrow a < b$
3. $\sqrt[n]{a} > 0 \longleftrightarrow a > 0$

$$\begin{aligned}\sqrt{3x-2} > 0 &\equiv 3x-2 > 0\\ &\equiv x > \frac{2}{3}\\ &\equiv \left]\frac{2}{3},\infty\right[\end{aligned}$$

4. $\sqrt[n]{a} < 0 \leftrightarrow a < 0$

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ Entonces

1. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0 \leftrightarrow a \geq 0 \wedge b \geq 0$.
   **Resolver**. Sea $p(x) = \sqrt{x^2-3x+1} + \sqrt{3x-2}$

$$\begin{aligned}p(x) \geq 0 &\equiv x^2-3x+1 \geq 0 \wedge 3x-2 \geq 0\\ &\equiv \left]-\infty,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[ \cup \left]\frac{3+\sqrt{5}}{2},\infty\right[ \wedge x \geq \frac{2}{3}\\ &\equiv x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

2. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 0 \leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$
   **Resolver**. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-x} \leq 0$

$$\begin{aligned}\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-x} \leq 0 &\equiv x-2 = 0 \wedge x^2-x = 0\\ &\equiv x = 2 \wedge (x = 0 \wedge x = 1)\\ &\equiv \emptyset\end{aligned}$$

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ Entonces

1. $\sqrt{a} \leq b \leftrightarrow a \geq 0 \wedge \big(b > 0 \wedge a \leq b^2\big)$
2. $\sqrt{a} < b \leftrightarrow a \geq 0 \wedge \big(b > 0 \wedge a < b^2\big)$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 3} \leq x - 1 \equiv x^2 - 2x + 3 \geq 0 \wedge \left(x - 1 > 0 \wedge x^2 - 2x + 3 \leq (x-1)^2\right)$$
$$\equiv$$

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ Entonces

1. $\sqrt{a} \geq b \leftrightarrow a \geq 0 \wedge \big(b < 0 \vee \big(b \geq 0 \wedge a \geq b^2\big)\big)$
2. $\sqrt{a} > b \leftrightarrow a \geq 0 \wedge \big(b < 0 \vee \big(b \geq 0 \wedge a > b^2\big)\big)$

#### 3.5.5. In-ecuaciones con valor absoluto

El valor absoluto de un número real $a$, denotado por $|a|$, se define por la regla:

$$|3| = \begin{cases} 3 & \text{si } 3 \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

1. $a \in \mathbb{R}$ $|a| \geq 0$ y $|a| = 0 \leftrightarrow a = 0$
2. $|a|^2 = a^2$
3. $|a| = \sqrt{a^2}$
4. $|a| = |-a|$
5. $|ab| = |a|\,|b|$
6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
7. $|a + b| \leq |a| + |b|$(desigualdad triangular) además $|a| - |b| \leq |a - b|$
8. $|a| = b \leftrightarrow (b \geq 0) \wedge (a = b \vee a = -b)$.

$$\begin{aligned} |x - 3| = x^2 + 3 &\equiv \big(x^2 + 3 \geq 0\big) \wedge \big(x - 3 = x^2 + 3 \vee x - 3 = -\big(x^2 + 3\big)\big) \\ &\equiv \big(x^2 + 3 \geq 0\big) \wedge \big(0 = x^2 - x + 6 \vee x\,(x + 1) = 0\big) \\ &\equiv (x < 0 \vee x \leq 0) \wedge (\emptyset \vee x = 0 \vee x = -1) \\ &\equiv (\mathbb{R}) \wedge (x = 0 \vee x = -1) \equiv x = 0 \vee x = -1 \end{aligned}$$

9. $|a| = |b| \leftrightarrow a = b \vee a = -b$

$$
\begin{aligned}
\left|x^2-2\right| \le \left|x^2+2x-3\right| &\equiv x^2-2=x^2+2x-3 \vee x^2-2=-\left(x^2+2x-3\right)\\
&\equiv 0=2x-1 \vee 2x^2+2x-5=0\\
&\equiv \frac{1}{2}=x \vee \left(x=\frac{-2-\sqrt{44}}{4} \vee x=\frac{-2+\sqrt{44}}{4}\right)\\
CS &= \left\{\frac{1}{2}, \frac{-2-\sqrt{44}}{4}, \frac{-2+\sqrt{44}}{4}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|x-2| = x^2+2x-3 &\leftrightarrow \left(x^2+2x-3\ge 0\right) \wedge \left(x-2=x^2+2x-3 \vee x-2=-\left(x^2+2x-3\right)\right)\\
&\leftrightarrow \left(x^2+2x-3\ge 0\right) \wedge \left(x-2=x^2+2x-3 \vee x^2+3x-5\right)\\
&\leftrightarrow (x\le -3 \vee x\ge 1) \wedge \left(\left(x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right) \vee \left(x=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}\right)\right)\\
&\leftrightarrow (x\le -3 \vee x\ge 1) \wedge ((x=-1{,}618 \vee x=0{,}618) \vee (x=-4{,}19 \vee x=1{,}19))\\
&\leftrightarrow x=-4{,}19 \vee x=1{,}19
\end{aligned}
$$

Sea $p(x) \equiv |x+2| = x^2-3x+1$

$$
\begin{aligned}
p(x) &\leftrightarrow \left(x^2-3x+1\ge 0\right) \wedge \left(x+2=x^2-3x+1 \vee x+2=-\left(x^2-3x+1\right)\right)\\
&\leftrightarrow \left(x\le \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x\ge \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \wedge \left(\left(x^2-4x-1\right) \vee \left(x^2-2x+3\right)\right)\\
&\leftrightarrow \left(x\le \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x\ge \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \wedge \left(\left(x=2\pm\sqrt{5}\right)\right)\\
&\leftrightarrow (x\le 0{,}38 \vee x\ge 2{,}62) \wedge ((x=-0{,}24 \vee x=4{,}24))\\
&\leftrightarrow (x\le 0{,}38 \vee x\ge 2{,}62) \wedge ((x=-0{,}24 \vee x=4{,}24))\\
&\leftrightarrow x\in\{-0{,}24, 4{,}24, -073, 2{,}73\}
\end{aligned}
$$

1. $|a|=|b| \leftrightarrow a=b \vee a=-b$

$$
\begin{aligned}
|x-1| = \left|x^2-3\right| &\leftrightarrow x-1=x^2-3 \vee x-1=-\left(x^2-3\right)\\
&\leftrightarrow x^2-x-2=0 \vee x^2+x-4=0\\
&\leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \vee x=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{2}\\
&\leftrightarrow x=\frac{1\pm 3}{2} \vee x=\frac{-1\pm 4{,}12}{2}
\end{aligned}
$$

2. Si $b\ge 0$ entonces $|a|\le b \leftrightarrow -b\le a\le b$ Sea $p(x)\equiv \left|x^2-3\right|\le x^2+4x+2$

$$
\begin{aligned}
p(x) &\leftrightarrow -\left(x^2+4x+2\right) \leq x^2-3 \leq x^2+4x+2 \\
&\leftrightarrow \left[-\left(x^2+4x+2\right) \leq x^2-3\right] \wedge \left[x^2-3 \leq x^2+4x+2\right] \\
&\leftrightarrow \left[0 \leq 2x^2+4x-1\right] \wedge \left[\frac{-5}{4} \leq x\right] \\
&\leftrightarrow \left[x \leq \frac{-2-\sqrt{6}}{2} \vee x \geq \frac{-2+\sqrt{6}}{2}\right] \wedge \left[\frac{-5}{4} \leq x\right] \\
&\leftrightarrow [x \leq -2{,}22 \vee x \geq 0{,}22] \wedge [-1{,}25 \leq x] \\
&\leftrightarrow [0{,}22, \infty[
\end{aligned}
$$

3. Si $b \geq 0$ entonces $|a| \geq b \leftrightarrow a \geq b \vee a \leq -b$. Sea $p(x) \equiv \left|x^2-3\right| \geq 3x^2-3x+1$

$$
\begin{aligned}
p(x) &\leftrightarrow \left(x^2-3 \geq 3x^2-3x+1\right) \vee \left(x^2-3 \leq -\left(3x^2-3x+1\right)\right) \\
&\leftrightarrow \left(0 \geq 2x^2-3x+4\right) \vee \left(4x^2-3x-2 \leq 0\right) \\
&\leftrightarrow \emptyset \vee \left(4x^2-3x-2 \leq 0\right) \\
&\leftrightarrow \left(\frac{3-\sqrt{41}}{8} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{41}}{8}\right) \\
&\leftrightarrow -0{,}425 \leq x \leq 1{,}175
\end{aligned}
$$

4. $|a| \leq |b| \leftrightarrow a^2 \leq b^2$

$$
\begin{aligned}
|3+2x| \leq |x+3| &\leftrightarrow (3+2x)^2 \leq (x+3)^2 \\
&\leftrightarrow 9+12x+4x^2 \leq x^2+6x+9 \\
&\leftrightarrow 6x+3x^2 \leq 0 \\
&\leftrightarrow 3x\,(2+x) \leq 0 \\
&\leftrightarrow -2 \leq x \leq 0
\end{aligned}
$$

Los teoremas que permiten la solución de **ecuaciones** con valor absoluto son los siguientes:

Si $|a| = b \leftrightarrow (b \leq 0) \wedge (a = b \vee a = -b)$. Aquí, $b$ es el universo dentro del cual se resuelve la ecuación.

Si $|a| = |b| \leftrightarrow (a = b \vee a = -b)$. Aquí, $b$ es el universo dentro del cual se resuelve la ecuación.

Cuando se trata de resolver ecuaciones en las que figuran dos o más términos, no semejantes, con barras de valor absoluto, no se utilizan directamente los Teoremas 3.5.5 y 3.5.5 para su solución. En estos casos es conveniente utilizar el método de los valores críticos, que consiste en lo siguiente:

1. Se iguala a cero cada término entre barras de valor absoluto, se resuelve la ecuación resultante, hallando de este modo los valores críticos.

2. Se ubican los valores críticos en una recta real, obteniendo de esta manera los intervalos de variación (Universos parciales).

3. Se analiza por intervalo el signo de cada valor absoluto, luego reemplazando en la ecuación original obtendremos la solución parcial de cada intervalo.

4. Se establece el *conjunto solución uniendo* las soluciones parciales.

   Resolver. $3|x-1|+x=|x-3|+5$

   en $]-\infty,1[$,

   $$\begin{aligned} 3|x-1|+x=|x-3|+5 &\leftrightarrow -3(x-1)+x=-(x-3)+5 \\ &\leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

   entonces $S_1=\{0\}$,

   en $]1,3[$

   $$\begin{aligned} 3|x-1|+x=|x-3|+5 &\leftrightarrow 3(x-1)+x=-(x-3)+5 \\ &\leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

   entonces $S_2=\{0\}$ y

   en $]2,\infty[$

   $$\begin{aligned} 3|x-1|+x=|x-3|+5 &\leftrightarrow 3(x-1)+x=(x-3)+5 \\ &\leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

   entonces $S_3=\emptyset$ $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\{0\}$

   Resolver. $|x+3|=|8x+5|$

En la resolución de **in-ecuaciones** con valor absoluto intervienen fundamentalmente los siguientes teoremas:

1. Si $b\geq 0$ y $|a|\leq b\leftrightarrow -b\leq a\leq b$. Aquí, $b$ es el universo dentro del cual se resuelve la ecuación.

2. Si $|a|\geq b\leftrightarrow (a\geq b\vee a\leq -b)$. Aquí, $b$ es el universo dentro del cual se resuelve la ecuación.

3. $|a|\leq|b|\leftrightarrow a^2\leq b^2$

### 3.5.6. In-ecuaciones con máximo entero

**Definición 20.** El máximo entero se define como

$$n=[\![x]\!]=\text{máx}\{n\in\mathbb{N}|n\leq x\} \tag{20}$$

1. $[\![x]\!] \in \mathbb{Z}$

   $[\![2{,}5]\!] = 2$, $[\![2]\!] = 2$,$[\![1{,}9]\!] = 1$

2. $[\![x]\!] = x \leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

   $[\![5]\!] = 5$, $[\![2]\!] = 2$,$[\![1]\!] = 1$

3. $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$

   $2 = [\![2{,}5]\!] \leq 2{,}5 < 2 + 1 = 3$, $2 = [\![2]\!] \leq 2 < 2 + 1 = 3$,$1 = [\![1{,}9]\!] \leq 1{,}9 < 1 + 1 = 2$

4. $[\![x]\!] = n \leftrightarrow n \leq x < n + 1$

$$\begin{aligned}
[\![x^2 - 5]\!] = 2 &\leftrightarrow 2 \leq x^2 - 5 < 2 + 1 \\
&\leftrightarrow 2 \leq x^2 - 5 \wedge x^2 - 5 < 2 + 1 \\
&\leftrightarrow 7 \leq x^2 \wedge x^2 < 8 \\
&\leftrightarrow \left(-\sqrt{7} \geq x \vee x \geq \sqrt{7}\right) \wedge \left(-\sqrt{8} < x < \sqrt{8}\right) \\
&\leftrightarrow \left(-\sqrt{8} < x \leq -\sqrt{7}\right) \cup \left(\sqrt{7} \leq x < \sqrt{8}\right)
\end{aligned}$$

5. Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, $[\![x]\!] \geq \alpha \leftrightarrow x \geq \alpha$

$$\begin{aligned}
[\![x]\!] \geq \alpha &\leftrightarrow x \geq \alpha \\
&\leftrightarrow
\end{aligned}$$

6. Si $[\![x]\!] < \alpha \leftrightarrow x < \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
[\![x]\!] \geq \alpha &\leftrightarrow x \geq \alpha \\
&\leftrightarrow
\end{aligned}$$

7. Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, $[\![x]\!] \leq \alpha \leftrightarrow x \leq \alpha + 1$

$$\begin{aligned}
[\![x]\!] \geq \alpha &\leftrightarrow x \geq \alpha \\
&\leftrightarrow
\end{aligned}$$

8. $m \in \mathbb{Z} \rightarrow [\![x + m]\!] = [\![x]\!] + m$

9. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $[\![x]\!] + [\![y]\!] < [\![x + y]\!]$

10. $\forall x \in \mathbb{R}$, $[\![x]\!] + [\![-x]\!] = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$

11. $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < [\![x]\!] < x$

12. $\forall y \in \mathbb{Z}$ y $\forall x \in \mathbb{R}, y > x \to y \geq [\![x]\!] + 1 > [\![x]\!]$

13. $\forall y, x \in \mathbb{R}, x \leq y \to [\![x]\!] \leq [\![y]\!]$

14. $n = x - [\![x]\!] \to 0 \leq n < 1$

15. Si $x \in \mathbb{R} | x = y + n, 0 \leq n < 1 \to y = [\![x]\!]$

16. $\forall x \in \mathbb{R}$ y $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $\left[\!\!\left[ \frac{[\![x]\!]}{n} \right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[ \frac{x}{n} \right]\!\!\right]$

# 4. Proporcionalidad

## 4.1. Razón aritmética y razón geométrica

**Definición 21.** Una sucesión es de la forma $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ejemplo $\left\{ \frac{n}{1+n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{75} \ldots\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots \frac{75}{76}, \ldots \right\}$

Hay dos tipos de sucesiones que son importantes en la matemática elemental como para garantizar un estudio especial. La sucesión $\{a_n\}$, donde $d = a_n - a_{n-1}$, $\forall n \geq 1$, se llama sucesión aritmética $(1, 3, 5, 7, ...)$ o progresión aritmética, $d$ se llama diferencia común

La sucesión $\{a_n\}$, en la que $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, $\forall n \geq 1$, se llama sucesión geométrica o progresión geométrica $(1, 2, 4, 8, ...)$, $r$ se llama razón común.

Sea $\{a_n\}$sucesión aritmética. Entonces

$$a_n = a_1 + (n-1)\, d$$

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n \\
&= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) \ldots + (a_1 + (n-1)\, d) \\
&= na_1 + (1 + 2 + 3 + \ldots (n-1))\, d \\
&= na_1 + \left( \frac{(n-1)\, n}{2} \right) d \\
&= \frac{2na_1 + (a_n - a_1)\, n}{2} = \frac{a_n + a_1}{2} n
\end{aligned}$$

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = 2a_1 + (n-1)\, d$$

Sea $\{a_n\}$sucesión geométrica. Entonces

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n \\
&= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 \ldots + a_1 r^{n-1} \\
&= a_1 \left(1 + r + \ldots + r^{n-1}\right) \\
&= a_1 \left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = a_1 \left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) = \frac{a_1}{r - 1}
$$

si $|r| < 1$

**Teorema 33.** *Sea*

$$
1 + r + \ldots + r^{n-1} = \alpha \tag{21}
$$

*ademas*

$$
r + r^2 + \ldots r^{n-1} + r^n = r\alpha \tag{22}
$$

*entonces*

$$
r\alpha - \alpha = \alpha(r - 1) = r^n - 1 \leftrightarrow \alpha = 1 + r + \ldots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n &= a_1 \cdot a_1 r \cdot \ldots \cdot a_1 r^{n-1} \\
&= a_1^n r^{\frac{n-1}{2} n} = \left(a_1^2 r^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
a_1 a_n = a_2 a_{n-1} = a_3 a_{n-2} = \ldots
$$

**Ejemplo 20.** Si $a_1 = 3$ y $d = -2$ la

1. Sucesión aritmética es $3, 1, -1, -3, -5, \ldots$ entonces el termino cien es

$$
a_{100} = a_1 + (n - 1)\, d = 3 + (100 - 1)\, (-2) = 3 - 198 = -195
$$

$$
s_5 = \frac{a_n + a_1}{2} n = \frac{-5 + 3}{2} \cdot 5 = -5
$$

2. Sucesión geométrica $3, -6, 12, -24, 48, \ldots$ entonces el termino 75 es

$$
a_{75} = a_1 r^{n-1} = 3\, (-2)^{75-1} = 3\, (-2)^{74}
$$

$$
s_{75} = a_1 \left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) = \left(\frac{(-2)^{75} - 1}{1}\right) = (-2)^{75} - 1 < 0
$$

**Ejercicio 4.** Sea la sucesión aritmética $a_1 = 1$, $d = 2$ halle el producto

$$\begin{aligned} s_5 \cdot a_7 &= \left(\frac{a_5 + a_1}{2} 5\right) (a_1 + (7-1)\,d) \\ &= \left(\frac{(1 + (5-1)\,(2)) + 1}{2} \cdot 5\right) (1 + (7-1)\,(2)) \\ &= (5 \cdot 5) \cdot 13 \\ &= 25 \cdot 13 = 325 \end{aligned}$$

**Ejercicio 5.** Sea la sucesión geométrica $a_1 = 3$, $d = -2$ halle el producto

$$\begin{aligned} s_3 \cdot a_3 &= \left(3\left(\frac{(-2)^3 - 1}{-2-1}\right)\right) \left(3(-2)^{3-1}\right) \\ &= \left(\frac{-9}{-1}\right) (12) = 108 \end{aligned}$$

## 4.2. Proporción

**Definición 22.** Una razón es una comparación de de dos cantidades mediante una fracción $\frac{3}{7}$

**Definición 23.** Una proporción es una igualdad de dos razones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.Podemos construir proporciones infinitas a partir de una razón al multiplicar el numerador y el denominador con una constante $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$ entonces tenemos una proporción, ademas $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9} = \frac{14}{21} = \frac{-2}{-3} = \frac{200}{300} = 0.\widehat{6}\ldots$ y $\frac{9}{3} = \frac{3}{1} = \ldots = 3$

### 4.2.1. Proporción directa

Sea la recta $y = f(x) = ax \leftrightarrow \frac{y}{x} = a$

Así, una magnitud $y$ es *directamente proporcional* a otra cuando cada medida de la **segunda** magnitud $x$ se obtiene **multiplicando** por un número la medida correspondiente de la **primera**.

### 4.2.2. Proporción inversa

Sea la hipérbola $y = f(x) = \frac{k}{x} \leftrightarrow yx = k$

Así, una magnitud es *inversamente proporcional* a otra cuando cada medida de la **segunda** magnitud se obtiene **multiplicando** por un número la medida correspondiente de la **primera**.

**Ejemplo 21.** Si $f(x) \cdot x = k$

## 4.3. Reparto proporcional

### 4.3.1. Reparto directamente proporcional

Es un procedimiento que consiste en repartir *una cantidad en partes directamente proporcionales* a otras cantidades llamadas índices o números repartidores.

**Ejemplo 22.** Juan tiene 3 hijos de 6, 8 y 9 años de edad. Para premiar su desempeño en la escuela, Juan quiere entregarles 667 figuritas del mundial de fútbol. Para que la entrega sea más justa, Juan reparte las figuritas proporcionalmente, de acuerdo a las edades de sus hijos.

6,8 y 9 satisfacen la ecuación de la recta $y = kx$ entonces $y_1 = 6k, y_2 = 8k$ y $y_2 = 9k$ además

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 = 667 &\leftrightarrow k\,(6+8+9) = 667 \\ &\leftrightarrow 23k = 667 \\ &\leftrightarrow k = 29 \end{aligned}$$

entonces $y_1 = 6k = 174, y_2 = 8k = 232$ y $y_2 = 9k = 261$

### 4.3.2. Reparto inversamente proporcional

Es un procedimiento que consiste en repartir *una cantidad en partes inversamente proporcionales* a otras cantidades llamados índices o números repartidores.

**Ejemplo 23.** Juan tiene 3 hijos de 6, 8 y 9 años de edad. Para premiar su desempeño en la escuela, Juan quiere entregarles 667 figuritas del mundial de fútbol. Para que la entrega sea más justa, Juan reparte las figuritas proporcionalmente, de acuerdo a las edades de sus hijos.

**Solución.** 6,8 y 9 satisfacen la ecuación de la hipérbola $y = \frac{k}{x}$ entonces $y_1 = \frac{k}{6}, y_2 = \frac{k}{8}$ y $y_2 = \frac{k}{9}$ además

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 = 667 &\leftrightarrow \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) k = 667 \\ &\leftrightarrow \left(\frac{(8+6)\,9 + 48}{8 \cdot 6 \cdot 9}\right) k = 667 \\ &\leftrightarrow \left(\frac{29}{72}\right) k = 667 \\ &\leftrightarrow k = 667 \left(\frac{72}{29}\right) = 23 \cdot 72 = 1656 \end{aligned}$$

entonces $y_1 = \frac{k}{6} = \frac{1656}{6} = 276, y_2 = \frac{k}{8} = \frac{1656}{8} = 207$ y $y_2 = \frac{k}{9} = \frac{1656}{9} = 184.$

**Solución 16.** Recíprocamente $\frac{1}{6} = \frac{12}{72}, \frac{1}{8} = \frac{9}{72}$ y $\frac{1}{9} = \frac{8}{72}$ satisfacen la ecuación de la recta $y = kx$ entonces $y_1 = \frac{k}{\frac{12}{72}} = 12k, y_2 = \frac{k}{\frac{9}{72}} = 9k$ y $y_2 = \frac{k}{\frac{8}{72}} = 8k$ además

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 = 667 &\leftrightarrow k\,(12+9+8) = 667 \\ &\leftrightarrow 29k = 667 \\ &\leftrightarrow k = 23 \end{aligned}$$

entonces $y_1 = 23 \cdot 12 = 276, y_2 = 23 \cdot 9 = 207$ y $y_2 = 23 \cdot 8 = 184$

*Observación* 20. El ultimo procedimiento indica que un *reparto inverso* la podemos desarrollar con los pasos propios del *reparto directo.*

#### 4.3.3. Reparto proporcional compuesto

Cuando el reparto de una cantidad es compuesto, es decir, *directamente proporcional a ciertos números* y *directa (o inversamente) proporcional a otros*, basta hacerlo directamente proporcional al producto de los primeros por los segundos (o por su inverso).

**Ejemplo 24.** Se dice que una 460 cantidad es *directamente proporcional* a 3, 4 y 6 e *inversamente proporcional* a 2, 3 y 5 respectivamente.

**Solución.** Se pasa de inversa a 2, 3 y 5 a directa $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$. También dice que es directa a 3 , 4 y 6. Se multiplican los índices directamente proporcionales

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} \\ B &= \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{4}{3} \\ C &= \frac{1}{5} \cdot 6 = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Para convertirlo a enteros se multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores $\mathrm{MCM}(2, 3, 5) = 30$

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{2} \cdot 30 = 45k \\ B &= \frac{4}{3} \cdot 30 = 40k \\ C &= \frac{6}{5} \cdot 30 = 36k \end{aligned}$$

entonces $45k + 40k + 36k = 450 \leftrightarrow k = ?$

**Ejemplo 25.** Se reparte una herencia de \$ 96 000 en forma D.P. a las edades de tres hermanos que son 8; 12 y 16 y a la vez D.P. al promedio general de notas que son 14; 12 y 16 respectivamente. Calcular la parte menor.

## 5. Regla de tres simple y compuesta

#### 5.0.1. Regla de tres simple

**Definición 24** (Regla de tres simple directa)**.** La regla de tres simple directa es el procedimiento para resolver problemas de magnitudes directamente proporcionales y nos permite hallar un cuarto valor a partir de tres valores. (Se multiplica en aspa)

$$\begin{matrix} a \rightarrow & b \\ c \rightarrow & d \end{matrix} \leftrightarrow ad = cb$$

**Ejemplo 26.** Si 4 conejos comen 12 zanahorias ¿5 conejos cuantas zanahorias comerán?. A más conejos pueden comer más zanahorias . Se observa que las dos magnitudes aumentan. En consecuencia son magnitudes directamente proporcionales D.P.

$$\begin{array}{ll} 4 \rightarrow & 12 \\ 5 \rightarrow & x \end{array} \leftrightarrow www$$

**Definición 25** (Regla de tres simple inversa)**.** La regla de tres simple inversa es el procedimiento para resolver problemas de magnitudes inversamente proporcionales y nos permite hallar un cuarto valor a partir de tres valores. (se multiplica en horizontalmente)

$$\begin{array}{ll} a \rightarrow & b \\ c \rightarrow & d \end{array} \leftrightarrow ab = cd$$

**Ejemplo 27.** 20 conejos tienen zanahorias para 12 días. Si fueran 6 conejos para cuantos días tendrán zanahorias? Se observa a más conejos menos días les durará las zanahorias. Se observa que una magnitud aumenta y la otra disminuye. En consecuencia son magnitudes I.P.

$$\begin{array}{ccc} 20 & \rightarrow & 12 \\ 6 & \rightarrow & x \end{array} \leftrightarrow 20 \cdot 12 = 6 \cdot x \leftrightarrow x = ?$$

### 5.0.2. Regla de tres compuesta

**Definición 26** (Regla de tres compuesta directa)**.** Una regla de tres compuesta directa se compone de varias reglas de tres simples directas aplicadas sucesivamente. *Si la magnitud en la primera columna aumenta, entonces también aumenta en las dos restantes; por el contrario, si la magnitud en la primera columna disminuye, entonces también disminuye en las dos columnas restantes. La fórmula a emplear es*

$$\begin{array}{lll} a \rightarrow & b \rightarrow & c \\ d \rightarrow & x \rightarrow & f \end{array} \leftrightarrow \frac{b}{x} = \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{f}$$

**Ejemplo 28.** 5 obreros trabajando, trabajando 6 horas diarias construyen un muro en 2 días. ¿Cuánto tardarán 4 obreros trabajando 7 horas diarias?.

$$\begin{array}{lll} a \rightarrow & b \rightarrow & c \\ d \rightarrow & x \rightarrow & f \end{array} \leftrightarrow \frac{b}{x} = \frac{d}{a} \cdot \frac{f}{c}$$

**Definición 27** (Regla de tres compuesta inversa)**.** Una regla de tres compuesta inversa se compone de varias reglas de tres simples inversas aplicadas sucesivamente. *Si la magnitud en la primera columna aumenta (o disminuye), entonces disminuye (o aumenta) en la tercera columna; si la magnitud en la segunda columna aumenta (o disminuye), entonces disminuye (o aumenta) en la tercera columna. La fórmula a emplear es*

$$\begin{array}{lll} a \rightarrow & b \rightarrow & c \\ d \rightarrow & x \rightarrow & f \end{array} \leftrightarrow \frac{b}{x} = \frac{d}{a} \cdot \frac{f}{c}$$

**Ejemplo 29.** Nueve grifos abiertos durante 10 horas diarias han consumido una cantidad de agua por valor de 20 €. Averiguar el precio del vertido de 15 grifos abiertos 12 horas durante los mismos días.

$$\begin{array}{ccc} a \rightarrow & b \rightarrow & c \\ d \rightarrow & x \rightarrow & f \end{array} \leftrightarrow \frac{b}{x} = \frac{d}{a} \cdot \frac{f}{c}$$

**Definición 28** (Regla de tres compuesta mixta)**.** Una regla de tres compuesta mixta se compone de varias reglas de tres simples directas e inversas aplicadas sucesivamente. *Si la la primera y tercera columna es una regla de tres simple directa, mientras que la segunda y tercera columna es una regla de tres simple inversa, entonces se tiene*

$$\begin{array}{ccc} a \rightarrow & b \rightarrow & c \\ d \rightarrow & x \rightarrow & f \end{array} \leftrightarrow \frac{b}{x} = \frac{a}{d} \cdot \frac{f}{c}$$

**Ejemplo 30.** Si 8 obreros realizan en 9 días trabajando a razón de 6 horas por día un muro de 30m. ¿Cuántos días necesitarán 10 obreros trabajando 8 horas diarias para realizar los 50m de muro que faltan?.

$$\begin{array}{cccc} 8 \rightarrow & 9 \rightarrow & 6 \rightarrow & 30 \\ 10 \rightarrow & x \rightarrow & 8 \rightarrow & 50 \end{array} \leftrightarrow \frac{9}{x} = \frac{8}{10} \cdot \frac{f}{c}$$

# 6. Coordenadas rectangulares

## 6.1. Métrica

Dado dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $A = (x_2, y_2)$ entonces la distancia entre estos dos puntos es

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

# 7. Funciones reales de variable real