Ricardo Michel MALLQUI BAÑOS

Fractales en el arte

Arte y matemáticas aplicadas

PRIMVN VIVERE DE INDE PHILOSOPHARI

universitas + guamangensis + sancti + christophori

+ 1677 +

Índice general

Índice de cuadros

Índice de figuras

Resumen

Las matemáticas están presentes implicita e explicitamente en todas las ramas del conocimiento humano. En particular en el arte plástico.

El contenido esta basado en razones y proporciones, canon de la figura humana, sucesiones o recursividad, sucesión de Fibonacci, número áureo, rectángulo áureo, sólidos platónicos, perspectiva cónica, fractales, geometría diferencial de las superficies, topología.

Introducción

Las aplicaciones . . .

El libro se compone de . . .

1

Elementos básicos de un fractal geométrico

wwwwwwwwwww

1.1. Conjuntos (Reconocer conjuntos como una *forma* - conexidad - Mobius y Klein)

(Leithold, 1990)

fracción impropia

1.2. Operaciones con conjuntos (Relaciones – unión-intersección-diferencia-diferencia simétrica, etc)

(Stigt, 1996) (Langlois et al., 2021)

1.3. *Coordenadas* cartesianas 2d y 3d (Plano y sólidos) - representación de puntos, lineas y planos (Geogebra)

Es necesario un sistema de refrencia en la representacion por eso es impostante su estudio

1.4. Transformaciones elementales sobre formas 2D y 3D

1.4.1. Traslacion

1.4.2. Rotación

1.4.3. Homotecia

1.4.4. Reflexión

1.5. Transformaciones topológicas (Taza - donuts – Zbrush metamorfosis)

1.6. Recursividad o iteración de transformaciones 2D y 3D (Secuencias)

1.7. Principios de la composición y las transformaciones (Relación-fractal)

1.8. Sustentación de trabajos (*Objeto fractal, geométrico digital o manual*)

2

Número áureo como un fractal

~~El numero $\phi = 1{,}618$ recibe el nombre de numero áureo, numero~~ mágico. $\int_1$

2.1. Número áureo, proporción áurea, sección áurea (Aplicaciones)

^^

2.2. Rectángulo áureo (Rectángulos áureos) y composición

2.3. Sucesiones de Fibonnacci relacionado con el número áureo

La sucecion de Fibonnacci es la sucecion de numeros entros postivos

$$F = S_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

2.4. Rectángulos dinámicos

2.5. Pentágono y triángulo áureo (Composición).

2.6. El dodecaedro construcción y la relación con el número áureo

2.7. El icosaedro construcción y la relación con el número áureo

2.8. Proporción áurea de la figura humana

3

Fractales sobre el conjunto de los números complejos y cuaterniones

3.1. Números complejos.

3.2. Operaciones con números complejos

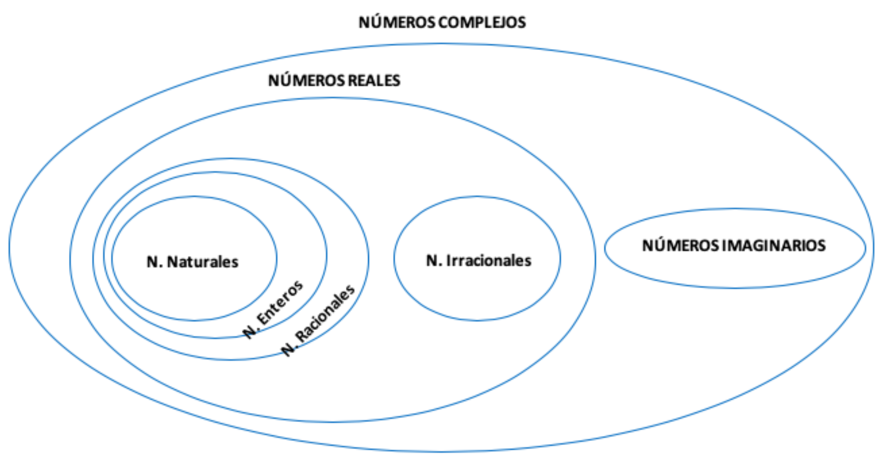


Figura 3.1 Esquema de los números complejos

3.3. Funciones en el plano complejo y fractales ($f(z), z \in \mathbb{C}$ cualesquiera)

3.4. Los conjuntos de Mandelbrot ($f(z) = z^2 + c$)

3.5. Los conjuntos de Julia ($f(z) = z^2 + c$)

3.6. Los cuaterniones y conjuntos de Mandelbrot y Julia 3D (Fractales orgánicos)

3.7. Reconocimiento de fractales sobre formas orgánicas

3.8. Sustentación de trabajos (*Construcción de un fractal orgánico*)

El número de oro es un número presente en la naturaleza, todo lo creado esta asociado con este número. La manera de recurrencia de las partes de los objetos visualmente atractivos están dispuestas de acuerdo a la razón y proporción del número áureo.

Definición 3.1 (Numero áureo)**.** Es un numero

establecido por $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$ denotado por ϕ o Φ es decir

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$$

Además la inversa de este numero es

$$\phi^{-1} = \frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618$$

3.9. Sección áurea

Es el proceso de generar el numero mediante el uso de una linea y la división que se realiza sobre este. Es decir dado un segmento AB, un punto C uubicada entre los extremos A y B es la correspondiente (coloquialmente suele aproximarse con la tercera parte parte de este segmento). Exactamente se obtiene de la siguente manera. La razón de la *longitud de todo el segmento* y la *longitud del segmento mayor* es **proporcional** a la razón de la *longitud del segmento mayor* sobre la *longitud del segmento menor es decir*

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

simplificando

$$xy + y^2 = x^2$$

es posible hallar el valor de uno de ellos fijando la otra, sea por ejemplo $y = 2$ entonces la ecuación (3.9) se reduce a

$$2x + 4 = x^2 \iff x^2 - 2x - 4 = 0$$

cuyas soluciones son $x_1 = 2\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = 2\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

en general si $y = r$ entonces a ecuación (3.9) se reduce a

$$rx + r^2 = x^2 \iff x^2 - rx - r^2 = 0$$

cuyas soluciones son $x_1 = r\frac{1+\sqrt{5}}{2} = r\phi$ y $x_2 = r\frac{1-\sqrt{5}}{2} = r\left(-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = r\left(-\frac{1}{\phi}\right)$

Observación. La proporción (**??**eq:aureo) es igual a una constante de prorpocionalidad que es igual a ϕ es decir $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} = \phi$

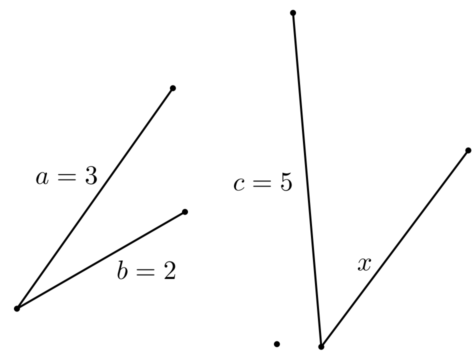


Figura 3.2 Circunferencia

3.10. Rectángulo áureo

3.11. Pentágono y el número de oro

3.12. Dodecaedro y el número de oro

3.13. Aplicaciones del número de oro

3.13.1. Terminologías

Algunos de estos son: ##### El número de oro

$$\phi = 1{,}618$$

La sección áurea Es un punto, recta o plano que secciona una cantidad (Todo) de modo las partes que generan gurdan relación con el número de oro.

"La razon del todo sobre la parte mayor es igual a la razon de la parte mayor sobre la parte menor"

Genera una ecuacion de segundo grado cuyas raices son ϕ y $\frac{1}{\phi}$

3.13.1.0.1. La proporción áurea

Es la igualdad de dos razones

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \phi = 1{,}618$$

La sucesión áurea

1, ϕ, ϕ^2, ϕ^3. . . .

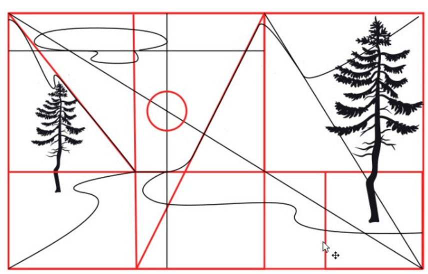
3.13.1.0.2. La sucesion de Fibonacci

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, . . .

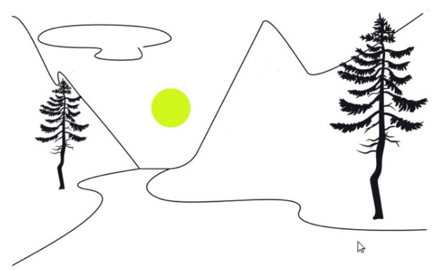
si a_n es n termino geenral de la sucecion de Fibonnacci entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \phi$$

3.13.2. Ejemplo aplicativo



Componiendo sobre la estructura del rectángulo áureo



Sin la estructura del rectángulo áureo

4

Aplicaciones de los fractales en composiciones complejas (abstracto-figurativas)

En este capítulo se estudiará que los **objetos artísticos** siempre se componen de una **estructura fractal**. Estos aspectos son poco considerados al aplicar los fractales en composiciones complejas. Que se realizan de manera implícita e intuitiva en campos abstracto-figurativas.

4.1. Secuencias orgánicas bajo transformaciones topológicas

Se sabe que en la construcción de fractales existen dos tipos de transformaciones, *las elementales y las topológicas*. En esta sección trataremos sobre las *transformaciones topológicas* con el objetivo de *modificar las formas de los términos* de una secuencia de manera que cada termino que se suceda, mantenga en lo posible las *formas de los términos adyacentes*. En relación con el estudio comparativo de los seres vivos se tiene la siguiente definición, lo cual tiene mucha relación con los objetivos de esta sección y los subsiguientes Gilbert and Bolker (2001).

Definición 4.1 (Homología)**.** La **homología** es la *relación* que existe entre *dos partes orgánicas diferentes* de *dos organismos distintos* cuando sus determinantes genéticos tienen el mismo origen evolutivo.

Definición 4.2 (Homotopía)**.** En topología, y más precisamente en topología algebraica, dos aplicaciones continuas de un espacio topológico en otro se dicen homótopas (del griego homos = mismo y topos = lugar) si una de ellas puede "deformarse continuamente" en la otra.

Como Gilbert and Bolker (2001) comenta:

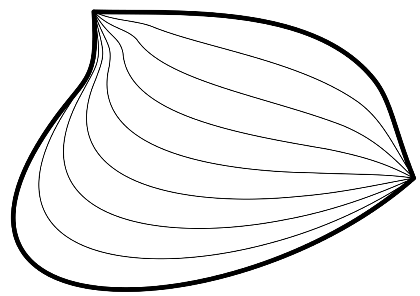


Figura 4.1 Los dos caminos en líneas punteadas que se muestran arriba son homótopos en relación a sus extremos. La animación muestra una posible homotopía entre ellos

> Existe homología entre órganos dados de dos especies diferentes, cuando ambos derivan del órgano correspondiente de su antepasado común, con independencia de cuán dispares puedan haber llegado a ser. Las cuatro extremidades pares de los vertebrados con mandíbula (gnatóstomos), desde los tiburones hasta las aves o los mamíferos, son homólogas. De la misma manera, el extremo de la pata de un caballo es homólogo al dedo mediano de la mano y el pie humano.

Observación (Relación entre la homología y la sucesión bajo transformaciones topológicas). Se observa que la *homología* es una *sucesión* de formas que mantiene *similaridad* entre sus términos o elementos, es importante que la diferencia entre un termino y otro esta afectada por una ligera **transformación topológica**.

En la observación anterior hace referencia de que todo los objetos de tipo secuencial, mantiene la homología.

4.2. Fractales orgánicos bajo transformaciones topológicas (Sketchfab organic)

Se sabe que un fractal es una colección de sucesiones cuyos términos se constituyen de secuencias de formas homólogas. Es decir *una se-*

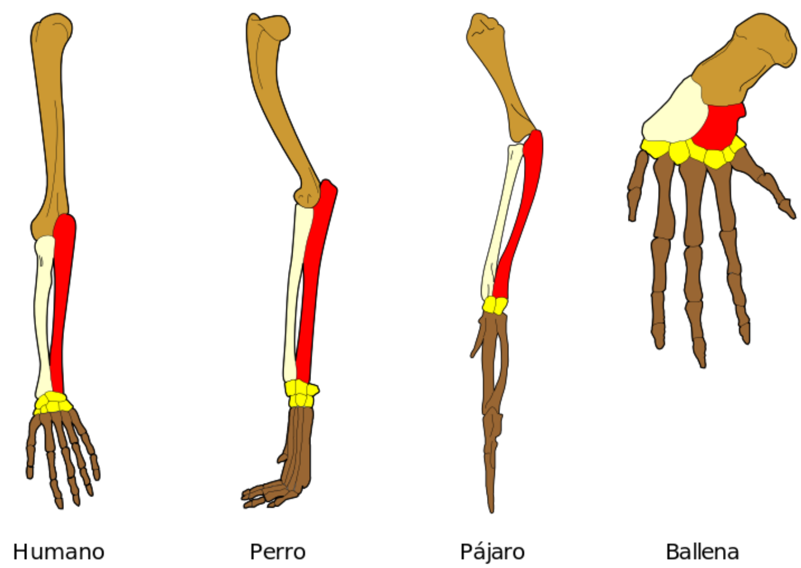


Figura 4.2 Homología de varios huesos (mostrados en distintos colores) de las extremidades delanteras de cuatro vertebrados

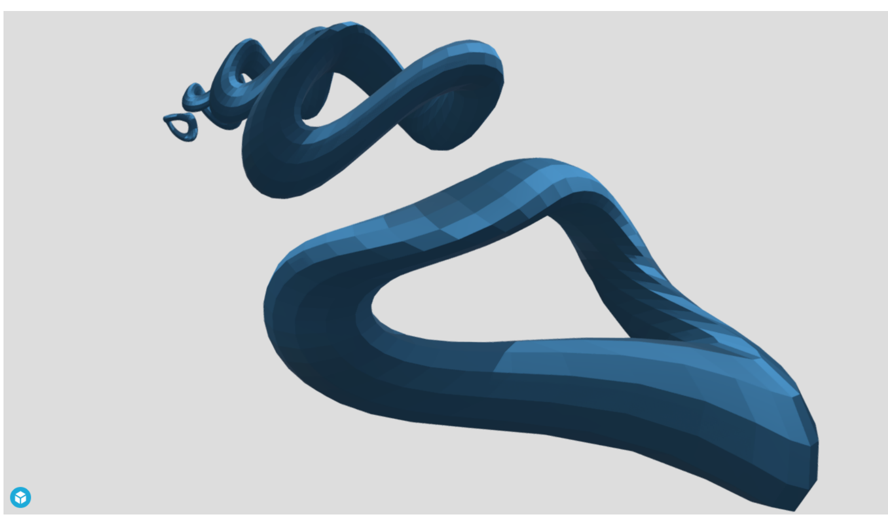


Figura 4.3 Sucesión orgánica bajo transformaciones topológicas

cesión de sucesiones por tanto esas formas que componen son copias transformadas topológicamente.

Figura 4.4 Fractales orgánicos bajo transformaciones topológicas - Sketchfab organic

En l Figura 4.4 se tiene la forma espiralada se sucede de acuerdo a la transformación topológica en cada uno de los términos.

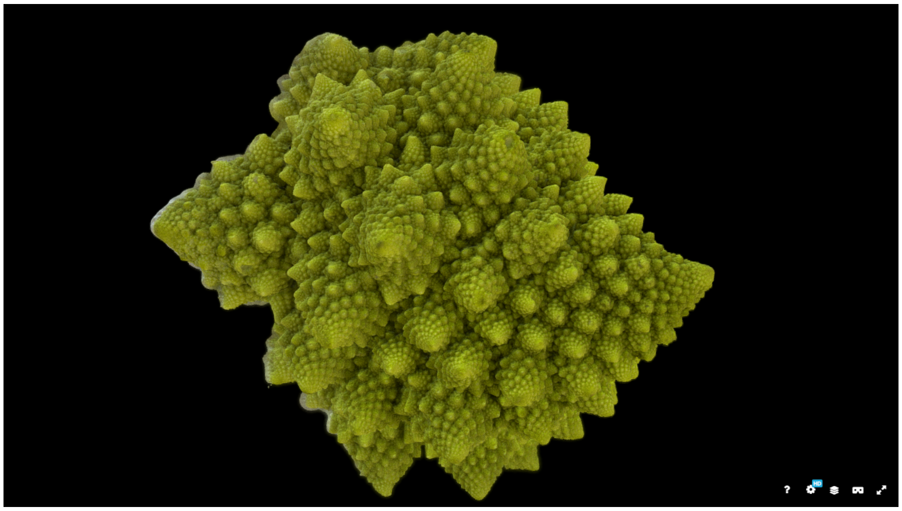


Figura 4.5 Fractales orgánicos bajo transformaciones topológicas - Sketchfab organic

4.3. La figura humana como un fractal (fractal body modelado)

4.4. Fractal en el canon

4.5. Software's generadores de Fractales 3D y 3D

4.6. Paisajes urbanos y rurales como fractales (Mandelbulber)

4.7. Composición fractales mixta

4.8. Exposición de trabajos (*Paisaje fractal 3d digital, animado*)

5

Fractales

En este capitulo se trata de los *objetos plasticos* de característica ***secuencial y fraccionaria***.

Definición 5.1 (Fractales)**.** Son objetos geometricos bidimensionales o tridimensionales cuya estructura esta compuesta por partes que son copias transformadas del objeto total.

Las transformaciones aquí consideradas son aquellas que conservan en lo posible las propiedades originales del objeto, es decir las transformaciones son las elementales (Traslacion, Rotacion, Homotescia, Reflexión) y los morfismos (isomorfismo, homeomorfismo, isometria, etc).

Ejemplo 5.1. En la naturaleza se peden observe muchos ejemplares tales como las nuves los horatlizas

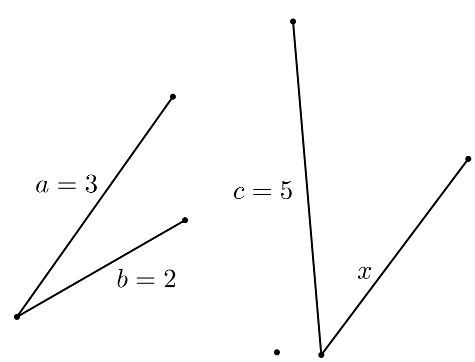


Figura 5.1 Hola

Ejemplo 5.2. En la naturaleza se peden observe muchos ejemplares tales como las nuves los hortalizas, etc.

5.1. Fractales bidimensionales

Copo de nieve de Koch

5.2. Fractales tridimensionales

5.2.1. Números complejos

Definición 5.2 (Conjuntos de Julia)**.** Son conjuntos cuya forma bidimensionales o tridimensionales cuya estructura esta compuesta por partes que son copias transformadas del objeto total.

6

Topologia y geometria diferencial de las formas

(Vincze and Kozma, 2014)

6.1. Ejercicios

A

Proporción y canon

En todas las áreas del conocimiento humano se suele utilizar las razones y las proporciones ya sea de manera explicita o implícita por ejemplo en los laboratorios químicos, la gastronomía, la agricultura, la construcción, la arquitectura entre otros; en especifico en el arte. En este capitulo las cantidades involucradas serán las longitudes aunque se pueden relacionar incluso con cantidades de colores, cantidades de texturas, cantidad de sombras entre otros aspectos asociados al arte plástico. La importancia de las proporciones, es debido al manejo de cantidades diversas, manteniendo la relación de dos cantidades.

A.1. Razón

Definición A.1 (Razón)**.** Una razón es una fracción de la forma

$$\frac{a}{b}$$

donde a y b son números reales la fracción ***representa*** la relación que existe entre los números a y b es decir estas cantidades están asociadas.

En la ecuación (A.1) el resultado de dividir la fracción recibe el cociente, ademas a y b se denominan numerador y denominador respectivamente. Si $a > b$ la fracción recibe el nombre e *fracción propia* y si $a < b$ la fracción recibe el nombre e *fracción impropia*

A.2. Proporciones

Definición A.2 (Proporcion)**.** Una proporción es la igualdad de dos razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Observación (Observación). En una proporción sucede que si a crece o decrece, b crece o decrece multiplicada con la misma cantidad; en este caso recibe el nombre de proporción directa y si a crece o decrece, b decrece y crece en este caso recibe el nombre proporción inversa. Generalmente en el arte plástico se utiliza las proporciones directas.

Ejemplo A.1 (Ejemplo)**.** Las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ no son necesariamente iguales, generalmente esto significa conservar las cantidades a y b de manera proporcional es decir $\frac{a}{b} = \frac{na}{nb}$ donde n es cualquier número real.

Las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ no son necesariamente iguales, generalmente esto significa conservar las cantidades a y b de manera proporcional es decir $\frac{a}{b} = \frac{na}{nb}$ donde n es cualquier número real.

Esta igualdad de fracciones (proporción) no ayuda a escalar (agrandar o reducir) cualquier figura 2d o 3d. Es decir si tenemos un modelo (linea poligonal izquierda en la Figura A.1), cuyas dos longitudes son a y b, además en la copia a realizar, (linea poligonal de la derecha en la Figura A.1), establecemos la longitud c como la copia trasformada de la longitud a (un numero mayor a a si deseamos aumentar el tamaño con respecto al original y de manera inversa si deseamos reducir el tamaño); la longitud x es la incógnita que debe hallarse para mantener el tamaño de menera proporcional.

Si deseamos averiguar la longitud de x de manera proporcional asociado al valor c dado por conveniencia, primero se genera la razón $\frac{a}{b}$ asociado al modelo y la razón $\frac{c}{x}$ en la copia, en ese orden es decir c y a en el numerador pues c es la trasformación de a que se estableció theorem Theorem thm lemma Lemma lem corollary Corollary cor proposition Proposition prp conjecture Conjecture cnj definition Definition def example Example exm exercise Exercise exr hypothesis Hypothesis hyp

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Longleftrightarrow ax = bc \Longleftrightarrow x = \frac{bc}{a}$$

Sea $a = 3$, $b = 2$ y $c = 5$ en la figura A.1 entonces

$$\frac{3}{2} = \frac{5}{x} \Longleftrightarrow 3x = 2 \cdot 5 \Longleftrightarrow x = \frac{10}{3} = 3{,}333$$

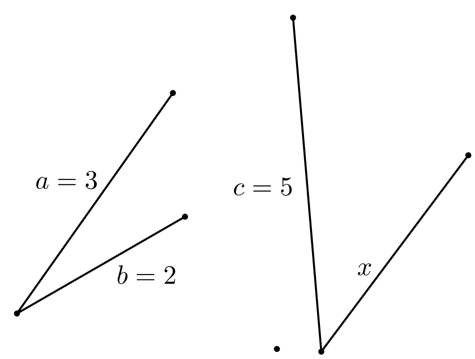


Figura A.1 Proporción

Este proceso se puede iterar en una forma poligonal cuyo número de lados es mayor a dos, por ejemplo en la Figura A.2, se tiene tres procesos adicionales estableciendo como punto partida al segmento GF luego se traza dos semirectas cuyo extremos coinciden con los extremos del segmento GF, ademas es necesario conservar los ángulos de estos con respecto al segmento GF es decir $\angle CBA = \angle FGK$ y $\angle DCB = \angle IFG$. Entonces construimos los segmentos de longitud $GK = GF\frac{AB}{BC}$ $FI = GF\frac{CD}{BC}$ deducidas a partir de las proporciones

$$\frac{GK}{GF} = \frac{AB}{BC} \text{ y } \frac{FI}{GF} = \frac{CD}{BC}$$

los extremos K e I deben estar sobre las semirectas correspondientes, finalmente se proporciona el segmento KH con el mismo procedimiento es decir ángulo $\angle BAE = \angle GKH$ y longitud $KH = KG\frac{EA}{BC}$

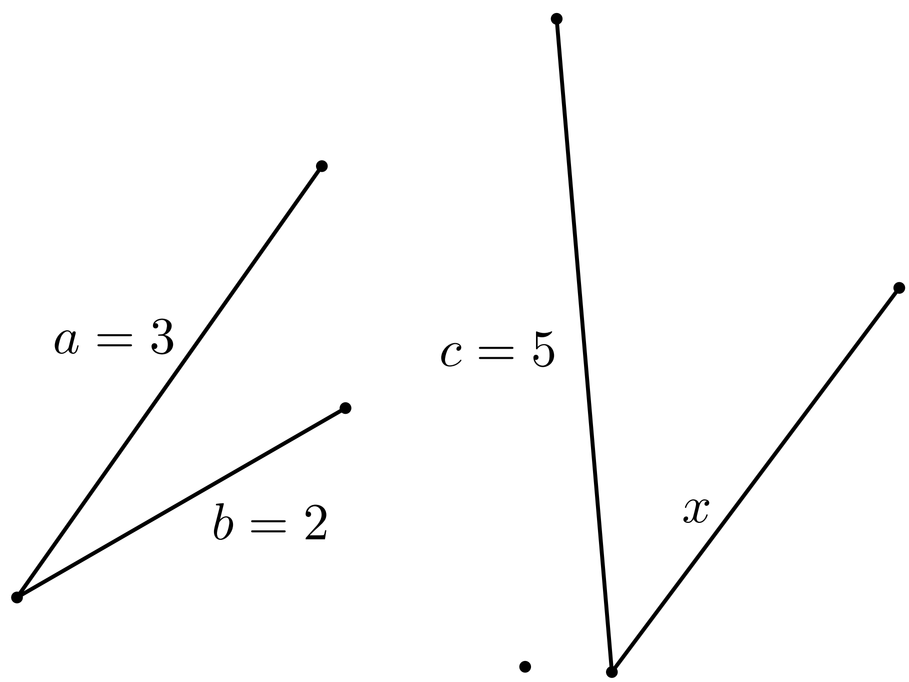


Figura A.2 Proporción de un polígono

Todo figura de la realidad se pueden inscribrir en un polígono por tanto puede se predispone a la proporción. Por ejemplo considere la Figura A.2 dada.

A.3. Canon

Debido a la poligonalización de las figuras en general es posible establecer un modelo cuyas subdivisión conlleve a un modelo aplicable en futuras representaciones.

::: {.definition $canon name="Canon"} Las proporciones perfectas o ideales del cuerpo humano y alude a las relaciones armónicas entre las distintas partes de una figura. :::

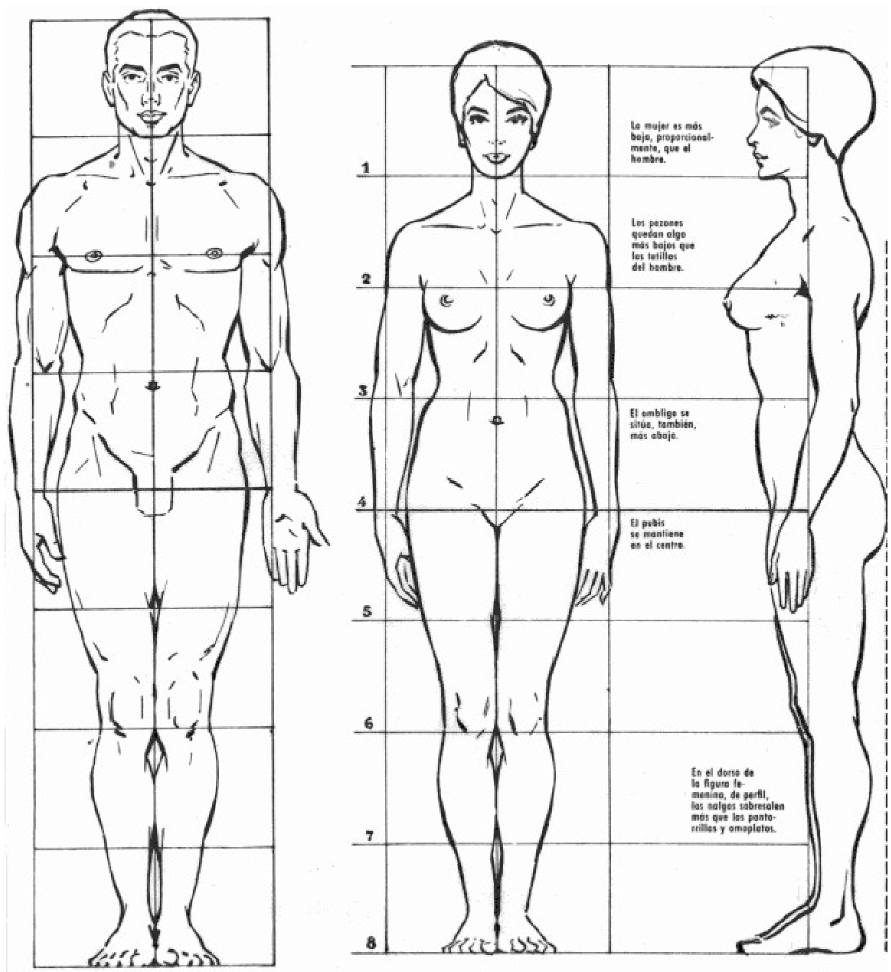


Figura A.3 Proporción de un polígono

B

Perspectiva cónica

(Xie, 2015)

B.1. Raices de una ecuacion de segundo grado

B.2. Propiedades de una ecuacion de segundo grado

C

Ecacuaciones lineales de primer grado

C.1. Soluciones de ecuacuiones lineales de primer grado

C.2. Soluciones ...

C.3. Forma matricial de una ecuación lineal

Bibliografía

Gilbert and Bolker (2001). Homologies of process and modular elements of embryonic construction. 291(3):1–12.

Langlois, T., Jacoby, N., Suchow, J., and Griffiths, T. (2021). Serial reproduction reveals the geometry of visuospatial representations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 118(13). PMID: 33771919.

Leithold, L. (1990). *The calculus of a single variable with analytic geometry*. Harper & Row.

Stigt, W. (1996). Introduction to life, art, and mysticism. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37(3):381–387.

Vincze, C. and Kozma, L. (2014). College geometry.

Xie, Y. (2015). *Dynamic Documents with R and knitr*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2nd edition. ISBN 978-1498716963.

Índice alfabético