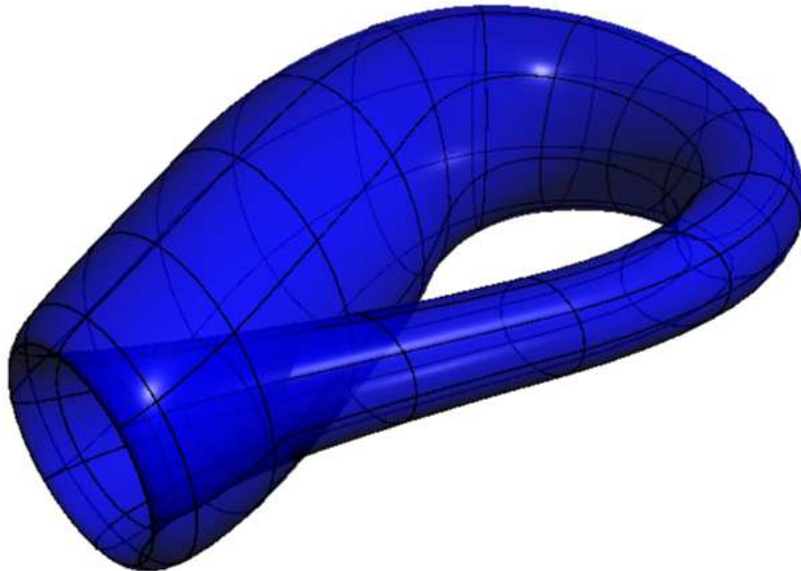


# ARTE Y MATEMÁTICAS

ARTE Y MATEMÁTICAS

RICARDO



Departamento de matemática y física, FIMGC USNCH

*E-mail:* ricardomallqui@gmail.com

URL: [www.fractales.com](http://www.fractales.com)

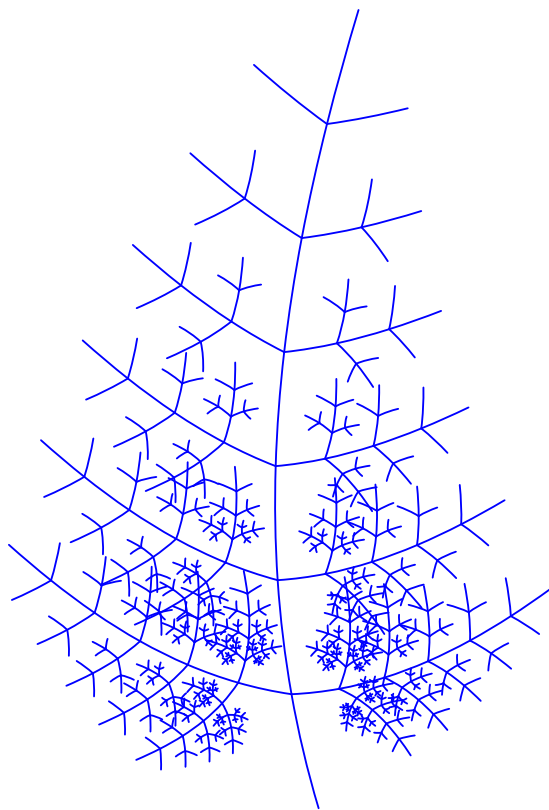
Arte y Matemáticas  
Ricardo Michel Mallqui Baños

Un libro basado en código asymptote LaTeX y pstricks

Bibliografía.

Incluye Índice.

1. Geometry, Differential. 2. Curves. 3. Surfaces.



Todos los derechos reservados. Ninguna parte de este libro puede ser reproducido en cualquier forma, o por cualquier medio, sin permiso por escrito del editor.

Departamento de matemática y física, FIMGC USNCH

*E-mail:* ricardomallqui@gmail.com

**URL:** [www.fractales.com](http://www.fractales.com)

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>I</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>III</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>VI</b>
<b>Presentación</b>	<b>IX</b>
<b>1. Curvas</b>	<b>1</b>
1.1. Tangente en un punto de una curva . . . . .	1
1.2. La Sección Áurea . . . . .	3
1.2.1. Análisis de la sección áurea . . . . .	4
1.2.2. Propiedades del numero $\phi$ . . . . .	5
1.3. Rectángulos dinámicos estructurales . . . . .	9
1.3.1. El cuadrado . . . . .	12
1.3.2. El rectángulo $\sqrt{2}$ . . . . .	13
1.3.3. El rectángulo $\sqrt{3}$ . . . . .	13
1.3.4. El rectángulo $\sqrt{5}$ . . . . .	14
1.3.5. El rectángulo $\sqrt{\phi}$ . . . . .	15
1.3.6. El rectángulo áureo ( $\phi$ ) . . . . .	15
1.3.7. El triángulo áureo y el pentágono . . . . .	16
1.3.8. Ejemplos de Composición sobre los Rectángulos Dinámicos	17
<b>2. Superficies</b>	<b>21</b>
2.1. Superficies de revolucion . . . . .	21
2.1.1. Propiedades . . . . .	21
2.2. Superficies de reglada . . . . .	22
2.3. Superficies orientables . . . . .	24
2.4. Superficies no orientables . . . . .	24
2.5. Formas Geométricas en el Espacio . . . . .	25
2.6. El Icosaedro . . . . .	26
2.7. El Dodecaedro . . . . .	27
2.8. El Octaedro . . . . .	29
2.9. El Exaedro o Cubo . . . . .	30
2.10. El Tetraedro . . . . .	31

<b>3. Perspectiva cónica</b>	<b>33</b>
3.1. Elementos . . . . .	33
3.2. Tipos . . . . .	34
3.3. Sombras . . . . .	34
<b>4. Optica</b>	<b>37</b>
4.1. Reflexion . . . . .	37
4.2. Refracción . . . . .	37
<b>5. Fractales</b>	<b>39</b>
5.1. Fractales 2D . . . . .	39
5.1.1. Phylotaxis . . . . .	39
5.1.2. Cosh y sierpinsiqui . . . . .	39
5.1.3. Arboles . . . . .	39
5.1.4. Circulo de Apollonius . . . . .	39
5.2. Fractales 3D . . . . .	39
<b>6. Principios del composición</b>	<b>45</b>
6.0.1. El ritmo . . . . .	45
6.1. Wwwwwww . . . . .	48
<b>7. Proporción y canon</b>	<b>51</b>
7.1. Proporción en el arte . . . . .	51
7.2. Proporción directa . . . . .	51
7.3. Proporción inversa . . . . .	51
7.4. Canon . . . . .	51
7.4.1. Canon griego . . . . .	51
7.4.2. Canon egipcio . . . . .	51
7.4.3. Canon andino . . . . .	51
<b>Referencias</b>	<b>53</b>
<b>Indices</b>	<b>53</b>
<b>A. Sistemas de coordenadas</b>	<b>I</b>
A.1. Coordenadas cartesianas . . . . .	I
A.2. Coordenadas esféricas . . . . .	I
A.3. Coordenadas cilíndricas . . . . .	I
A.4. Transformación de coordenadas . . . . .	III
A.5. Dirección de una línea 2D y 3D . . . . .	III
<b>B. Recta y plano</b>	<b>V</b>
B.1. Vector . . . . .	VI
B.2. Recta . . . . .	VII
B.3. Plano . . . . .	VII
<b>C. La forma y elementos</b>	<b>IX</b>
C.1. Centro de masa . . . . .	IX
C.2. Eje de una forma . . . . .	IX
C.3. Volumen . . . . .	IX
C.4. Simplificaciones de la forma . . . . .	IX

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
-----------------------	-----

<b>D. Transformaciones</b>	<b>XI</b>
----------------------------	-----------

D.1. Transformaciones elementales . . . . .	XI
D.1.1. Traslacion . . . . .	XI
D.1.2. Rotation . . . . .	XI
D.1.3. Simetry . . . . .	XII
D.1.4. Homotecia . . . . .	XIII
D.2. Transformaciones topológicas . . . . .	XIII
D.2.1. Homeomorfismo . . . . .	XIV
D.2.2. Isometria . . . . .	XIV

<b>E. Proyecciones</b>	<b>XIX</b>
------------------------	------------

E.0.1. Ortogonal . . . . .	XIX
E.0.2. Oblicua . . . . .	XIX
E.0.3. Estereografica . . . . .	XIX



# Lista de figuras

1.1.	Curva 3D con las rectas: tangente normal y binormal (Triedro de Frenet-Serret) además los planos: osculador, rectificante y normal	2
1.2.	geometry . . . . .	2
1.3.	Sección áurea de un segmento . . . . .	3
1.4.	La Parábola $x^2 - kx - k^2 = y$ y los puntos $S$ y $S'$ . . . . .	4
1.5.	Construcción del segmento menor $BC$ a partir del segmento mayor $AB$ . . . . .	8
1.6.	Construcción del segmento menor $BY$ a partir del segmento mayor $AB$ , $AY = UB$ ; $\frac{OA}{AS} = \frac{OS}{OA} = \frac{AU}{UB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ . . . . .	9
1.7.	$\frac{AB}{YB} = \frac{A'R'}{R'O} = \phi$ . Se unió los procedimientos anteriores . . . . .	9
1.8.	$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AB} = \phi$ . . . . .	10
1.9.	Rectángulos Dinámicos $\sqrt{2}$ , $\phi$ , $\sqrt{3}$ , $\sqrt{5}$ , ... . . . . .	11
1.10.	Tipo de rectángulo . . . . .	11
1.11.	Cuadrado . . . . .	12
1.12.	Un rectángulo arbitrario . . . . .	12
1.13.	Cuadrado . . . . .	13
1.14.	Rectángulo $\sqrt{2}$ . . . . .	14
1.15.	Rectángulo $\sqrt{3}$ . . . . .	14
1.16.	Rectángulo $\sqrt{5}$ . . . . .	15
1.17.	Rectángulo $\sqrt{\phi}$ . . . . .	16
1.18.	Rectángulo $\phi$ . . . . .	16
1.19.	El Pentágono y el Triángulo Áureo y la Relación de sus Lados . . . . .	17
2.1.	Plano tangente . . . . .	22
2.2.	revolution . . . . .	23
2.3.	Superficie de Riemann . . . . .	24
2.4.	Queso . . . . .	25
2.5.	Mobius . . . . .	26
2.6.	Icosaedro . . . . .	27
2.7.	Dodecaedro . . . . .	28
2.8.	Octaedro . . . . .	29
2.9.	Cubo . . . . .	30
2.10.	Tetraedro . . . . .	31
3.1.	. . . . .	33
3.2.	La hipérbola $y = \frac{\ PP-PD\ ^2}{x}$ . . . . .	34
3.3.	. . . . .	35

5.1. e . . . . .	40
5.2. s . . . . .	40
5.3. copo de nieve de Cosh . . . . .	40
5.4. Arbol . . . . .	41
5.5. e . . . . .	42
5.6. triangulo de Sierpinski . . . . .	42
5.7. Circulo de Apollonius . . . . .	43
5.8. Circulo de Apollonius . . . . .	43
5.9. Esponja de Menger . . . . .	44
6.1. www . . . . .	46
6.2. Series en una Composición . . . . .	48
6.3. series en una composición . . . . .	49
6.4. wwwwww . . . . .	49
A.1. . . . .	II
A.2. Coordenadas esféricas . . . . .	III
D.1. Traslacion . . . . .	XI
D.2. Rotation . . . . .	XII
D.3. Simetry . . . . .	XIII
D.4. Escala - Homotecia . . . . .	XIV
D.5. Secciones y rebanadas . . . . .	XV
D.6. Secciones y rebanadas . . . . .	XVI
D.7. Array . . . . .	XVII
E.1. Ortogonal . . . . .	XX
E.2. Estereografica . . . . .	XX
E.3. www . . . . .	XXI



# Lista de tablas

1.1.	Combinaciones de los tres segmentos de la seccion aurea. . . . .	5
1.2.	Combinaciones de los tres segmentos de la seccion aurea. . . . .	5
1.3.	Convergencia de la sucesión de Fibonacci al número áureo . . .	6
1.4.	A sample long table. . . . .	17



# Presentación

Matemáticas en el arte plástico nace del intento de poner en orden, la noción intuitiva que se tiene sobre la estructura compositiva en el arte plástico y hacerla un tanto rigurosa en un aspecto lógico de formas, sobre una base estructural geométrica.

El número áureo, es uno de los fractales más interesantes, el objetivo es hacer reconocer, de que modo, este número esta relacionado con los fractales y generalizarlo, a conceptos mucho más elaborados, para poder aplicarlas en el arte plástico. El universo tiene un lenguaje, basado en los números, que la describe casi por completo, lo cual implica que está presente, en todos los fenómenos de la realidad.

Se sabe que a pesar de lo discutible de su conocimiento sobre el número áureo, Platón se ocupa de estudiar el origen y la estructura del cosmos, caso que intentó, usando los cinco sólidos platónicos, Para Platón los sólidos corresponden a una de las partículas que conformaban cada uno de los elementos es decir la tierra lo asocia con el cubo, el fuego con el tetraedro, el aire con el octaedro, el agua con el icosaedro y finalmente el universo, como un todo asociado con el dodecaedro las cuales se tratan en el Capítulo 3.

Se analizo el libro del teólogo y matemático Lucca Paccioli que trata sobre la sección áurea en base al legado dejado por Platón y Euclides, en su libro La Divina Proporción donde describe la construcción de los cinco sólidos platónicos, el nombre Platónico debido la descripción constructiva de estos sólidos por Platón, asociados a la estética, la mística, la cósmica y la teológica, que conmovió a todas las generaciones, desde los pueblos neolíticos hasta nuestros días.

Lucca Pacioli publica su libro La Divina proporción en 1509, donde plantea cinco razones por la que estima apropiado considerar divino al número de oro, primero la unicidad del número de oro, la compara con la unicidad de dios, segundo el hecho de que esté definido con tres segmentos de recta lo relaciona con la trinidad, tercero la inconmensurabilidad del número de oro y la inconmensurabilidad de Dios son equivalentes, cuarto la utosimilitud asociada al número de oro lo compara con la omnipotencia e invariabilidad, finalmente el quinto, de la misma manera en que Dios dio ser al universo a través de la quinta esencia, representada por el dodecaedro, el número de oro, dio ser al dodecaedro.

Pero si bien ejemplos y contraejemplos constituyen una trascendencia importante, en algún proceso, se trato de evitar que el lector, se quede con la idea de que los números están trivialmente en alguna aplicación, por ello se ha procurado presentar de manera ordenada en el cuerpo básico del texto, de manera que exista una secuencia de conceptos implicados unos con otros.

Cinco capítulos son los que forman el libro, el primero sobre la sección áurea,

el segundo sobre formas geométricas en el plano, el tercero sobre los sólidos platónicos, el cuarto sobre los fractales, el quinto sobre los principios de la composición plástica, el sexto sobre superficies esto con el objetivo de establecer algunos términos en la escultura y reconocer sus propiedades para ser aplicada adecuadamente y finalmente un pequeño apéndice.

# Curvas

**Definición 1.1 (Curva)** *Es una coleccion de puntos en el espacio. En matemática (inicialmente estudiado en geometría elemental y, de forma más rigurosa, en geometría diferencial), la curva (o línea curva) es una línea continua de una dimensión, que varía de dirección paulatinamente. (Hilbert y Cohn-Vossen, 2020). “Geometry and the Imagination”*

### 1.1. Tangente en un punto de una curva

Curva 3D con las rectas: tangente normal y binormal además los planos: osculador, rectificante y normal

1

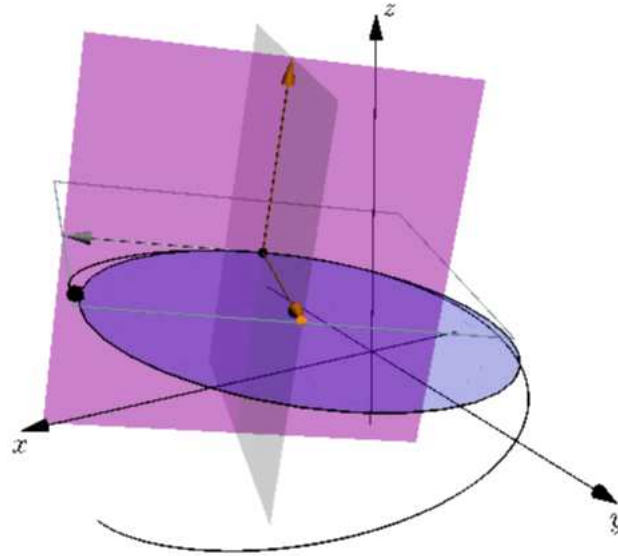


Figura 1.1: Curva 3D con las rectas: tangente normal y binormal (Triedro de Frenet-Serret) además los planos: osculador, rectificante y normal

**Definición 1.3** (www) *In the definition of defn you need to use the first optional argument of newtheorem to indicate that (Hilbert y Cohn-Vossen, 2020). “Geometry and the Imagination” this environment shares the counter of the previously defined thm environment.*

(Gutiérrez, 2015) (Gallego y cols., 2020) Competencia matemática y mediación del aprendizaje, en estudiantes de la escuela de formación profesional de educación primaria, UNSCH - 2015, (Tesis de maestría)

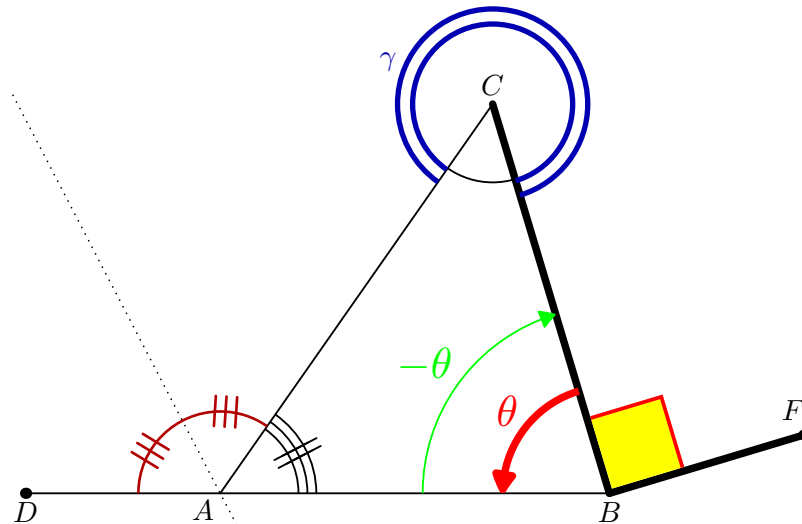


Figura 1.2: geometry

If the optional boolean argument `check` is false, no check will be made that the file exists. If the file does not exist or is not readable, the function `bool error(file)` will return true. The first character of the string comment specifies a comment character. If this character is encountered in a data file, the remainder of the line is ignored. When reading strings, a comment character followed immediately by another comment character is treated as a single literal comment character. If Asymptote is compiled with support for libcurl, name can be a URL.

Unless the `-noglobalread` command-line option is specified, one can change the current working directory for read operations to the contents of the string `s` with the function `string cd(string s)`, which returns the new working directory. If string `s` is empty, the path is reset to the value it had at program startup.

When reading pairs, the enclosing parenthesis are optional. Strings are also read by assignment, by reading characters up to but not including a newline. In addition, Asymptote provides the function `string getc(file)` to read the next character (treating the comment character as an ordinary character) and return it as a string.

## 1.2. La Sección Áurea

Sea el segmento  $AB$  dividámoslo de la siguiente manera, tomemos  $\frac{AB}{2}$  coloquemos este segmento de manera que sea perpendicular a  $AB$  en cualquiera de los extremos en este caso sea  $B$  interceptemos la línea  $AC$  con el arco  $BD$  centrado en  $C$  la cual nos da el punto  $D$  a partir de este punto tracemos el arco  $DE$  centrado en  $A$  hallando de este modo el punto  $E$  que divide al segmento  $AB$  en EXTREMA Y MEDIA RAZÓN o SECCIÓN ÁUREA (Phillips, Norris, y Macnab, 2010) y (Hitt, 1998).

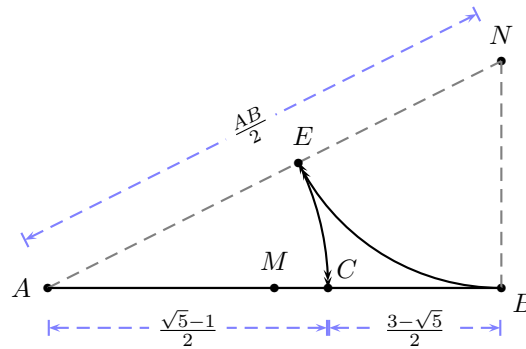


Figura 1.3: Sección áurea de un segmento

Es decir podemos empezar diciendo que  $\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB} = 1,61833\dots = \phi$  es el número de oro (Surhone, Timpdon, y Marseken, 2010) (Jackson, 2012). “Research Methods and Statistics: A Critical Thinking Approach”

Deduzcamos y averigüemos de donde nace el **número de oro**; empecemos con la frase celebre que dice mucho, lo genera y esta relacionado con este número: **El todo sobre la parte mayor y la parte mayor sobre la menor** (Heinz, 1997). (Hilbert y Cohn-Vossen, 2020). “Geometry and the Imagination”

### 1.2.1. Análisis de la sección áurea

Tomando la figura 1.4 y recordando que si se tiene la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

la raíces que satisfacen esta ecuación son  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a)(c)}}{2a}$

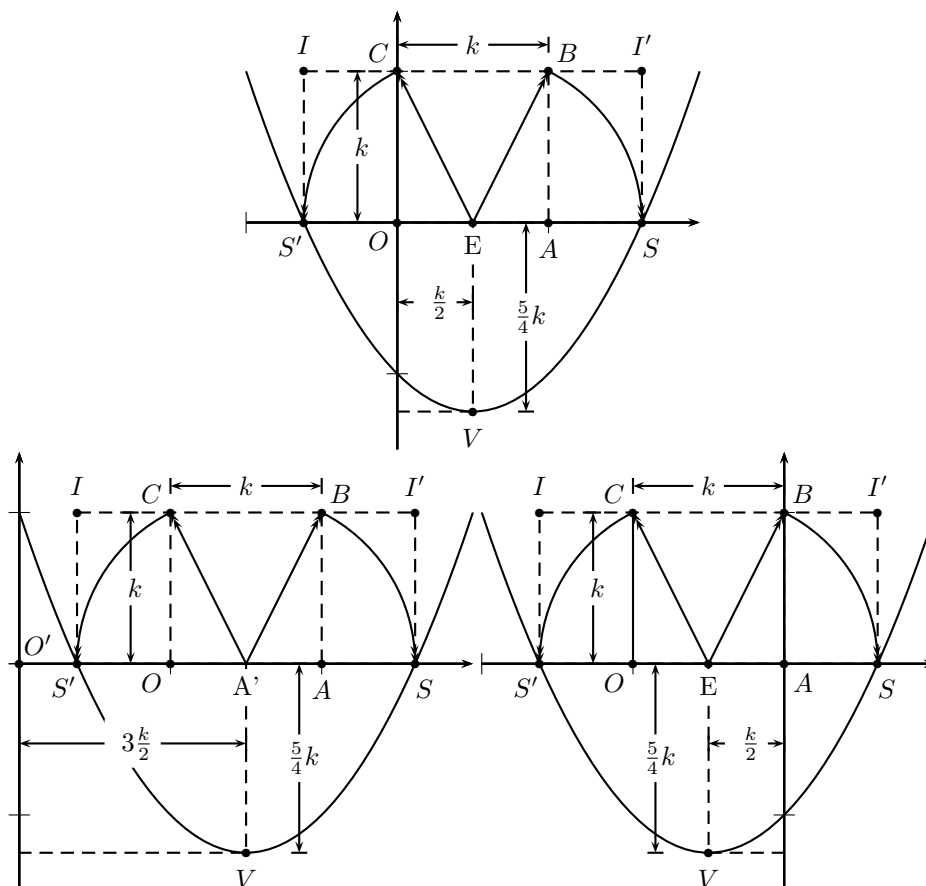


Figura 1.4: La Parábola  $x^2 - kx - k^2 = y$  y los puntos  $S$  y  $S'$

Cuando todo el segmento permanece constante y el segmento menor es constante para simplificar consideremos esa constante igual 1 luego según la figura se tiene que  $\theta = 1$  wwwwww



Cuadro 1.1: Combinaciones de los tres segmentos de la seccion aurea.

Ecuación	Simplicación	Raíces	Raíces simplicación	
			$x_1$	$x_2$
$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1}{1}$	$x^2 - 3x + 1 = 0$	$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$	$x_1 = 1,618$	$x_2 = -0,618$
$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$	$x^2 - x - 1 = 0$	$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$	$x_1 = 0,618$	$x_2 = -0,618$
$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$	$x^2 - x - 1 = 0$	$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$	$x_1 = 2,618$	$x_2 = -0,618$
$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$	$x^2 + x - 1 = 0$	$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$	$x_1 = -0,382$	$x_2 = -0,618$
$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$	$x^2 - x - 1 = 0$	$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$	$x_1 = 1,618$	$x_2 = -0,618$
$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$	$x^2 - x - 1 = 0$	$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$	$x_1 = 1,618$	$x_2 = -0,618$

Las Ecuaciones coincide dos a dos; si se reemplaza cada una des us raíces sobre sus correspondientes se obtiene  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  en efecto solamente tenemos tres ecuaciones ya que ellos coinciden

Cuadro 1.2: Combinaciones de los tres segmentos de la seccion aurea.

Ecuación	Simplicación	Raíces	Raíces simplicación	
			$x_1$	$x_2$
$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1}{1}$	$x^2 - 3x + 1 = 0$	$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$	$x_1 = 2,618$	$x_2 = 0,382$
$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$	$x^2 - x - 1 = 0$	$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$	$x_1 = 0,618$	$x_2 = -1,618$
$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$	$x^2 - x - 1 = 0$	$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$	$x_1 = 1,618$	$x_2 = -0,618$

### 1.2.2. Propiedades del numero $\phi$

La sección áurea, la proporción geométrica definidas en el capitulo precedente,  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618...$  la raíz positiva de la ecuación  $x^2 = x + 1$ , tiene una cierto número de propiedades algebraicas y geométricas donde podemos hacer en los remarkable la propiedad algebraica en alguna manera com  $\pi$  (el radio entre alguna circunferencia y su diámetro) y  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  donde  $n \in \mathbb{N}$  son los numeros trascendentes mas rescatables . Si se sigue nosotros llamamos este numero, radio, o proporción  $\phi$ , y tenemos las siguientes propiedades interesantes:

$$\phi = \frac{2 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398875...$$

(así que  $1,618...$  es una aproximación muy cercana)

$$\phi^2 = 2,618... = \frac{\sqrt{5}+3}{2} \text{ y } \frac{1}{\phi} = 0,618... = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

La sección áurea, la proporción geométrica definidas en el capitulo precedente,  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618...$  la raíz positiva de la ecuación  $x^2 = x + 1$ , tiene una cierto número de propiedades algebraicas y geométricas donde podemos hacer en los

remarkable la propiedad algebraica en alguna manera con  $\pi$  (el radio entre alguna circunferencia y su diámetro) y  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  donde  $n \in \mathbb{N}$  son los numeros trascendentes mas rescatables . Si se sigue nosotros llamamos este numero, radio, o proporción  $\phi$ , y tenemos las siguientes propiedades interesantes:

Cuadro 1.3: Convergencia de la sucesión de Fibonacci al número áureo

N	$F_n$	$\frac{F_n}{F_{n-1}}$	$\phi - \frac{F_n}{F_{n-1}}$
1	1		
2	1	1	0.618033988749895
3	2	2	-0.381966011250105
4	3	1.5	0.118033988749895
5	5	1.666666666666667	-0.0486326779167718
6	8	1.6	0.0180339887498948
7	13	1.625	-0.0069660112501051
8	21	1.61538461538462	0.00264937336527948
9	34	1.61904761904762	-0.00101363029772417
10	55	1.61764705882353	0.000386929926365465
11	89	1.61818181818182	-0.000147829431923263
12	144	1.61797752808989	5.6460660007307E-05
13	233	1.61805555555556	-2.15668056606777E-05
14	377	1.61802575107296	8.23767693347577E-06
15	610	1.61803713527851	-3.14652861965747E-06
16	987	1.61803278688525	1.20186464891425E-06
17	1597	1.61803444782168	-4.59071787028975E-07
18	2584	1.61803381340013	1.75349769593325E-07
19	4181	1.61803405572755	-6.69776591966098E-08
20	6765	1.61803396316671	2.55831884565794E-08
21	10946	1.6180339985218	-9.77190839357434E-09
22	17711	1.61803398501736	3.73253694618825E-09
23	28657	1.6180339901756	-1.4257022229458E-09
24	46368	1.61803398820533	5.44569944693762E-10
25	75025	1.6180339889579	-2.08007167046276E-10
26	121393	1.61803398867044	7.94517784896698E-11
27	196418	1.61803398878024	-3.03477243335237E-11
28	317811	1.6180339887383	1.15918386001113E-11
29	514229	1.61803398875432	-4.42756942220512E-12
30	832040	1.6180339887482	1.69131375571396E-12
31	1346269	1.61803398875054	-6.45927755726916E-13
32	2178309	1.61803398874965	2.4669155607171E-13
33	3524578	1.61803398874999	-9.41469124882133E-14
34	5702887	1.61803398874986	3.59712259978551E-14
35	9227465	1.61803398874991	-1.37667655053519E-14
36	14930352	1.61803398874989	0
37	24157817	1.6180339887499	0

- Se sabe que la ecuacion  $\phi^2 - \phi - 1 = 0$  se satisface luego podemos operar de infinitas maneras esta ecuación trasmutando, dividiendo y multiplicando

términos

$$\begin{aligned}
 \phi^2 &= \phi + 1 = \phi + 1 \\
 \phi^3 &= \phi^2 + \phi = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1 \\
 \phi^4 &= \phi^3 + \phi^2 = 2\phi + 1 + \phi + 1 = 3\phi + 2 \\
 &\dots = \dots \\
 \phi^n &= \phi^{n-1} + \phi^{n-2} = i\phi + j \\
 \phi^{n+1} &= \phi^n + \phi^{n-1} = m\phi + n \\
 \phi^{n+2} &= \phi^{n+1} + \phi^n = (i+m)\phi + (j+n)
 \end{aligned}$$

Esto también es válido para exponentes negativos  $\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = \phi^0 + \phi^{-1}$ , luego

- Las series

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\phi^2} &= \phi^{-2} = \phi^{-3} + \phi^{-4} = \frac{1}{\phi^3} + \frac{1}{\phi^4} \\
 \frac{1}{\phi^3} &= \phi^{-3} = \phi^{-4} + \phi^{-5} = \frac{1}{\phi^4} + \frac{1}{\phi^5} \\
 &\dots = \dots \\
 \frac{1}{\phi^n} &= \phi^{-n} = \phi^{-(n+1)} + \phi^{-(n+2)} = \frac{1}{\phi^{(n+1)}} + \frac{1}{\phi^{(n+2)}}
 \end{aligned}$$

- $2 = \phi + \frac{1}{\phi^2}$  pues de  $\phi^3 = \phi^2 + \phi = (\phi + 1) + \phi = 2\phi + 1$  porque  $\phi^2 = \phi + 1$  luego  $\phi^3 = 2\phi + 1 \iff 2 = \phi^2 - \frac{1}{\phi} = \phi + 1 - \frac{1}{\phi} = \phi + \frac{\phi(\phi-1)}{\phi^2} = \phi + \frac{1}{\phi^2}$
- $\phi = \frac{1}{\phi-1}$  en efecto de  $\phi^2 - \phi - 1 = 0$  al factorizar  $\phi$  y despejar 1 se obtiene  $\phi(\phi-1) = 1$  (recuerde que  $\phi \neq 0 \implies \phi-1 \neq 0$ ) ambos miembros de la igualdad y despejar  $\phi$  es decir  $\phi = \frac{1}{\phi-1}$
- La sucesión

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Pues  $\phi = \phi^0 + \phi^{-1} = 1 + \frac{1}{\phi}$  por la ecuación obtenida anteriormente, es decir al reemplazar  $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$  en el denominador del lado derecho de ésta ecuación se obtiene  $\phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\phi}}$  luego al iterar llegamos al resultado deseado

la progresión geométrica de la serie

$$1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots, \phi^n, \dots$$

cada termino es la suma de los numeros anteriores; esta promediad viene al mismo tiempo aditivo y geométrico es característica de esta serie y es una razón

para su rol en la evolución de los organismos, especialmente en la botánica. en la progresión diminuta

$$1, \frac{1}{\phi}, \frac{1}{\phi^2}, \frac{1}{\phi^3}, \dots, \frac{1}{\phi^m}$$

tenemos  $\frac{1}{\phi^m} = \frac{1}{\phi^{m+1}} - \frac{1}{\phi^{m+2}}$  (cada termino es la suma de los dos siguientes unos) y

$$\phi = \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi} + \dots + \frac{1}{\phi} + \dots$$

donde  $m$  se genera indefinidamente. La construcción rigurosa del radio o proporción de  $\phi$  es muy simple, porque de su valor  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . La Figura 1.5 muestra como, empezando de un segmento mayor  $AB$ , para construir el segmento menor  $BC$  tal que  $\frac{AB}{BC} = \phi$ , y como inversamente, empezando de un segmento completo  $AC$ , para colocar el punto  $B$  dividiendo su en el dos segmentos  $AB$  y  $BC$  relativo por la sección áurea (otro construcción en la figura 3). Este mas lógico asimétricas division de una linea, o de un superficie, es también el mas satisfactorio para los ojos; este tiene un significado

El principio aplica siempre e un de un designio la presencia de una proporción característica de un cadena de un proporción relacionada (esto es una noción impropio donde sera ilustrado después) produce la recurrencia de forma similar, pesero la sugestión subconsciente mencionada anteriormente especialmente asociada con la Sección Áurea porque de la propiedad de algún a progresión geométrica de radio  $\phi$  o  $\frac{1}{\phi}$  es decir

$$a, a\phi, a\phi^2, a\phi^3, \dots, a\phi^n, \dots$$

ó

$$a, \frac{a}{\phi}, \frac{a}{\phi^2}, \frac{a}{\phi^3}, \dots, \frac{a}{\phi^n}, \dots$$

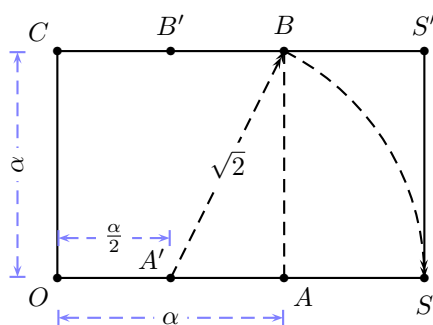


Figura 1.5: Construcción del segmento menor  $BC$  a partir del segmento mayor  $AB$

Concentrándonos en el triángulo  $A'BA$ , al rotar esta figura obtenemos la siguiente y se observa que  $AA' = \frac{AB}{2}$  este método de obtener la sección áurea se vio al principio es decir el punto  $Y$  es la sección áurea con respecto a la linea  $AB$  como lo es el punto  $A$  con respecto a la linea  $OS$

En la figura 1.8 se prueba que  $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AB} = \phi$

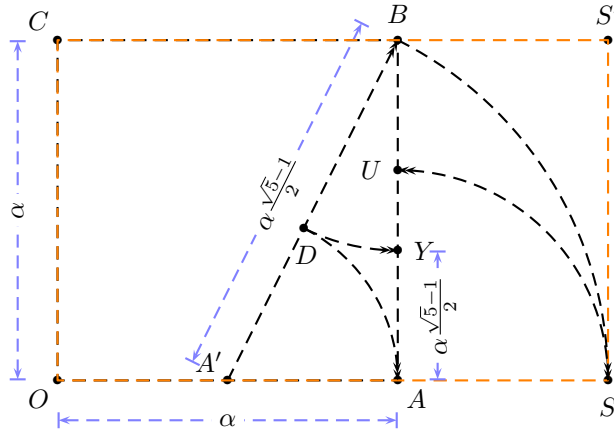


Figura 1.6: Construcción del segmento menor  $BY$  a partir del segmento mayor  $AB$ ,  $AY = UB$ ;  $\frac{OA}{AS} = \frac{OS}{OA} = \frac{AU}{UB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

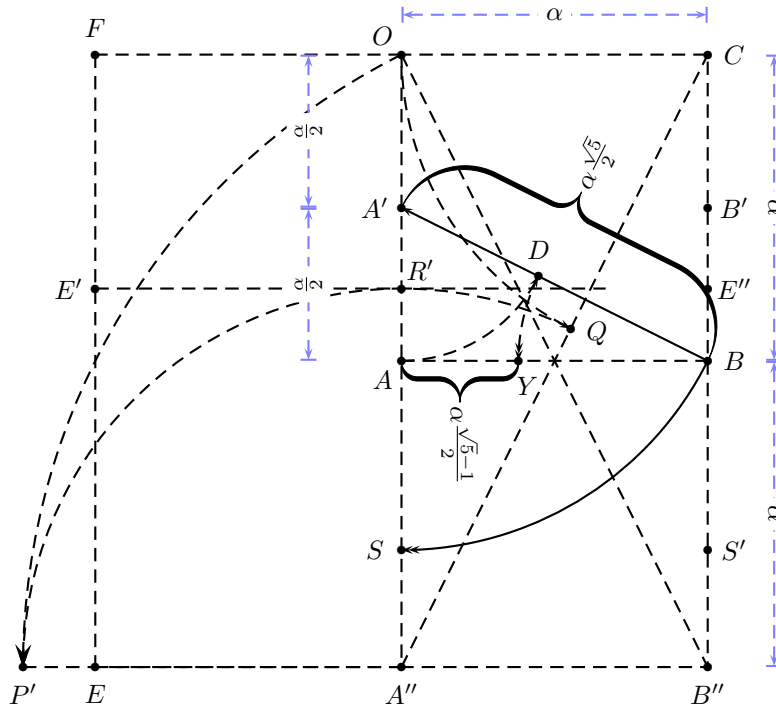


Figura 1.7:  $\frac{AB}{YB} = \frac{A''R'}{R'O} = \phi$ . Se unió los procedimientos anteriores

### 1.3. Rectángulos dinámicos estructurales

Los rectángulos dinámicos se caracterizan por tener proporciones no racionales es decir irracionales en la Figura 1.9 observamos que los rectángulo

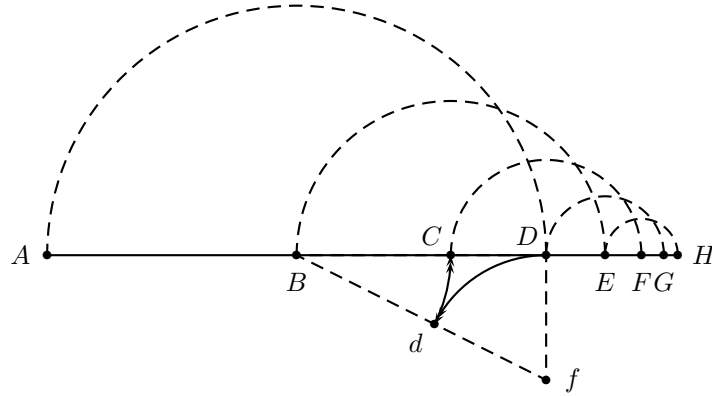


Figura 1.8:  $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AB} = \phi$

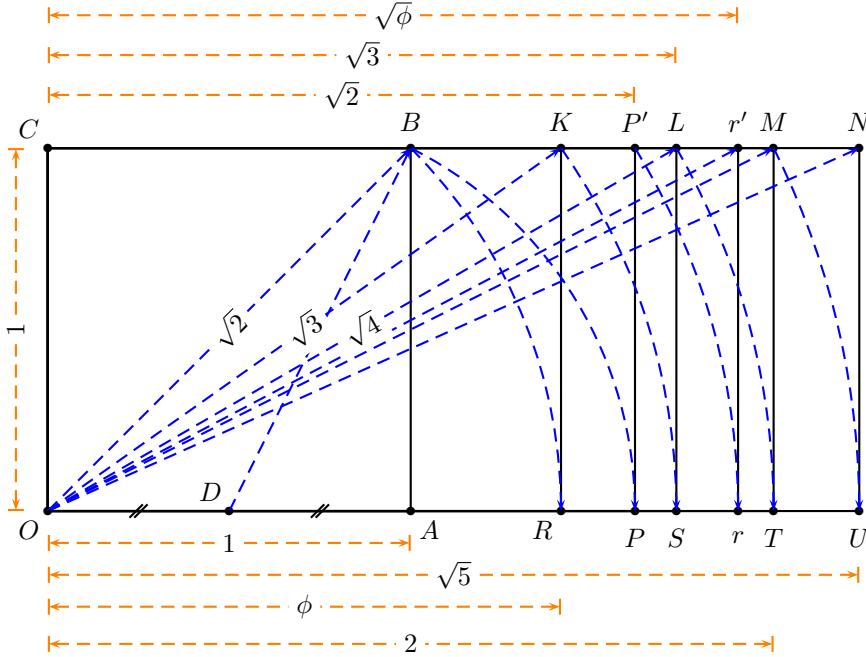
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$  son dinámicos, excepto el  $\sqrt{4} = 2$  que es un número racional también se observa que a partir de un cuadrado Figura 1.9 se pueden construir sucesivamente estos rectángulo en algunos casos obviamente mediante este proceso se podrán hallar rectángulos no dinámicos.

La principal aplicación esta siempre en el diseño y la presencia en el arte plástico es una característica proporcionado por la geometría derivada de la sección áurea o de una cadena de proporciones relacionadas (este es una noción importante donde será ilustrado después), donde se produce la recurrencia de formas similares, pero la sugestión mencionad arriba es especialmente asociada con la Sección Áurea porque ella posee propiedades muy interesantes con la infinita variedad de progresión geométrica de radio  $\phi$ . La principal aplicación esta siempre en el diseño y la presencia en el arte plástico es una característica proporcionado por la geometría derivada de la sección áurea o de una cadena de proporciones relacionadas (este es una noción importante donde será ilustrado después), donde se produce la recurrencia de formas similares, pero la sugestión mencionad arriba es especialmente asociada con la Sección Áurea porque ella posee propiedades muy interesantes con la infinita variedad de progresión geométrica de radio  $\phi$ .

Como el rectángulo  $ARKC$  denotado por  $\sqrt{2}$ ,  $ASLC$  denotado por  $\sqrt{3}$ ,  $OTMC$  denotado por  $\sqrt{4} = 2$  que no es un rectángulo dinámico,  $AUNC$  denotado por  $\sqrt{5}$  y los rectángulos relacionado con el numero de oro  $ACPP'$  denotado por  $\phi$  construido con la ayuda del punto medio  $D$  del segmento  $OA$  finalmente el rectángulo  $Orr'C$  denotado por  $\sqrt{\phi}$  son los rectángulos más interesantes para la distribución de los elementos en el espacio bidimensional.

Se descompondrá armónicamente cada uno de estos rectángulos, saber el procedimiento es muy útil para los artistas plásticos sobre para los pintores en sus diversas composiciones bidimensionales, para aquellos que tienen noción tridimensional se trataran de solidos en el siguiente capitulo.

**Comentario 1.1** *un rectángulo esta bien representado por su diagonal y la pendiente de esta en un sistema de ejes coordenados usual. Pues si tratamos de averiguar el tipo de rectángulo lo que se hace es verificar la razón de la longitud de su lado mayor y al longitud de su lado menor es decir, la pendiente de la*

Figura 1.9: Rectángulos Dinámicos  $\sqrt{2}$ ,  $\phi$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ , ...

diagonal con respecto a un sistema de ejes coordenados donde el eje las  $x$  coincide con el lado mayor es decir en la Figura 1.10 la pendiente de la diagonal  $AC$  es  $\tan \alpha = \frac{CB}{AB}$ .

Por ejemplo en la Figura 1.11 el rectángulo  $A'B'C'D'$  tiene las mismas proporciones que  $ABCD$  pues la pendiente de  $A'C'$  es la misma que la pendiente de  $AC$ , este principio nos ayudara a demostrar algunas propiedades de los rectángulos dinámicos.

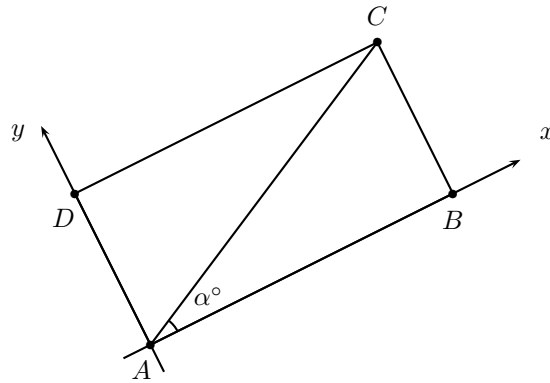


Figura 1.10: Tipo de rectángulo

**Comentario 1.2** A partir de ahora se se usará la notación  $ABCD \sim r, r \in \mathbb{I}$  donde  $ABCD$  es un rectángulo y " $\sim$ " significa "similar semejante", muy útil

para denotar que dos rectángulos tiene las mismas proporciones o la misma razón entre las longitudes de sus lados por ejemplo en la Figura 1.11  $A'B'C'D' \sim \frac{B'C'}{A'B'} = k; k \in \mathbb{I}$  o en la Figura 1.13 se tiene que  $OABC \sim \frac{AB}{OA} = 1$ .

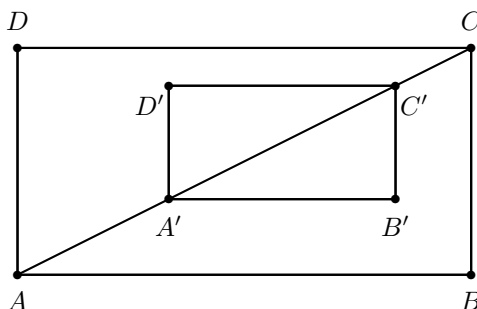


Figura 1.11: Cuadrado

**Comentario 1.3** El siguiente criterio mostrada en la Figura 1.12 se toma el  $M = \frac{BC}{2}$  se traza el arco CB centrada en M luego P es la intersección de la diagonal del rectángulo ABCD con éste arco, finalmente Q es la intersección del lado DC con la línea BP. Se usara este principio para resumir las demostraciones de las propiedades de los rectángulos dinámicos, se tiene que  $ABCD \sim P'BCQ$  pues en  $AC \perp BQ$  esto es  $\angle BAC = \angle CBQ$ , luego según el Comentario 1.1 se tiene que  $ABCD \sim P'BCQ$  y también se tiene que  $\frac{AB}{CB} = \frac{BC}{QC} \iff QC = \frac{BC^2}{AB}$  si  $BC = 1$  se tiene que  $QC = \frac{1}{AB}$  por lo que si  $AB$  es de la forma  $\sqrt{\beta}$  se tiene que  $QC = \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta}}{\beta}$  es decir  $QC = \frac{AB}{\beta}$ , como un ejemplo particular se tiene que si  $AB = \sqrt{6} \implies QC = \frac{AB}{6}$ .

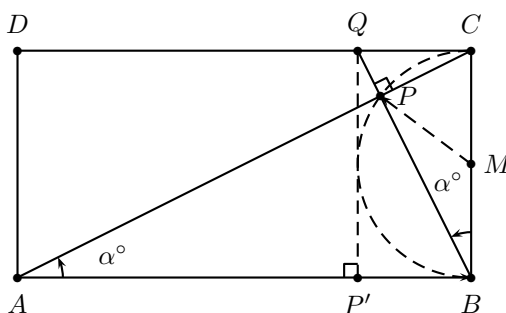


Figura 1.12: Un rectángulo arbitrario

### 1.3.1. El cuadrado

Para poder particionarlo es necesario hallar la sección áurea en uno de los lados por ejemplo P con el método ya aprendido, a partir de allí se generan infinidad de posibilidades por ejemplo una de ellas es la que se muestra en la figura siguiente. aunque el cuadrado es considerado menos apto para las compo-



siciones con un poco de subdivisiones armónicas se pueden obtener una buena composición

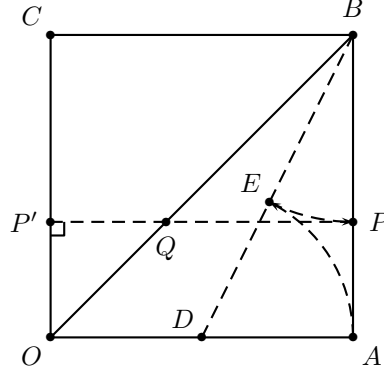


Figura 1.13: Cuadrado

EL cuadrado suele ser uno de los formatos menos eficientes debido a su alta simetría pero con particiones adecuadas sobre su superficie se puede lograr grandes objetivos

### 1.3.2. El rectángulo $\sqrt{2}$

Siendo  $M'$  y  $M$  puntos medios de  $DC$  y  $AB$  se observa la propiedad de  $DM \perp AC$  pues la pendiente de la recta  $DM$  es  $-\frac{2}{\sqrt{2}}$  y la pendiente de la recta  $AC$  es  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  lo cual al multiplicar estas pendientes resulta  $-1$ .

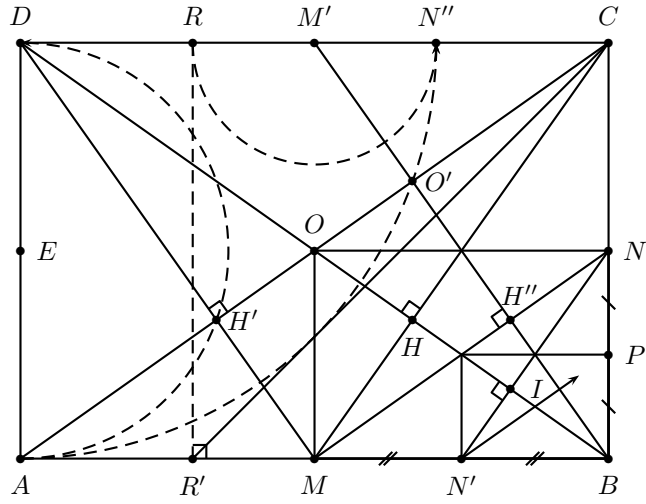
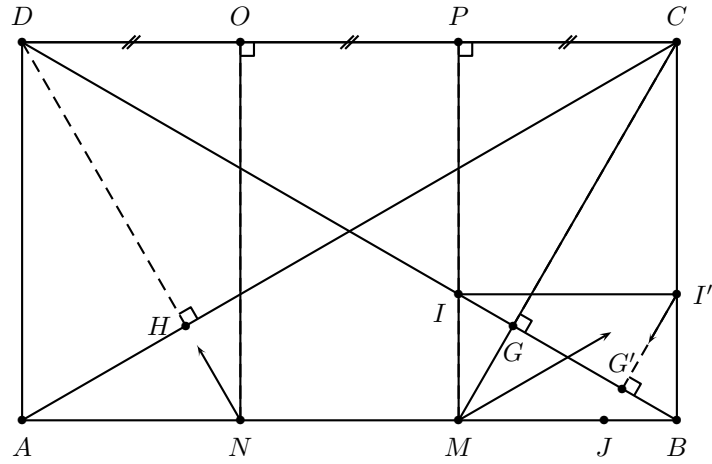
Otra característica es que  $ONMB$  es otro rectángulo  $\sqrt{2}$  con el lado mayor  $ON = MB$  pues  $OM = \frac{\sqrt{2}}{2}$  y  $NB = \frac{1}{2}$  entonces  $\frac{AM}{NB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ , en este rectángulo también se observa que  $MH \perp HB$  pues  $MC$  lo secciona a  $ON$  en dos segmentos iguales  $OP = PN$  lo cual usando el mismo criterio para el caso anterior se verifica que  $MH \perp HB$ ,  $HH'' \perp H''B$  y  $N'N \perp HB$  porque estos puntos se obtiene con el mismo procedimiento.

Finalmente se pueden obtener de manera indefinida rectángulos  $\sqrt{2}$  tales como  $OMNB$ ,  $HPBN'$ , etc. los cuales convergen hacia el vértice  $B$ . También se los puede hacer converger hacia los demás vértices  $A$ ,  $D$  y  $C$  del mismo modo en el rectángulo  $MONB$  se puede iterar los procedimientos anteriores hacia el infinito.

### 1.3.3. El rectángulo $\sqrt{3}$

La propiedad de este triángulo es que si lo dividimos en tres franjas verticales iguales tales como  $ANOD$ ,  $ONMP$  y  $PMBC$  obtenemos otros triángulos semejantes al primero  $\sqrt{3}$ , como en el caso anterior se usó las pendientes para averiguar si es correcto poner los ángulos rectos donde lo están, luego es posible iterar esta operación al infinito sobre cada uno de los tres rectángulos obtenidos anteriormente para obtener otros con la misma propiedad pero en escala menor.

pues  $ANOD$ ,  $AN = \frac{\sqrt{3}}{3}$  y  $ON = 1$  luego  $\frac{ON}{AN} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$ , esto es válido

Figura 1.14: Rectángulo  $\sqrt{2}$ Figura 1.15: Rectángulo  $\sqrt{3}$ 

para  $ONMP$ ,  $PMBC$  pues  $ON = PM = CB$  y  $AN = NM = MB$ . Para verificar que  $DH \perp AC$  se tiene

#### 1.3.4. El rectángulo $\sqrt{5}$

En este rectángulo se incluye los rectángulos  $\phi$  y  $\sqrt{5}$  como se muestra en la figura el rectángulo  $A'BCD'$  y  $AB'C'D$  son rectángulos  $\phi$

Se empieza construyendo un cuadrado  $A'B'C'D'$  al tomemos uno de sus lados  $A'B'$  divisiéndolo en dos segmentos iguales  $A'M = MB'$  el arco generado por  $MC'$  interseca a la proyección de lado  $A'B'$  en los dos puntos  $A$  y  $B$  observe que se utilizo el mismo procedimiento para obtener el rectángulo áureo pero en

Figura 1.16: Rectángulo  $\sqrt{5}$ 

se obtiene  $G$  intersecar el arco  $BC$  con la diagonal  $AC$ ,  $H$  al intersecar el lado  $DC$  con la proyección de  $BG$  finalmente  $H'$  e  $I$  al proyectar  $H$  perpendicularmente sobre el lado  $AB$ ; sabe que el rectángulo  $OO'CC'$  es un rectángulo  $\phi$  por lo tanto  $IH''CC'$  lo es, pues la diagonal  $IC$  coincide con la del rectángulo  $OO'CC'$  (Se demostró al principio de este capítulo que un rectángulo está definido por el valor de la pendiente de su diagonal) se verifica que  $HC = \frac{1}{5}DC$  entonces  $H'BCH$  es un rectángulo  $\sqrt{5}$ , entonces como  $H'BQJ' = 1$ , y  $IH''CH = \phi$  se deduce que  $J'QH''I = \phi$ . También  $EH'''CC'$  es un  $\sqrt{5}$  pues comparten la diagonal del generador  $ABCD$ ,  $BJ'$  es un cuadrado pues comparten la diagonal del cuadrado  $B'BO'O$

### 1.3.5. El rectángulo $\sqrt{\phi}$

El rectángulo  $\sqrt{\Phi} AE'ED$  se obtiene a partir de un rectángulo áureo  $\Phi$  como se muestra en la figura el rectángulo  $\Phi$ ,  $ABCD$  se obtiene al trazar el arco  $BE$  interceptando la línea  $AC$  en  $E$ , proyectando perpendicularmente este punto sobre la línea  $AB$  se obtiene el cuarto vértice  $E'$  del rectángulo  $\sqrt{\phi}$  pues como se puede verificar se tiene que  $AE'^2 = \phi^2 - 1 = 2\phi + 1 - 1 = \phi \iff AE' = \sqrt{\phi}$

### 1.3.6. El rectángulo áureo ( $\phi$ )

El rectángulo de la siguiente figura tiene la única propiedad que si nosotros construimos un cuadrado sobre su lado pequeño (el menor término del radio  $\phi$ ), el rectángulo pequeño  $ABCD$  formado a lado de este cuadrado el rectángulo original también es rectángulo  $\phi$ , similar al primero. Esta operación puede ser repetida indefinidamente, ente, resultando así que los cuadrado pequeños, y pequeños y pequeños rectángulos áureos (la superficie del cuadrado y la superficie de los

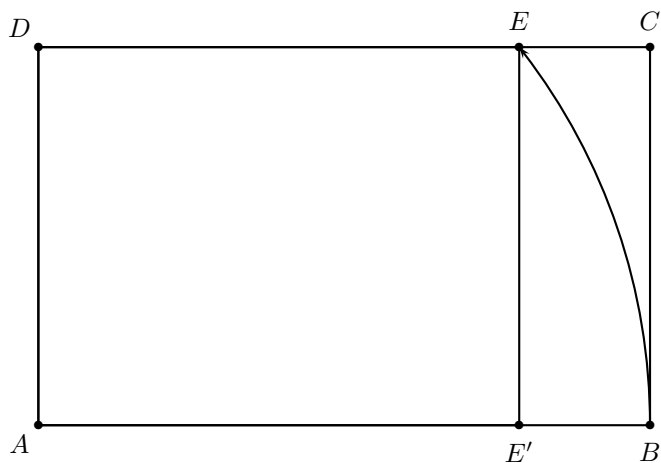


Figura 1.17: Rectángulo  $\sqrt{\phi}$

Figura 1.18: Rectángulo  $\phi$

### 1.3.7. El triángulo áureo y el pentágono

Es fácil verificar los ángulos mostrados en la figura pues los ángulos interiores de un pentágono son como  $EDC = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108$  luego el ángulo  $DEC = DCE = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$  ya que  $I'D = I'E$  se deduce que el ángulo  $DI'I'' = 72^\circ$ .

Se prueba fácilmente que  $\frac{a}{b} = \phi$  pues usando la ley de los senos en el triángulo  $ADB$  se tiene que:

$$\frac{a}{\sin 72} = \frac{b}{\sin 36} \iff \frac{a}{b} = \frac{\sin 72}{\sin 36} = \frac{0,95105651629515357211 \dots}{0,5877852522924731291 \dots} = \phi.$$

Lo mismo ocurre con  $\frac{DI'}{I'I} = \phi$  pues solo basta probar que los segmentos  $I'I$  y  $I'I''$  son iguales en efecto pues  $I'I''$  es el lado del pentágono que se genera con la diagonales del pentágono  $ABCDE$

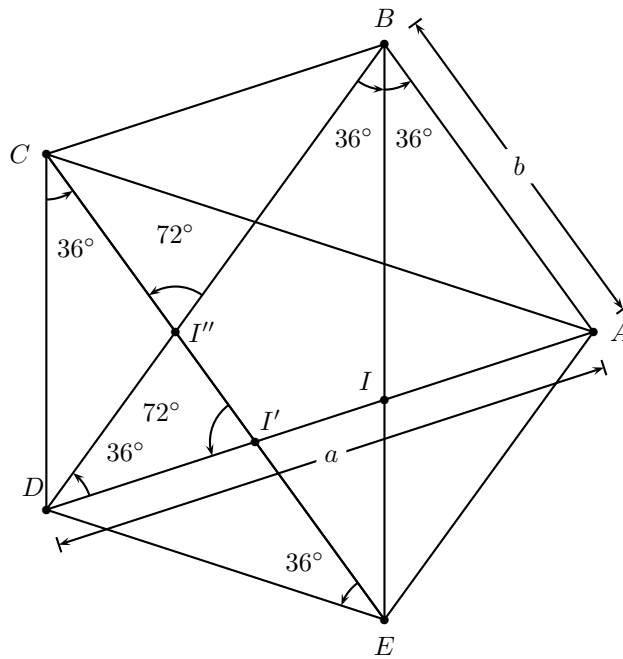


Figura 1.19: El Pentágono y el Triángulo Áureo y la Relación de sus Lados

### 1.3.8. Ejemplos de Composición sobre los Rectángulos Dinámicos

Cuadro 1.4: A sample long table.

First column	Second column	Third column
One	abcdef ghijklmn	123.456778
One	abcdef ghijklmn	123.456778
One	abcdef ghijklmn	123.456778
One	abcdef ghijklmn	123.456778
Continued on next page		

Cuadro 1.4 – continued from previous page [www.inec.org](#)[illegible]

Cuadro 1.4 – continued from previous page

[illegible]





## Capítulo 2

# Superficies

**Definición 2.1 (Superficie)** *En matemáticas, una superficie es un modelo matemático del concepto común de superficie. Es una generalización de un plano, pero, a diferencia de un plano, puede ser curvo; esto es análogo a una curva que generaliza una línea recta.*

*Existen varias definiciones más precisas, dependiendo del contexto y de las herramientas matemáticas que se utilicen para su estudio. Las superficies matemáticas más simples son los planos y las esferas en el espacio euclídeo. La definición exacta de una superficie puede depender del contexto. Típicamente, en geometría algebraica, una superficie puede cruzarse a sí misma (y puede tener otras singularidades), mientras que, en topología y geometría diferencial, puede no hacerlo.*

*Una superficie es un espacio topológico de dimensión dos; esto significa que un punto móvil en una superficie puede moverse en dos direcciones (tiene dos grados de libertad). En otras palabras, alrededor de casi todos los puntos hay una carta local coordenada en la que se define un sistema de coordenadas bi-dimensional. Por ejemplo, la superficie de la Tierra se asemeja (idealmente) a una esfera bidimensional, y la latitud y la longitud proporcionan coordenadas bidimensionales en ella (excepto en los polos y a lo largo del meridiano 180).*

### 2.1. Superficies de revolucion

Una superficie de revolución es una superficie en el espacio euclidiano creada al rotar una curva (la generatriz) alrededor de un eje de rotación. [1]

Ejemplos de superficies de revolución generadas por una línea recta son superficies cilíndricas y cónicas dependiendo de si la línea es o no paralela al eje. Un círculo que se gira alrededor de cualquier diámetro genera una esfera de la que entonces es un gran círculo, y si el círculo se gira alrededor de un eje que no corta el interior de un círculo, entonces genera un toro que no se corta a sí mismo (un toro anular).

#### 2.1.1. Propiedades

Las secciones de la superficie de revolución formadas por planos que pasan por el eje se denominan secciones meridionales. Cualquier sección meridional

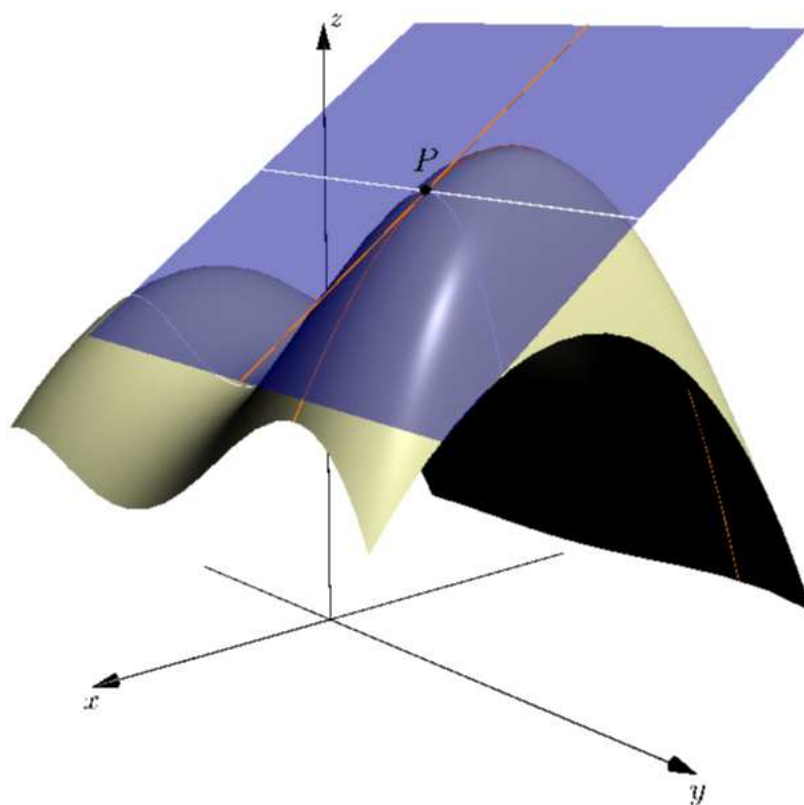


Figura 2.1: Plano tangente

puede considerarse generatriz en el plano determinado por ella y el eje. [2]

Las secciones de la superficie de revolución formadas por planos que son perpendiculares al eje son círculos.

Algunos casos especiales de hiperboloides (de una o dos hojas) y paraboloides elípticos son superficies de revolución. Estas pueden identificarse como aquellas superficies cuadráticas cuyas secciones transversales perpendiculares al eje son todas circulares.

## 2.2. Superficies de reglada

En geometría, se gobierna una superficie  $S$  (también llamada pergamino) si a través de cada punto de  $S$  hay una línea recta que se encuentra en  $S$ . Los ejemplos incluyen el plano, la superficie lateral de un cilindro o cono, una superficie cónica con directriz elíptica, el conoide recto, el helicoides y la tangente que se desarrolla de una curva suave en el espacio.

Una superficie reglada se puede describir como el conjunto de puntos barridos por una línea recta en movimiento. Por ejemplo, un cono se forma manteniendo fijo un punto de una línea mientras se mueve otro punto a lo largo de un círculo. Una superficie está doblemente reglada si por cada uno de sus puntos pasan dos

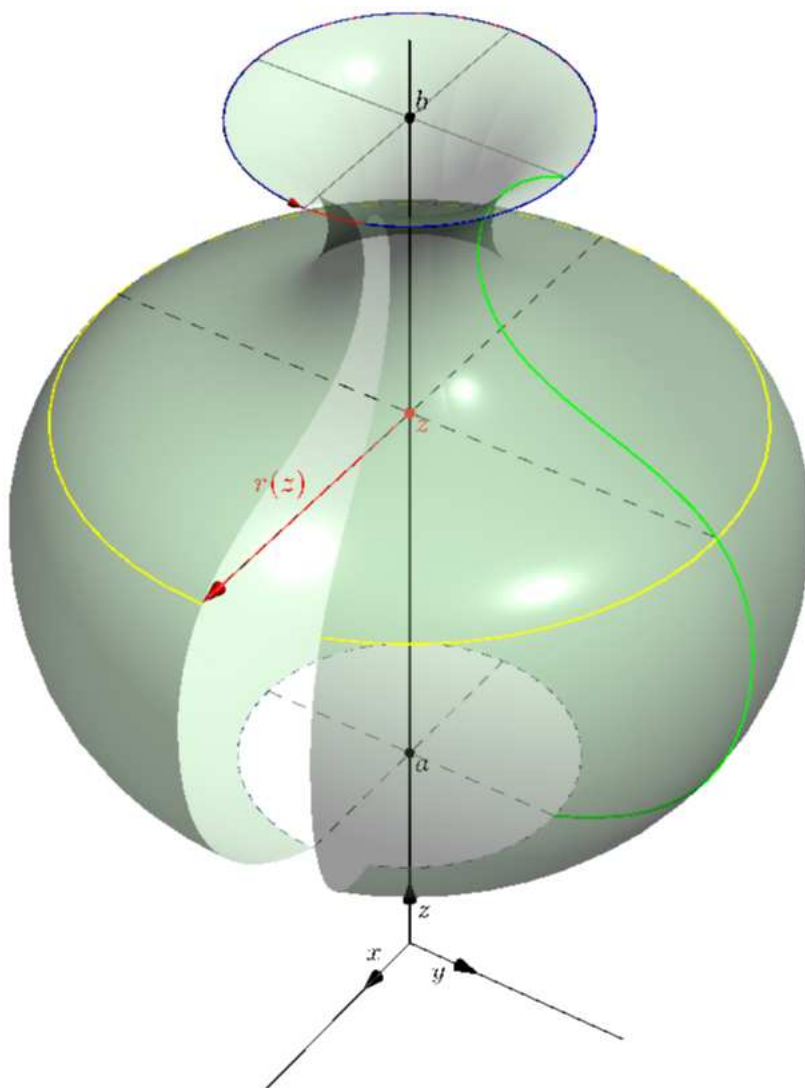


Figura 2.2: revolution

rectas distintas que se encuentran sobre la superficie. El paraboloides hiperbólico y el hiperboloides de una hoja son superficies doblemente regladas. El plano es la única superficie que contiene al menos tres líneas distintas a través de cada uno de sus puntos

Los mapas proyectivos conservan las propiedades de estar reglado o doblemente reglado y, por lo tanto, son conceptos de geometría proyectiva. En geometría algebraica, las superficies regladas a veces se consideran superficies en un espacio afín o proyectivo sobre un campo, pero también a veces se las considera superficies algebraicas abstractas sin una incrustación en un espacio afín o proyectivo, en cuyo caso se entiende que "línea recta" significa una línea afín o proyectiva.

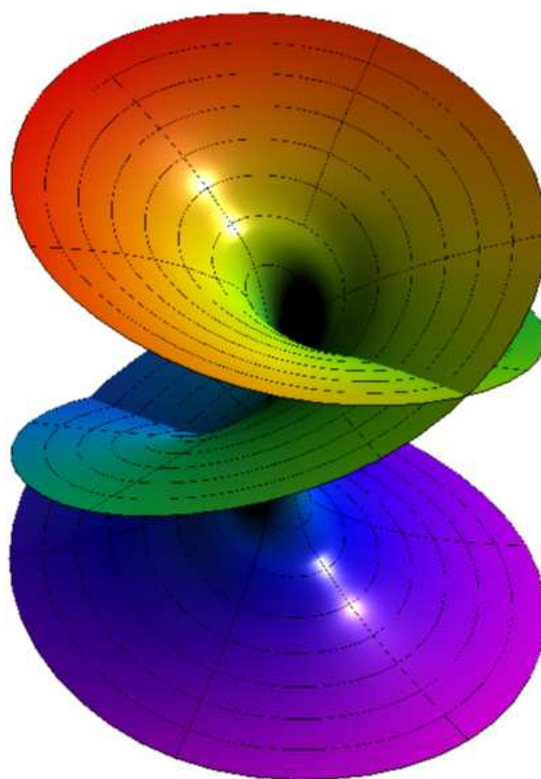


Figura 2.3: Superficie de Riemann

### 2.3. Superficies orientables

Se dice que una superficie está orientada (cuando esto es posible) si se ha elegido una dirección de flujo positivo. Para elegir una dirección de flujo positivo especificamos un vector normal a la superficie. Cualquier flujo que esté en la dirección general del vector normal se considera positivo y cualquier flujo que se dirija contra el vector normal se considera negativo. Tenga en cuenta que no todas las superficies son orientables (por ejemplo, la banda de Möbius)

### 2.4. Superficies no orientables

Una superficie  $S$  en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$  es orientable si una figura bidimensional (por ejemplo, Pequeño pastel.svg) no se puede mover alrededor de la superficie y regresar a donde comenzó para que parezca su propia imagen especular ( Tarta 2.svg). De lo contrario, la superficie no es orientable. Una superficie abstracta (es decir, una variedad bidimensional) es orientable si se puede definir un concepto consistente de rotación en el sentido de las agujas del reloj en la superficie de manera continua. Es decir, un bucle que gira en un sentido sobre la superficie nunca puede deformarse continuamente (sin superponerse a sí mismo) en un bucle que gira en el sentido opuesto. Esto resulta

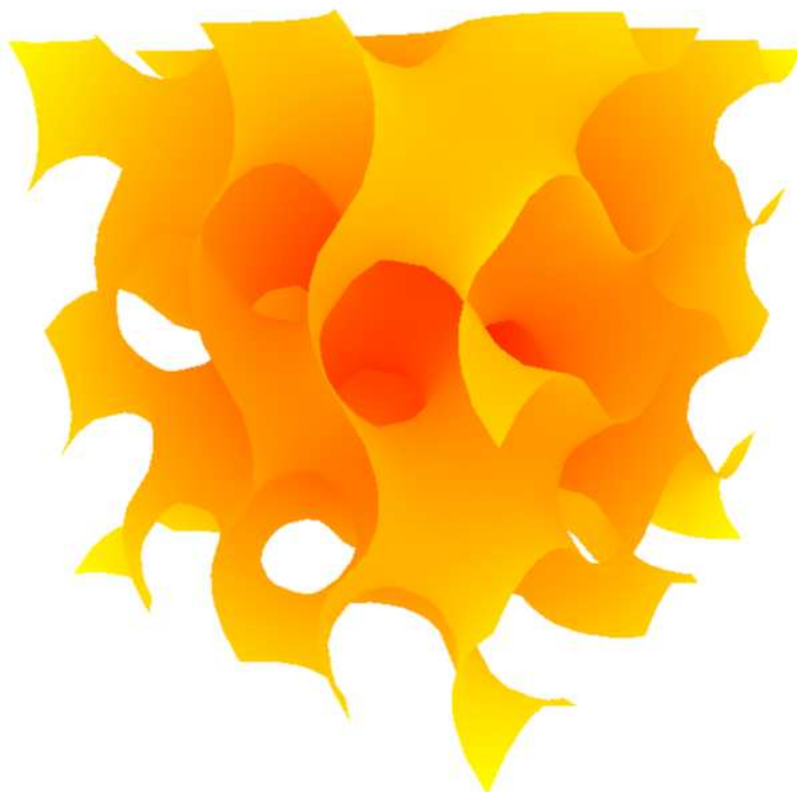


Figura 2.4: Queso

ser equivalente a la pregunta de si la superficie no contiene ningún subconjunto que sea homeomorfo a la cinta de Möbius. Así, para las superficies, la cinta de Möbius puede considerarse la fuente de toda falta de orientabilidad.

Para una superficie orientable, una elección consistente de "sentido horario" (en contraposición a sentido contrario a las agujas del reloj) se denomina orientación, y la superficie se denomina orientada. Para las superficies incrustadas en el espacio euclidiano, la orientación se especifica mediante la elección de una superficie normal  $n$  que varía continuamente en cada punto. Si tal normal existe, entonces siempre hay dos formas de seleccionarlo:  $n$  o  $-n$ . Más generalmente, una superficie orientable admite exactamente dos orientaciones, y la distinción entre una superficie orientada y una orientablela superficie es sutil y frecuentemente borrosa. Una superficie orientable es una superficie abstracta que admite una orientación, mientras que una superficie orientada es una superficie abstractamente orientable, y tiene como dato adicional la elección de una de las dos orientaciones posibles.

## 2.5. Formas Geométricas en el Espacio

Se coincidieran a los 5 sólidos platónicos como figuras que tienen volumen y dimensiones relacionadas con el número de oro pues como se demostrará las

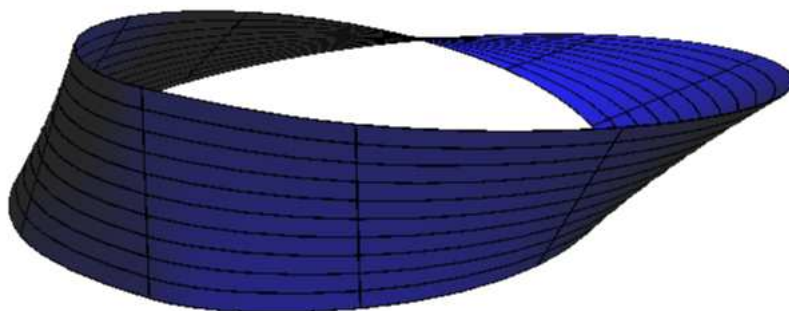


Figura 2.5: Mobius

longitudes de las aristas con respecto a otros se relacionan en proporción áurea sus volúmenes se relaciona del mismo modo pero no se tratara en este libro por lo tedioso e casi inútil en el arte.

los gráficos se realizan en perspectiva por lo que no se tomara en cuenta la deducción teniendo en cuenta que el lector conoce de estos temas para poder recrear las figuras en sus aplicaciones

Como en cada cada vertice concurren como minimo tres caras y la suma de los angulos de estas tiene que ser menor de  $360^\circ$  se deduce quwe solo puede existir los isguinetes caso

- 3 triangulos equilateros nos genera  $3 \times 60^\circ = 180^\circ < 360^\circ$
- 4 triangulos euilateros nos genera  $4 \times 60^\circ = 240^\circ < 360^\circ$
- 5 triangulos equilateros mos genera  $5 \times 60^\circ = 300^\circ < 360^\circ$
- 6 triangulos equilateros nos genera  $6 \times 60^\circ = 180^\circ < 360^\circ$  pues debe ser menor estrictamante en este caso es igual
- 3 cuadrados nos genera  $3 \times 90^\circ = 270^\circ < 360^\circ$
- 4 cuadrados nos genera  $4 \times 90^\circ = 360^\circ < 360^\circ$  pues debe ser menor estrictamante en este caso es igual
- 3 pentagonos regualares nos genera  $3 \times 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$
- 4 pentagonos regualares nos genera  $4 \times 108^\circ = 432^\circ < 360^\circ$  pues debe ser menor estrictamante en este caso es igual

Es decir solo pueden existir 5 poliedros regulares o solidos platónicos

## 2.6. El Icosaedro

Formado por 20 caras triangulares equiláteros iguales, 12 vertices y 20 aristas Se genera a partir de un pentágono inscrito en una circunferencia clone este pentágono rotelo  $36^\circ$  de modo que todos sus vertices coincidan con las medios arcos cuyas cuerdas son los lados del pentágono original y clonado a partir de los vertices de este pentagon clonado y rotado tracese líneas ortogonales

al plano donde el pentágono esta, de longitudes  $\frac{D}{\sqrt{5}}$ , donde  $D$  es el diámetro del circunferencia que inscribe a los dos pentágonos, luego une los extremos  $A'', B'', B'', C'', D''$  y  $E''$  para formar nuevamente un pentágono semejante alas anterior finalmente solo nos falta dos puntos.

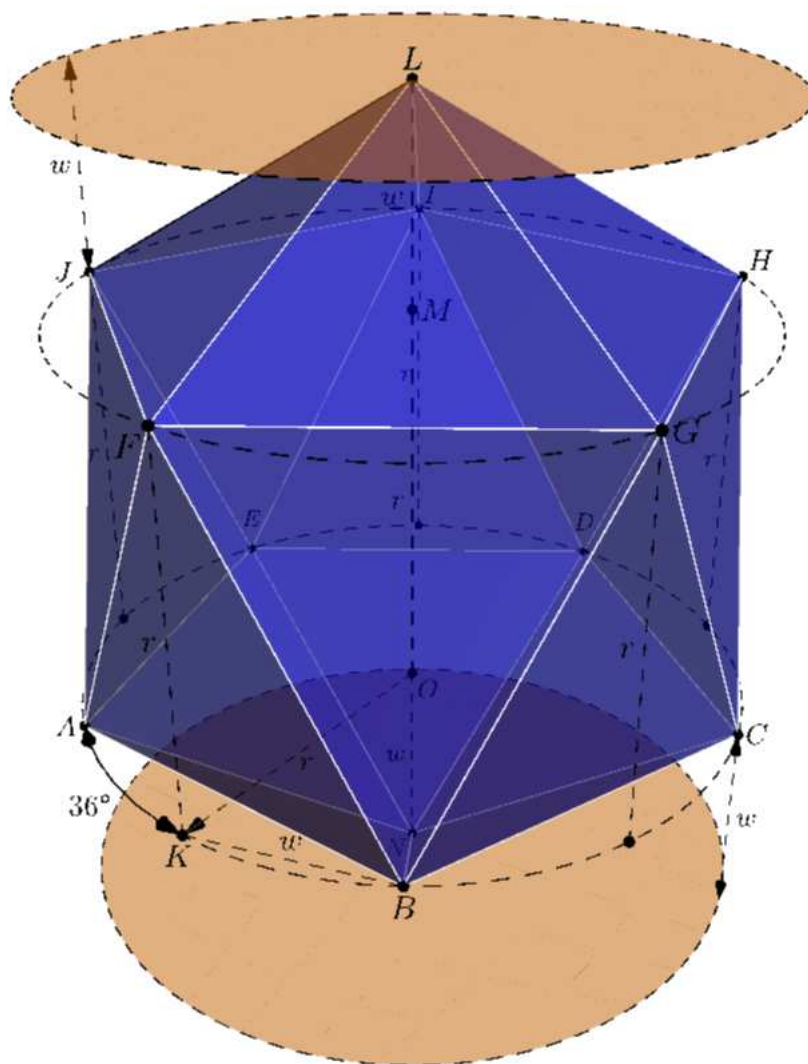


Figura 2.6: Icosaedro

## 2.7. El Dodecaedro

Solido constituido de 12 caras pentagonales 12 aristas (8 del cubo y 12 generadas en cada una de las caras por el método que se describirá) y 30 aristas cada cada pentágono se constituye de lados que se relación con el numero de oro como ya se vio anteriormente, veamos como se relaciona sus diagonales es

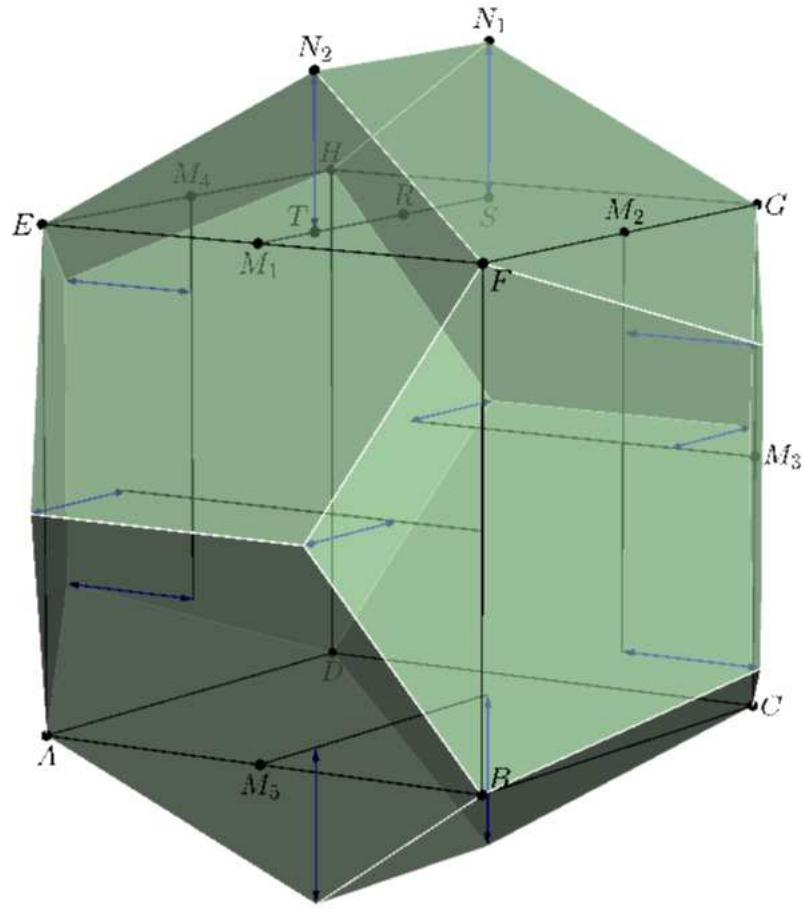


Figura 2.7: Dodecaedro

decir las líneas que regulan de unir puntos no contiguas

Se obtiene un cubo las seis caras se dividen por la mitad de modo de que esas divisiones no se continúen es decir opuestos por ejemplo ( $i'j'$  y  $a'b'$ ) cada una de esas líneas divídalos en dos segmentos iguales, sobre estas a la vez obtenga las secciones áureas  $u$  y  $u'$  de los segmentos  $i'o$  y  $oj'$  con los segmento menores  $i'o$  y  $u'j'$  cercanos a las aristas del cubo respectivamente, luego de haber obtenido estos 2 secciones áureas (dos en cada una de las caras del cubo) levántese líneas ortogonales  $a'B$ ,  $uA$  y  $iE'$  a las caras desde los puntos  $u$ ,  $u'$  y  $i'$  de longitud  $ou'$  (el segmento mayor obtenido en el proceso anterior, de hallar la sección áurea) el proceso culmina al unir los vertices consecutivos del cubo con las puntos obtenidos en la proceso anterior, con los extremos de los segmentos tres ortogonales levantados anteriormente por ejemplo una de las caras del dodecaedro emerge al unir los puntos  $ABeE'a$  el siguiente será el pentagono  $aE'F'bE$

Ahora analicemos la longitud de los aristas, observe el plano que pasa por el centro del cubo que tiene por vertices a los puntos  $ABCD$  este plano genera una sección sobre el dodecaedro llamada sección principal que es un hexágono irregular que tiene dos lados opuestos que son aristas del dodecaedro y los otro



cuatro son medianas de los de la cuatro caras.

## 2.8. El Octaedro

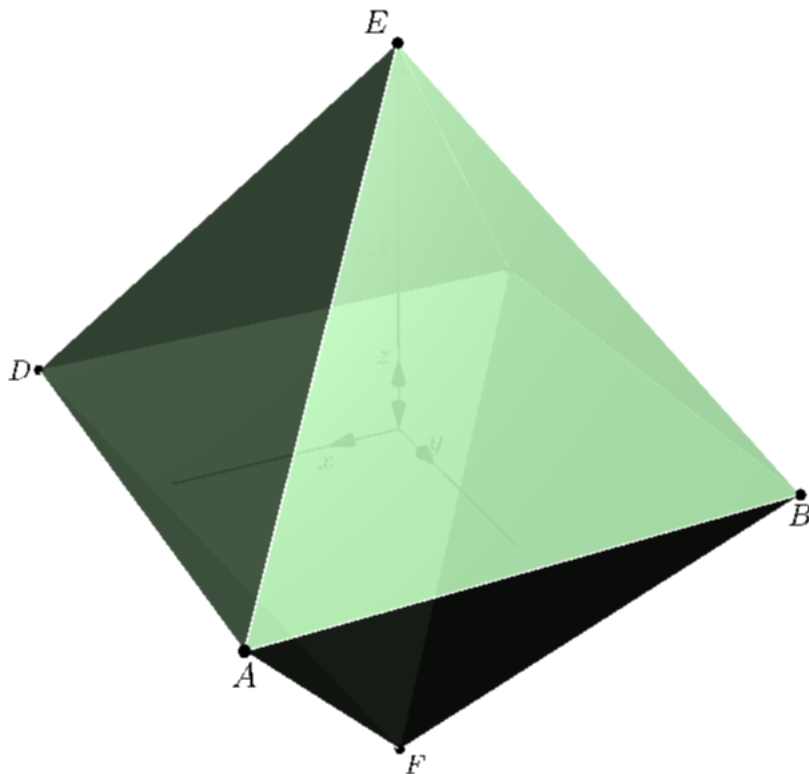


Figura 2.8: Octaedro

Generemos el cuadrado  $ABCD$  inscrito en una circunferencia, por el punto medio de esta circunferencia levantemos la línea  $OF$  y  $OF'$  de longitud  $OA$  que es la mitad de la diagonal de cuadrado  $ABCD$ , e fácil verificar que este sea la altura del octaedro pues cada lado es un triángulo equilátero tratemos de generar un triángulo rectángulo para poder aplicar el Teorema de Pitágoras, entonces si proyectamos el punto  $O$  perpendicularmente al segmento  $AB$  obtenemos el segmento  $OP$  este tiene longitud  $\frac{AD}{2}$ , también proyectemos el punto  $F$  al segmento  $AB$  así generamos el segmento  $FP$  de longitud  $AD\frac{\sqrt{3}}{2}$  finalmente aplicaremos el teorema de Pitágoras para obtener  $OF^2 + OP^2 = FP^2 \iff OF^2 = \left(AD\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{AD}{2}\right)^2 = \left(\frac{AD}{2}\right)^2 2$  de donde  $OF = \frac{AD}{\sqrt{2}}$  que verifica que  $OF = AO$

Generemos el cuadrado  $ABCD$  inscrito en una circunferencia, por el punto medio de esta circunferencia levantemos la línea  $OF$  y  $OF'$  de longitud  $OA$  que es la mitad de la diagonal de cuadrado  $ABCD$ , e fácil verificar que este sea la altura del octaedro pues cada lado es un triángulo equilátero tratemos de generar un triángulo rectángulo para poder aplicar el Teorema de Pitágoras,

entonces si proyectamos el punto  $O$  perpendicularmente al segmento  $AB$  obtenemos el segmento  $OP$  este tiene longitud  $\frac{AD}{2}$ , también proyectemos el punto  $F$  al segmento  $AB$  así generamos el segmento  $FP$  de longitud  $AD\frac{\sqrt{3}}{2}$  finalmente aplicaremos el teorema de Pitágoras para obtener  $OF^2 + OP^2 = FP^2 \iff OF^2 = \left(AD\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{AD}{2}\right)^2 = \left(\frac{AD}{2}\right)^2 2$  de donde  $OF = \frac{AD}{\sqrt{2}}$  que verifica que  $OF = AO$

## 2.9. El Exaedro o Cubo

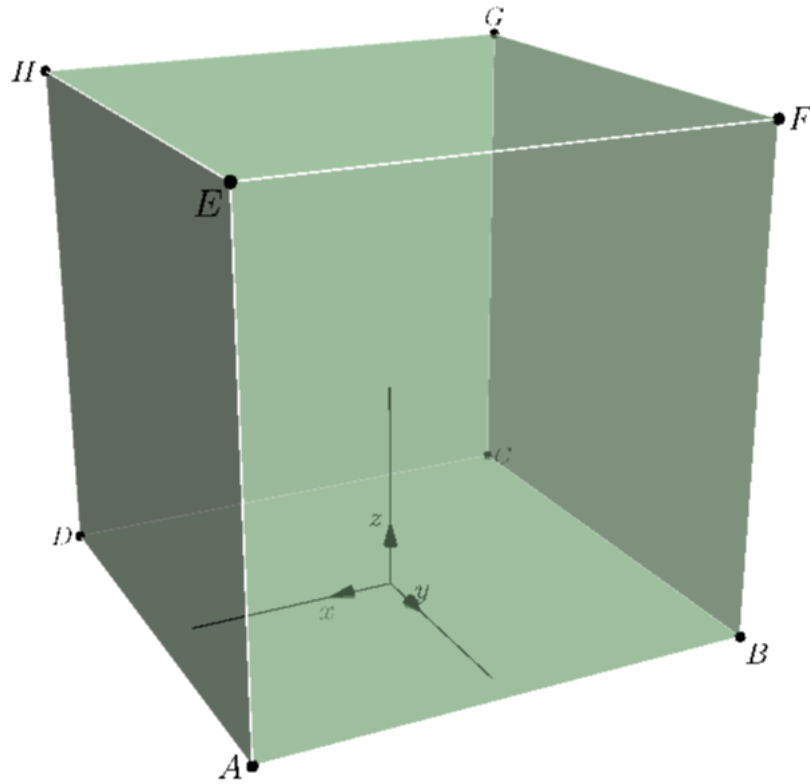


Figura 2.9: Cubo

Formado por seis caras cuadrados iguales, ocho vertices y doce aristas la sección principal pasa por dos aristas opuestas y hay seis des estas secciones en un cubo tales como, debemos destacar que  $\frac{DF}{3}$  Hay que demostrar como se forma el cubo y cual es la proporción entre su lado y el diámetro de la esfera que lo circumscribe exactamente, tómese el diámetro de la esfera en la que se prepone colocarlo exactamente y sea este la línea  $AB$ , sobre la cula se trasa el semicírculo  $ADB$  luego divídalas el diámetro en el punto  $C$  de manera que  $AC = 2BC$  tracese la línea  $CD$  perpendicular a la línea  $AB$  además tracese las líneas  $BC$  y  $CA$ . Haga luego un cuadrado cuyos lados iguales a la línea  $BD$

luego se verifica que  $3BD^2 = AB^2 \iff AB = \sqrt{3}BD$

## 2.10. El Tetraedro

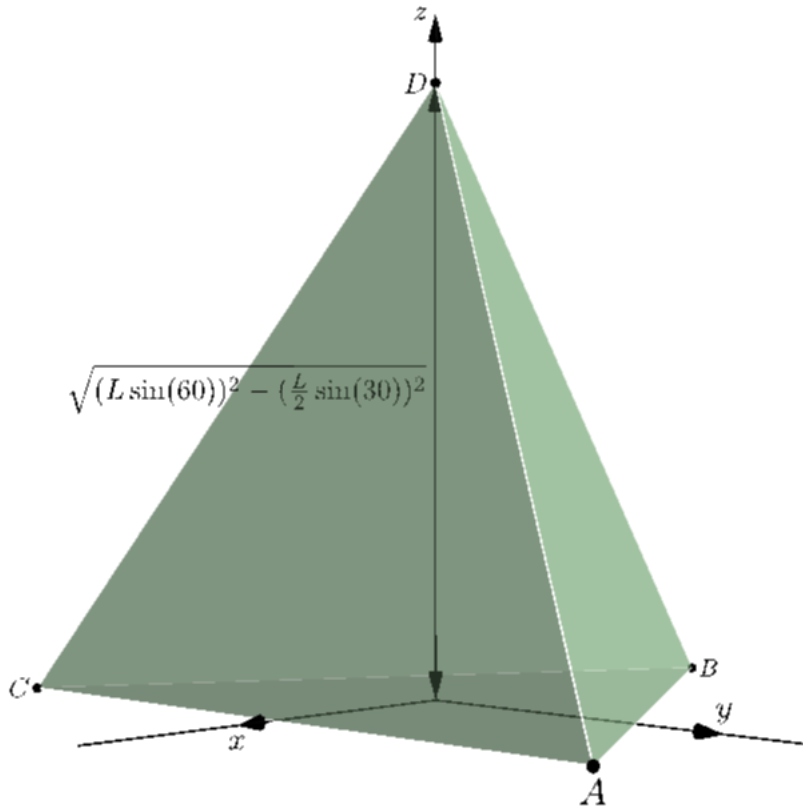


Figura 2.10: Tetraedro

El tetraedro es mu y fácil de construir sea el triángulo equilátero  $ABC$  a partir de su centro  $O$  se levanta una ortogonal  $OF = r\sqrt{2}$  donde  $r$  es la radio de la circunferencia que circunscribe al triángulo



# Perspectiva cónica

### 3.1. Elementos

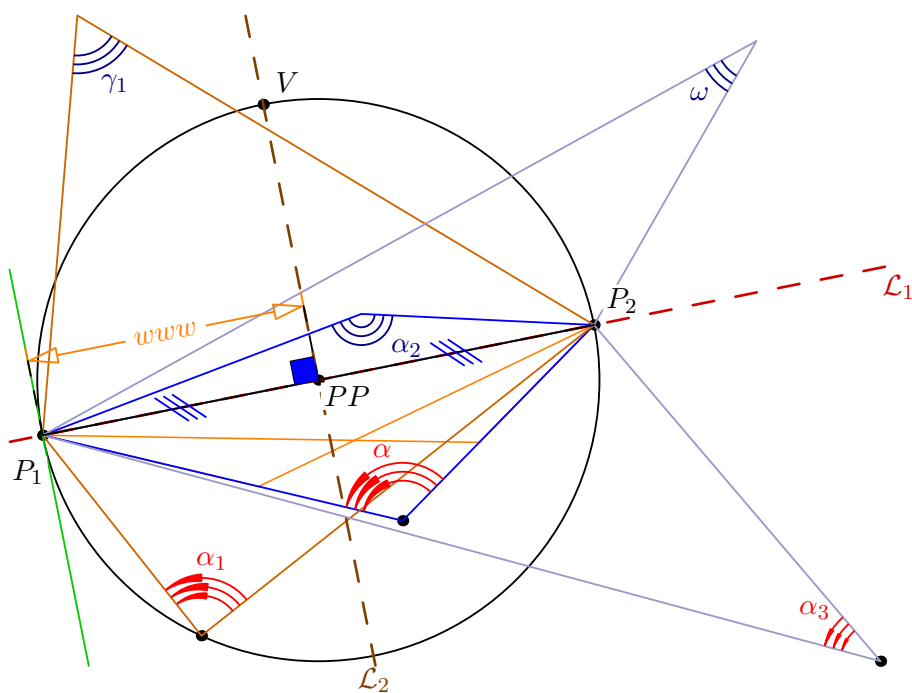


Figura 3.1:

## La hipérbola

$$y = \frac{\|PP - PD\|^2}{x}$$

WWWWWWWWWWWWWWWWWW

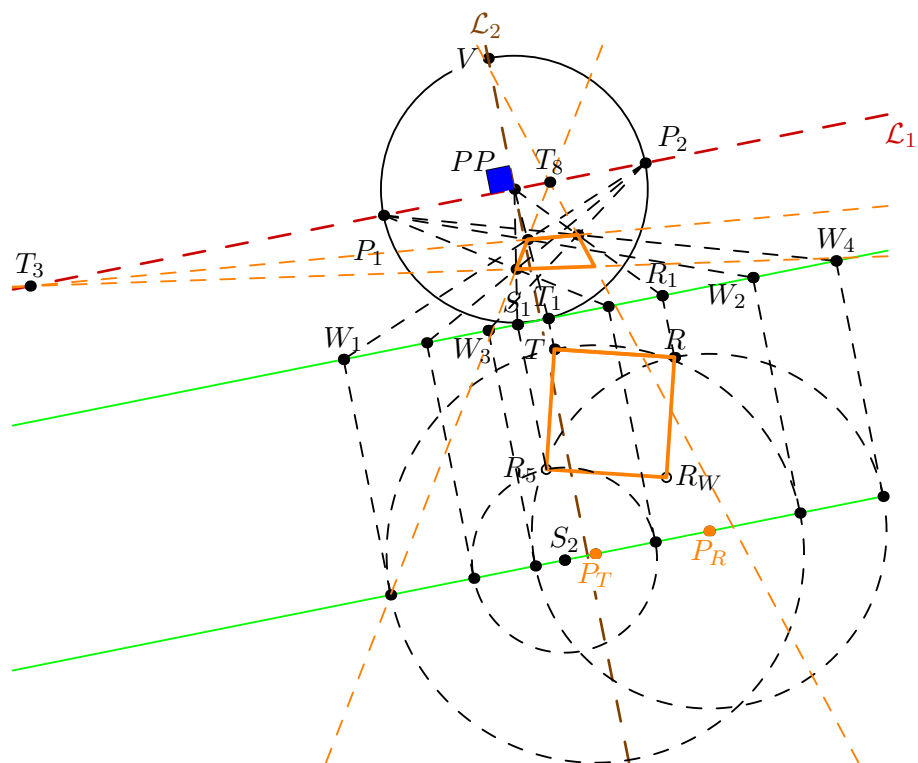


Figura 3.2: La hipérbola  $y = \frac{\|PP-PP\|^2}{x}$

### 3.2. Tipos

### 3.3. Sombras







## Capítulo 4

# Optica

### 4.1. Reflexion

### 4.2. Refracción



## Capítulo 5

# Fractales

### 5.1. Fractales 2D

Un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  es autosemejante si existe una colección  $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_m$  de semejanzas de  $\mathbb{R}^n$ , todas ellas con razones menores a la unidad (es decir contractivas), tales que

- $E \subset \bigcup_{i=1}^m \xi_i(E)$
- para cierto  $s$  (no necesariamente entero) se tiene que  $H^s(E) > 0$  y que  $H^s(\xi_i(E) \cap \xi_j(E)) = 0$ , si  $i \neq j$

Las estructuras de las superficies que observamos no son lo que parecen con una finitud limitada mas aun se puede sumergir al infinito atómicamente y averiguar mentalmente la composición estructural de tales formas, desde la concepción de este tema e podrá cambiar el modo de ver de las cosas .

#### 5.1.1. Phyllotaxis

The beautiful arrangement de las hojas en algunas plantas, llamado phyllotaxis, obeys un número de sutiles matemáticas relaciones. For instance, the florets in the head of a sunflower form two oppositely directed spirals: 55 of them clockwise and 34 counterclockwise. Surprisingly, these numbers are consecutive Fibonacci numbers. The Phyllotaxis is like a Lindenmayer system.

#### 5.1.2. Cosh y sierpinski

#### 5.1.3. Arboles

#### 5.1.4. Circulo de Apollonius

### 5.2. Fractales 3D

Fractales matemáticos en tres dimensiones. Introducción a los fractales. La geometría fractal estudia las formas que tienen dimensión fraccionaria.

En matemáticas, la esponja de Menger (a veces llamada cubo de Menger o bien cubo o esponja de Menger-Sierpinski o de Sierpiński) es un conjunto

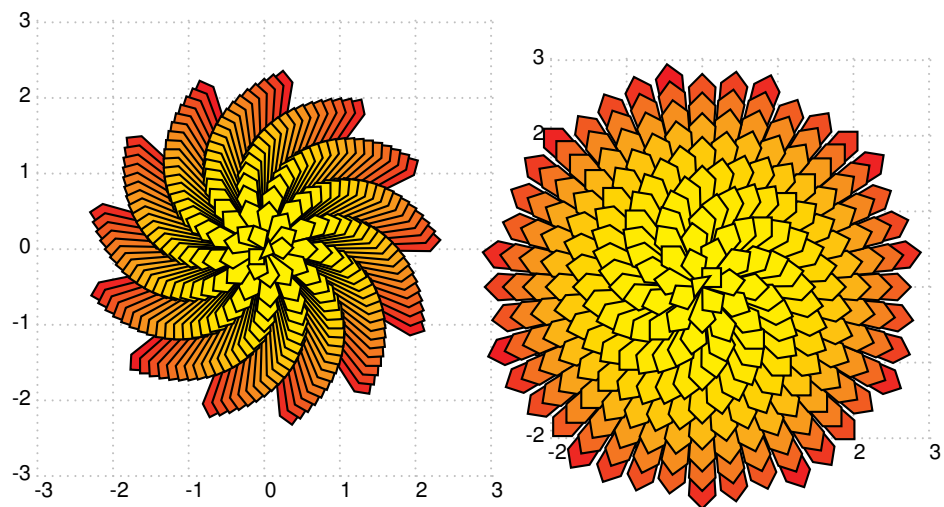


Figura 5.1: e

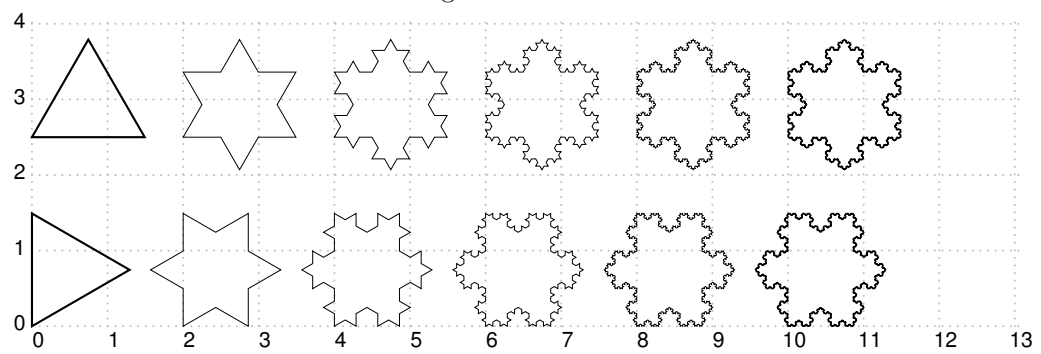


Figura 5.2: s

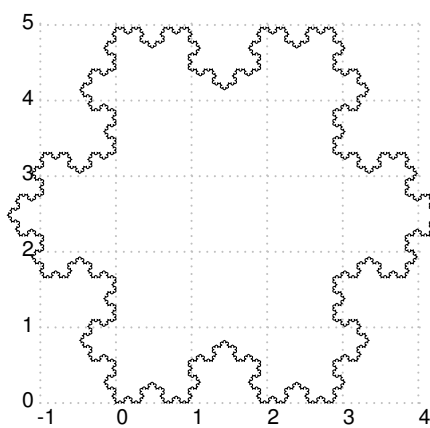


Figura 5.3: copo de nieve de Cosh

fractal descrito por primera vez en 1926 por Karl Menger mientras exploraba el concepto de dimensión topológica

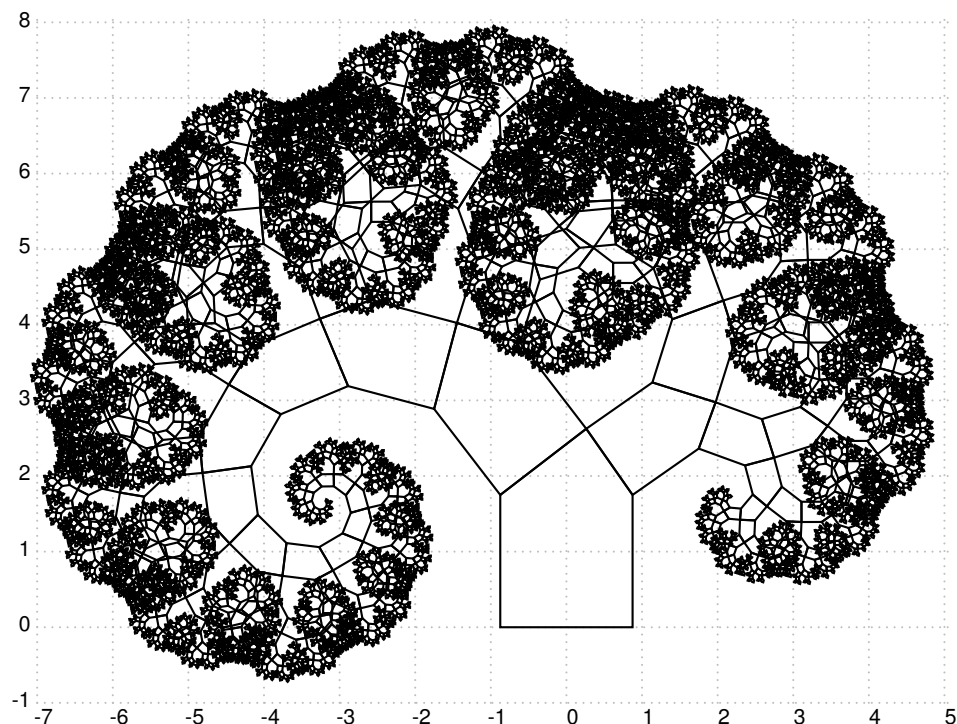


Figura 5.4: Arbol

Al igual que la alfombra de Sierpinski constituye una generalización bidimensional del conjunto de Cantor, esta es una generalización tridimensional de ambos. Comparte con estos muchas de sus propiedades, siendo un conjunto compacto, no numerable y de medida de Lebesgue nula. Su dimensión fractal de Hausdorff es  $d_H = \log 20 / \log 3 \approx 2,7268$ . El área de la esponja de Menger es infinita y al mismo tiempo encierra un volumen cero.

Es de destacar su propiedad de curva universal, pues es un conjunto topológico de dimensión topológica uno, y cualquier otra curva o grafo es homeomorfo a un subconjunto de la esponja de Menger.

La construcción de la esponja de Menger se define de forma recursiva:

1. Comenzamos con un cubo (primera imagen).
2. Dividimos cada cara del cubo en 9 cuadrados. Esto subdivide el cubo en 27 cubos más pequeños, como le sucede al cubo de Rubik.
3. Eliminamos los cubos centrales de cada cara (6) y el cubo central (1), dejando solamente 20 cubos (segunda imagen).
4. Repetimos los pasos 1, 2 y 3 para cada uno de los veinte cubos menores restantes.

La esponja de Menger es el límite de este proceso tras un número infinito de iteraciones.

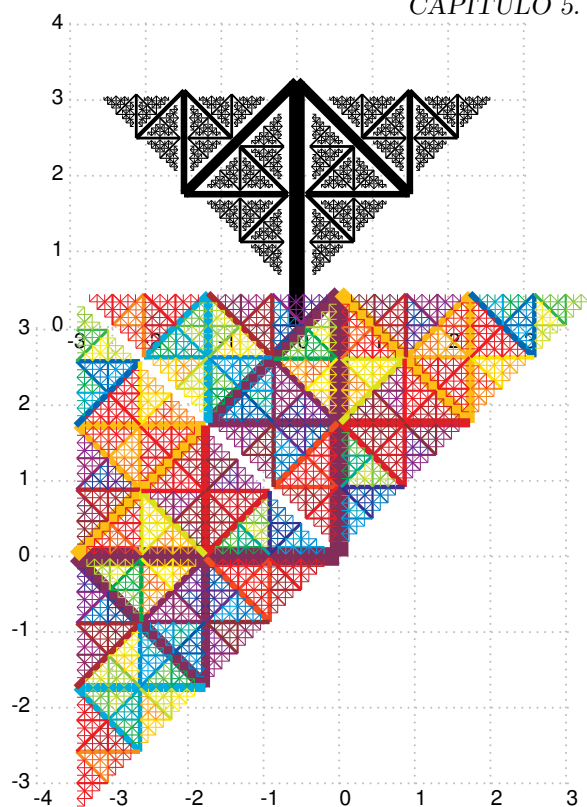


Figura 5.5: e

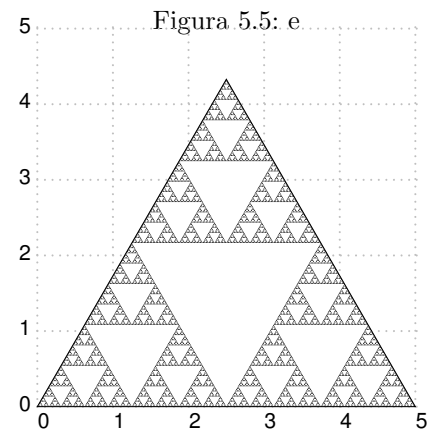


Figura 5.6: triangulo de Sierpinski

Karl Menger (Viena, Austria, 13 de enero de 1902 - Highland Park, Illinois, EE.UU., 5 de octubre de 1985) fue un matemático, hijo del famoso economista Carl Menger, conocido por el teorema de Menger. Dentro de las matemáticas trabajó en álgebra, álgebra de la geometría, teoría de la curva y la dimensión, etc. Además, contribuyó a la teoría de juegos y a las ciencias sociales.

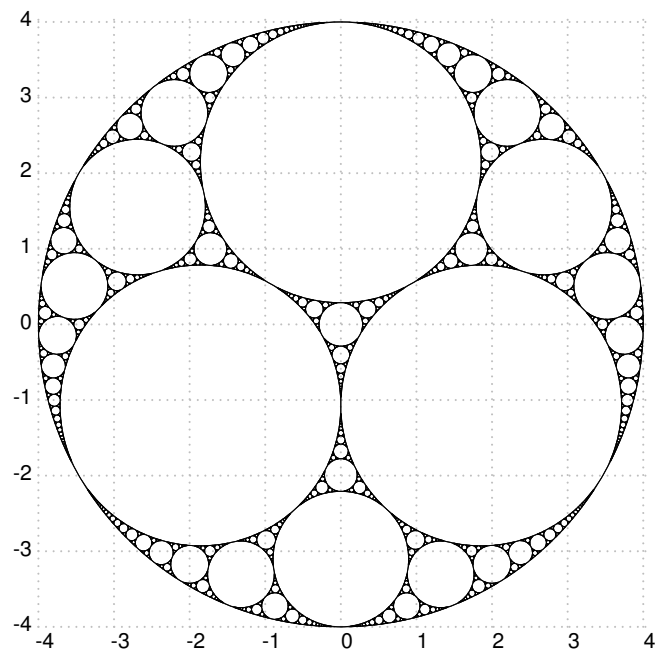


Figura 5.7: Circulo de Apollonius

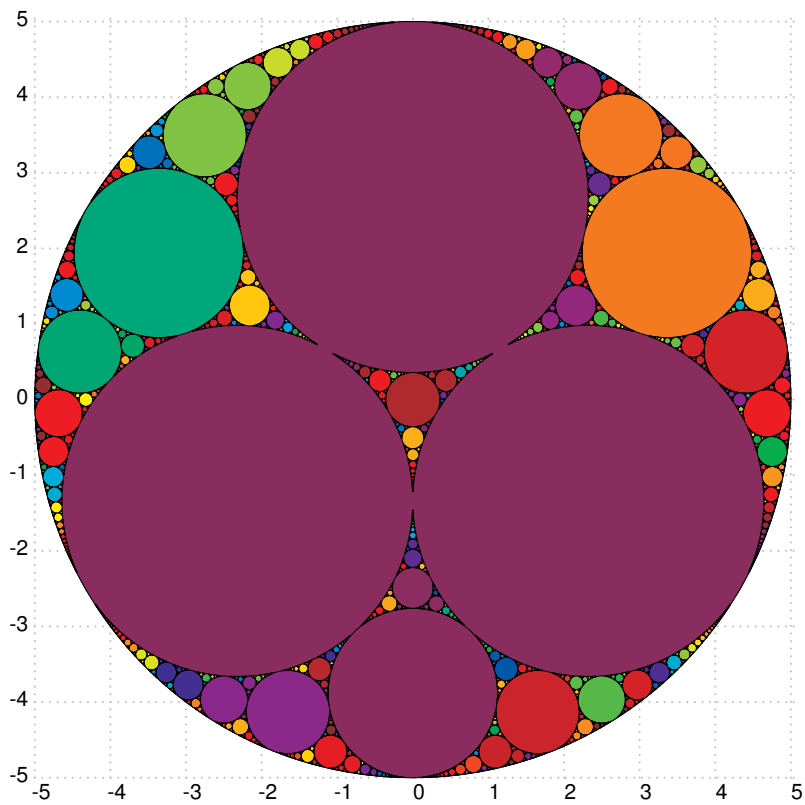


Figura 5.8: Circulo de Apollonius

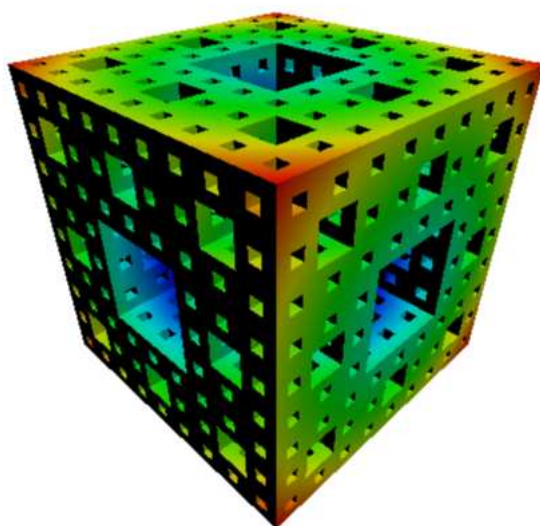


Figura 5.9: Esponja de Menger



## Capítulo 6

# Principios del composición

La sensibilidad es un conjunto de sentimientos que pululan en nuestro subconsciencia armonizadas por nuestro temperamento que acoge nuestro existencia es por eso que se el arte expresa esta armonía con la yuxtaposición adecuada de elementos gráficos es decir es el ritmo que genera un bello lenguaje visual dominarlo es cuestión de nuestro instinto creador conceptual de la realidad anexada a cada ser humano

### 6.0.1. El ritmo

Permutación de un conjunto de series (aritméticas geométricas cualquier otra que puedas inventar) convergentes o no (divergente, constantes) donde una serie puede depender de otra u otras, estas series pueden esa relacionadas con cantidades numéricas tales como ancho, largo, profundidad, distancias entre los objetos, la dirección de los ejes de los objetos con respecto un punto o otra serie, cantidad de rugosidad etcétera.

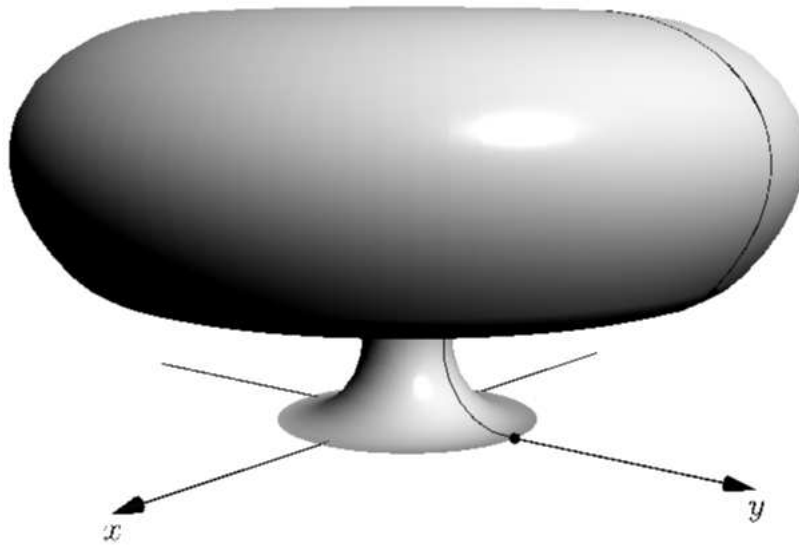
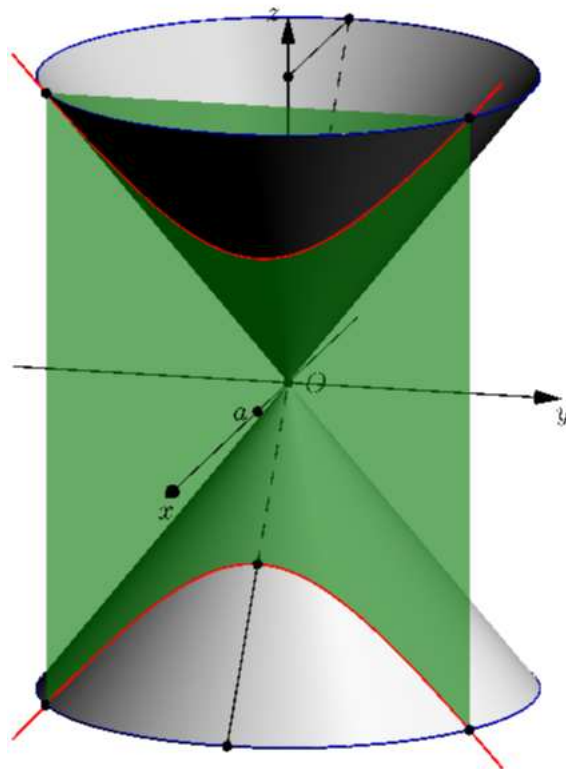
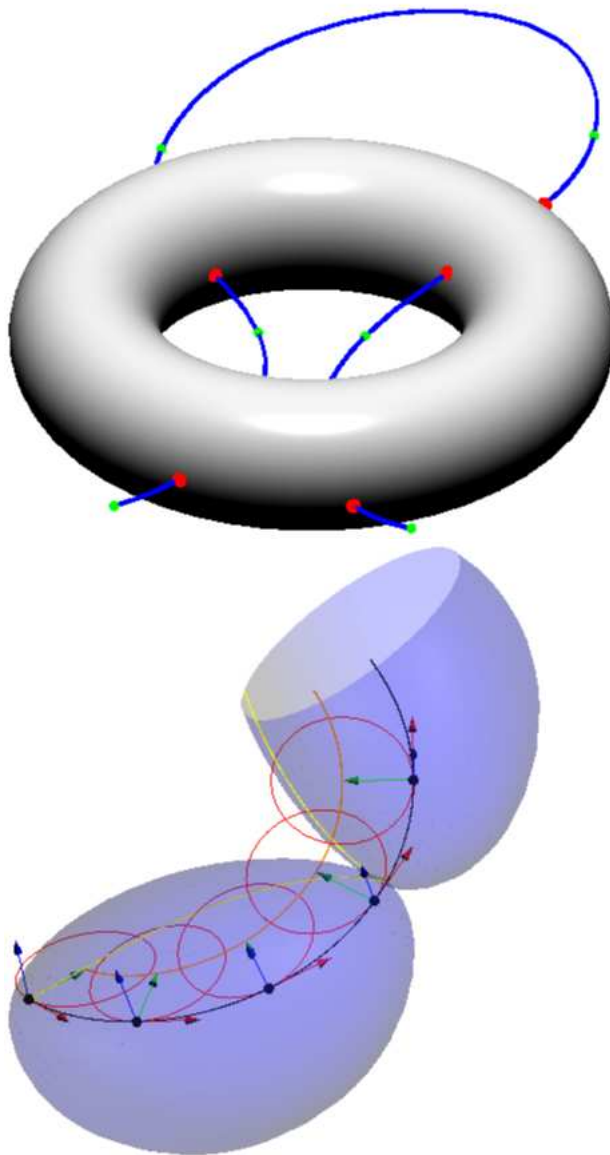


Figura 6.1: www





- a** Considerando la progresión geométrica o aritmética a cualquier otra sucesión de las distancias entre los centros de gravedad de dos objetos adyacentes de modo que guarden alguna sucesión creciente o decreciente de las longitudes entre los elementos.
- b** la metamorfosis de su estructura que estos sufren al converger al foco visual o al divergir de ella.
- c** el color, la textura, el tamaño, etc.

Tenemos un ejemplo  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  y  $GH$  son los objetos a los cuales se le aplico una serie en la distancia horizontal de sus longitudes tal como

En la siguiente figura se observa cuatro series, la primera es aquella generada por  $\alpha$  (serie aritmética  $\dots, 2\theta, \dots$ ) la segunda por (la serie) geométrica)  $\theta$  la

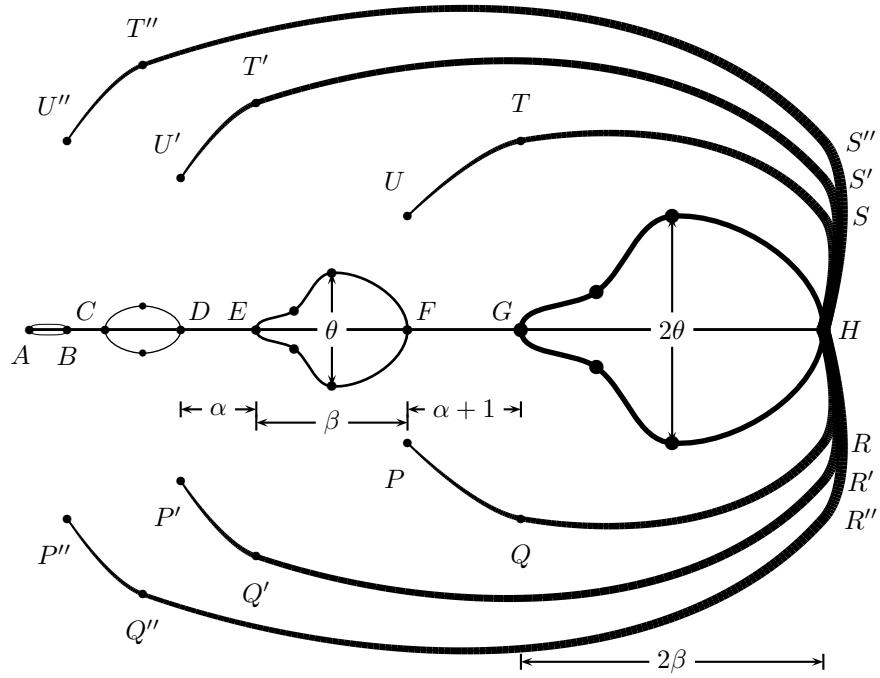


Figura 6.2: Series en una Composición

tercera generada por la líneas de grosor variable donde también esta serie de compone de otras series tales como la distancia entre los puntos  $P''$ ,  $P'$ ,  $P$  son guiados por la segunda serie anterior es decir horizontalmente coinciden con las líneas verticales que parten de los extremos  $C$ ,  $D$ , y  $F$  respectivamente, la distribución vertical de estos puntos obedece a otra serie finalmente la ultima

En el siguiente ejemplo se ganara el ritmo partir de dos series de circunferencia concéntricas, en el primer grupo se ubican los puntos  $A, B, C$  luego se obtiene los puntos  $P, Q$ , y  $R$  al rotar  $90^\circ$  el punto  $O$  centrado en  $A, B$ , y  $C$  respectivamente; a partir de estos puntos se trazan tangentes sobre la segunda serie de circunferencias, ubicandose los punto  $I''$  y  $I'$  sobre la circunferencia menor en la serie, con la

## 6.1. Wwwwwww

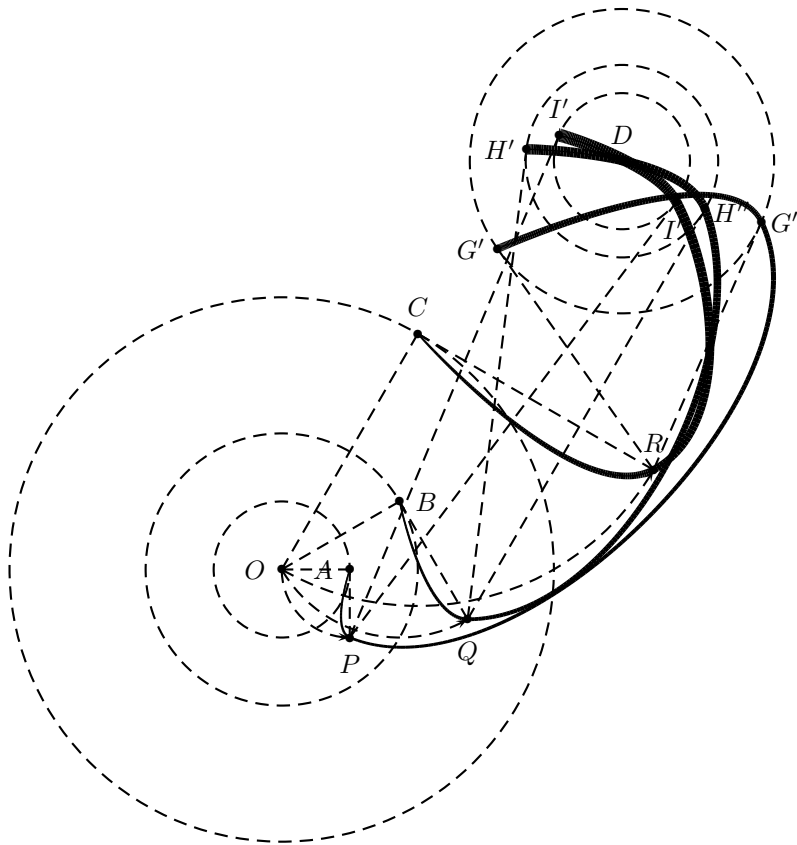


Figura 6.3: series en una composición

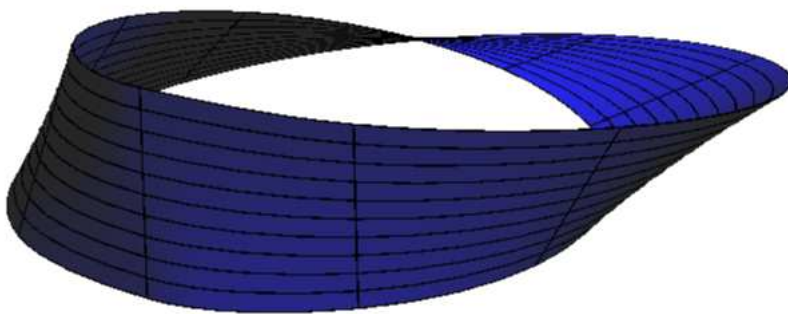


Figura 6.4: wwwwww



## Capítulo 7

# Proporcion y canon

### 7.1. Proporcion en el arte

### 7.2. Proporcion directa

### 7.3. Proporcion inversa

### 7.4. Canon

#### 7.4.1. Canon griego

#### 7.4.2. Canon egipcio

#### 7.4.3. Canon andino

El buen gusto por la perfección exquisitas llevo a los generadores de formas reales o abstractas a concebir cañones y reglas, la analogía de la sección áurea con muchas areas de la ciencia no explica como el numero del promedio entre el caos y el orden los rectángulos estáticos” no producen divisiones armónicas, no obstante los rectángulos dinámicos producen las mas variadas y satisfactorias subdivisiones y combinaciones distintas sin encontrar antagonismos entre ellos mas aun viéndolas unirse entre ellas para genera un solo objeto bidimensionales por ejemplo el  $\sqrt{5}$  se compone de muchos de el mismo y del rectángulo  $\phi$





# Referencias

- Gallego, J. C., Cid, C. D. V., Brito, J. G., y Rojas, A. V. (2020). Introducción a las técnicas de investigación social. (Google-Books-ID: 3HGUDAAAQBAJ)
- Gutiérrez, S. J. (2015). *Competencia matemática y mediación del aprendizaje, en estudiantes de la escuela de formación profesional de educación primaria, unsch - 2015*, (tesis de maestría). UNSCH, Ayacucho. Descargado de <http://repositorio.unsch.edu.pe/handle/UNSCH/1357>
- Heinz, R. F. (1997). *Sculpture contemporaine* (2.<sup>a</sup> ed.). Huyguens, Paris: Albin Michael, 22.
- Hilbert, D., y Cohn-Vossen, S. (2020). *Geometry and the imagination*. American Mathematical Society. Descargado de <https://books.google.com.pe/books?id=5y1tzgEACAAJ>
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación matemática*, 10(02), 23–45.
- Jackson, S. (2012). *Research methods and statistics: A critical thinking approach*. Cengage Learning. Descargado de [https://books.google.com.pe/books?id=YXHuw\\\_aIIgYC](https://books.google.com.pe/books?id=YXHuw\_aIIgYC)
- Phillips, L., Norris, S., y Macnab, J. (2010). *Visualization in mathematics, reading and science education*. Springer Netherlands.
- Surhone, L. M., Timpelton, M., y Marseken, S. (2010). *Shapiro-wilk test*. VDM Publishing.

# Índice alfabético

constante, 4

ecuaciones, 5

www, 1, 2

www, 51

# Apéndice A

## Sistemas de coordenadas

### A.1. Coordenadas cartesianas

### A.2. Coordenadas esféricas

El sistema de coordenadas esféricas se basa en la misma idea que las coordenadas polares y se utiliza para determinar la posición espacial de un punto mediante una distancia y dos ángulos. En consecuencia, un punto  $P$  queda representado por un conjunto de tres magnitudes: el radio  $r$ , el ángulo polar o colatitud  $\theta$  y el azimutal  $\varphi$ .

Algunos autores utilizan la latitud, en lugar de colatitud, en cuyo caso su margen es de  $-90$  a  $90$  (de  $-\pi/2$  a  $\pi/2$  radianes), siendo el cero el plano  $XY$ . También puede variar la medida del azimutal, según se mida el ángulo en sentido reloj o contrarreloj, y de  $0$  a  $360$  ( $0$  a  $2\pi$  en radianes) o de  $-180$  a  $+180$  ( $-\pi$  a  $+\pi$ ).

La mayoría de los físicos, ingenieros y matemáticos norteamericanos escriben:

1.  $\varphi$ , el azimutal : de  $0$  a  $360$
2.  $\theta$ , la colatitud : de  $0$  a  $180$

Esta es la convención que se sigue en este artículo. En el sistema internacional, los rangos de variación de las tres coordenadas son:  $0 \leq r < \infty$      $0 \leq \theta \leq \pi$      $0 \leq \varphi < 2\pi$

La coordenada radial es siempre positiva. Si reduciendo el valor de  $r$  llega a alcanzarse el valor  $0$ , a partir de ahí,  $r$ ; vuelve a aumentar, pero  $\theta$  pasa a valer  $\pi - \theta$  y  $\varphi$  aumenta o disminuye en  $\pi$  radianes.

### A.3. Coordenadas cilíndricas

El sistema de coordenadas cilíndricas es muy conveniente en aquellos casos en que se tratan problemas que tienen simetría de tipo cilíndrico o azimutal. Se trata de una versión en tres dimensiones de las coordenadas polares de la geometría analítica plana.

Un punto  $P$  en coordenadas cilíndricas se representa por  $(\rho, \varphi, z)$  donde:

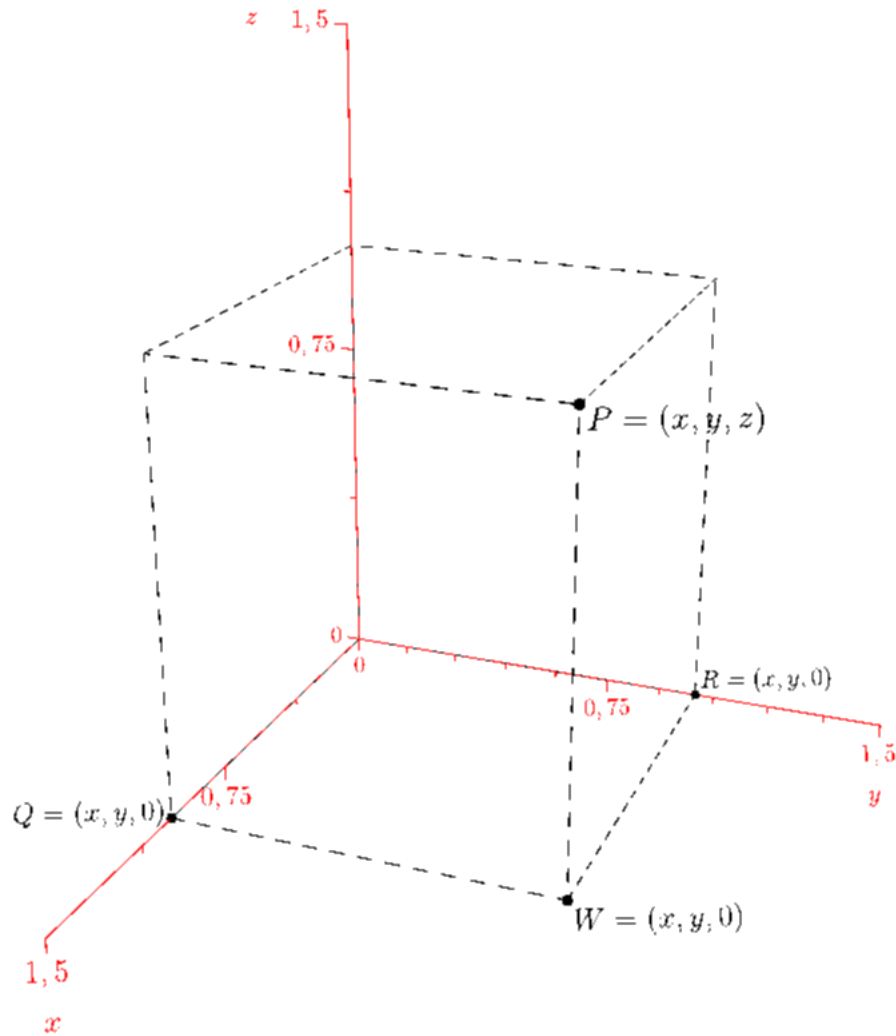


Figura A.1:

1.  $\rho$  : Coordenada radial, definida como la distancia del punto  $P$  al eje  $z$ , o bien la longitud de la proyección del radiovector sobre el plano  $XY$
2.  $\varphi$  : Coordenada azimutal, definida como el ángulo que forma con el eje  $X$  la proyección del radiovector sobre el plano  $XY$ .
3.  $z$ : Coordenada vertical o altura, definida como la distancia, con signo, desde el punto  $P$  al plano  $XY$ .

Los rangos de variación de las tres coordenadas son  $0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < \infty$ .

La coordenada azimutal  $\varphi$  se hace variar en ocasiones desde  $-\phi$  a  $\pi$ . La coordenada radial es siempre positiva. Si reduciendo el valor de  $\rho$  llega a alcanzarse el valor 0, a partir de ahí,  $\rho$  vuelve a aumentar, pero  $\varphi$  aumenta o disminuye en  $\pi$  radianes.

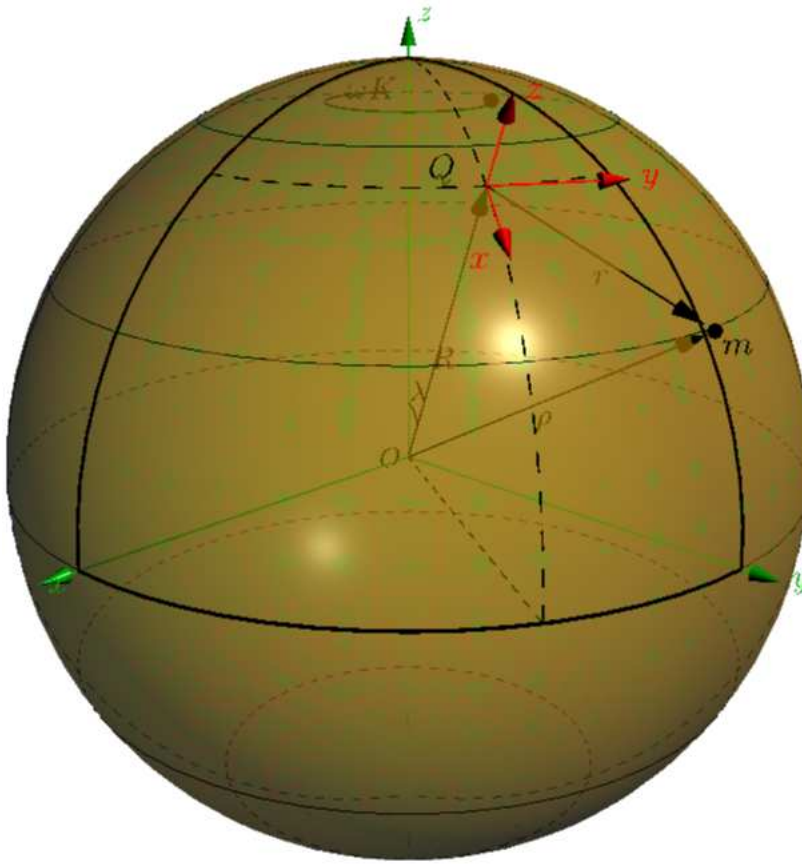


Figura A.2: Coordenadas esféricas

Teniendo en cuenta la definición del ángulo  $\varphi$ , obtenemos las siguientes relaciones entre las coordenadas cilíndricas y las cartesianas:  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$

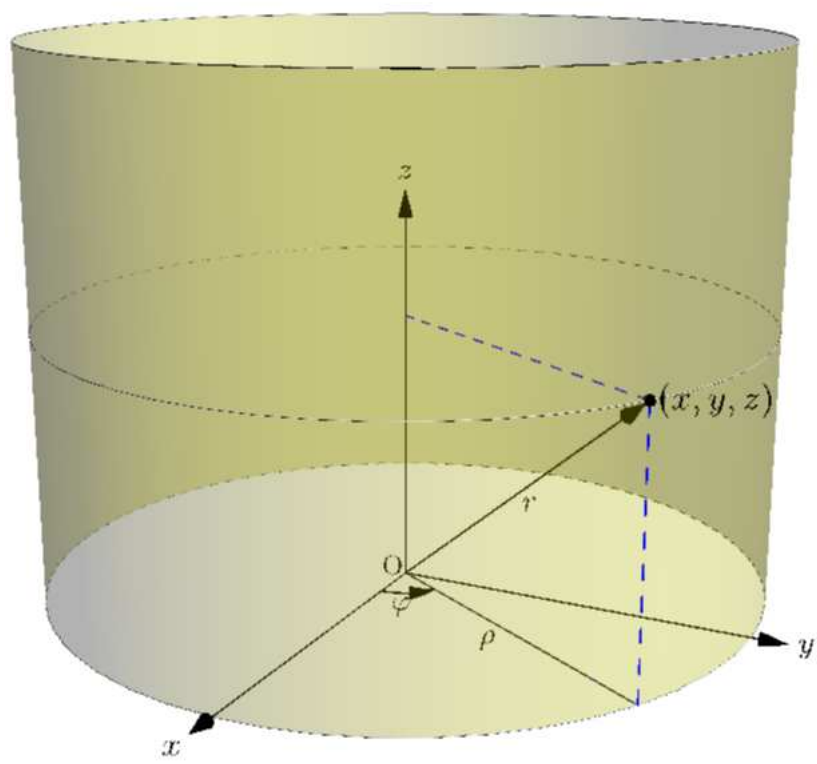
#### A.4. Transformacion de coordenadas

#### A.5. Dirección de una línea 2D y 3D

Analogue of spherical coordinates in  $n$ -dimensions

1. Recta en dos bidimensiones two dimensions, you can use polar coordinates:
2. Recta en 3 bidimensiones, you can use spherical coordinates:
3. Recta en  $n$  bidimensiones, you can use hyperspherical coordinates.

But basically, in any  $n$ -dimensional space, you'll have one length coordinate and  $(n-1)$  angle coordinates.

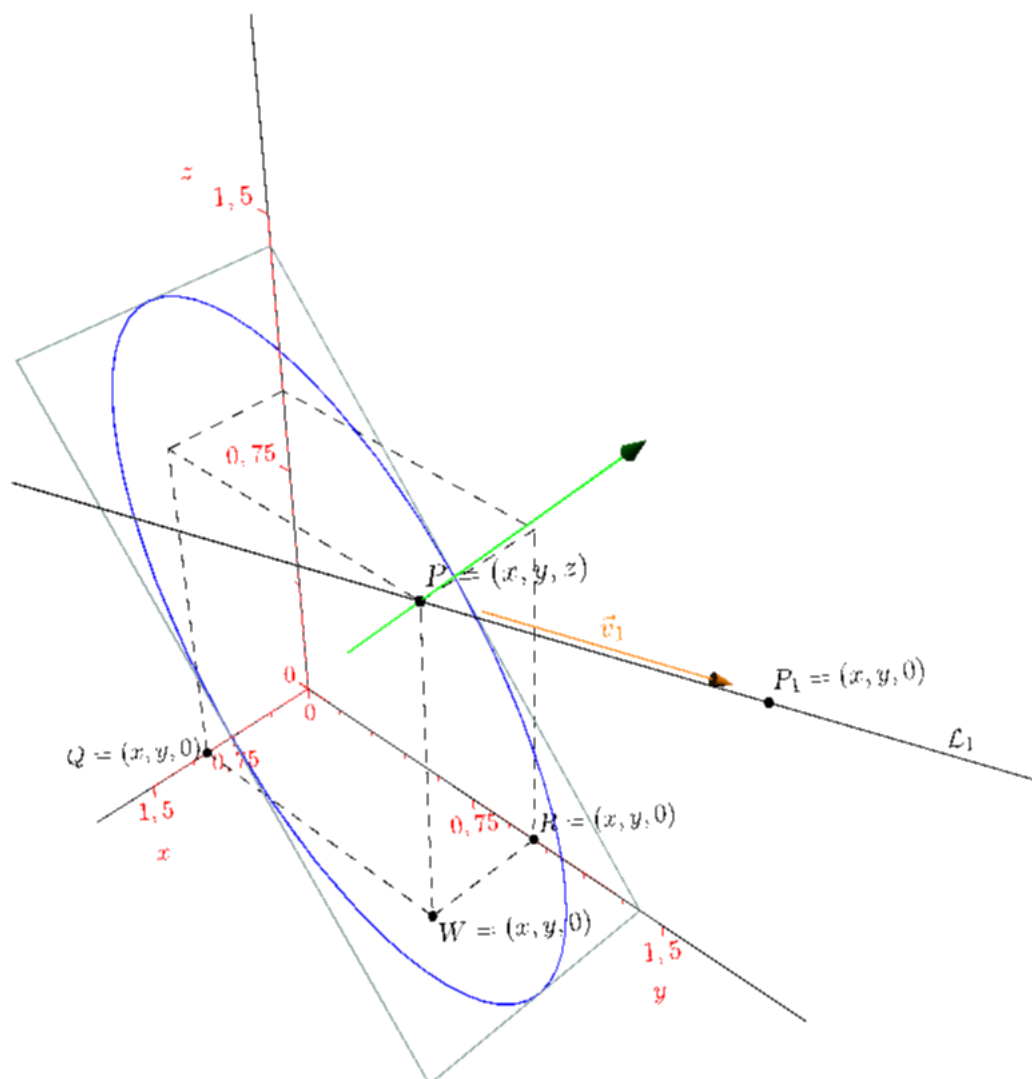




## Apéndice B

# Recta y plano

### B.1. Vector





**B.2. Recta**

**B.3. Plano**



## Apéndice C

# La forma y elementos

C.1. Centro de masa

C.2. Eje de una forma

C.3. Volumen

C.4. Simplicaciones de la forma



## Apéndice D

# Transformaciones

### D.1. Transformaciones elementales

#### D.1.1. Traslacion

Las traslaciones pueden entenderse como movimientos directos sin cambios de orientación, es decir, mantienen la forma y el tamaño de las figuras u objetos trasladados, a las cuales deslizan según el vector. Dado el carácter de isometría para cualquier punto  $X$  y  $H$  se cumple la siguiente identidad entre distancias:

Las traslaciones pueden entenderse como movimientos directos sin cambios de orientación, es decir, mantienen la forma y el tamaño de las figuras u objetos trasladados, a las cuales deslizan según el vector. Dado el carácter de isometría para cualquier punto  $X$  y  $H$  se cumple la siguiente identidad entre distancias:

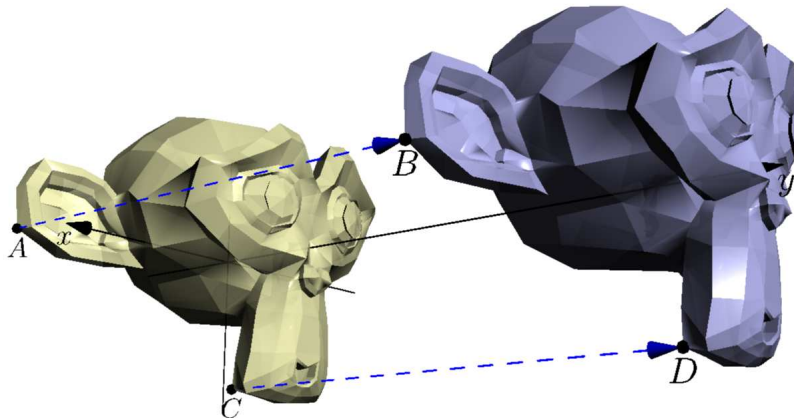


Figura D.1: Traslacion

#### D.1.2. Rotation

Las traslaciones pueden entenderse como movimientos directos sin cambios de orientación, es decir, mantienen la forma y el tamaño de las figuras u objetos

trasladados, a las cuales deslizan según el vector. Dado el carácter de isometría para cualquier punto  $X$  y  $H$  se cumple la siguiente identidad entre distancias:

Las traslaciones pueden entenderse como movimientos directos sin cambios de orientación, es decir, mantienen la forma y el tamaño de las figuras u objetos trasladados, a las cuales deslizan según el vector. Dado el carácter de isometría para cualquier punto  $X$  y  $H$  se cumple la siguiente identidad entre distancias:

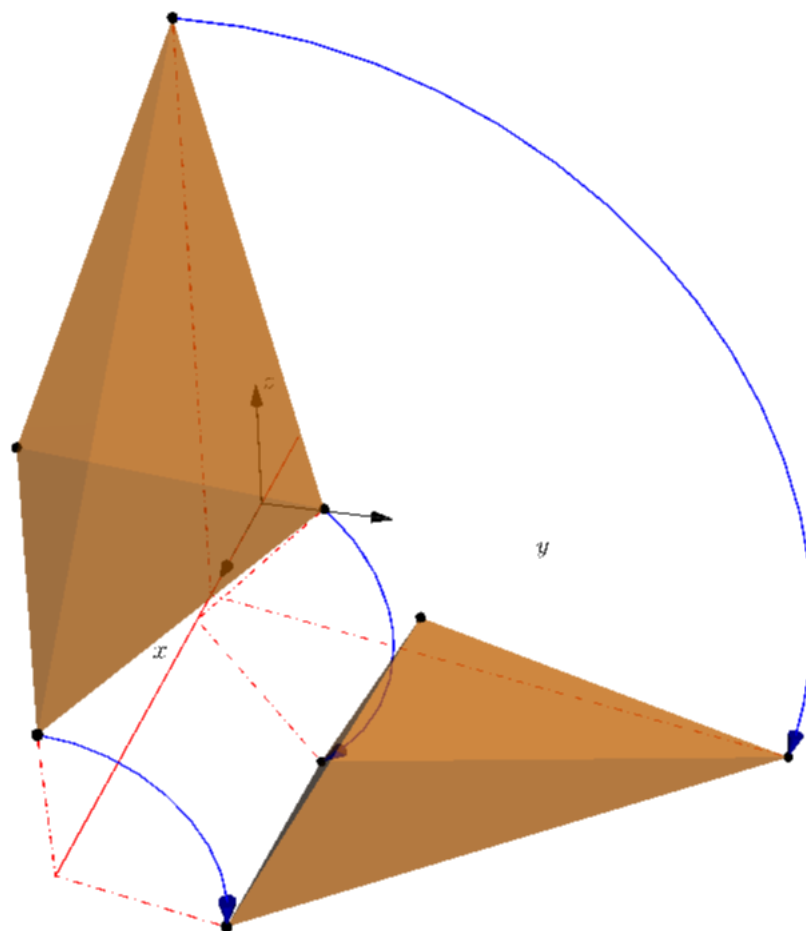


Figura D.2: Rotation

### D.1.3. Simetry

Las traslaciones pueden entenderse como movimientos directos sin cambios de orientación, es decir, mantienen la forma y el tamaño de las figuras u objetos trasladados, a las cuales deslizan según el vector. Dado el carácter de isometría para cualquier punto  $X$  y  $H$  se cumple la siguiente identidad entre distancias:

Las traslaciones pueden entenderse como movimientos directos sin cambios de orientación, es decir, mantienen la forma y el tamaño de las figuras u objetos trasladados, a las cuales deslizan según el vector. Dado el carácter de isometría para cualquier punto  $X$  y  $H$  se cumple la siguiente identidad entre distancias:

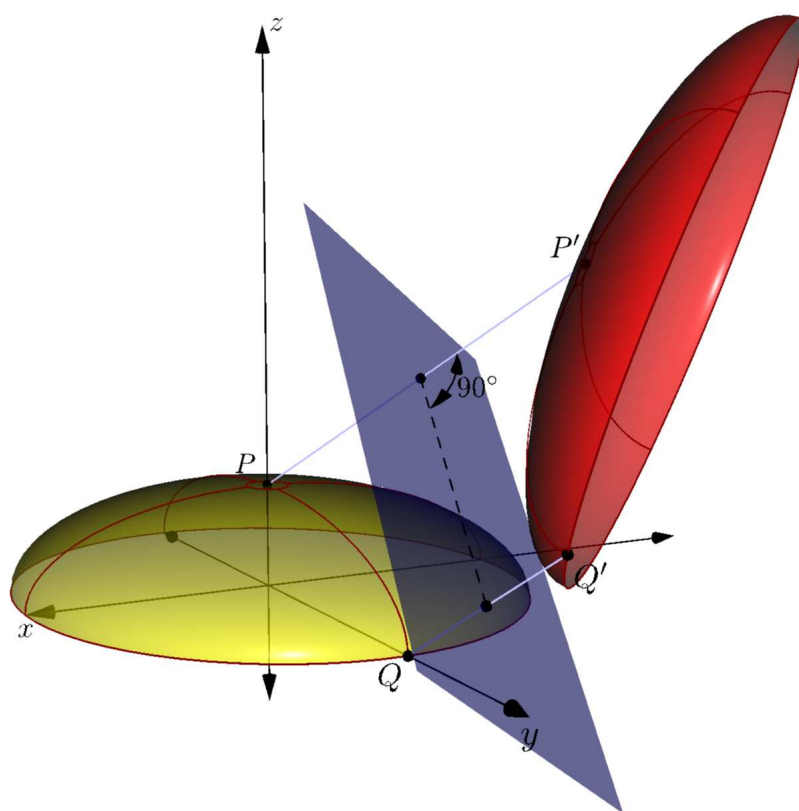


Figura D.3: Simetry

#### D.1.4. Homotecia

Las traslaciones pueden entenderse como movimientos directos sin cambios de orientación, es decir, mantienen la forma y el tamaño de las figuras u objetos trasladados, a las cuales deslizan según el vector. Dado el carácter de isometría para cualquier punto  $X$  y  $H$  se cumple la siguiente identidad entre distancias:

Las traslaciones pueden entenderse como movimientos directos sin cambios de orientación, es decir, mantienen la forma y el tamaño de las figuras u objetos trasladados, a las cuales deslizan según el vector. Dado el carácter de isometría para cualquier punto  $X$  y  $H$  se cumple la siguiente identidad entre distancias:

## D.2. Transformaciones topológicas

Coloquialmente, se presenta a la topología como la geometría de la página de goma (chicle). Esto hace referencia a que, en la geometría euclídea, dos objetos serán equivalentes mientras podamos transformar uno en otro mediante isometrías (rotaciones, traslaciones, reflexiones, etc.), es decir, mediante transformaciones que conservan las medidas de ángulo, área, longitud, volumen y otras.

En topología, dos objetos son equivalentes en un sentido mucho más am-

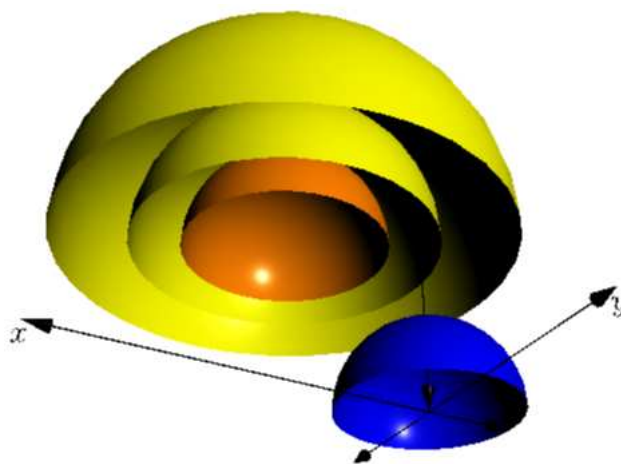


Figura D.4: Escala - Homotecia

plio. Han de tener el mismo número de trozos, huecos, intersecciones, etc. En topología está permitido doblar, estirar, encoger, retorcer, etc., los objetos, pero siempre que se haga sin romper ni separar lo que estaba unido, ni pegar lo que estaba separado. Por ejemplo, un triángulo es topológicamente lo mismo que una circunferencia, ya que podemos transformar uno en otra de forma continua, sin romper ni pegar. Pero una circunferencia no es lo mismo que un segmento, ya que habría que partirla (o pegarla) por algún punto.

Esta es la razón de que se la llame la geometría de la página de goma, porque es como si estuviéramos estudiando geometría sobre un papel de goma que pudiera contraerse, estirarse, etc.

Una taza transformándose en una rosquilla (toro). Un chiste habitual entre los topólogos (los matemáticos que se dedican a la topología) es que un topólogo es una persona incapaz de distinguir una taza de una rosquilla. Pero esta visión, aunque muy intuitiva e ingeniosa, es sesgada y parcial. Por un lado, puede llevar a pensar que la topología trata solo de objetos y conceptos geométricos, siendo más bien al contrario, es la geometría la que trata con un cierto tipo de objetos topológicos. Por otro lado, en muchos casos es imposible dar una imagen o interpretación intuitiva de problemas topológicos o incluso de algunos conceptos. Es frecuente entre los estudiantes primerizos escuchar que no entienden la topología y que no les gusta esa rama; generalmente se debe a que se mantienen en esta actitud gráfica. Por último, la topología se nutre también en buena medida de conceptos cuya inspiración se encuentra en el análisis matemático. Se puede decir que casi la totalidad de los conceptos e ideas de esta rama son conceptos e ideas topológicas.

### D.2.1. Homeomorfismo

### D.2.2. Isometria



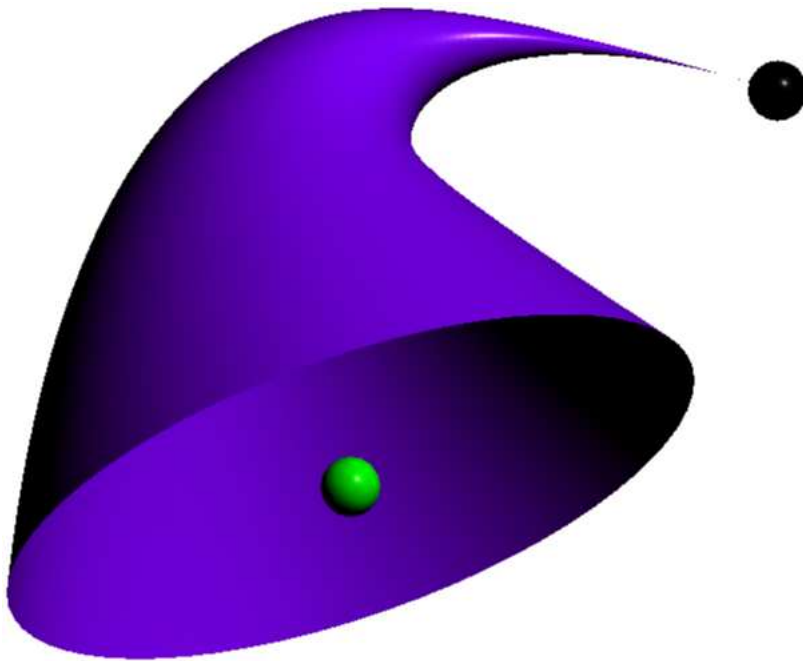


Figura D.5: Secciones y rebanadas

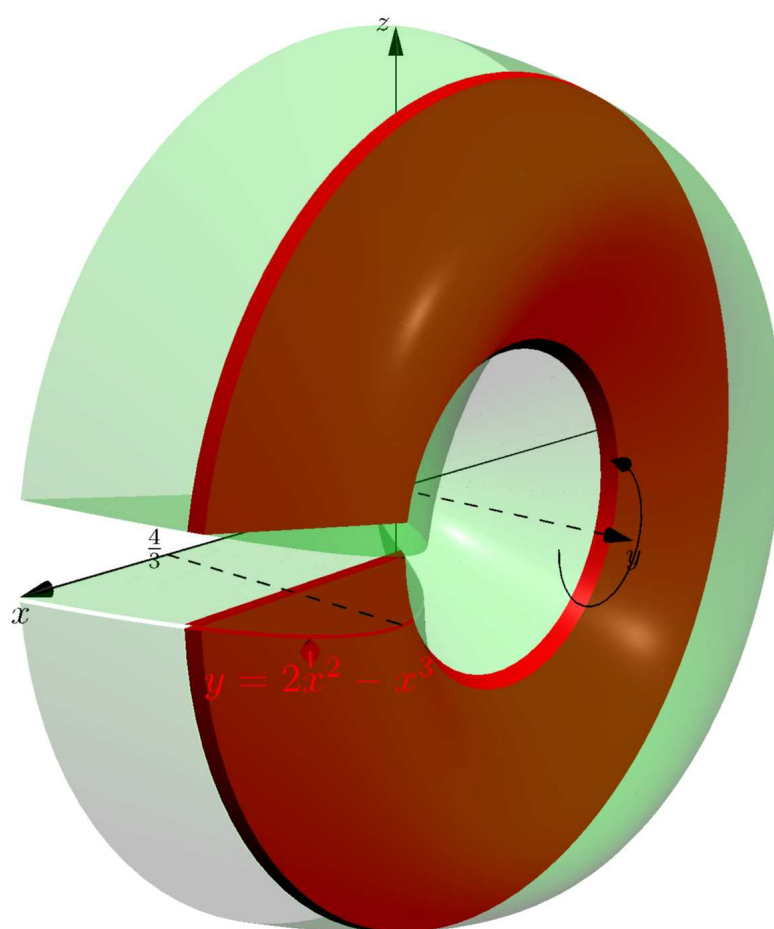


Figura D.6: Secciones y rebanadas

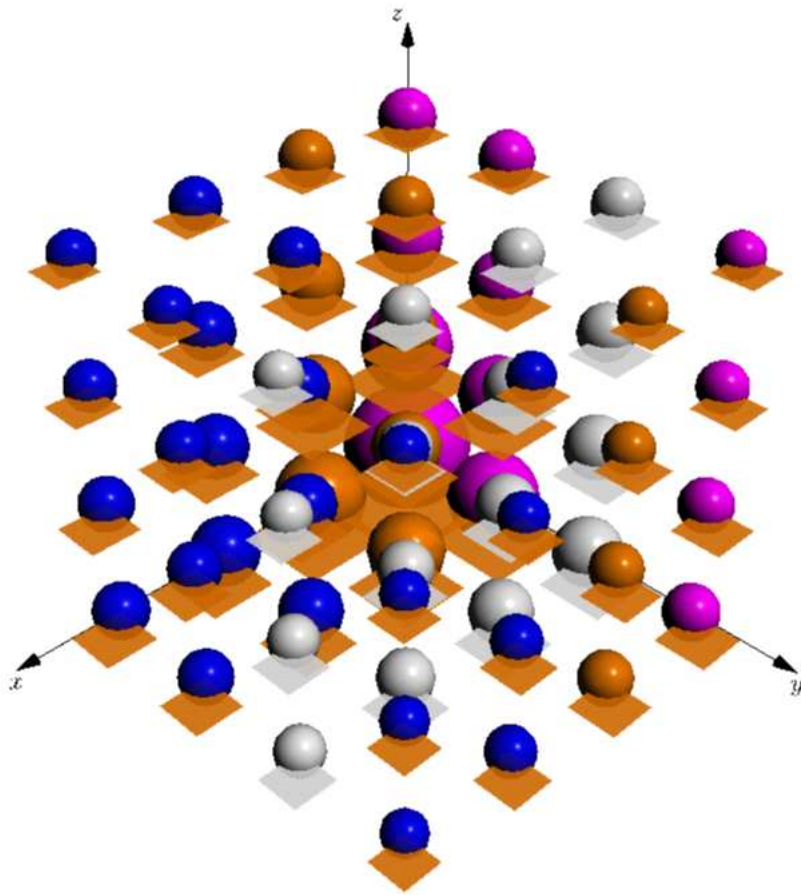


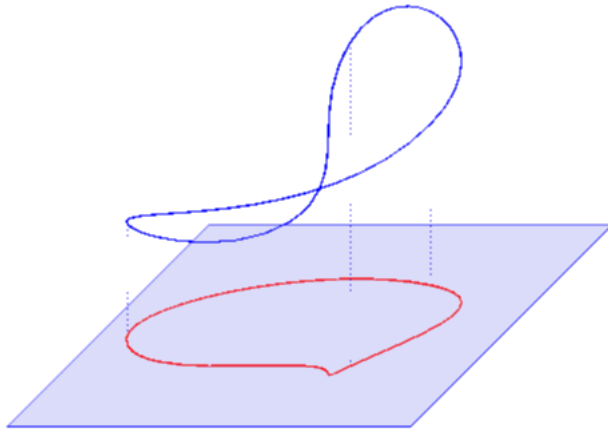
Figura D.7: Array



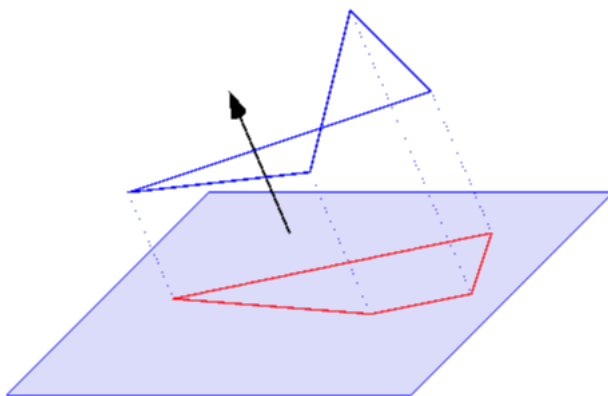
## Apéndice E

# Proyecciones

### E.0.1. Ortogonal



### E.0.2. Oblicua



### E.0.3. Estereografica

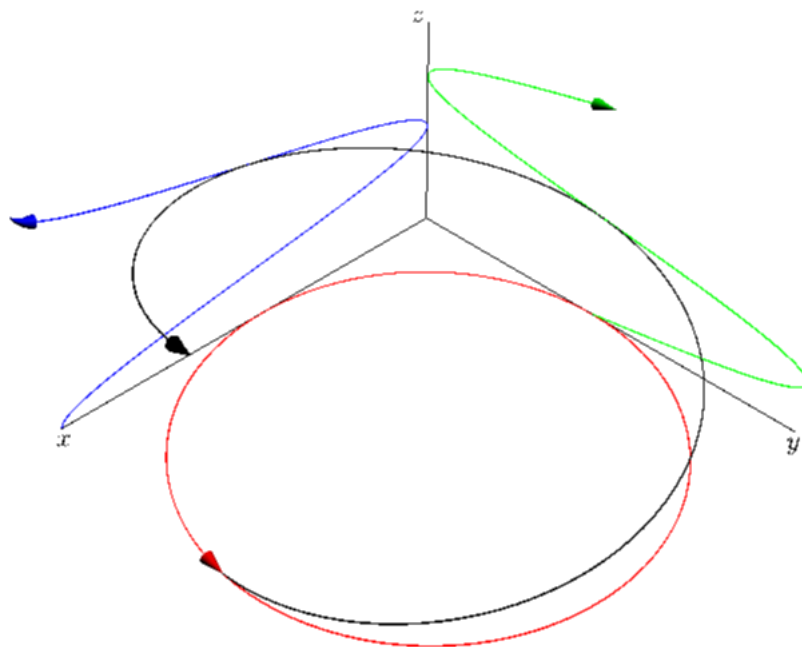


Figura E.1: Ortogonal

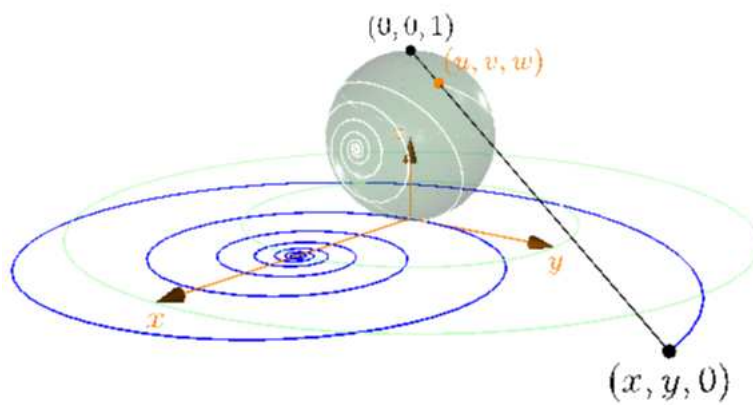


Figura E.2: Estereografica

2	3	5	7	
11	13	17	19	
23	29	31	37	
0	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8
5	6	7	8	9
6	7	8	9	10

Figura E.3: www