

Ricardo Michel MALLQUI BAÑOS

Geometria-vectorial



Índice general

Índice de cuadros	v
Índice de figuras	vii
Resumen	ix
Introducción	xi
1. Vectores	1
2. Rectas	3
3. Lugar geométrico	5
4. Circunferencia	7
5. Parábola	11
6. Elipse	15
7. Hipérbola	19
Apéndice	21
A. Ecuaciones de primer grado	23
A.1. Raíces de una ecuación de segundo grado	23
A.2. Propiedades de una ecuación de segundo grado	23
B. Ecuaciones lineales de primer grado	25
B.1. Soluciones de ecuaciones lineales de primer grado	25
B.2. Soluciones	25
B.3. Forma matricial de una ecuación lineal	25
Bibliografía	27
Índice alfabético	29



Índice de cuadros



Índice de figuras

4.1. Vector	7
4.2. Circunferencia	8
5.1. Prábola	11
6.1. Elipse	15
7.1. Hipérbola	19



Resumen

Este es un libro sobre la geometria vectorial



Introducción



1

Vectores



2

Rectas



3

Lugar geométrico

Here is a review of existing methods.



4

Circunferencia

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2)$ entonces el vector escalado es $r\vec{a} \parallel \vec{a}$; el vector perpendicular a este es $\vec{a}^\perp = (-a_2, a_1)$ la norma del vector \vec{a} es $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ el vector unitario en la dirección de \vec{a} es $\vec{\mu} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ que es paralela a este. Dado dos puntos P_1 y P_2 estos definen un vector $\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1$. Los vectores en dirección de los ejes positivos son $i = (1, 0)$ y $j = (0, 1)$; cualquier vector se pueden expresar en términos de estos es decir $\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1i + a_2j$. De acuerdo al ángulo de inclinación del vector se tiene la siguiente representación $\vec{a} = \|\vec{a}\| (\cos \theta, \sin \theta)$. C

Teorema 4.1 (russ). Dada el espacio R y $r \in R$ se tiene que $\mathcal{R}(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(y)_r$

Σ

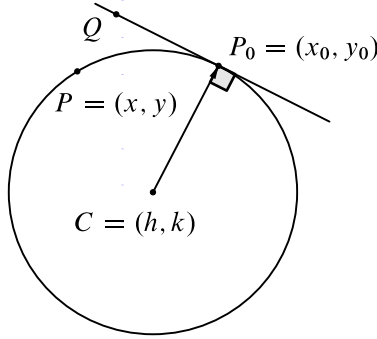


Figura 4.1 Vector

Dos vectores son ortogonales ($\vec{a} \perp \vec{b}$) si $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ y verifican

$|\vec{b}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2$ $\vec{a}\vec{b} = 0$ $\vec{a} \parallel \vec{b}^\perp$ \vec{a} y \vec{b} son LI si y solo si $r\vec{a} + s\vec{b} = 0$ implica $r = 0$ y $s = 0$.

La proyección de \vec{a} sobre \vec{b} es otro vector $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$

$\vec{a} = \text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} + \text{Proy}_{\vec{b}^\perp}\vec{a}$ si hacemos $\vec{a} = p\vec{b} + q\vec{b}^\perp$ entonces $q = \frac{\vec{a}\vec{b}^\perp}{\|\vec{b}\|^2}$ y $p = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$

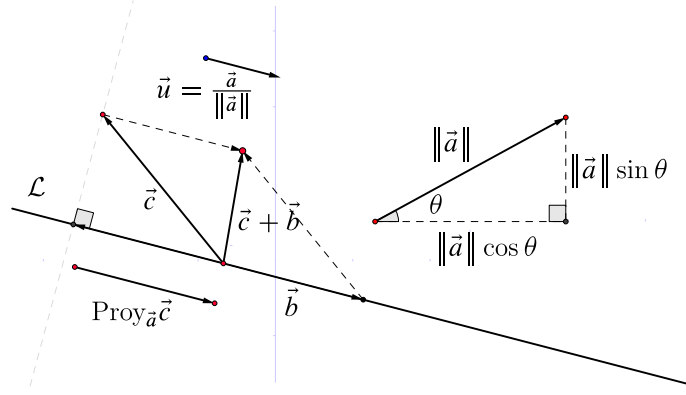


Figura 4.2 Circunferencia

pues $\|\vec{b}\| = \|\vec{b}^\perp\|$ entonces $\text{Proy}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \text{Cp}_{\vec{b}} \vec{a} \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$; $\text{Cp}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$
 recibe el nombre de componente de \vec{a} en la dirección de \vec{b}

Dado P_0 y un vector \vec{a} entonces la recta se define como el conjunto de puntos $\mathcal{L} = \{P \in \mathbb{R}^2 / P = P_0 + t\vec{a}; t \in \mathbb{R}\}$ que recibe el nombre de ecuación vectorial de la recta. $P \in \mathcal{L} \iff (P - P_0) \cdot \vec{a}^\perp = 0$. De la ecuación vectorial de la recta se tiene si $P = (x, y)$; $P_0 = (x_0, y_0)$ y $\vec{a} = (a_1, a_2)$ se tiene la ecuación paramétrica de la recta. $x = x_0 + ta_1$; $y = y_0 + ta_2$ de esto se obtiene la ecuación simétrica de la recta

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

Sea $\vec{n} = (a, b) = \vec{a}^\perp$ entonces se tiene que si $P \in \mathcal{L}$ entonces $(P - P_0) \cdot \vec{n} = 0$ pues son perpendiculares; entonces $P \cdot \vec{n} = P_0 \cdot \vec{n} \iff ax + by = -c \implies ax + by + c = 0$ que recibe el nombre de ecuación general de la recta. Sea $Q = (x_1, y_1)$ un punto exterior a \mathcal{L} entonces la distancia de Q a \mathcal{L} se define como

$$\begin{aligned} d[Q; \mathcal{L}] &= |\text{Cp}_{\vec{n}}(Q - P_0)| \\ &= \left| \frac{(Q - P_0) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \\ &= \left| \frac{Q \cdot \vec{n} - P_0 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Sean \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 dos rectas; con vectores directores $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$

respectivamente; entonces $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = (d_1, d_2)$ donde d_1 y d_2 satisfacen el sistema generado por las ecuaciones generales de \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 ; $a_1x + a_1y + k_1 = 0$ y $b_1x + b_1y + k_2 = 0$.

La pendiente de una recta se deduce de su vector director es decir si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ entonces $m = \frac{a_2}{a_1}$; de esto se deduce $\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, \frac{a_2}{a_1}) = a_1(1, m)$. El angulo generado por las \mathcal{L}_1 con pendiente m_1 y \mathcal{L}_2 con pendiente m_1 ; está dada por $\theta = \arctan\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$.

El círculo se define como el conjunto de punto $P = (x, y)$ que satisfacen la ecuación

$$\|P - C\| = r$$

$r > 0$ es el radio, $C = (h, k)$ es el centro entonces la ecuación del círculo es

$$\|P - C\| = r \iff (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

La ecuación de la recta tangente en $P_0 = (x_0, y_0)$ ($P = P_0$ en el gráfico) está dada por

$$(Q - P_0) \cdot (P_0 - C) = 0$$

donde $Q = (x, y) \neq P$ cualquiera; entonces

$$(Q - P_0) \cdot (P_0 - C) = 0 \iff (x - x_0, y - y_0)(x_0 - h, y_0 - k) = 0$$

lo cual es equivalente a

$$(x - h)(x_0 - h) + (x - k)(y_0 - k) = r^2$$



5

Parábola

Sean la recta \mathcal{L} y el punto F fijos; los puntos P que satisfacen la ecuación

$$d[P; F] = d[P; \mathcal{L}] = |p| \quad (5.1)$$

generan una curva llamada *parábola*, la excentricidad es el cociente de estas dos distancias que es igual a 1 pues ambas son iguales a $|p|$.

\mathcal{L} es la *recta directriz* cuya ecuación es $x' = -p$ en el sistema $X'Y'$; F es el *foco*, $V = (h, k)$ el *vértice*; p es el parámetro de la parábola; y RR' el *lado recto* de la parábola.

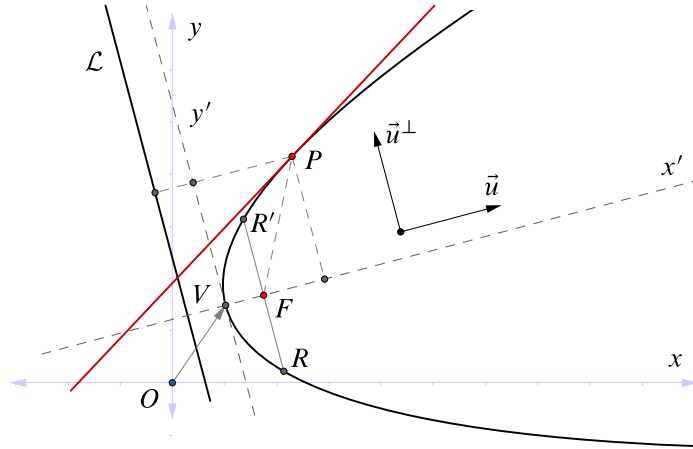


Figura 5.1 Parábola

Los puntos P en el sistema $X'Y'$ satisfacen $P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp$ de donde al despejar x' e y' resultan $x' = [(x, y) - V] \cdot \vec{u}$ e $y' = [(x, y) - V] \cdot \vec{u}^\perp$ la recta directriz en el sistema $X'Y'$ es $\mathcal{L} = \{Q / Q = (V - p\vec{u}) + t\vec{u}^\perp, t \in \mathbb{R}\}$; donde el vértice es $F = V + p\vec{u}$ luego se tiene las ecuaciones

$$d[P; \mathcal{L}] = |C_{\vec{u}} \vec{PQ}| = |(Q - P) \cdot \vec{u}| = |x' + p| \quad (5.2)$$

$$d[P; F] = |P - F| = |(x' - p)\vec{u} + y'\vec{u}^\perp| \quad (5.3)$$

por lo tanto reemplazando (5.2) y (5.3) en (5.1)

$$\begin{aligned} d[P; F]^2 = d[P; \mathcal{L}]^2 &\implies |(x' + p)\vec{u} + y'\vec{u}^\perp|^2 = |x' + p|^2 \\ &\implies (x' - p)^2 + y'^2 = (x' + p)^2 \\ &\implies y'^2 = 4px' \end{aligned}$$

De este modo $P \in \mathcal{P}$ si P satisface la ecuación vectorial de \mathcal{P}

$$P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp; \text{ donde } y'^2 = 4px'; |\vec{u}| = 1$$

Cuando el eje es paralelo al eje x ; se tiene $\vec{u} = i = (1, 0)$ entonces

$$(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h + x', k + y')$$

implica $x' = x - h$ y $y' = y - k$ en $y'^2 = 4px'$ resulta $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ ($y^2 = 4px$ si V está en el origen); entonces $F = V + p\vec{u} = (h + p, k)$; $\mathcal{L} : x = h - p$. Si $p < 1$ la parábola se invierte simétricamente a la directriz.

Cuando el eje es paralelo al eje y ; $\vec{u} = j = (0, 1)$ entonces

$$(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h - y', k + x')$$

implica $x' = y - k$ y $y' = h - x$ en $y'^2 = 4px'$ resulta $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ ($x^2 = 4py$ si V está en el origen); entonces $F = V + p\vec{u} = (h, k + p)$; $\mathcal{L} : x = k - p$. Si $p < 1$ la parábola se invierte simétricamente a la directriz.

Teorema 5.1 (Ecuaciones de la recta tangente de una parábola). *La ecuación de la recta tangente a $y^2 = 4px$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ está dada por*

$$y = \frac{2p}{y_0}(x + x_0) \quad (5.4)$$

y la ecuación de la recta tangente a $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ está dada por

$$(y_0 - k)(x_0 - k) = 4p \left[\left(\frac{x + x_0}{2} - h \right) \right] \quad (5.5)$$

similarmente la ecuación de la recta tangente a $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ está dada por

$$(x_0 - h)(x_0 - h) = 4p \left[\left(\frac{y + y_0}{2} - k \right) \right]. \quad (5.6)$$

Demostración. En efecto sea ... □

Ejercicio 5.1. Al realizarse una transformación de coordenadas, el eje de una parábola \mathcal{P} resulta orientada según el vector $(3, 4)$. En $X'Y'$ un punto $Q' = (20, -20)' \in \mathcal{P}$ en el sistema xy el foco de \mathcal{P} $E = (11, 5)$. Determinar en el sistema xy un punto R de la parábola \mathcal{P} tal que el triángulo QVR sea rectángulo en V vértice de la parábola.

Ejercicio 5.2. La circunferencia $\mathcal{C} = (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 25$ es tangente a una parábola \mathcal{P} en $P_0 = (x_0, y_0)$, $y_0 > 7$. La recta $\mathcal{L} : 4x - 3y + 12 = 0$ es normal a \mathcal{P} y \mathcal{C} en P_0 y corta al eje focal de \mathcal{P} en el punto R . Si $|C_0 \vec{P}_0| = |P_0 \vec{R}|$ y si la distancia $d[P_0; \text{eje focal}] = 4$, hallar la ecuación de la parábola \mathcal{P} . C_0 es el centro de la circunferencia y la abscisa del vértice es menor que 6.

Solución. $P_0 = C_0 \pm r \vec{u}_{\mathcal{L}}$ donde $r = 5$, $C_0 = (3, 8)$ y $\vec{u}_{\mathcal{L}} = \frac{(3, 4)}{5}$ es decir $P_0 = (3, 8) \pm 5 \frac{(3, 4)}{5}$ de esto consideramos $P_0 = (x_0, y_0) = (6, 12)$ por condición del problema con esto la recta tangente a \mathcal{C} y \mathcal{P} es $\mathcal{L}_T : (x, y)(3, 4) = (3, 4)(6, 12)$ equivalentemente $\mathcal{L}_T : 3x + 4y = 66$.

Ya que $|C_0 \vec{P}_0| = 5 = |P_0 \vec{R}|$ y $d[P_0; \text{eje focal}] = d[P_0; Q] = 4$ entonces el triángulo P_0QR es un triángulo rectángulo notable, por lo tanto $|\vec{QR}| = 3$ por el Teorema de Pitágoras, además $\vec{P}_0R = \vec{P}_0Q + \vec{QR}$ es decir si $\vec{P}_0Q = (v_1, v_2)$ se tiene la ecuación $(3, 4) = 4(v_1, v_2) \pm 3(-v_2, v_1)$ que al resolverla se tiene $\vec{P}_0R = (v_1, v_2) = (1, 0)$ o $\vec{P}_0R = (v_1, v_2) = (\frac{24}{25}, \frac{7}{25})$ entonces $Q = P_0 + 4(0, 1) = (6, 16)$ o $Q = P_0 + 4(\frac{24}{25}, \frac{7}{25}) = (6 + \frac{96}{25}, 12 + \frac{28}{25})$ esto indica considerar $Q = (6, 16)$ pues el vértice (tiene abscisa menor que 6), debe estar a la derecha de P_0 pues la recta \mathcal{L}_T tiene pendiente negativa. Por lo tanto $\mathcal{L}_T \cap \mathcal{F} : x = 16 = (\frac{2}{3}, 16)$ y por propiedad de la tangente a una parábola se tiene el vértice $V = (\frac{\mathcal{L}_T \cap \mathcal{F} + Q}{2}) = (\frac{10}{3}, 16)$. La ecuación de la parábola en el sistema original es $(y - h)^2 = 4\rho(x - k)$ donde $(h, k) = (\frac{10}{3}, 16)$ y $(6, 12) \in \mathcal{P}$ se tiene $(-4)^2 = 4\rho(8/3)$ de donde $\rho = \frac{3}{2}$ entonces la recta directriz pasa por $(\frac{10}{3}, 16) + \frac{3}{2}(1, 0) = (\frac{7}{3}, 16)$ por tanto $\mathcal{L}_D : x = \frac{7}{3}$ y la ecuación de la parábola es

$$(y - 16)^2 = 4\rho \left(x - \frac{10}{3} \right)$$

por ser paralela al eje x .

Ejercicio 5.3. Los puntos $A = (60, 13)$ y $B = (-4, 61)$ están sobre una parábola \mathcal{P} además son simétricos con respecto al eje focal. Desde un punto Q sobre el eje focal se traza una recta tangente a \mathcal{P} que pasa por B , hallar la ecuación de \mathcal{P} y las ecuaciones de las rectas tangentes trazadas desde Q .

Solución. Ya que A y B son simétricas entonces $P_0 = \frac{A+B}{2} = (28, 37) \in \mathcal{L}_F$ donde \mathcal{L}_F es el eje focal paralelo al vector $\vec{AB}^\perp = (B - A)^\perp = (-64, 48) \parallel (-4, 3) = \vec{v}_L$ es decir \vec{v}_F y P_0 nos genera la ecuación del eje focal $\mathcal{L}_F : 4x + 3y = 1$. De otro lado dado el punto $Q = (20, x) \in \mathcal{L}_F$ que al reemplazarlo en la recta del eje focal

nos genera $x = -27$ de donde $Q = (20, -27)$ además el vértice de la parábola es $V = \frac{Q+P_0}{2} = (4, 5)$ por propiedad.

Con el objetivo de hallar el valor de ρ en la ecuación $y'^2 = 4\rho x'$ se halla las coordenadas de B en el nuevo sistema de coordenadas centrada en V con vector director $\vec{u} = \frac{(3,4)}{5}$, haciendo uso de la relación

$$(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp$$

se obtiene $x' = [B - V] \vec{u} = 40$ y $y' = [B - V] \vec{u}^\perp = 40$ por tanto reemplazando $B = (-4, 61) = (40, 40)'$ en $y'^2 = 4\rho x'$ se tiene que $\rho = 10$

Los vectores directores de las rectas tangentes en el sistema $X'Y'$ son $(2, 1)$ y $(2, -1)$ respectivamente por tanto sus ecuaciones son $\mathcal{L}_A : 2y' = x' + 40$ y $\mathcal{L}_B : -2y' = x' + 40$ estas ecuaciones en el sistema original con $x' = [(x, y) - (4, 5)] \frac{(3,4)}{5}$ y $y' = [(x, y) - (4, 5)] \frac{(-4,3)}{5}$ reemplazadas resultan $\mathcal{L}_A : 2y - 11x - 166 = 0$ y $\mathcal{L}_B : 5x - 10y - 170 = 0$

6

Elipse

Dados dos puntos distintos F_1 y F_2 llamados focos; la elipse \mathcal{E} es el conjunto formado por los puntos P que satisfacen la ecuación

$$|P - F_1| + |P - F_2| = 2a \quad (6.1)$$

$C = (h, k)$ es el centro de la elipse; x' eje focal, V_1 y V_2 son los vértices de la elipse; $\overline{V_1 V_2}$ el eje mayor $\overline{RR'}$ el lado recto; $\overline{B_1 B_2}$ el eje menor de longitud $2b$. En el sistema $X'Y'$ se tiene $B_1 = (0, b)'$; $B_2 = (0, -b)'$; $F_1 = (-c, 0)'$; $F_2 = (c, 0)'$ y $C = (0, 0)'$.

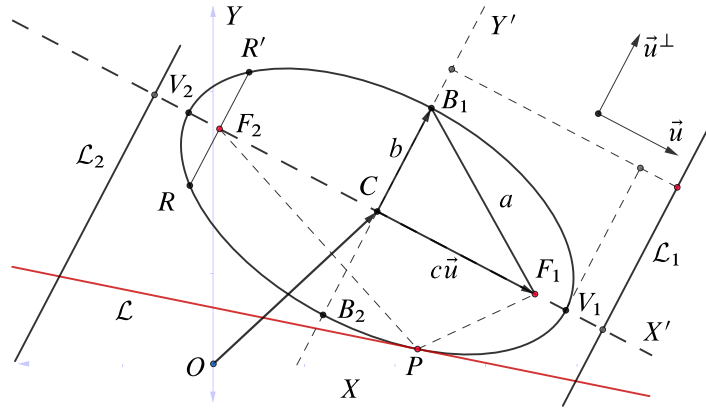


Figura 6.1 Elipse

Dado $P \in \mathcal{E}$, la excentricidad e se define como

$$\frac{d[P; F_1]}{d[P; \mathcal{L}_1]} = e = \frac{d[P; F_2]}{d[P; \mathcal{L}_2]} \quad (6.2)$$

$$d[B_i; F_1] = d[B_i; F_2] = a \text{ y } d[V_i; C] = d[V_i; C] = a, i = 1, 2.$$

Teorema 6.1. En la elipse se verifican las siguientes igualdades

1. $d[B_1; F_i] = d[B_2; F_i] = a$
2. $d[V_1; C] = d[V_2; C] = a$

$$3. d [C; \mathcal{L}_1] = d [C; \mathcal{L}_2] = \frac{c}{e}$$

$$4. c = d [P; F_1] = d [P; F_2] \implies c = ae$$

Demostración. 1. Ya que $d [B_1; F_1] + d [B_1; F_2] = 2a = d [B_2; F_1] + d [B_2; F_2]$ es decir $2d [B_1; F_i] = 2a = 2d [B_2; F_i]$ entonces $d [B_1; F_i] = a = d [B_2; F_i]$ $i = 1, 2$.

2. Por la definición (6.1) de la elipse se tiene

$$d [V_1; F_2] + d [V_1; F_1] = 2a \quad (6.3)$$

además la diferencia

$$d [V_1; F_2] - d [V_1; F_1] = 2c \quad (6.4)$$

restando las ecuaciones (6.3) y (6.4) se tiene

$$d [V_1; F_1] = a - c \quad (6.5)$$

entonces haciendo uso de (6.5) en $d [V_1; C] = d [V_1; F_1] + d [F_1; C] = (a - c) + c = a$; de manera similar para el vértice V_2 .

3. En efecto se sabe que

$$\frac{d [B; F_i]}{d [B; \mathcal{L}_i]} = e \iff \frac{a}{d [B; \mathcal{L}_i]} = e$$

además $d [B_i; \mathcal{L}_i] = d [C; \mathcal{L}_i]$ por lo tanto $\frac{a}{d [C; \mathcal{L}_i]} = e$.

4. Pues

$$\frac{d [P; F_1]}{d [P; \mathcal{L}_1]} = e$$

implica $\frac{a-c}{e-a} = e$ es decir $c = ae$.

Por lo tanto □

$a > b$ y $a^2 = b^2 + c^2$; pues $a = d [B_1; F_2] = d [(0, b^2 + c^2)'; (c, 0)']^2 = \sqrt{b}$; $0 < e < 1$ debido a que $0 < e = \frac{a}{c} < 1$ y $a > c > 0$.

$$P = (x, y) = C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp; x' = [(x, y) - C]\vec{u}; y' = [(x, y) - C]\vec{u}^\perp$$

$$F_1 = C + c\vec{u} \text{ y } F_2 = C - c\vec{u} \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} |P - F_1| + |P - F_2| &= |C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp - C + c\vec{u}| \\ &\quad + |C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp - C - c\vec{u}| \\ &= \sqrt{(x' + c)^2 + y'^2} + \sqrt{(x' - c)^2 + y'^2} = 2a \end{aligned}$$

por lo tanto resolviendo $\sqrt{(x' + c)^2 + y'^2} + \sqrt{(x' - c)^2 + y'^2} = 2a$ resulta $(a^2 - c^2)x'^2 + ay'^2 = a^2(a^2 - c^2) \implies b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2$

De este modo $P \in \mathcal{E}$ si P satisface la ecuación vectorial

$$P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp; \text{ donde } \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1; |\vec{u}| = 1$$

Cuando el eje es paralelo al eje x ; $\vec{u} = i = (1, 0)$ entonces $(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h + x', k + y')$ $\implies x' = x - h$ y $y' = y - k$ en $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ resulta $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si V está en el origen); entonces $F_1 = C + c\vec{u} = (h + c, k)$; $\mathcal{L}_1 : x = h + \frac{a}{e}$ y $\mathcal{L}_2 : x = h - \frac{a}{e}$.

Cuando el eje es paralelo al eje y ; $\vec{u} = j = (0, 1)$ entonces $(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h - y', k + x')$ $\implies x' = y - k$ y $y' = h - x$ en $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ resulta $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si V está en el origen); entonces $F_1 = C + c\vec{u} = (h + c, k)$; $\mathcal{L}_1 : x = k + \frac{a}{e}$ y $\mathcal{L}_2 : x = k - \frac{a}{e}$.

Corolario 6.1. *The characteristic function of the sum of two independent random variables X_1 and X_2 is the product of characteristic functions of X_1 and X_2 , i.e.,*

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)$$

Ejercicio 6.1 (Characteristic Function of the Sample Mean). Let $\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i$ be the sample mean of n independent and identically distributed random variables, each with characteristic function φ_X . Compute the characteristic function of \bar{X} .

Solución. Applying Theorem, we have

$$\varphi_{\bar{X}}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i} \left(\frac{t}{n} \right) = \left[\varphi_X \left(\frac{t}{n} \right) \right]^n.$$



7

Hipérbola

Los puntos P de un hipérbola verifican la siguiente ecuación

$$||P - F_1| - |P - F_2|| = 2a$$

$C = (h, k)$ es el centro de la hipérbola; V_1 y V_2 son los vértices; F_1 y F_2 son los focos; $\overline{V_1 V_2}$ es el eje transversal; $\overline{B_1 B_2}$ es el eje conjugado; X' es el eje focal

$$d[C; F_1] = d[C; F_2] = c$$

$F_1 = (-c, 0)$; $F_2 = (c, 0)$ en el sistema coordenado $X'Y'$; \mathcal{C} circunferencia con centro en C , radio c que pasa por los focos.

$$d[V_1; C] = d[V_2; C] = a$$

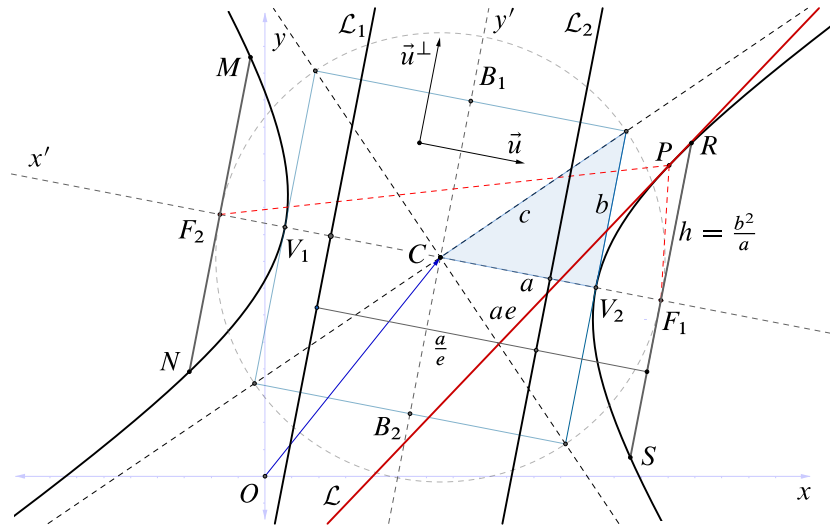


Figura 7.1 Hipérbola

$$\frac{d[P; F_1]}{d[P; \mathcal{L}_1]} = e = \frac{d[P; F_2]}{d[P; \mathcal{L}_2]}$$

$c = ae$; $d [C; \mathcal{L}_1] = d [C; \mathcal{L}_2] = \frac{a}{e}$ y $e > 1$; en efecto

$$\frac{d [R; F_1]}{d [R; \mathcal{L}_1]} = \frac{\frac{b^2}{a}}{c - d [C; \mathcal{L}_1]} = \frac{c^2 - a^2}{a(c - d [C; \mathcal{L}_1])}$$

$$\frac{d [V_2; F_1]}{d [V_2; \mathcal{L}_1]} = \frac{c - a}{a - d [C; \mathcal{L}_2]}.$$

De la primera

$$d [C; \mathcal{L}_2] = a - \frac{c - a}{e} \implies c - d [C; \mathcal{L}_2] = a - \frac{(c - a)(e + 1)}{e}.$$

De la segunda ecuación

$$c^2 - a^2 = ae \frac{(c - a)(e + 1)}{e} \implies c + a = a(e + 1) \implies c = ae$$

luego $d [C; \mathcal{L}_2] = a - \frac{(c - a)(ae + a)}{e} = \frac{a}{e}$ y el caso $d [C; \mathcal{L}_1]$ es similar. Finalmente $e = \frac{c}{a} > 1$ pues $0 < a < c$.

$$P = (x, y) = C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp \quad x' = [(x, y) - C]\vec{u} \quad y' = [(x, y) - C]\vec{u}^\perp$$

$$F_1 = C + c\vec{u} \quad y \quad F_2 = C - c\vec{u} \quad \text{tambien} \quad V_1 = C + a\vec{u} \quad y \quad V_2 = C - a\vec{u} \quad \text{entonces}$$

$$\frac{d [P; F_1]}{d [P; \mathcal{L}_1]} = e \iff d [P; F_1]^2 = e^2 d [P; \mathcal{L}_1]^2$$

haciendo uso de $c = ae$ y $c^2 = a^2 + b^2$ se tiene lo siguiente

$$(x' - c)^2 + y'^2 = e^2 \left(x' - \left(\frac{a}{e} \right) \right)^2$$

$$(c^2 - a^2)x'^2 + a^2y'^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$b^2x'^2 - a^2y'^2 = a^2b^2$$

De este modo $P \in \mathcal{H}$ si P satisface la ecuación vectorial

$$P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp; \text{ donde } \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1; |\vec{u}| = 1.$$

Cuando el eje es paralelo al eje X ; $\vec{u} = i = (1, 0)$ entonces

$$(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h + x', k + y')$$

se tiene $x' = x - h$ y $y' = y - k$ en $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$; resulta

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

entonces $F_1 = C + c\vec{u} = (h - \frac{a}{e}, k)$ y $F_2 = C + c\vec{u} = (h - \frac{a}{e}, k)$; $\mathcal{L}_1 : x = h - \frac{a}{e}$ y $\mathcal{L}_2 : x = h + \frac{a}{e}$ y las asíntotas de $y' = \pm \frac{a}{b}x'$ se convierte en $(y - k) = \pm \frac{a}{b}(x - h)$. Además $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$; si V está en el origen.

Cuando el eje es paralelo al eje Y ; $\vec{u} = j = (0, 1)$ se tiene

$$(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h - y', k + x')$$

implica que $x' = y - k$ y $y' = h - x$ en $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$; resulta

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

entonces $F_1 = C + c\vec{u} = (h + c, k)$; $\mathcal{L}_1 : x = k + \frac{a}{e}$ y $\mathcal{L}_2 : x = k - \frac{a}{e}$ y las asíntotas de $y' = \pm \frac{b}{a}x'$ se convierte en $(y - k) = \pm \frac{b}{a}(x - h)$. Además $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$; si V está en el origen.

(Vincze and Kozma, 2014) ## Ejercicios



A

Ecuaciones de primer grado

(Xie, 2015)

A.1. Raices de una ecuacion de segundo grado

A.2. Propiedades de una ecuacion de segundo grado



B

Ecuaciones lineales de primer grado

B.1. Soluciones de ecuaciones lineales de primer grado

B.2. Soluciones ...

B.3. Forma matricial de una ecuación lineal



Bibliografía

Vincze, C. and Kozma, L. (2014). College geometry.

Xie, Y. (2015). *Dynamic Documents with R and knitr*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2nd edition. ISBN 978-1498716963.



Índice alfabético

elipse, 15