

*Ricardo Michel MALLQUI BAÑOS*

---

# ***Calculo I***

Universidad Nacional De San Cristobal De Huamanga

$$\sum_1^2$$

---

# Índice general

---

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Introducción</b>	<b>vii</b>
<b>Preliminares</b>	<b>ix</b>
<b>1. Rectas</b>	<b>1</b>
<b>2. Lugar geométrico</b>	<b>3</b>
<b>3. Circunferencia</b>	<b>5</b>
<b>4. Parábola</b>	<b>9</b>
<b>5. Elipse</b>	<b>13</b>
<b>6. Hiperbola</b>	<b>17</b>
<b>Apéndice</b>	<b>19</b>
<b>A. Final Words</b>	<b>21</b>
A.1. Deftones	21
A.2. Deftones2	21
<b>B. We have finished a nice book.</b>	<b>23</b>
B.1. Deftones3	23
B.2. Deftones4	23



---

## Resumen

---

Consideramos que es un “sistema” en tanto integra el conjunto de conocimientos objetivos de una misma naturaleza que están interrelacionados y que interactúan mutuamente. Es un “producto de la actividad del hombre” dado que el conocimiento se adquiere, en primera instancia a partir de la práctica, en un proceso que va de la contemplación viva al pensamiento abstracto y de este a la práctica como forma de verificación. Tiene un “carácter histórico y en permanente cambio” debido a que la ciencia no es estática, va surgiendo bajo determinadas circunstancias y momentos históricos, y se desarrolla en evolución permanente, apoyándose en las necesidades de la sociedad humana y a partir de los cambios que se producen en la naturaleza, la sociedad y el pensamiento. Por su parte el término “investigar” no es más que “hacer diligencias para descubrir algo; profundizar en el estudio de una disciplina” 6 . La “investigación” expresa el modo de llegar al conocimiento de algo, siguiendo un camino de forma sistemática, utilizando métodos propios de la ciencia o de la actividad científica. La investigación “... aparece estrechamente ligada a la vida social, intelectual, tecnológica y cultural; constituyéndose en un factor inseparable de cualquier actividad cognoscitiva u operación mental que se realice para abordar un problema, duda o curiosidad”.7 La investigación se concibe como un procedimiento reflexivo, dirigido, controlado, sistemático y crítico que permite llegar a descubrir nuevos hechos, datos, relaciones o leyes, en cualquier campo del conocimiento humano.

Consideramos que es un “sistema” en tanto integra el conjunto de conocimientos objetivos de una misma naturaleza que están interrelacionados y que interactúan mutuamente. Es un “producto de la actividad del hombre” dado que el conocimiento se adquiere, en primera instancia a partir de la práctica, en un proceso que va de la contemplación viva al pensamiento abstracto y de este a la práctica como forma de verificación. Tiene un “carácter histórico y en permanente cambio” debido a que la ciencia no es estática, va surgiendo bajo determinadas circunstancias y momentos históricos, y se desarrolla en evolución permanente, apoyándose en las necesidades de la sociedad humana y a partir de los cambios que se producen en la naturaleza, la sociedad y el pensamiento. Por su parte el término “investigar” no es más que “hacer diligencias para descubrir algo; profundizar en el estudio de una disciplina” 6 . La “investigación” expresa el modo de llegar al conocimiento de algo, siguiendo un camino de forma sistemática, utilizando métodos propios de la ciencia o de la actividad científica. La investigación “... aparece estrechamente ligada a la vida social, intelectual, tecnológica y cultural; constituyéndose en un factor inseparable de cualquier actividad cognoscitiva u operación mental que se realice para abordar un problema, duda o curiosidad”.7 La investigación se concibe como un procedimiento reflexivo, dirigido,

controlado, sistemático y crítico que permite llegar a descubrir nuevos hechos, datos, relaciones o leyes, en cualquier campo del conocimiento humano.

Consideramos que es un “sistema” en tanto integra el conjunto de conocimientos objetivos de una misma naturaleza que están interrelacionados y que interactúan mutuamente. Es un “producto de la actividad del hombre” dado que el conocimiento se adquiere, en primera instancia a partir de la práctica, en un proceso que va de la contemplación viva al pensamiento abstracto y de este a la práctica como forma de verificación. Tiene un “carácter histórico y en permanente cambio” debido a que la ciencia no es estática, va surgiendo bajo determinadas circunstancias y momentos históricos, y se desarrolla en evolución permanente, apoyándose en las necesidades de la sociedad humana y a partir de los cambios que se producen en la naturaleza, la sociedad y el pensamiento. Por su parte el término “investigar” no es más que “hacer diligencias para descubrir algo; profundizar en el estudio de una disciplina” 6 . La “investigación” expresa el modo de llegar al conocimiento de algo, siguiendo un camino de forma sistemática, utilizando métodos propios de la ciencia o de la actividad científica. La investigación “. . . aparece estrechamente ligada a la vida social, intelectual, tecnológica y cultural; constituyéndose en un factor inseparable de cualquier actividad cognoscitiva u operación mental que se realice para abordar un problema, duda o curiosidad”.7 La investigación se concibe como un procedimiento reflexivo, dirigido, controlado, sistemático y crítico que permite llegar a descubrir nuevos hechos, datos, relaciones o leyes, en cualquier campo del conocimiento humano.

---

## Introducción

---

Consideramos que es un “sistema” en tanto integra el conjunto de conocimientos objetivos de una misma naturaleza que están interrelacionados y que interactúan mutuamente. Es un “producto de la actividad del hombre” dado que el conocimiento se adquiere, en primera instancia a partir de la práctica, en un proceso que va de la contemplación viva al pensamiento abstracto y de este a la práctica como forma de verificación. Tiene un “carácter histórico y en permanente cambio” debido a que la ciencia no es estática, va surgiendo bajo determinadas circunstancias y momentos históricos, y se desarrolla en evolución permanente, apoyándose en las necesidades de la sociedad humana y a partir de los cambios que se producen en la naturaleza, la sociedad y el pensamiento. Por su parte el término “investigar” no es más que “hacer diligencias para descubrir algo; profundizar en el estudio de una disciplina”<sup>6</sup>. La “investigación” expresa el modo de llegar al conocimiento de algo, siguiendo un camino de forma sistemática, utilizando métodos propios de la ciencia o de la actividad científica. La investigación “... aparece estrechamente ligada a la vida social, intelectual, tecnológica y cultural; constituyéndose en un factor inseparable de cualquier actividad cognoscitiva u operación mental que se realice para abordar un problema, duda o curiosidad”.<sup>7</sup> La investigación se concibe como un procedimiento reflexivo, dirigido, controlado, sistemático y crítico que permite llegar a descubrir nuevos hechos, datos, relaciones o leyes, en cualquier campo del conocimiento humano.

Consideramos que es un “sistema” en tanto integra el conjunto de conocimientos objetivos de una misma naturaleza que están interrelacionados y que interactúan mutuamente. Es un “producto de la actividad del hombre” dado que el conocimiento se adquiere, en primera instancia a partir de la práctica, en un proceso que va de la contemplación viva al pensamiento abstracto y de este a la práctica como forma de verificación. Tiene un “carácter histórico y en permanente cambio” debido a que la ciencia no es estática, va surgiendo bajo determinadas circunstancias y momentos históricos, y se desarrolla en evolución permanente, apoyándose en las necesidades de la sociedad humana y a partir de los cambios que se producen en la naturaleza, la sociedad y el pensamiento. Por su parte el término “investigar” no es más que “hacer diligencias para descubrir algo; profundizar en el estudio de una disciplina”<sup>6</sup>. La “investigación” expresa el modo de llegar al conocimiento de algo, siguiendo un camino de forma sistemática, utilizando métodos propios de la ciencia o de la actividad científica. La investigación “... aparece estrechamente ligada a la vida social, intelectual, tecnológica y cultural; constituyéndose en un factor inseparable de cualquier actividad cognoscitiva u operación mental que se realice para abordar un problema, duda o curiosidad”.<sup>7</sup> La investigación se concibe como un procedimiento reflexivo, dirigido,

controlado, sistemático y crítico que permite llegar a descubrir nuevos hechos, datos, relaciones o leyes, en cualquier campo del conocimiento humano.

Consideramos que es un “sistema” en tanto integra el conjunto de conocimientos objetivos de una misma naturaleza que están interrelacionados y que interactúan mutuamente. Es un “producto de la actividad del hombre” dado que el conocimiento se adquiere, en primera instancia a partir de la práctica, en un proceso que va de la contemplación viva al pensamiento abstracto y de este a la práctica como forma de verificación. Tiene un “carácter histórico y en permanente cambio” debido a que la ciencia no es estática, va surgiendo bajo determinadas circunstancias y momentos históricos, y se desarrolla en evolución permanente, apoyándose en las necesidades de la sociedad humana y a partir de los cambios que se producen en la naturaleza, la sociedad y el pensamiento. Por su parte el término “investigar” no es más que “hacer diligencias para descubrir algo; profundizar en el estudio de una disciplina” 6 . La “investigación” expresa el modo de llegar al conocimiento de algo, siguiendo un camino de forma sistemática, utilizando métodos propios de la ciencia o de la actividad científica. La investigación “. . . aparece estrechamente ligada a la vida social, intelectual, tecnológica y cultural; constituyéndose en un factor inseparable de cualquier actividad cognoscitiva u operación mental que se realice para abordar un problema, duda o curiosidad”.7 La investigación se concibe como un procedimiento reflexivo, dirigido, controlado, sistemático y crítico que permite llegar a descubrir nuevos hechos, datos, relaciones o leyes, en cualquier campo del conocimiento humano.



---

## Preliminares

---

Consideramos que es un “sistema” en tanto integra el conjunto de conocimientos objetivos de una misma naturaleza que están interrelacionados y que interactúan mutuamente. Es un “producto de la actividad del hombre” dado que el conocimiento se adquiere, en primera instancia a partir de la práctica, en un proceso que va de la contemplación viva al pensamiento abstracto y de este a la práctica como forma de verificación. Tiene un “carácter histórico y en permanente cambio” debido a que la ciencia no es estática, va surgiendo bajo determinadas circunstancias y momentos históricos, y se desarrolla en evolución permanente, apoyándose en las necesidades de la sociedad humana y a partir de los cambios que se producen en la naturaleza, la sociedad y el pensamiento. Por su parte el término “investigar” no es más que “hacer diligencias para descubrir algo; profundizar en el estudio de una disciplina” 6 . La “investigación” expresa el modo de llegar al conocimiento de algo, siguiendo un camino de forma sistemática, utilizando métodos propios de la ciencia o de la actividad científica. La investigación “... aparece estrechamente ligada a la vida social, intelectual, tecnológica y cultural; constituyéndose en un factor inseparable de cualquier actividad cognoscitiva u operación mental que se realice para abordar un problema, duda o curiosidad”.7 La investigación se concibe como un procedimiento reflexivo, dirigido, controlado, sistemático y crítico que permite llegar a descubrir nuevos hechos, datos, relaciones o leyes, en cualquier campo del conocimiento humano.

Consideramos que es un “sistema” en tanto integra el conjunto de conocimientos objetivos de una misma naturaleza que están interrelacionados y que interactúan mutuamente. Es un “producto de la actividad del hombre” dado que el conocimiento se adquiere, en primera instancia a partir de la práctica, en un proceso que va de la contemplación viva al pensamiento abstracto y de este a la práctica como forma de verificación. Tiene un “carácter histórico y en permanente cambio” debido a que la ciencia no es estática, va surgiendo bajo determinadas circunstancias y momentos históricos, y se desarrolla en evolución permanente, apoyándose en las necesidades de la sociedad humana y a partir de los cambios que se producen en la naturaleza, la sociedad y el pensamiento. Por su parte el término “investigar” no es más que “hacer diligencias para descubrir algo; profundizar en el estudio de una disciplina” 6 . La “investigación” expresa el modo de llegar al conocimiento de algo, siguiendo un camino de forma sistemática, utilizando métodos propios de la ciencia o de la actividad científica. La investigación “... aparece estrechamente ligada a la vida social, intelectual, tecnológica y cultural; constituyéndose en un factor inseparable de cualquier actividad cognoscitiva u operación mental que se realice para abordar un problema, duda o curiosidad”.7 La investigación se concibe como un procedimiento reflexivo, dirigido,

controlado, sistemático y crítico que permite llegar a descubrir nuevos hechos, datos, relaciones o leyes, en cualquier campo del conocimiento humano.

**1**

*Rectas*



## 2

### *Lugar geométrico*

Here is a review of existing methods.



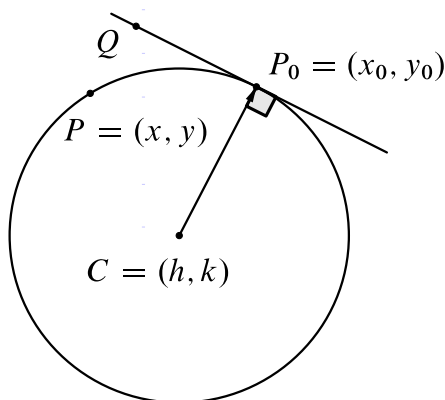
### 3

## Circunferencia

Sea  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  entonces el vector escalado es  $r\vec{a} \parallel \vec{a}$ ; el vector perpendicular a este es  $\vec{a}^\perp = (-a_2, a_1)$  la norma del vector  $\vec{a}$  es  $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$  el vector unitario en la dirección de  $\vec{a}$  es  $\vec{\mu} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$  que es paralela a este. Dado dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  estos definen un vector  $\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1$ . Los vectores en dirección de los ejes positivos son  $i = (1, 0)$  y  $j = (0, 1)$ ; cualquier vector se pueden expresar en términos de estos es decir  $\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1i + a_2j$ . De acuerdo al ángulo de inclinación del vector se tiene la siguiente representación  $\vec{a} = \|\vec{a}\| (\cos \theta, \sin \theta)$ .

**Theorem 3.1** (russ). Dada el espacio  $R$  y  $r \in R$  se tiene que  $\mathcal{R}(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(y)_r$

$\Sigma$

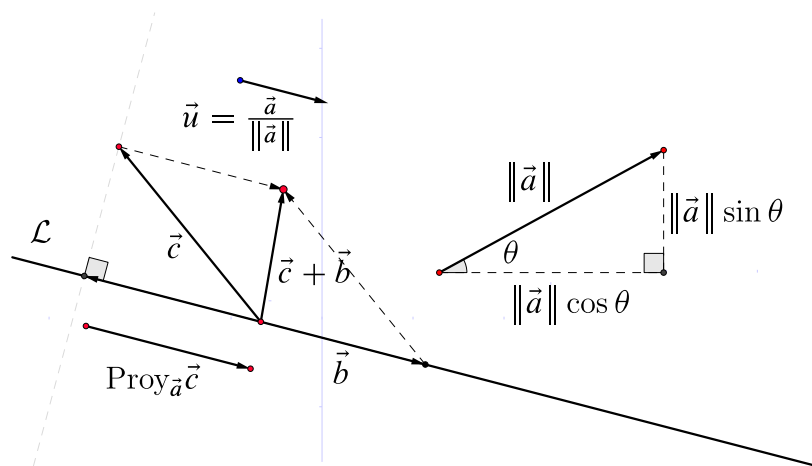


**Figura 3.1** Elipse vectorial

Dos vectores son ortogonales ( $\vec{a} \perp \vec{b}$ ) si  $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$  y verifican

$|\vec{b}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2$   $\vec{a}\vec{b} = 0$   $\vec{a} \parallel \vec{b}^\perp$   $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son LI si y solo si  $r\vec{a} + s\vec{b} = 0$  implica  $r = 0$  y  $s = 0$ .

La proyección de  $\vec{a}$  sobre  $\vec{b}$  es otro vector  $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$



**Figura 3.2** Elipse vectorial

$\vec{a} = \text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a} + \text{Proj}_{\vec{b}^\perp} \vec{a}$  si hacemos  $\vec{a} = p\vec{b} + q\vec{b}^\perp$  entonces  $q = \frac{\vec{a}\vec{b}^\perp}{\|\vec{b}\|^2}$  y  $p = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$  pues  $\|\vec{b}\| = \|\vec{b}^\perp\|$  entonces  $\text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \text{Cp}_{\vec{b}} \vec{a} \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ ;  $\text{Cp}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$  recibe el nombre de componente de  $\vec{a}$  en la dirección de  $\vec{b}$

Dado  $P_0$  y un vector  $\vec{a}$  entonces la recta se define como el conjunto de puntos  $\mathcal{L} = \{P \in \mathbb{R}^2 / P = P_0 + t\vec{a}; t \in \mathbb{R}\}$  que recibe el nombre de ecuación vectorial de la recta.  $P \in \mathcal{L} \iff (P - P_0) \cdot \vec{a}^\perp = 0$ . De la ecuación vectorial de la recta se tiene si  $P = (x, y)$ ;  $P_0 = (x_0, y_0)$  y  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  se tiene la ecuación paramétrica de la recta.  $x = x_0 + ta_1$ ;  $y = y_0 + ta_2$  de esto se obtiene la ecuación simétrica de la recta

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

Sea  $\vec{n} = (a, b) = \vec{a}^\perp$  entonces se tiene que si  $P \in \mathcal{L}$  entonces  $(P - P_0) \cdot \vec{n} = 0$  pues son perpendiculares; entonces  $P \cdot \vec{n} = P_0 \cdot \vec{n} \iff ax + by = -c \implies ax + by + c = 0$  que recibe el nombre de ecuación general de la recta. Sea  $Q = (x_1, y_1)$  un punto exterior a  $\mathcal{L}$  entonces la distancia de  $Q$  a  $\mathcal{L}$  se define como



$$\begin{aligned}
d[Q; \mathcal{L}] &= |\text{Cp}_{\vec{n}}(Q - P_0)| \\
&= \left| \frac{(Q - P_0) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \\
&= \left| \frac{Q \cdot \vec{n} - P_0 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \\
&= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}
\end{aligned}$$

Sean  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  dos rectas; con vectores directores  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  y  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  respectivamente; entonces  $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = (d_1, d_2)$  donde  $d_1$  y  $d_2$  satisfacen el sistema generado por las ecuaciones generales de  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ ;  $a_1x + a_1y + k_1 = 0$  y  $b_1x + b_1y + k_2 = 0$ .

La pendiente de una recta se deduce de su vector director es decir si  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  entonces  $m = \frac{a_2}{a_1}$ ; de esto se deduce  $\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, \frac{a_2}{a_1}) = a_1(1, m)$ . El angulo generado por las  $\mathcal{L}_1$  con pendiente  $m_1$  y  $\mathcal{L}_2$  con pendiente  $m_1$ ; está dada por  $\theta = \arctan\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$ .

El círculo se define como el conjunto de punto  $P = (x, y)$  que satisfacen la ecuación

$$\|P - C\| = r$$

$r > 0$  es el radio,  $C = (h, k)$  es el centro entonces la ecuación del círculo es

$$\|P - C\| = r \iff (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

La ecuación de la recta tangente en  $P_0 = (x_0, y_0)$  ( $P = P_0$  en el gráfico) está dada por

$$(Q - P_0) \cdot (P_0 - C) = 0$$

donde  $Q = (x, y) \neq P$  cualquiera; entonces

$$(Q - P_0) \cdot (P_0 - C) = 0 \iff (x - x_0, y - y_0)(x_0 - h, y_0 - k) = 0$$

lo cual es equivalente a

$$(x - h)(x_0 - h) + (y - k)(y_0 - k) = r^2$$



# 4

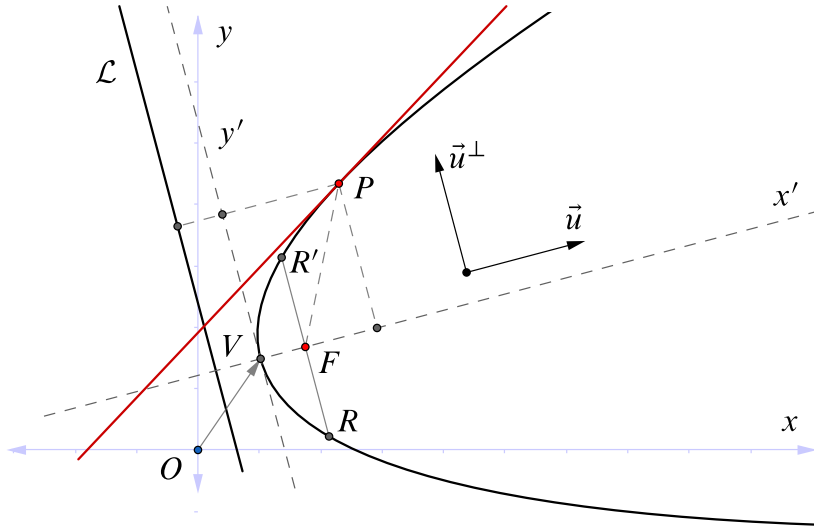
## Parábola

Sean la recta  $\mathcal{L}$  y el punto  $F$  fijos; los puntos  $P$  que satisfacen la ecuación

$$d[P; F] = d[P; \mathcal{L}] = |p| \quad (4.1)$$

generan una curva llamada *parábola*, la excentricidad es el cociente de estas dos distancias que es igual a 1 pues ambas son iguales a  $|p|$ .

$\mathcal{L}$  es la *recta directriz* cuya ecuación es  $x' = -p$  en el sistema  $x'y'$ ;  $F$  es el *foco*,  $V = (h, k)$  el *vértice*;  $p$  es el parámetro de la parábola; y  $RR'$  el *lado recto* de la parábola.



**Figura 4.1** Elipse vectorial

Los puntos  $P$  en el sistema  $x'y'$  satisfacen  $P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp$  de donde al despejar  $x'$  e  $y'$  resultan  $x' = [(x, y) - V]\vec{u}$  e  $y' = [(x, y) - V]\vec{u}^\perp$  la recta directriz en el sistema  $x'y'$  es  $\mathcal{L} = \{Q/Q = (V - p\vec{u}) + t\vec{u}^\perp, t \in \mathbb{R}\}$ ; donde el vértice es  $F = V + p\vec{u}$  luego se tiene las ecuaciones

$$d[P; \mathcal{L}] = |\text{Cp}_{\vec{u}} P \vec{Q}| = |(Q - P) \cdot \vec{u}| = |x' + p| \quad (4.2)$$

$$d[P; F] = |P - F| = |(x' - p)\vec{u} + y'\vec{u}^\perp| \quad (4.3)$$

por lo tanto reemplazando (4.2) y (4.3) en (4.1)

$$\begin{aligned} d[P; F]^2 = d[P; \mathcal{L}]^2 &\implies |(x' + p)\vec{u} + y'\vec{u}^\perp|^2 = |x' + p|^2 \\ &\implies (x' - p)^2 + y'^2 = (x' + p)^2 \\ &\implies y'^2 = 4px' \end{aligned}$$

De este modo  $P \in \mathcal{P}$  si  $P$  satisface la *ecuación vectorial* de  $\mathcal{P}$

$$P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp; \text{ donde } y'^2 = 4px'; |\vec{u}| = 1$$

Cuando el eje es paralelo al eje  $x$ ; se tiene  $\vec{u} = i = (1, 0)$  entonces

$$(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h + x', k + y')$$

implica  $x' = x - h$  y  $y' = y - k$  en  $y'^2 = 4px'$  resulta  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$  ( $y^2 = 4px$  si  $V$  está en el origen); entonces  $F = V + p\vec{u} = (h + p, k)$ ;  $\mathcal{L} : x = h - p$ . Si  $p < 1$  la parábola se invierte simétricamente a la directriz.

Cuando el eje es paralelo al eje  $y$ ;  $\vec{u} = j = (0, 1)$  entonces

$$(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h - y', k + x')$$

implica  $x' = y - k$  y  $y' = h - x$  en  $y'^2 = 4px'$  resulta  $(x - h)^2 = 4p(y - k)$  ( $x^2 = 4py$  si  $V$  está en el origen); entonces  $F = V + p\vec{u} = (h, k + p)$ ;  $\mathcal{L} : x = k - p$ . Si  $p < 1$  la parábola se invierte simétricamente a la directriz.

**Theorem 4.1** (Ecuaciones de la recta tangente de una parábola). *La ecuación de la recta tangente a  $y^2 = 4px$  en el punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  está dada por*

$$y = \frac{2p}{y_0}(x + x_0) \quad (4.4)$$

y la ecuación de la recta tangente a  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$  en el punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  está dada por

$$(y_0 - k)(x_0 - k) = 4p \left[ \left( \frac{x + x_0}{2} - h \right) \right] \quad (4.5)$$

similarmente la ecuación de la recta tangente a  $(x - h)^2 = 4p(y - k)$  en el punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  está dada por

$$(x_0 - h)(x_0 - h) = 4p \left[ \left( \frac{y + y_0}{2} - k \right) \right]. \quad (4.6)$$

*Demostración.* En efecto sea ...  $\square$

**Exercise 4.1.** Al realizarse una transformacion de coordenadas, el eje de una parabola  $\mathcal{P}$  resulta orientada segun el vector  $(3, 4)$ . En  $x'y'$  un punto  $Q' = (20, -20)' \in \mathcal{P}$  en el sistema  $xy$  el foco de  $\mathcal{P}$   $E = (11, 5)$ . Determinar en el sistema  $xy$  un punto  $R$  de la parabola  $\mathcal{P}$  tal que el trinagulo  $QVR$  sea rectangulo en  $V$  vertice de la parabola.

**Exercise 4.2.** La circunferencia  $\mathcal{C} = (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 25$  es tangente a una parabola  $\mathcal{P}$  en  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $y_0 > 7$ . La recta  $\mathcal{L} : 4x - 3y + 12 = 0$  es normal a  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{C}$  en  $P_0$  y corta al eje focal de  $\mathcal{P}$  en el punto  $R$ . Si  $|C_0 \vec{P}_0| = |P_0 \vec{R}|$  y si la distancia  $d[P_0; \text{eje focal}] = 4$ , hallar la ecuación de la parabola  $\mathcal{P}$ .  $C_0$  es el centro de la circunferencia y la absisa del vértice es menor que 6.

*Solution.*  $P_0 = C_0 \pm r \vec{u}_{\mathcal{L}}$  donde  $r = 5$ ,  $C_0 = (3, 8)$  y  $\vec{u}_{\mathcal{L}} = \frac{(3, 4)}{5}$  es decir  $P_0 = (3, 8) \pm 5 \frac{(3, 4)}{5}$  de esto consideramos  $P_0 = (x_0, y_0) = (6, 12)$  por condición del problema con esto la recta tangente a  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{P}$  es  $\mathcal{L}_T : (x, y)(3, 4) = (3, 4)(6, 12)$  equivalentemente  $\mathcal{L}_T : 3x + 4y = 66$ .

Ya que  $|C_0 \vec{P}_0| = 5 = |P_0 \vec{R}|$  y  $d[P_0; \text{eje focal}] = d[P_0; Q] = 4$  entonces el triángulo  $P_0QR$  es un triángulo rectángulo notable, por lo tanto  $|\vec{QR}| = 3$  por el Teorema de Pitágoras, además  $\vec{P}_0R = \vec{P}_0Q + \vec{QR}$  es decir si  $\vec{P}_0Q = (v_1, v_2)$  se tiene la ecuacion  $(3, 4) = 4(v_1, v_2) \pm 3(-v_2, v_1)$  que al resolverla se tiene  $\vec{P}_0R = (v_1, v_2) = (1, 0)$  o  $\vec{P}_0R = (v_1, v_2) = (\frac{24}{25}, \frac{7}{25})$  entonces  $Q = P_0 + 4(0, 1) = (6, 16)$  o  $Q = P_0 + 4(\frac{24}{25}, \frac{7}{25}) = (6 + \frac{96}{25}, 12 + \frac{28}{25})$  esto indica considerar  $Q = (6, 16)$  pues el vertice (tiene absisa menor que 6), debe estar a la derecha de  $P_0$  pues la recta  $\mathcal{L}_T$  tiene pendiente negativa. Por lo tanto  $\mathcal{L}_T \cap \mathcal{F} : x = 16 = (\frac{2}{3}, 16)$  y por propiedad de la tangente a una parabola se tiene el vértice  $V = (\frac{\mathcal{L}_T \cap \mathcal{F} + Q}{2}) = (\frac{10}{3}, 16)$ . La ecuación de la parabola en el sistema original es  $(y - h)^2 = 4\rho(x - k)$  donde  $(h, k) = (\frac{10}{3}, 16)$  y  $(6, 12) \in \mathcal{P}$  se tiene  $(-4)^2 = 4\rho(8/3)$  de donde  $\rho = \frac{3}{2}$  entonces la recta directriz pasa por  $(\frac{10}{3}, 16) + \frac{3}{2}(1, 0) = (\frac{7}{3}, 16)$  por tanto  $\mathcal{L}_D : x = \frac{7}{3}$  y la ecuacion de la parabola es

$$(y - 16)^2 = 4\rho \left( x - \frac{10}{3} \right)$$

por ser paralela al eje  $x$ .

**Exercise 4.3.** Los puntos  $A = (60, 13)$  y  $B = (-4, 61)$  estan sobre una parabola  $\mathcal{P}$  además son simétricos con respecto al eje focal. Desde un punto  $Q$  sobre el eje focal se traza una recta tangente a  $\mathcal{P}$  que pasa por  $B$ , hallar la ecuación de  $\mathcal{P}$  y las ecuaciones de las rectas tangentes trazadas desde  $Q$ .

*Solution.* Ya que  $A$  y  $B$  son simétricas entonces  $P_0 = \frac{A+B}{2} = (28, 37) \in \mathcal{L}_F$  donde  $\mathcal{L}_F$  es el eje focal paralelo al vector  $\vec{AB}^\perp = (B - A)^\perp = (-64, 48) \parallel (-4, 3) = \vec{v}_L$  es decir  $\vec{v}_F$  y  $P_0$  nos genera la ecuación del eje focal  $\mathcal{L}_F : 4x + 3y = 1$ . De otro

lado dado el punto  $Q = (20, x) \in \mathcal{L}_F$  que al reemplazarlo en la recta del eje focal nos genera  $x = -27$  de donde  $Q = (20, -27)$  además el vértice de la parábola es  $V = \frac{Q+P_0}{2} = (4, 5)$  por propiedad.

Con el objetivo de hallar el valor de  $\rho$  en la ecuación  $y'^2 = 4\rho x'$  se halla las coordenadas de  $B$  en el nuevo sistema de coordenadas centrada en  $V$  con vector director  $\vec{u} = \frac{(3,4)}{5}$ , haciendo uso de la relación

$$(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp$$

se obtiene  $x' = [B - V] \vec{u} = 40$  y  $y' = [B - V] \vec{u}^\perp = 40$  por tanto reemplazando  $B = (-4, 61) = (40, 40)'$  en  $y'^2 = 4\rho x'$  se tiene que  $\rho = 10$

Los vectores directores de las rectas tangentes en el sistema  $x'y'$  son  $(2, 1)$  y  $(2, -1)$  respectivamente por tanto sus ecuaciones son  $\mathcal{L}_A : 2y' = x' + 40$  y  $\mathcal{L}_B : -2y' = x' + 40$  estas ecuaciones en el sistema original con  $x' = [(x, y) - (4, 5)] \frac{(3,4)}{5}$  y  $y' = [(x, y) - (4, 5)] \frac{(-4,3)}{5}$  reemplazadas resultan  $\mathcal{L}_A : 2y - 11x - 166 = 0$  y  $\mathcal{L}_B : 5x - 10y - 170 = 0$

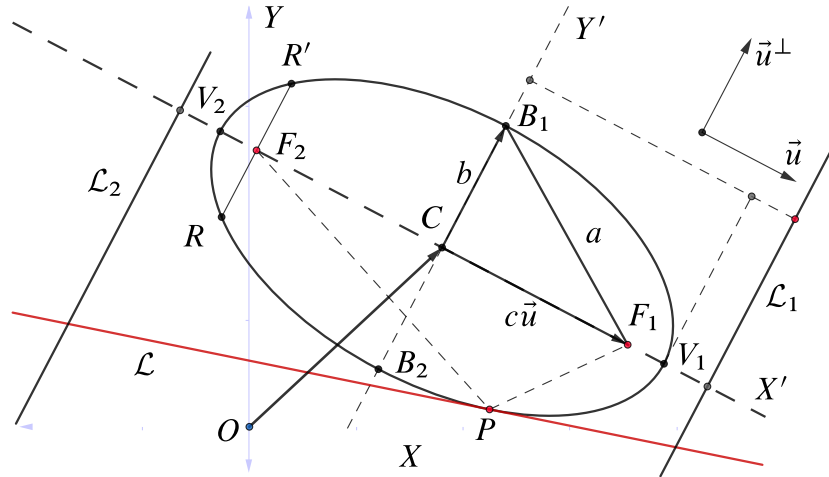
# 5

## Elipse

Dados dos puntos distintos  $F_1$  y  $F_2$  llamados focos; la elipse  $\mathcal{E}$  es el conjunto formado por los puntos  $P$  que satisfacen la ecuación

$$|P - F_1| + |P - F_2| = 2a \quad (5.1)$$

$C = (h, k)$  es el centro de la elipse;  $x'$  eje focal,  $V_1$  y  $V_2$  son los vértices de la elipse;  $\overline{V_1 V_2}$  el eje mayor  $\overline{RR'}$  el lado recto;  $\overline{B_1 B_2}$  el eje menor de longitud  $2b$ . En el sistema  $X'Y'$  se tiene  $B_1 = (0, b)'$ ;  $B_2 = (0, -b)'$ ;  $F_1 = (-c, 0)'$ ;  $F_2 = (c, 0)'$  y  $C = (0, 0)'$ .



**Figura 5.1** Elipse vectorial

Dado  $P \in \mathcal{E}$ , la excentricidad  $e$  se define como

$$\frac{d[P; F_1]}{d[P; \mathcal{L}_1]} = e = \frac{d[P; F_2]}{d[P; \mathcal{L}_2]} \quad (5.2)$$

$$d[B_i; F_1] = d[B_i; F_2] = a \text{ y } d[V_i; C] = d[V_i; C] = a, i = 1, 2.$$

**Theorem 5.1.** En la elipse se verifican las siguientes igualdades

1.  $d [B_1; F_i] = d [B_2; F_i] = a$
2.  $d [V_1; C] = d [V_2; C] = a$
3.  $d [C; \mathcal{L}_1] = d [C; \mathcal{L}_2] = \frac{c}{e}$
4.  $c = d [P; F_1] = d [P; F_2] \implies c = ae$

*Demostración.* 1. Ya que  $d [B_1; F_1] + d [B_1; F_2] = 2a = d [B_2; F_1] + d [B_2; F_2]$  es decir  $2d [B_1; F_i] = 2a = 2d [B_2; F_i]$  entonces  $d [B_1; F_i] = a = d [B_2; F_i]$   $i = 1, 2$ .

2. Por la definición (5.1) de la elipse se tiene

$$d [V_1; F_2] + d [V_1; F_1] = 2a \quad (5.3)$$

además la diferencia

$$d [V_1; F_2] - d [V_1; F_1] = 2c \quad (5.4)$$

restando las ecuaciones (5.3) y (5.4) se tiene

$$d [V_1; F_1] = a - c \quad (5.5)$$

entonces haciendo uso de (5.5) en  $d [V_1; C] = d [V_1; F_1] + d [F_1; C] = (a - c) + c = a$ ; de manera similar para el vértice  $V_2$ .

3. En efecto

$$\frac{d [B; F_i]}{d [B; \mathcal{L}_i]} = e \iff \frac{a}{d [B; \mathcal{L}_i]} = e$$

además  $d [B_i; \mathcal{L}_i] = d [C; \mathcal{L}_i]$  por lo tanto  $\frac{a}{d [C; \mathcal{L}_i]} = e$ .

4. Pues

$$\frac{d [P; F_1]}{d [P; \mathcal{L}_1]} = e$$

implica  $\frac{a-c}{\frac{a}{e}-a} = e$  es decir  $c = ae$ .

Por lo tanto

□

$a > b$  y  $a^2 = b^2 + c^2$ ; pues  $a = d [B_1; F_2] = d [(0, b^2 + c^2)'; (c, 0)']^2 = \sqrt{b}$ ;  $0 < e < 1$  debido a que  $0 < e = \frac{a}{e} < 1$  y  $a > c > 0$ .

$$P = (x, y) = C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp; x' = [(x, y) - C]\vec{u}; y' = [(x, y) - C]\vec{u}^\perp$$

$F_1 = C + c\vec{u}$  y  $F_2 = C - c\vec{u}$  entonces

$$\begin{aligned} |P - F_1| + |P - F_2| &= |C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp - C + c\vec{u}| \\ &\quad + |C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp - C - c\vec{u}| \\ &= \sqrt{(x' + c)^2 + y'^2} + \sqrt{(x' - c)^2 + y'^2} = 2a \end{aligned}$$



por lo tanto resolviendo  $\sqrt{(x' + c)^2 + y'^2} + \sqrt{(x' - c)^2 + y'^2} = 2a$  resulta  $(a^2 - c^2)x'^2 + ay'^2 = a^2(a^2 - c^2) \implies b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2$

De este modo  $P \in \mathcal{E}$  si  $P$  satisface la ecuación vectorial

$$P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp; \text{ donde } \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1; |\vec{u}| = 1$$

Cuando el eje es paralelo al eje  $x$ ;  $\vec{u} = i = (1, 0)$  entonces  $(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h + x', k + y')$   $\implies x' = x - h$  y  $y' = y - k$  en  $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$  resulta  $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$  ( $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  si  $V$  está en el origen); entonces  $F_1 = C + c\vec{u} = (h + c, k)$ ;  $\mathcal{L}_1 : x = h + \frac{a}{e}$  y  $\mathcal{L}_2 : x = h - \frac{a}{e}$ .

Cuando el eje es paralelo al eje  $y$ ;  $\vec{u} = j = (0, 1)$  entonces  $(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h - y', k + x')$   $\implies x' = y - k$  y  $y' = h - x$  en  $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$  resulta  $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$  ( $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  si  $V$  está en el origen); entonces  $F_1 = C + c\vec{u} = (h + c, k)$ ;  $\mathcal{L}_1 : x = k + \frac{a}{e}$  y  $\mathcal{L}_2 : x = k - \frac{a}{e}$ .

**Corollary 5.1.** *The characteristic function of the sum of two independent random variables  $X_1$  and  $X_2$  is the product of characteristic functions of  $X_1$  and  $X_2$ , i.e.,*

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)$$

**Exercise 5.1** (Characteristic Function of the Sample Mean). Let  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i$  be the sample mean of  $n$  independent and identically distributed random variables, each with characteristic function  $\varphi_X$ . Compute the characteristic function of  $\bar{X}$ .

*Solution.* Applying Theorem, we have

$$\varphi_{\bar{X}}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i} \left( \frac{t}{n} \right) = \left[ \varphi_X \left( \frac{t}{n} \right) \right]^n.$$



# 6

## Hiperbola

Los puntos  $\backslash(P)$  de un hipérbola verifican la siguiente ecuación

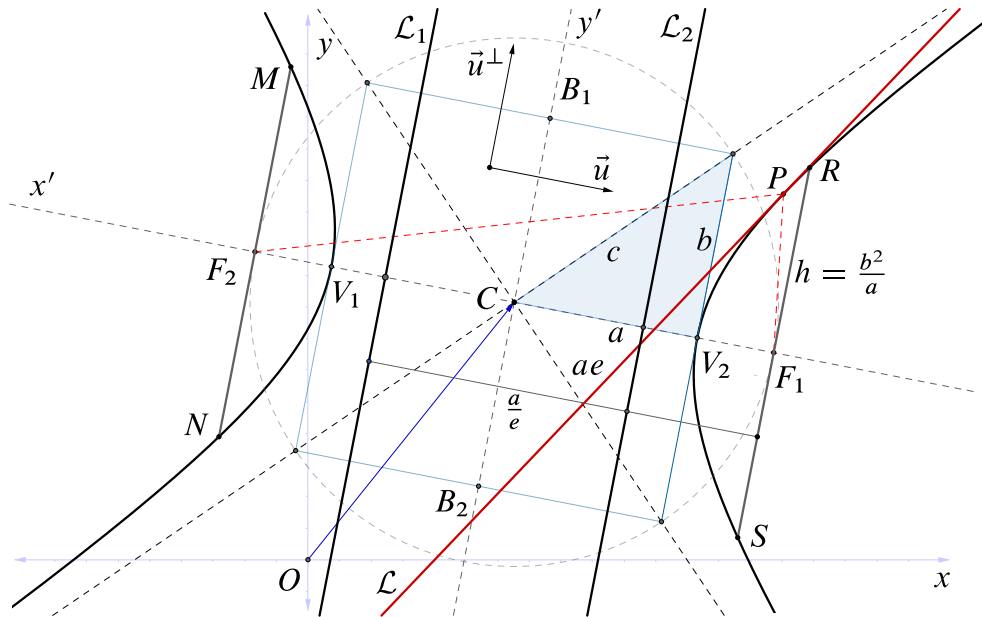
$$||P - F_1| + |P - F_1|| = 2a$$

$C = (h, k)$  es el centro de la hipérbola;  $V_1$  y  $V_2$  son los vértices;  $F_1$  y  $F_2$  son los focos;  $\overline{V_1 V_2}$  es el eje transversal;  $\overline{B_1 B_2}$  es el eje conjugado;  $x'$  es el eje focal

$$d [C; F_1] = d [C; F_2] = c$$

$F_1 = (-c, 0)$ ;  $F_1 = (c, 0)$  en el sistema coordenado  $x'y'$ ;  $\mathcal{C}$  circunferencia con centro en  $C$ , radio  $c$  que pasa por los focos.

$$d [V_1; C] = d [V_2; C] = a$$



**Figura 6.1** Elipse vectorial

$$\frac{d[P; F_1]}{d[P; \mathcal{L}_1]} = e = \frac{d[P; F_2]}{d[P; \mathcal{L}_2]}$$

$c = ae$ ;  $d[C; \mathcal{L}_1] = d[C; \mathcal{L}_2] = \frac{a}{e}$  y  $e > 1$ ; en efecto

$$\frac{d[R; F_1]}{d[R; \mathcal{L}_1]} = \frac{\frac{b^2}{a}}{c - d[C; \mathcal{L}_1]} = \frac{c^2 - a^2}{a(c - d[C; \mathcal{L}_1])}$$

$$\frac{d[V_2; F_1]}{d[V_2; \mathcal{L}_1]} = \frac{c - a}{a - d[C; \mathcal{L}_2]}.$$

De la primera

$$d[C; \mathcal{L}_2] = a - \frac{c - a}{e} \implies c - d[C; \mathcal{L}_2] = a - \frac{(c - a)(e + 1)}{e}.$$

De la segunda ecuación

$$c^2 - a^2 = ae \frac{(c - a)(e + 1)}{e} \implies c + a = a(e + 1) \implies c = ae$$

luego  $d[C; \mathcal{L}_2] = a - \frac{(c - a)(ae + a)}{e} = \frac{a}{e}$  y el caso  $d[C; \mathcal{L}_1]$  es similar. Finalmente  $e = \frac{c}{a} > 1$  pues  $0 < a < c$ .

$$P = (x, y) = C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp \quad x' = [(x, y) - C]\vec{u} \quad y' = [(x, y) - C]\vec{u}^\perp$$

$$F_1 = C + c\vec{u} \quad y \quad F_2 = C - c\vec{u} \quad \text{tambien} \quad V_1 = C + a\vec{u} \quad y \quad V_2 = C - a\vec{u} \quad \text{entonces}$$

$$\frac{d[P; F_1]}{d[P; \mathcal{L}_1]} = e \iff d[P; F_1]^2 = e^2 d[P; \mathcal{L}_1]^2$$

haciendo uso de  $c = ae$  y  $c^2 = a^2 + b^2$  se tiene lo siguiente

$$(x' - c)^2 + y'^2 = e^2 \left( x' - \left( \frac{a}{e} \right) \right)^2$$

$$(c^2 - a^2)x'^2 + a^2y'^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$b^2x'^2 - a^2y'^2 = a^2b^2$$

De este modo  $P \in \mathcal{H}$  si  $P$  satisface la ecuación vectorial

$$P = (x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp; \text{ donde } \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1; |\vec{u}| = 1.$$

Cuando el eje es paralelo al eje  $x$ ;  $\vec{u} = i = (1, 0)$  entonces  $(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h + x', k + y')$   $\implies x' = x - h$  y  $y' = y - k$  en  $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ ; resulta  $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ; ( $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; si  $V$  está en el origen); entonces  $F_1 = C + c\vec{u} = (h - \frac{a}{e}, k)$  y  $F_2 = C + c\vec{u} = (h + \frac{a}{e}, k)$ ;  $\mathcal{L}_1 : x = h - \frac{a}{e}$  y  $\mathcal{L}_2 : x = h + \frac{a}{e}$  y las asíntotas de  $y' = \pm \frac{a}{b}x'$  se convierte en  $(y - k) = \pm \frac{a}{b}(x - h)$ .

Cuando el eje es paralelo al eje  $y$ ;  $\vec{u} = j = (0, 1)$  entonces  $(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^\perp = (h - y', k + x')$   $\implies x' = y - k$  y  $y' = h - x$  en  $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ ; resulta  $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ; ( $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; si  $V$  está en el origen); entonces  $F_1 = C + c\vec{u} = (h + c, k)$ ;  $\mathcal{L}_1 : x = k + \frac{a}{e}$  y  $\mathcal{L}_2 : x = k - \frac{a}{e}$  y las asíntotas de  $y' = \pm \frac{b}{a}x'$  se convierte en  $(y - k) = \pm \frac{b}{a}(x - h)$ .



# A

---

## *Final Words*

---

### A.1. Deftones

---

### A.2. Deftones2





# B

---

*We have finished a nice book.*

---

---

**B.1. Deftones<sup>3</sup>**

---

**B.2. Deftones<sup>4</sup>**

---

**B.3. Deftones<sup>5</sup>**

