Ricardo Michel MALLQUI BAÑOS

Geometria-vectorial


PRIMVN VIVERE DE INDE PHILOSOPHARI
1677

Índice general

Índice de cuadros

Índice de figuras

Resumen

Este es un libro sobre la geometria vectorial edicion 2

Introducción

1

Vectores

2

Rectas

3

Lugar geométrico

Here is a review of existing methods.

4

Circunferencia

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2)$ entonces el vector escalado es $r\vec{a} \parallel \vec{a}$; el vector perpendicular a este es $\vec{a}^{\perp} = (-a_2, a_1)$ la norma del vector $\vec{a}$ es $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ el vector unitario en la dirección de $\vec{a}$ es $\vec{\mu} = \frac{\vec{a}}{\|a\|}$ que es paralela a este. Dado dos puntos P_1 y P_2 estos definen un vector $P_1\vec{P}_2 = P_2 - P_1$. Los vectores en dirección de los ejes positivos son $i = (1, 0)$ y $j = (0, 1)$; cualquier vector se pueden expresar en términos de estos es decir $\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1 i + a_2 j$. De acuerdo al ángulo de inclinación del vector se tiene la siguiente representación $\vec{a} = \|\vec{a}\| (\cos\theta, \sin\theta)$. C

Teorema 4.1 (russ)**.** *Dada el espacio R y $r \in R$ se tiene que* $\mathcal{R}(r) = \lim_{t\to\infty} g(y)_r$

$\sum$

Dos vectores son ortogonales ($\vec{a} \perp \vec{b}$) si $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \left|\vec{a} + \vec{b}\right|$ y verifican

$\left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + = \left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2$ $\vec{a}\vec{b} = 0$ $\vec{a} \parallel \vec{b}^{\perp}$ $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son LI si y solo si $r\vec{a} + s\vec{b} = 0$ implica $r = 0$ y $s = 0$.

La proyeccion de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es otro vector $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$

$\vec{a} = \text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} + \text{Proy}_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a}$ si hacemos $\vec{a} = p\vec{b} + q\vec{b}^{\perp}$ entonces $q = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$ y $p = \frac{\vec{a}\vec{b}^{\perp}}{\|\vec{b}\|^2}$

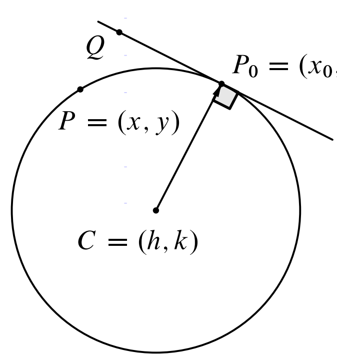

Figura 4.1 Vector

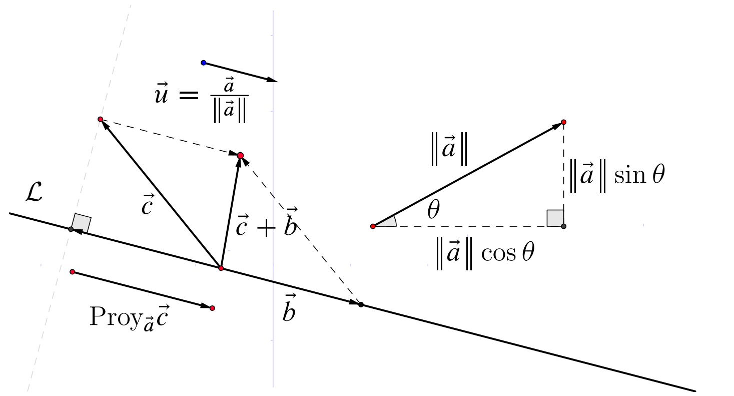

Figura 4.2 Circunferencia

pues $\left\|\vec{b}\right\| = \left\|\vec{b}^{\perp}\right\|$ entonces $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \text{Cp}_{\vec{b}}\vec{a}\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$; $\text{Cp}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ recibe el nombre de componente de $\vec{a}$ en la dirección de $\vec{b}$

Dado P_0 y un vector $\vec{a}$ entonces la recta se define como el conjunto de puntos $\mathcal{L} = \left\{P \in \mathbb{R}^2 / P = P_0 + t\vec{a};\ t \in \mathbb{R}\right\}$ que recibe el nombre de ecuación vectorial de la recta. $P \in \mathcal{L} \iff (P - P_0) \cdot \vec{a}^{\perp} = 0$. De la ecuación vectorial de la recta se tiene si $P = (x.y)$; $P_0 = (x_0, y_0)$ y $\vec{a} = (a_1, a_2)$ se tiene la ecuación paramétrica de la recta. $x = x_0 + ta_1$; $y = y_0 + ta_2$ de esto se obtiene la ecuación simétrica de la recta

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

Sea $\vec{n} = (a, b) = \vec{a}^{\perp}$ entonces se tiene que si $P \in \mathcal{L}$ entonces $(P - P_0) \cdot \vec{n} = 0$ pues son perpendicualres; entonces $P \cdot \vec{n} = P_0 \cdot \vec{n} \iff ax + by = -c \implies ax + by + c = 0$ que recibe el nombre de ecuación general de la recta. Sea $Q = (x_1, y_1)$ un punto exterior a $\mathcal{L}$ entonces la distancia de Q a $\mathcal{L}$ se define como

$$\begin{aligned} d[Q; \mathcal{L}] &= |\text{Cp}_{\vec{n}}(Q - P_0)| \\ &= \left|\frac{(Q - P_0) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right| \\ &= \left|\frac{Q \cdot \vec{n} - P_0 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right| \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos rectas; con vectores directores $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$ respectivamente; entonces $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = (d_1, d_2)$ donde d_1 y d_2 satisfacen el sistema generado por las ecuaciones generales de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$; $a_1x + a_1y + k_1 = 0$ y $b_1x + b_1y + k_2 = 0$.

La pendiente de una recta se deduce de su vector director es decir si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ entonces $m = \frac{a_2}{a_1}$; de esto se deduce $\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, \frac{a_2}{a_1}) = a_1(1, m)$. El angulo generado por las $\mathcal{L}_1$ con pendiente m_1 y $\mathcal{L}_2$ con pendiente m_1; está dada por $\theta = \arctan\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$.

El círculo se define como el conjunto de punto $P = (x, y)$ que satisfacen la ecuación

$$\|P - C\| = r$$

$r > 0$ es el radio, $C = (h, k)$ es el centro entonces la ecuación del círculo es

$$\|P - C\| = r \iff (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

La ecuación de la recta tangente en $P_0 = (x_0, y_0)$ ($P = P_0$ en el gráfico) está dada por

$$(Q - P_0) \cdot (P_0 - C) = 0$$

donde $Q = (x, y) \neq P$ cualquiera; entonces

$$(Q - P_0) \cdot (P_0 - C) = 0 \iff (x - x_0, y - y_0)(x_0 - h, y_0 - k) = 0$$

lo cual es equivalente a

$$(x - h)(x_0 - h) + (x - k)(y_0 - k) = r^2$$

5

Parábola

Sean la recta $\mathcal{L}$ y el punto F fijos; los puntos P que satisfacen la ecuación

$$d\,[P;F] = d\,[P;\mathcal{L}] = |p| \tag{5.1}$$

generan una curva llamada *parábola*, la excentricidad es el cociente de estas dos distancias que es igual a 1 pues ambas son iguales a $|p|$.

$\mathcal{L}$ es la *recta directriz* cuya ecuación es $x' = -p$ en el sistema $X'Y'$; F es el *foco*, $V = (h,k)$ el *vertice*; p es el parámetro de la parábola; y RR' el *lado recto* de la parábola.

Los puntos P en el sistema $X'Y'$ satisfacen $P = (x,y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp}$ de donde al despejar x' e y' resultan $x' = [(x,y) - V]\vec{u}$ e $y' = [(x,y) - V]\vec{u}^{\perp}$ la recta directriz en el sitema $X'Y'$ es $\mathcal{L} = \left\{Q/Q = (V - p\vec{u}) + t\vec{u}^{\perp},\ t \in \mathbb{R}\right\}$; donde el vértice es $F = V + p\vec{u}$ luego se tiene las ecuaciónes

$$d[P;\mathcal{L}] = \left|\mathrm{Cp}_{\vec{u}}\vec{PQ}\right| = |(Q-P)\cdot\vec{u}| = |x' + p| \tag{5.2}$$

$$d[P;F] = |P - F| = \left|(x'-p)\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp}\right| \tag{5.3}$$

por lo tanto reemplazando (5.2) y (5.3) en (5.1)

$$\begin{aligned} d\,[P;F]^2 = d\,[P;\mathcal{L}]^2 &\implies \left|(x'+p)\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp}\right|^2 = |x'+p|^2 \\ &\implies (x'-p)^2 + y'^2 = (x'+p)^2 \\ &\implies y'^2 = 4px' \end{aligned}$$

De este modo $P \in \mathcal{P}$ si P satisface la *ecuacion vectorial* de $\mathcal{P}$

$$P = (x,y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp};\ \text{donde } y'^2 = 4px';\ |\vec{u}| = 1$$

Cuando el eje es paralelo al eje x; se tiene $\vec{u} = i = (1,0)$ entonces

$$(x,y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} = (h + x', k + y')$$

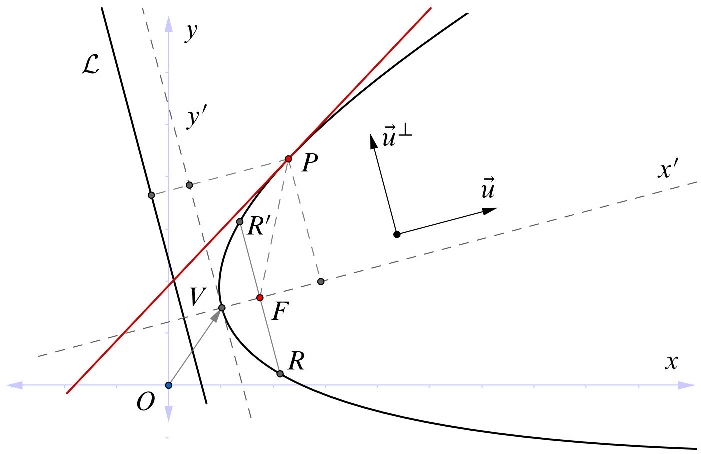

Figura 5.1 Prábola

implica $x' = x - h$ y $y' = y - k$ en $y'^2 = 4px'$ resulta $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ ($y^2 = 4px$ si V está en el origen); entonces $F = V + p\vec{u} = (h+p,k)$; $\mathcal{L} : x = h-p$. Si $p < 1$ la parábola se invierte simétricamente a la directriz.

Cuando el eje es paralelo al eje y; $\vec{u} = j = (0,1)$ entonces

$$(x,y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} = (h-y', k+x')$$

implica $x' = y - k$ y $y' = h - x$ en $y'^2 = 4px'$ resulta $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ ($x^2 = 4py$ si V está en el origen); entonces $F = V + p\vec{u} = (h, k+p)$; $\mathcal{L} : x = k-p$. Si $p < 1$ la parábola se invierte simétricamente a la directriz.

Teorema 5.1 (Ecuaciones de la recta tangente de una parábola)**.** *La ecuación de la recta tangente a $y^2 = 4px$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ está dada por*

$$y = \frac{2p}{y_0}(x + x_0) \tag{5.4}$$

y la ecuación de la recta tangente a $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ está dada por

$$(y_0 - k)(x_0 - k) = 4p\left[\left(\frac{x + x_0}{2} - h\right)\right] \tag{5.5}$$

similarmente la ecuación de la recta tangente a $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ está dada por

$$(x_0 - h)(x_0 - h) = 4p\left[\left(\frac{y + y_0}{2} - h\right)\right]. \tag{5.6}$$

Demostración. En efecto sea . . . □

Ejercicio 5.1. Al realizarse una transformacion de coordenadas, el eje de una parabola $\mathcal{P}$ resulta orientada segun el vector $(3,4)$. En $X'Y'$ un punto $Q' = (20,-20)' \in \mathcal{P}$ en els sistema xy el foco de $\mathcal{P}$ $E = (11,5)$. Determinar en el sistema xy un punto R de la parabola $\mathcal{P}$ tal que el trinagulo QVR sea rectangulo en V vertice de la parábola.

Ejercicio 5.2. La circunferencia $\mathcal{C} = (x-3)^2 + (y-3)^2 = 25$ es tangente a una parábola $\mathcal{P}$ en $P_0 = (x_0, y_0)$, $y_0 > 7$. La recta $\mathcal{L} : 4x - 3y + 12 = 0$ es normal a $\mathcal{P}$ y $\mathcal{C}$ en P_0 y corta al eje focal de $\mathcal{P}$ en el punto R. Si $\left|\vec{C_0P_0}\right| = \left|\vec{P_0R}\right|$ y si la distancia $d[P_0;\text{eje focal}] = 4$, hallar la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$. C_0 es el centro de la circunferencia y la absisa del vértice es menor que 6.

Solución. $P_0 = C_0 \pm r\vec{u}_{\mathcal{L}}$ donde $r = 5$, $C_0 = (3,8)$ y $\vec{u}_{\mathcal{L}} = \frac{(3,4)}{5}$ es decir $P_0 = (3,8) \pm 5\frac{(3,4)}{5}$ de esto consideramos $P_0 = (x_0, y_0) = (6,12)$ por condición del problema con esto la recta tangente a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$ es $\mathcal{L}_T : (x,y)(3,4) = (3,4)(6,12)$ equivalentemente $\mathcal{L}_T : 3x + 4y = 66$.

Ya que $\left|\vec{C_0P_0}\right| = 5 = \left|\vec{P_0R}\right|$ y $d[P_0;\text{eje focal}] = d[P_0;Q] = 4$ entonces el triángulo P_0QR es un triángulo rectángulo notable, por lo tanto $\left|\vec{QR}\right| = 3$ por el Teorema de Pitágoras, además $\vec{P_0R} = \vec{P_0Q} + \vec{QR}$ es decir si $\vec{P_0Q} = (v_1, v_2)$ se tiene la ecuacion $(3,4) = 4(v_1, v_2) \pm 3(-v_2, v_1)$ que al resolverla se tiene $\vec{P_0R} = (v_1, v_2) = (1,0)$ o $\vec{P_0R} = (v_1, v_2) = \left(\frac{24}{25}, \frac{7}{25}\right)$ entonces $Q = P_0 + 4(0,1) = (6,16)$ o $Q = P_0 + 4\left(\frac{24}{25}, \frac{7}{25}\right) = \left(6 + \frac{96}{25}, 12 + \frac{28}{25}\right)$ esto indica considerar $Q = (6,16)$ pues el vertice (tiene absisa menor que 6), debe estar a la derecha de P_0 pues la recta $\mathcal{L}_T$ tiene pendiente negativa. Por lo tanto $\mathcal{L}_T \cap \mathcal{F} : x = 16 = (\frac{2}{3}, 16)$ y por propiedad de la tangente a una parábola se tiene el vértice $V = \left(\frac{\mathcal{L}_T \cap \mathcal{F} + Q}{2}\right) = \left(\frac{10}{3}, 16\right)$. La ecuación de la parabola en le sistema original es $(y-h)^2 = 4\rho(x-k)$ donde $(h,k) = \left(\frac{10}{3}, 16\right)$ y $(6,12) \in \mathcal{P}$ se tiene $(-4)^2 = 4\rho(8/3)$ de donde $\rho = \frac{3}{2}$ entonces la recta directriz pasa por $\left(\frac{10}{3}, 16\right) + \frac{3}{2}(1,0) = \left(\frac{7}{3}, 16\right)$ por tanto $\mathcal{L}_D : x = \frac{7}{3}$ y la ecuacion de la parábola es

$$(y-16)^2 = 4\rho\left(x - \frac{10}{3}\right)$$

por ser paralela al eje x.

Ejercicio 5.3. Los puntos $A = (60,13)$ y $B = (-4,61)$ estan sobre una parábola $\mathcal{P}$ además son simétricos con recpecto al eje focal. Desde un punto Q sobre el eje focal se traza un recta tangente a $\mathcal{P}$ que pasa por B, hallar la ecuación de $\mathcal{P}$ y las ecuaciones de las rectas tangentes trazadas desde Q.

Solución. Ya que A y B son simétricas entonces $P_0 = \frac{A+B}{2} = (28,37) \in \mathcal{L}_F$ donde $\mathcal{L}_F$ es el eje focal paralelo al vector $\vec{AB}^{\perp} = (B-A)^{\perp} = (-64,48) \parallel (-4,3) = \vec{v}_L$

es decir $\vec{v}_F$ y P_0 nos genera la ecuación del eje focal $\mathcal{L}_F : 4x + 3y = 1$. De otro lado dado el punto $Q = (20, x) \in \mathcal{L}_F$ que al reemplazarlo en la recta del eje focal nos genera $x = -27$ de donde $Q = (20, -27)$ ademas el vértice de la parabola es $V = \frac{Q+P_0}{2} = (4, 5)$ por propiedad.

Con el objetivo de hallar el valor de ρ en la ecuación $y'^2 = 4\rho x'$ se halla las coordenadas de B en el nuevo sistema de coordenadas centrada en V con vector director $\vec{u} = \frac{(3,4)}{5}$, haciendo uso de la relación

$$(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp}$$

se obtiene $x' = [B - V]\,\vec{u} = 40$ y $y' = [B - V]\,\vec{u}^{\perp} = 40$ por tanto reemplazando $B = (-4, 61) = (40, 40)'$ en $y'^2 = 4\rho x'$ se tiene que $\rho = 10$

Los vectores directores de las rectas tangentes en el sistema $X'Y'$ son $(2, 1)$ y $(2, -1)$ respectivamente por tanto sus ecuaciones son $\mathcal{L}_A : 2y' = x' + 40$ y $\mathcal{L}_B = -2y' = x' + 40$ estas ecuaciones en el sistema original con $x' = [(x, y) - (4, 5)]\,\frac{(3,4)}{5}$ y $y' = [(x, y) - (4, 5)]\,\frac{(-4,3)}{5}$ reemplazadas resultan $\mathcal{L}_A : 2y - 11x - 166 = 0$ y $\mathcal{L}_B : 5x - 10y - 170 = 0$

1. ww

6

Elipse

6.1. Preliminares

Ejemplo 6.1. wwwwwwwww

Dados dos puntos distintos F_1 y F_2 llamados focos; la elipse $\mathcal{E}$ es el conjunto formado por los puntos P que satisfacen la ecuacion

$$|P - F_1| + |P - F_2| = 2a \tag{6.1}$$

$C = (h, k)$ es el centro de la elipse; x' eje focal, V_1 y V_2 son los vértices de la elipse; $\overline{V_1V_2}$ el eje mayor $\overline{RR'}$ el lado recto; $\overline{B_1B_2}$ el eje menor de longitud $2b$. En el sistema $X'Y'$ se tiene $B_1 = (0, b)'$; $B_2 = (0, -b)'$; $F_1 = (-c, 0)'$; $F_2 = (c, 0)'$ y $C = (0, 0)'$.

Dado $P \in \mathcal{E}$, la excentricidad e se define como

$$\frac{d\,[P; F_1]}{d\,[P; \mathcal{L}_1]} = e = \frac{d\,[P; F_2]}{d\,[P; \mathcal{L}_2]} \tag{6.2}$$

$d\,[B_i; F_1] = d\,[B_i; F_2] = a$ y $d\,[V_i; C] = d\,[V_i; C] = a$, $i = 1, 2$.

Teorema 6.1. *En la elipse se verifican las siguientes igualdades*

1. $d\,[B_1; F_i] = d\,[B_2; F_i] = a$
2. $d\,[V_1; C] = d\,[V_2; C] = a$
3. $d\,[C; \mathcal{L}_1] = d\,[C; \mathcal{L}_2] = \frac{c}{e}$
4. $c = d\,[P; F_1] = d\,[P; F_2] \implies c = ae$

Demostración. 1. Ya que $d\,[B_1; F_1] + d\,[B_1; F_2] = 2a = d\,[B_2; F_1] + d\,[B_2; F_2]$ es decir $2d\,[B_1; F_i] = 2a = 2d\,[B_2; F_i]$ entonces $d\,[B_1; F_i] = a = d\,[B_2; F_i]$ $i = 1, 2$.

2. Por la definición (6.1) de la elipse se tiene

$$d\,[V_1; F_2] + d\,[V_1; F_1] = 2a \tag{6.3}$$

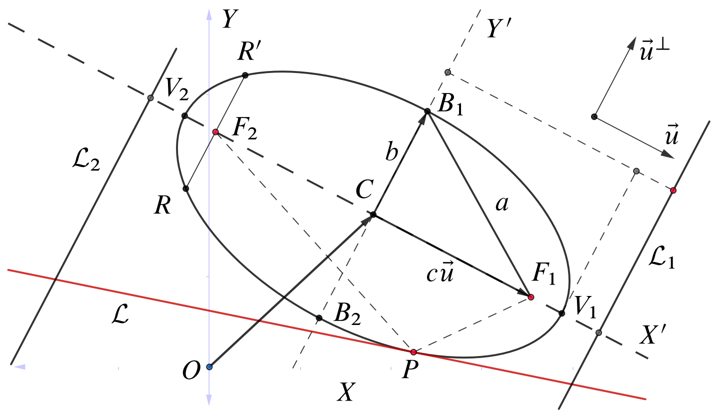

Figura 6.1 Elipse

además la diferencia

$$d\,[V_1;F_2] - d\,[V_1;F_1] = 2c \tag{6.4}$$

restando las ecuaciones (6.3) y (6.4) se tiene

$$d\,[V_1;F_1] = a - c \tag{6.5}$$

entonces haciendo uso de (6.5) en $d\,[V_1;C] = d\,[V_1;F_1] + d\,[F_1;C] = (a-c)+c = a$; de manera similar para el vértice V_2.

3. En efecto se sabe que

$$\frac{d\,[B;F_i]}{d\,[B;\mathcal{L}_i]} = e \Longleftrightarrow \frac{a}{d\,[B;\mathcal{L}_i]} = e$$

además $d\,[B_i;\mathcal{L}_i] = d\,[C;\mathcal{L}_i]$ por lo tanto $\frac{a}{d[C;\mathcal{L}_i]} = e$.

4. Pues

$$\frac{d\,[P;F_1]}{d\,[P;\mathcal{L}_1]} = e$$

implica $\frac{a-c}{\frac{a}{e}-a} = e$ es decir $c = ae$.

Por lo tanto □

$a > b$ y $a^2 = b^2 + c^2$; pues $a = d\,[B_1;F_2] = d\left[(0,b^2+c^2)';(c,0)'\right]^2 = \sqrt{b}$; $0 < e < 1$ debido a que $0 < e = \frac{a}{e} < 1$ y $a > c > 0$.

$P = (x,y) = C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp}$; $x' = [(x,y)-C]\vec{u}$; $y' = [(x,y)-C]\vec{u}^{\perp}$

$F_1 = C + c\vec{u}$ y $F_2 = C - c\vec{u}$ entonces

$$\begin{aligned}|P-F_1|+|P-F_2| &= \left|C+x'\vec{u}+y'\vec{u}^{\perp}-C+c\vec{u}\right| \\ &\quad+\left|C+x'\vec{u}+y'\vec{u}^{\perp}-C-c\vec{u}\right| \\ &= \sqrt{(x'+c)^2+y'^2}+\sqrt{(x'-c)^2+y'^2}=2a\end{aligned}$$

por lo tanto resolviendo $\sqrt{(x'+c)^2+y'^2}+\sqrt{(x'-c)^2+y'^2}=2a$ resulta $(a^2-c^2)x'^2+ay'^2=a^2(a^2-c^2) \implies b^2x'^2+a^2y'^2=a^2b^2$

De este modo $P\in\mathcal{E}$ si P satisface la ecuación vectorial

$$P=(x,y)=V+x'\vec{u}+y'\vec{u}^{\perp};\ \text{donde}\ \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1;\ |\vec{u}|=1$$

Cuando el eje es paralelo al eje x; $\vec{u}=i=(1,0)$ entonces $(x,y)=V+x'\vec{u}+y'\vec{u}^{\perp}=(h+x',k+y') \implies x'=x-h$ y $y'=y-k$ en $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$ resulta $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ($\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ si V está en el origen); entonces $F_1=C+c\vec{u}=(h+c,k)$; $\mathcal{L}_1: x=h+\frac{a}{e}$ y $\mathcal{L}_2: x=h-\frac{a}{e}$.

Cuando el eje es paralelo al eje y; $\vec{u}=j=(0,1)$ entonces $(x,y)=V+x'\vec{u}+y'\vec{u}^{\perp}=(h-y',k+x') \implies x'=y-k$ y $y'=h-x$ en $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$ resulta $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ($\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ si V está en el origen); entonces $F_1=C+c\vec{u}=(h+c,k)$; $\mathcal{L}_1: x=k+\frac{a}{e}$ y $\mathcal{L}_2: x=k-\frac{a}{e}$.

Corolario 6.1. *The characteristic function of the sum of two independent random variables X_1 and X_2 is the product of characteristic functions of X_1 and X_2, i.e.,*

$$\varphi_{X_1+X_2}(t)=\varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)$$

Ejercicio 6.1 (Characteristic Function of the Sample Mean)**.** Let $\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}X_i$ be the sample mean of n independent and identically distributed random variables, each with characteristic function φ_X. Compute the characteristic function of $\bar{X}$.

Solución. Applying Theorem, we have

$$\varphi_{\bar{X}}(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right)=\left[\varphi_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n.$$

7

Hipérbola

Los puntos P de un hipérbola verifican la siguiente ecuación

$$||P - F_1| - |P - F_1|| = 2a$$

$C = (h, k)$ es el centro de la hipérbola; V_1 y V_2 son los vértices; F_1 y F_2 son los focos; $\overline{V_1V_2}$ es el eje transversal; $\overline{B_1B_2}$ es el eje conjugado; X' es el eje focal

$$d\,[C; F_1] = d\,[C; F_2] = c$$

$F_1 = (-c, 0)$; $F_1 = (c, 0)$ en el sistema coordenado $X'Y'$; $\mathcal{C}$ circunferencia con centro en C, radio c que pasa por los focos.

$$d\,[V_1; C] = d\,[V_2; C] = a$$

$$\frac{d\,[P; F_1]}{d\,[P; \mathcal{L}_1]} = e = \frac{d\,[P; F_2]}{d\,[P; \mathcal{L}_2]}$$

$c = ae$; $d\,[C; \mathcal{L}_1] = d\,[C; \mathcal{L}_2] = \frac{a}{e}$ y $e > 1$; en efecto

$$\frac{d\,[R; F_1]}{d\,[R; \mathcal{L}_1]} = \frac{\frac{b^2}{a}}{c - d\,[C; \mathcal{L}_1]} = \frac{c^2 - a^2}{a(c - d\,[C; \mathcal{L}_1])}$$

$$\frac{d\,[V_2; F_1]}{d\,[V_2; \mathcal{L}_1]} = \frac{c - a}{a - d\,[C; \mathcal{L}_2]}.$$

De la primera

$$d\,[C; \mathcal{L}_2] = a - \frac{c - a}{e} \implies c - d\,[C; \mathcal{L}_2] = a - \frac{(c - a)(e + 1)}{e}.$$

De la segunda ecuación

$$c^2 - a^2 = ae\frac{(c - a)(e + 1)}{e} \implies c + a = a(e + 1) \implies c = ae$$

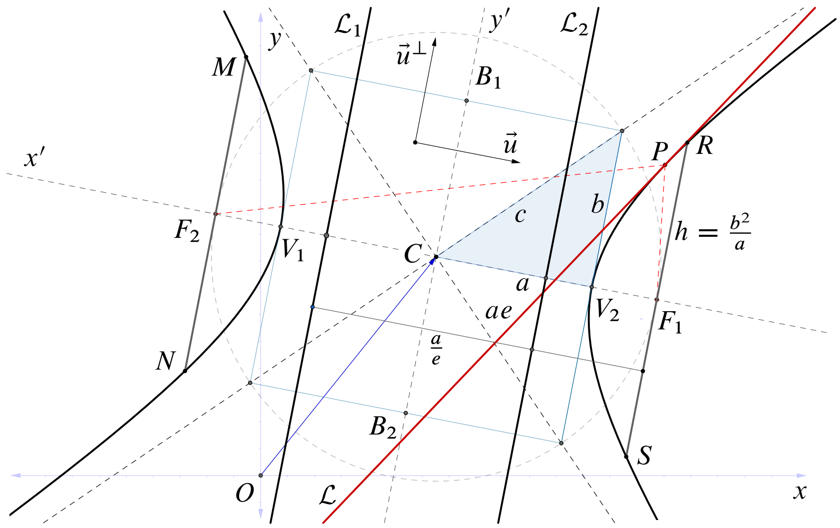

Figura 7.1 Hipérbola

luego $d\,[C;\mathcal{L}_2] = a - \frac{(c-a)(ae+a)}{e} = \frac{a}{e}$ y el caso $d\,[C;\mathcal{L}_1]$ es similar. Finalmente $e = \frac{c}{a} > 1$ pues $0 < a < c$.

$P = (x,y) = C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp}$ $x' = [(x,y) - C]\vec{u}$ y $y' = [(x,y) - C]\vec{u}^{\perp}$

$F_1 = C + c\vec{u}$ y $F_2 = C - c\vec{u}$ tambien $V_1 = C + a\vec{u}$ y $V_2 = C - a\vec{u}$ entonces

$$\frac{d\,[P;F_1]}{d\,[P;\mathcal{L}_1]} = e \iff d\,[P;F_1]^2 = e^2 d\,[P;\mathcal{L}_1]^2$$

haciendo uso de $c = ae$ y $c^2 = a^2 + b^2$ se tiene lo siguiente

$$(x' - c)^2 + y'^2 = e^2\left(x' - \left(\frac{a}{e}\right)\right)^2$$

$$(c^2 - a^2)x'^2 + a^2y'^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$b^2x'^2 - a^2y'^2 = a^2b^2$$

De este modo $P \in \mathcal{H}$ si P satisface la ecuación vectorial

$$P = (x,y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp};\ \text{donde}\ \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1;\ |\vec{u}| = 1.$$

Cuando el eje es paralelo al eje X; $\vec{u} = i = (1,0)$ entonces

$$(x,y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} = (h + x', k + y')$$

se tiene $x' = x - h$ y $y' = y - k$ en $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$; resulta

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

entonces $F_1 = C + c\vec{u} = (h - \frac{a}{e}, k)$ y $F_2 = C + c\vec{u} = (h - \frac{a}{e}, k)$; $\mathcal{L}_1 : x = h - \frac{a}{e}$ y $\mathcal{L}_2 : x = h + \frac{a}{e}$ y las asíntotas de $y' = \pm\frac{a}{b}x'$ se convierte en $(y - k) = \pm\frac{a}{b}(x - h)$. Además $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; si V está en el origen.

Cuando el eje es paralelo al eje Y; $\vec{u} = j = (0, 1)$ se tiene

$$(x, y) = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} = (h - y', k + x')$$

implica que $x' = y - k$ y $y' = h - x$ en $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$; resulta

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

entonces $F_1 = C + c\vec{u} = (h + c, k)$; $\mathcal{L}_1 : x = k + \frac{a}{e}$ y $\mathcal{L}_2 : x = k - \frac{a}{e}$ y las asíntotas de $y' = \pm\frac{b}{a}x'$ se convierte en $(y - k) = \pm\frac{b}{a}(x - h)$. Además $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; si V está en el origen.

(Vincze and Kozma, 2014) ## Ejercicios

A

Ecuaciones de primer grado

(Xie, 2015)

A.1. Raices de una ecuacion de segundo grado

A.2. Propiedades de una ecuacion de segundo grado

B

Ecacuaciones lineales de primer grado

B.1. Soluciones de ecuacuiones lineales de primer grado

B.2. Soluciones . . .

B.3. Forma matricial de una ecuación lineal

Bibliografía

Vincze, C. and Kozma, L. (2014). College geometry.

Xie, Y. (2015). *Dynamic Documents with R and knitr*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2nd edition. ISBN 978-1498716963.

Índice alfabético