Ricardo Michel MALLQUI BAÑOS

Elementos de la estadística


PRIMVN VIVERE DE INDE PHILOSOPHARI
1677

Índice general

Índice de tablas

Índice de figuras

Resumen

La estadística es la ciencia que manipula datos las analiza e interpreta para poder sacar concluciones razonables de ciertos fenomenos naturales. Esta ciencia puede ser dividido en dos: **estadística descirptiva** y **estadística inferencial**. En la estadística descriptiva se procesan datos de una manera teórica y utilitaria. Estos métodos consisten en la recolección, organización, resumen, descripcion y presenatacion de la información. Si la poblacion está disponible entonces la estadística descriptiva es suficiente para describir ciertos fenomenos. No obstante generalmente no se dispone de toda la población si no de una muestra de ella, es en este caso que se requieren usar técnicas más sofisticadas para tomar decisiones y generalizaciones acerca de la poblacion, desde una pequeña muestra de información. Es cuando entra en el juego la estadística inferencial.

La base teórica de la estadística son las matemáticas

Este libro se compone de dos partes, la primera parte trata sobre la **estadística descirptiva** y la segunda **estadística inferencial**. Cada una de ellas divididas en capítulos.

Parte I

Estadística descriptiva

1

Preliminares

1.1. Pre requisitos

Estar familiarizado con las nociones de matemáticas básicas, **cálculo diferencial e integral**.

1.2. Definiciones básicas

Definición 1.1 (Estadística)**.** Es la ciencia de los datos. Es decir colecciona, clasifica, resume, organiza, analiza e interpreta datos

La estadística es comúnmente aplicada a dos tipos de problemas:

1. Resumiendo, describiendo y explorando datos.
2. Usando muestra de datos para inferir la naturaleza de un conjunto de datos del cual se extrajo la muestra seleccionada.

Definición 1.2 (Estadística descriptiva)**.** Es la rama de la estadística dedicado a la oganizacion, descripicion de un conjunto de datos

Definición 1.3 (Estadística inferencial)**.** Es la rama de la estidistica que usa una muestra de datos para realizar inferencias acerca de una población

Definición 1.4 (Muestra)**.** Es un subconjunto de datos seleccionados de una poblacion, usando algún método de muestreo

Definición 1.5 (Unidad experimental)**.** El objeto (persona, cosa, especimen o evento) sobre los cuales se miden son llmados **unidades experimentales**.

1.3. Elementos fundamentales de la estadística

Definición 1.6 (Poblacion)**.** Es un conjunto de datos (usualmente grande, algunas veces conceptual) del cual se desea obtener datos de interés

Definición 1.7 (Variables cuantitativas)**.** Una variable estadística es una **característica** que puede fluctuar y cuya **variación** es susceptible de adoptar **diferentes valores**, los cuales pueden medirse u observarse. Las variables adquieren valor cuando se relacionan con otras variables, es decir, si forman parte de una **hipótesis** o de una **teoría**. Existen dos clases de variables: Cualitativas y cuantitativas.

1. **Cualitativas**. Son aquellas variables que están propensos a ser nominadas textualmente.
    - **Nominales**. Son características que simplemente nominan y están propensos a ser jerarquizados u ordenados tales como: El estado civil (soltero, casado, divorciado, viudo), Religión (católica, evangélico, judío, etc).
    - **Ordinales**. Son características que que si están propensos a ser jerarquizados tales como: Nivel de instrucción (inicial, primaria, secundaria, superior).
2. **cuantitativas**. Son aquellas variables que están propensos a ser medidas mediante números ya sean números enteros o reales.
    - **Discretas**. Aquellas que solo son medidos mediante números enteros por ejemplo: Número de hijos, número de habitaciones.
    - **Continuas**. Aquellas que solo son medidos mediante números reales es decir este incluye a los números racionales e irracionales. Estatura, volumen, peso.

2

Organización de datos en tablas de frecuencias

2.1. Distribución de frecuencias

El uso de tablas de distribución de frecuencias y gráficas como un medio para presentar la información de un conjunto de datos de forma resumida. En grados anteriores ya se ha trabajado con gráficas para variables cuantitativas discretas, por lo que esta será la primera vez que el estudiante trabajará con gráficas que son adecuadas para presentar información de variables cuantitativas continuas.

Definición 2.1. La tabulación es un proceso en el cual los datos son ordenados en grupos llamados *clases* para un análisis más eficaz de estos, los datos podrían estar clasificados mediante una variable cualitativa o cuantitativa en el caso de las variables cualitativas Y_i, se considera la siguiente Tabla 2.1

Tabla 2.1: Caption

Y_i	f_i	F_i	F_i^*	h_i	H_i	H_i^*	$h_i\,\%$	$H_i\,\%$	$H_i^*\,\%$
Y_1	f_1	F_1	F_1^*	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{F_1}{n}$	$\frac{F_1^*}{n}$	h_1	H_1	H_1^*
Y_2	f_2	F_2	F_2^*	$\frac{f_2}{n}$	$\frac{F_2}{n}$	$\frac{F_2^*}{n}$	h_2	H_2	H_1^*
Y_3	f_3	F_3	F_3^*	$\frac{f_3}{n}$	$\frac{F_3}{n}$	$\frac{F_3^*}{n}$	h_3	H_3	H_1^*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Y_r	f_r	F_r	F_r^*	$\frac{f_r}{n}$	$\frac{F_r}{n}$	$\frac{F_r^*}{n}$	h_r	H_r	H_1^*

En el caso de variables cuantitativas ademas si los datos son muy variados, que para se clasificados adecuadamente, necesitan generarse particiones de longitudes semejantes entonces se utiliza el siguiente proceso; el **número de las particiones** r se consideran de acuerdo a **tres criterios**.

1. Criterio del investigador r no puede ser más de 20 ni menos de 5

2. $r = \sqrt{n}$ donde n es el número de datos
3. La regla de Starges que consiste en considerar la fórmula $r = 3{,}322 \cdot \log_{10} n$ Una vez establecido el número de particiones se procede a generar los límites laterales de cada una de las particiones, sea L la longitud de todo el conjunto es decir $L = x_{\text{max}} - x_{\text{min}}$ entonces la longitud de las particiones o amplitud interválica se obtiene con $l = \frac{L}{r}$

Tabla 2.2: Datos cuantitativos (intervalos)

Clase	Y_i	f_i	F_i	F_i^*	h_i	H_i	H_i^*	$h_i\,\%$	$H_i\,\%$	$H_i^*\,\%$
$[y_1 - y_2)$	Y_1	f_i	F_i	F_i^*	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{F_1^*}{n}$	$h_1\,\%$	$H_1\,\%$	$H_1^*\,\%$
$[y_2 - y_3)$	Y_2	f_i	F_i	F_i^*	$\frac{f_2}{n}$	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{F_1^*}{n}$	$h_2\,\%$	$H_2\,\%$	$H_2^*\,\%$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$[y_{r-1} - y_r)$	Y_r	f_r	F_r	F_r^*	$\frac{f_r}{n}$	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{F_r^*}{n}$	$h_r\,\%$	$H_r\,\%$	$H_r^*\,\%$

Tenga en cuenta que n es el número de datos, es decir $n = f_1 + f_2 + \ldots + f_r = \sum_{i=1}^{r}$ donde f_i es número de datos en la partición X_i, una de las r particiones del conjunto total de datos.

1. Las **frecuencias absolutas** f_i indican el número de datos con la característica X_i.
2. Las **frecuencias absolutas acumuladas menor que** F_i obedecen a la fórmula
$$F_m = f_1 + f_2 + \ldots + f_m = \sum_{i=1}^{m} f_i$$
3. Las **frecuencias absolutas acumuladas mayor que** F_i^* obedecen a la fórmula
$$\begin{aligned} F_m^* &= f_m + f_{m+1} + \ldots + f_r \\ &= \sum_{i=m}^{r} f_i \\ &= n - \sum_{i=1}^{m-1} f_i \\ &= n - (f_1 + f_2 + \ldots + f_{m-1}) \end{aligned}$$
4. Las **frecuencias absolutas relativas** obedecen a la fórmula
$$h_m = \frac{f_m}{n}$$

5. Las **frecuencias absolutas relativas menor que** obedecen a la fórmula

$$H_m = \frac{f_m}{n}$$

6. Las **frecuencias absolutas relativas mayor que** obedecen a la fórmula

$$H_m^* = \frac{F_m}{n}$$

7. Las **frecuencias absolutas relativas porcentuales** obedecen a la fórmula $h_i\,\% = 100 \cdot h_i$
8. Las **frecuencias absolutas relativas menor que porcentuales** obedecen a la fórmula $H_i\,\% = 100 \cdot H_i$
9. Las **frecuencias absolutas relativas mayor que porcentuales** obedecen a la fórmula $H_i^*\,\% = 100 \cdot H_i^*$
10. Y_i marca de clase o punto medio de la clase i

Ejemplo 2.1. Sean Los 16 tipos de personalidad en un grupo social encuestado. Organice los datos en una tabla de frecuencias

Tabla 2.3: Datos cualitativos

Y_i	f_i	F_i	F_i^*	h_i	H_i	H_i^*	$h_i\,\%$	$H_i\,\%$	$H_i^*\,\%$
ESTJ	1	1	75	0.01	0.01	1.00	1.33	1.33	100.00
ESTJ	2	3	150	0.03	0.04	2.00	2.67	4.00	200.00
ESTP	3	6	150	0.04	0.08	2.00	4.00	8.00	200.00
ESFJ	4	10	150	0.05	0.13	2.00	5.33	13.33	200.00
ESFP	6	16	150	0.08	0.21	2.00	8.00	21.33	200.00
ISTJ	6	22	155	0.08	0.29	2.07	8.00	29.33	206.67
ISTP	7	29	157	0.09	0.39	2.09	9.33	38.67	209.33
ISFJ	8	37	158	0.11	0.49	2.11	10.67	49.33	210.67
ISFP	9	46	166	0.12	0.61	2.21	12.00	61.33	221.33
ENTJ	10	56	166	0.13	0.75	2.21	13.33	74.67	221.33
ENTP	6	62	166	0.08	0.83	2.21	8.00	82.67	221.33
ENFJ	5	67	166	0.07	0.89	2.21	6.67	89.33	221.33
ENFP	3	70	166	0.04	0.93	2.21	4.00	93.33	221.33
INTJ	2	72	167	0.03	0.96	2.23	2.67	96.00	222.67
INTP	1	73	169	0.01	0.97	2.25	1.33	97.33	225.33

INFJ	1	74	172	0.01	0.99	2.29	1.33	98.67	229.33
INFP	1	75	176	0.01	1.00	2.35	1.33	100.00	234.67
TOTAL	75						100.00		

Ejemplo 2.2. Edades de cierta comunidad

25 35 38 45 47 48 51 52 53 55 60 62 63 66 67 70 71 72 75 77 78 81 88 89 90 99

Tabulando

Tabla 2.4: Datos cuantitativos (intervalos)

Clase	f_i	F_i	F_i^*	h_i	H_i	H_i^*	$h_i\,\%$	$H_i\,\%$	$H_i^*\,\%$
$[20-30)$	1	1	26.0	0.02	0.01	0.35	2.38	1.33	34.67
$[30-40)$	2	3	68.0	0.05	0.04	0.91	4.76	4.00	90.67
$[40-50)$	3	6	68.0	0.07	0.08	0.91	7.14	8.00	90.67
$[50-60)$	4	10	68.0	0.10	0.13	0.91	9.52	13.33	90.67
$[60-70)$	5	15	68.0	0.12	0.20	0.91	11.90	20.00	90.67
$[70-80)$	6	21	75.5	0.14	0.28	1.01	14.29	28.00	100.67
$[80-90)$	3	24	88.0	0.07	0.32	1.17	7.14	32.00	117.33
$[90-100]$	2	26	105.5	0.05	0.35	1.41	4.76	34.67	140.67
TOTAL	42						61.90		
Pearson									

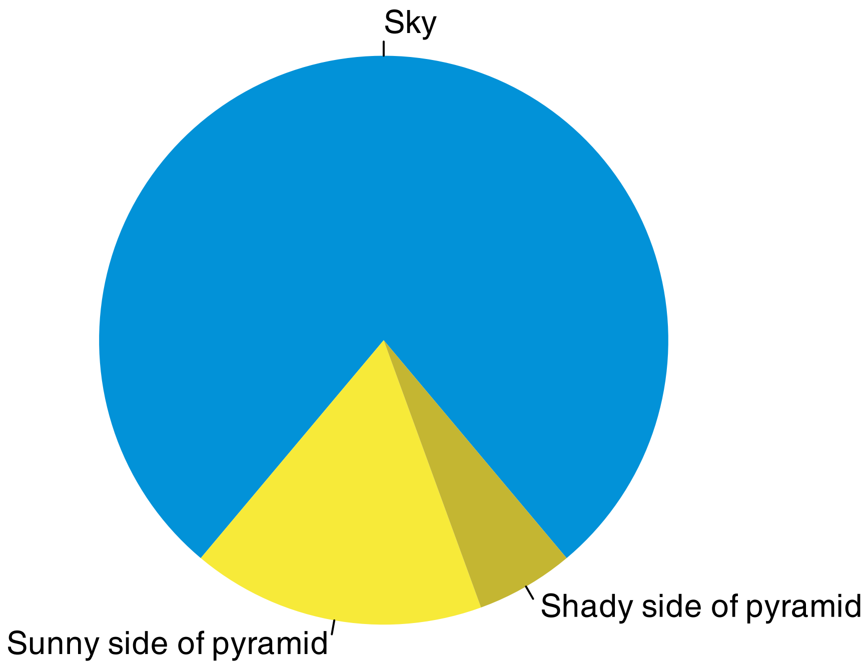
3

Gráficos estadísticos

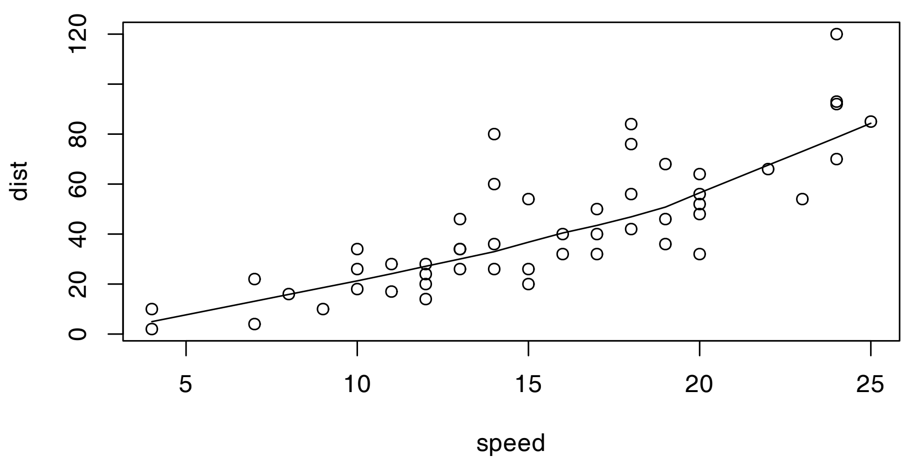
3.1. Histograma de frecuencias

3.2. Circulares

```r
par(mar = c(0, 1, 0, 1))
pie(
  c(280, 60, 20),
  c('Sky', 'Sunny side of pyramid', 'Shady side of pyramid'),
  col = c('#0292D8', '#F7EA39', '#C4B632'),
  init.angle = -50, border = NA
)
```




```r
plot(cars)
lines(lowess(cars))
```

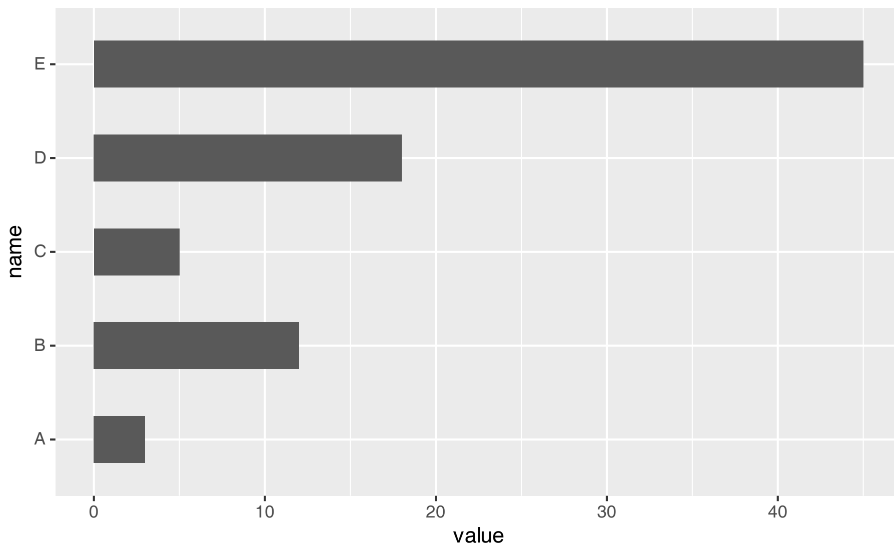



```r
library(ggplot2)

# Create data
data <- data.frame(
```

```
  name=c("A","B","C","D","E") ,
  value=c(3,12,5,18,45)
  )

# Barplot
ggplot(data, aes(x=name, y=value)) +
  geom_bar(stat = "identity", width=0.5) +
  coord_flip()
```



4

Medidas de tendencia central

Son aquellas medidas que buscan un dato representivo central de un conjunto de datos tales como la media, la moda y la mediana.

Definición 4.1 (Datos agrupados y los no agrupados)**.** La principal diferencia entre los datos agrupados y los no agrupados es que los agrupados están clasificados según un criterio y los no agrupados se encuentran en el mismo formato que cuando se recopilaron.

Tabla 4.1: Datos agrupados en intervalos.

Clase	Y_i	f_i	F_i	$\dots$	$H_i^*\,\%$
$[y_1, y_2)$	y_1	f_1	$\dots$	$\dots$	$H_1^*\,\%$
$[y_2, y_3)$	y_2	f_2	$\dots$	$\dots$	$H_1^*\,\%$
$[y_3, y_4)$	y_3	f_3	$\dots$	$\dots$	$H_1^*\,\%$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\vdots$
$[y_{r-1}, y_r]$	y_r	f_r	$\dots$	$\dots$	$H_1^*\,\%$

4.1. La media

A veces llamada *promedio aritmético*, es la medida de tendencia central que pondera los datos.

4.1.1. Media de datos no agrupados

Los datos no están agrupados cuando no están ordenados sobre una tabla de distribución de frecuencias. Sean los n datos $x_1, x_2, \dots, x_n$ entonces la media o promedio aritmético se define como

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Ejemplo 4.1 (Media de datos no agrupados)**.** wwwwwww

4.1.2. Media de datos agrupados

Considérese la siguiente tabla de distribución de frecuencias Tabla 4.1 entonces el promedio es

$$\overline{x} = \frac{y_1 f_1 + y_2 f_2 + \cdots + y_n f_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i f_i$$

Ejemplo 4.2 (Media de datos agrupados)**.** Sean los datos

Clase	Y_i	f_i	$Y_i * f_i$
$[10, 15)$	12.5	1	12.5
$[15, 20)$	17.5	2	35
$[20, 25)$	22.5	5	112.5
$[25, 30)$	27.5	3	82.5
$[30, 35]$	32.5	2	65
$\sum$		13	307.5

$$\overline{x} = \frac{12{,}5 + 35 + +112{,}5 + 82{,}5 + 65}{13} = \frac{307{,}5}{13} = 23{,}65$$

Ejercicio 4.1. Si el promedio de n datos es $\overline{x}$ entonces el promedio del conjunto inicial más un dato adicional x_{n+1} es

$$\overline{x}' = \frac{n\overline{x} + x_{n+1}}{n+1}$$

en general si se adicionan r datos $y_1, y_2, \ldots y_r$ entonces el nuevo promedio será

$$\overline{x}' = \frac{n\overline{x} + y_1 + y_2 + \ldots + y_r}{n+r}$$

Solución. En efecto sea el promedio

$$\begin{aligned}\overline{x}' &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{n\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n} + x_{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{n\overline{x} + x_{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

4.2. La moda (Mo)

- La moda es el valor que tiene mayor frecuencia absoluta.
- Se representa por Mo
- Si en un grupo hay dos o varias puntuaciones con la misma frecuencia y esa frecuencia es la máxima, entonces la distribución es bimodal es decir, tiene varias modas.
- Cuando todas las puntuaciones de un grupo tienen la misma frecuencia, no hay moda.
- Se puede hallar la moda para variables cualitativas y cuantitativas.
- Cuando todas las puntuaciones de un grupo tienen la misma frecuencia, no hay moda.
- Si dos puntuaciones adyacentes tienen la frecuencia máxima, la moda es el promedio de las dos puntuaciones adyacentes.
- Si dos puntuaciones adyacentes tienen la frecuencia máxima, la moda es el promedio de las dos puntuaciones adyacentes.Ejemplos de ejercicios de moda

4.2.1. Moda de datos no tabulados

En este caso es dato que más repite en un conjunto de datos dados.

La moda es el dato que más se repite por ejemplo sea el conjunto de datos x_1, x_2, x_2, x_2, x_3 entonces la moda es Mo $= x_2$

Halle la moda de los siguinetes datos 3, 5,3,6,7,3,4,5,5 ya que hay hay precencia de dotas que se repiten dos veces en tonces este conjunto de datos recibe el nombre de datos bimodal Mo=3 y Mo=5

4.2.2. Moda de datos tabulados

La moda es el dato que más se repite por ejemplo sea el conjunto de datos tabulados de la Tabla 4.1 entonces la moda es

$$M_o = L_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot a_i$$

- L_i es el límite inferior de la clase modal
- f_i es la frecuencia absoluta de la clase modal
- f_{i-1} es la frecuencia absoluta inmediatamente inferior a la clase modal
- f_{i+1} es la frecuencia absoluta inmediatamente posterior a la clase modal
- a_i es la amplitud de la clase

Ejemplo 4.3. Sea la tabla

Clase	f_i
$[10,15)$	2
$[15,20)$	5
$[20,25)$	10
$[25,30)$	3
$[30,35]$	1

Primeramente la mayor frecuencia absoluta es 10 y corresponde $f_3 = 10$ por tanto $i = 3$. $L_i = 20$

$$M_o = L_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot a_i =$$
$$= 20 + \frac{10-5}{(10-5)+(10-3)} \cdot 5 = 20 + \frac{5}{12} * 5 = 22{,}08$$

Más información

4.3. La mediana (Me)

4.3.1. Mediana de datos no tabulados

Obtener la mediana consiste en ordenar los datos de menor a mayor y considerar dos casos: El primero si el número de datos es impar entonces el dato $x_{\frac{n+1}{2}}$ del conjunto ordenado será la mediana es decir

$$\text{Me} = x_{\frac{n+1}{2}}$$

de otro lado si el número de datos es par entonces la mediana es la semisuma de los dos datos intermedios es decir

$$\text{Me} = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

Ejemplo 4.4. Sean los conjuntos de datos 5, 6, 8, 2, 1, 5, 6, 7, 10, 0, 14 y 20, 25, 6, 5, 19, 5 obtener la mediana de estos conjuntos de datos.

Al ordenarlos se obtiene el siguiente arreglo 0, 1, 2, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 10, 14 y considerando que $x_1 = 0$, $x_2 = 1, \ldots, x_{11} = 14$ en este caso el número de datos es impar entonces el dato $x_{\frac{11+1}{2}} = x_6 = 6$ el la mediana. De otro lado el segundo conjunto de datos al ser ordenados 5, 5, 6, 19, 20, 25 ademas considerando que $x_1 = 5, x_2 = 5, \ldots, x_6 = 25$ conducen a obtener la mediana $\text{Me} = \frac{x_{\frac{6}{2}} + x_{\frac{6}{2}+1}}{2} = \frac{6+19}{2} = 12{,}5$.

4.3.2. Mediana de datos tabulados

La mediana se encuentra en el intervalo donde la frecuencia acumulada llega hasta la mitad de la suma de las frecuencias absolutas. Sea la Tabla 4.1.

Es decir tenemos que buscar el intervalo en el que se encuentre.

$$M_e = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i$$

L_i es el límite inferior de la clase donde se encuentra la mediana

$\frac{N}{2}$ es la semisuma de las frecuencias absolutas

f_i es la frecuencia absoluta de la clase mediana

F_{i-1} es la frecuencia acumulada anterior a la clase mediana

a_i es la amplitud de la clase

La mediana es independiente de las amplitudes de los intervalos

Más información

Ejemplo 4.5. Sea la tabla

Clase	f_i	F_i
$[10, 15)$	1	1
$[15, 20)$	2	3
$[20, 25)$	5	8
$[25, 30)$	3	11
$[30, 35]$	1	12
$\sum$	12	

$$\frac{N}{2} = 12/2 = 6$$

ubicando en las frecuencias absolutas acumuladas que corresponde al intervalo $[20, 25)$

$$\begin{aligned} M_e &= L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i \\ &= 20 + \frac{\frac{12}{2} - 3}{5} \cdot 5 = 23 \end{aligned}$$

por lo tanto la mediana de este conjunto de datos tabulados (agrupados) es $Me = 23$

4.4. Asignación

Halle le media, la moda y la mediana de los siguientes datos tabulados

Clase	Y_i	f_i	F_i
$[100, 150)$		1	1
$[150, 200)$		2	3
$[200, 250)$		5	
$[250, 300)$		7	
$[300, 350]$		10	
$[350, 400]$		6	
$[400, 450]$		5	
$[450, 500]$		2	
$[500, 550]$		1	

$$\overline{x} = \frac{y_1 f_1 + y_2 f_2 + \cdots + y_n f_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$$

$$M_o = L_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot a_i$$

$$M_e = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i$$

5

Medidas de dispersión

Son medidas o parametros que miden la dispersion de los datos, entre ellos tenmos

5.1. Rango

Es la longitud de un conjunto de datos, es decir la diferencia

$$R = x_{max} - x_{min}$$

Por ejemplo sean los datos 2, 5, 6, 1, 7, 5, 8, 6 tiene el dato máximo $x_{max} = 8$ y el dato mínimo $x_{min} = 1$. Por lo tanto $R = x_{max} - x_{min} = 8 - 1 = 7$.

5.2. Varianza

Mide la dispersión de los datos con respecto a la media

5.2.1. Datos no tabulados

Se usa la siguiente fórmula

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n - 1}$$

Ejemplo. Sean los datos 2, 5, 6, 1, 7, 5, 8, 6

$$\overline{x} = 40/8 = 5$$

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1} \\
&= \frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + (x_3-\overline{x})^2 + (x_4-\overline{x})^2 + (x_5-\overline{x})^2 + (x_6-\overline{x})^2 + (x_7-\overline{x})^2 + (x_8-\overline{x})^2}{8-1} \\
&= \frac{(2-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (1-5)^2 + (7-5)^2 + (5-5)^2 + (8-5)^2 + (6-5)^2}{8-1} \\
&= \frac{9+0+1+16+4+0+9+1}{7} \\
&= \frac{40}{7} = 5{,}71
\end{aligned}
$$

5.2.2. Datos tabulados

Sea la Tabla 4.1. Entonces la formula que resuelve la varianza es

$$s^2 = \frac{\sum f_i \left(Y_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}$$

$\overline{x} = \frac{\sum Y_i * f_i}{n} = 747{,}5/31 = 24{,}11$

Clase	Y_i	f_i	$Y_i * f_i$
$[5, 10)$	7.5	1	7.5
$[10, 15)$	12.5	2	25
$[15, 20)$	17.5	5	87.5
$[20, 25)$	22.5	7	157.5
$[25, 30]$	27.5	10	275
$[30, 35]$	32.5	6	195
$\sum$		31	

Por lo tanto la varianza para datos agrupados es

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{\sum f_i\,(Y_i-\overline{x})^2}{n-1} \\
&= \frac{f_1\,(Y_1-\overline{x})^2+f_2\,(Y_2-\overline{x})^2+f_3\,(Y_3-\overline{x})^2+f_4\,(Y_4-\overline{x})^2+f_5\,(Y_5-\overline{x})^2+f_6\,(Y_6-\overline{x})^2}{31-1} \\
&= \frac{1\,(7{,}5-24{,}11)^2+2\,(12{,}5-24{,}11)^2+5\,(17{,}5-24{,}11)^2+7\,(22{,}5-24{,}11)^2+10\,(27{,}5-24{,}11)^2+}{31-1} \\
&= \frac{1*275{,}89+2*134{,}79+5*43{,}69+7*2{,}59+10*11{,}49+6*7{,}39}{31-1} \\
&= \frac{275{,}89+269{,}58+218{,}45+18{,}13+114{,}9+44{,}34}{30} \\
&= \frac{941{,}29}{30} = 31{,}38
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$s^2 = 31{,}38$$

5.3. Desviación típica

$$s = \sqrt{s^2}$$

La desviacion típica o estandar del siguiente conjunto de datos tabulados

Clase	Y_i	f_i	$Y_i * f_i$
$[5,10)$	7.5	1	7.5
$[10,15)$	12.5	2	25
$[15,20)$	17.5	5	87.5
$[20,25)$	22.5	7	157.5
$[25,30)$	27.5	10	275
$[30,35]$	32.5	6	195
$\sum$		31	

es

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{31{,}38} = 5{,}60$$

5.4. Desviación media absoluta

5.4.1. Datos no tabulados

$$DM = \frac{1}{n}\sum |x_i - \overline{x}|$$

Sean los datos 2, 5, 6, 1, 7, 5, 8, 6

$$\overline{x} = 40/8 = 5$$

Entonces

$$\begin{aligned} DM &= \frac{\sum |x_i - \overline{x}|}{n} \\ &= ...Resolver \end{aligned}$$

5.4.2. Datos tabulados

$$DM = \frac{1}{n}\sum f_i\,|Y_i - \overline{x}|$$

Y_i marca de clase o punto medio de la clase i

$\overline{x} = \frac{\sum Y_i * f_i}{n} = 747{,}5/31 = 24{,}11$

Clase	Y_i	f_i	$Y_i * f_i$
$[5, 10)$	7.5	1	7.5
$[10, 15)$	12.5	2	25
$[15, 20)$	17.5	5	87.5
$[20, 25)$	22.5	7	157.5
$[25, 30)$	27.5	10	275
$[30, 35]$	32.5	6	195
$\sum$		31	

Por lo tanto la desviación media absoluta es

$$\begin{aligned}
DM &= \frac{\sum f_i \left|Y_i - \overline{x}\right|}{n} \\
&= \frac{f_1 \left|Y_1 - \overline{x}\right| + f_2 \left|Y_2 - \overline{x}\right| + f_3 \left|Y_3 - \overline{x}\right| + f_4 \left|Y_4 - \overline{x}\right| + f_5 \left|Y_5 - \overline{x}\right| + f_6 \left|Y_6 - \overline{x}\right|}{31} \\
&= \frac{1\left|7{,}5 - 24{,}11\right| + 2\left|12{,}5 - 24{,}11\right| + 5\left|17{,}5 - 24{,}11\right| + 7\left|22{,}5 - 24{,}11\right| + 10\left|27{,}5 - 24{,}11\right| + 6\,|3}{31} \\
&= \frac{1 * 16{,}61 + 2 * 11{,}61 + 5 * 6{,}61 + 7 * 1{,}61 + 10 * 3{,}39 + 6 * 8{,}39}{31} \\
&= \frac{277{,}33}{31} = 8{,}94
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$DM = 8{,}94$$

5.5. Desviación mediana absoluta

5.5.1. Datos no tabulados

$$DMe = \frac{1}{n}\sum \left|Y_i - Me\right|$$

Sean los datos 2, 5, 6, 1, 7, 5, 8, 6 (Ejercicio)

5.5.2. Datos tabulados

$$DMe = \frac{1}{n}\sum f_i \left|Y_i - Me\right|$$

$Me =?$ (Ejercicio)

Clase	Y_i	f_i	$Y_i * f_i$
$[5, 10)$	7.5	2	7.5
$[10, 15)$	12.5	3	25
$[15, 20)$		4	87.5
$[20, 25)$	22.5	7	157.5

Clase	Y_i	f_i	$Y_i * f_i$
$[25, 30)$	27.5	10	275
$[30, 35]$		8	195
$\sum$			

Por lo tanto la desviacion de la mediana absoluta es

(Ejercicio)

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{\sum f_i \left| Y_i - Me \right|}{n} \\
&= \frac{f_1 \left(Y_1 - Me\right)^2 + f_2 \left(Y_2 - Me\right)^2 + f_3 \left(Y_3 - Me\right)^2 + f_4 \left(Y_4 - Me\right)^2 + f_5 \left(Y_5 - Me\right)^2 + f_6 \left(Y_6 - M\right.}{31} \\
&= complete
\end{aligned}
$$

5.6. Coeficiente de variacion

$$Cv = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100$$

Si $Cv > 25\,\%$ se dice que los datos estan muy dispersos Si $Cv < 25\,\%$ se dice que los datos estan muy juntos

Para el conjunto de datos

Clase	Y_i	f_i	$Y_i * f_i$
$[5, 10)$	7.5	1	7.5
$[10, 15)$	12.5	2	25
$[15, 20)$	17.5	5	87.5
$[20, 25)$	22.5	7	157.5
$[25, 30)$	27.5	10	275
$[30, 35]$	32.5	6	195
$\sum$		31	

$$Cv = \frac{5{,}60}{24{,}11} \cdot 100 = 0{,}23 \cdot 100 = 23\,\%$$

5.7. Asignación

Halle el rango, la varianza, la desviación típica, desviación media, desviación mediana absoluta y el coeficiente de variación. Grafique el hstograma y ubique estos estadigrafos

Clase	y_i	f_i	F_i
$[50, 100)$	75	8	8
$[100, 150)$		20	28
$[150, 200)$		50	
$[200, 250)$		70	
$[250, 300)$		100	
$[300, 350]$		60	
$\sum$		20	

- Rango $R = x_{max} - x_{min}$
- Varianza $s^2 = \frac{\sum f_i(y_i - \overline{x})^2}{n-1}$
- Desviación típica $s = \sqrt{s^2}$
- Desviación media absoluta $DM = \frac{1}{n} \sum f_i \, |y_i - \overline{x}|$
- Desviación mediana absoluta $DMe = \frac{1}{n} \sum f_i \, |y_i - Me|$
- Coeficiente de variación $CV = \frac{s}{\overline{x}} 1000$

6

Medidas de posición (cuantiles)

Estos estadigrafos dividen al conjunto de datos en un número determinado.

6.1. Cuartiles

Los cuartiles, que dividen a la distribución en cuatro partes (corresponden a los cuantiles 0,25; 0,50 y 0,75); Q_1, Q_2, Q_3

6.1.1. Datos no agrupados

Sean los datos 1, 2, 5, 1 ,5, 6, 7, 8, 9, 3, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 6, 7. **Ordenar** de menor a mayor (creciente)

Si

$$Q_k = \frac{k(n+1)}{4}$$

es **entero** entonces el cuartil es el dato de la posición $Q_k = x_{\frac{k(n+1)}{4}}$ en caso contrario se **interpola** los datos extremos donde se encuentra el valor Q_k

- Ejemplo 1, 2, 5, 1 ,5, 6, 7, 8, 9, 3, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 6, 7 ordenados de menor a mayor 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9.

$Q_1 = \frac{1(18+1)}{4} = 4{,}75$ interpolando $Q_1 = 2 + (2-2)\cdot 0{,}75 = 2$

$Q_2 = \frac{2(18+1)}{4} = 9{,}5$ interpolando $Q_2 = 5 + (5-5)\cdot 0{,}5 = 5$

$Q_3 = \frac{3(18+1)}{4} = 14{,}25$ interpolando $Q_3 = 6 + (7-6)\cdot 0{,}25 = 6{,}25$

6.1.2. Datos agrupados

$$Q_k = L_i + a_i\left(\frac{\frac{kn}{4} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}}\right); k = 1,2,3$$

- L_i limite inferior del intervalo que contiene al decil
- F_{i-1} frecuencia acumulada en la clase anterior al decil
- F_i frecuencia acumulada en la clase al decil
- a_i amplitud interválica
- n numero de datos
- k índice del cuartil correspondiente

Clase	Y_i	f_i	F_i
$[5,10)$	7.5	1	1
$[10,15)$	12.5	2	3
$[15,20)$	17.5	5	8
$[20,25)$	22.5	7	15
$[25,30)$	27.5	10	25
$[30,35)$	32.5	6	31
$[35,40)$	37.5	5	36
$[40,45]$	42.5	3	39
$\sum$		39	

$$\begin{aligned} Q_1 &= L_i + a_i \left(\frac{\frac{1n}{4} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right) \\ &= L_i + a_i \left(\frac{\frac{1*39}{4} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right) \\ &= 20 + 5 \cdot \left(\frac{9{,}75 - 8}{15 - 8} \right) \\ &= 21{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= L_i + a_i \left(\frac{\frac{2n}{4} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right) \\ &= L_i + a_i \left(\frac{\frac{2*39}{4} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right) \\ &= 25 + 5 \cdot \left(\frac{19{,}5 - 15}{25 - 15} \right) \\ &= 27{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= L_i + a_i \left(\frac{\frac{3n}{4} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right) \\ &= L_i + a_i \left(\frac{\frac{2*39}{4} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right) \\ &= 30 + 5 \cdot \left(\frac{29{,}25 - 25}{31 - 25} \right) \\ &= 33{,}542 \end{aligned}$$

6.2. Quintiles

Similar al caso anterior

$$Q_5 = L_i + a_i \left(\frac{\frac{kn}{5} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right)$$

donde $k = 1, 2, 3, 4$

6.3. Deciles

Los deciles, que dividen a la distribución en diez partes es decir $D_1, D_2, \ldots, D_9$

6.3.1. Datos no agrupados

Sean los datos 1, 2, 5, 1 ,5, 6, 7, 8, 9, 3, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 6, 7 Ordenar de menor a mayor (creciente)

Si

$$D_k = \frac{k(n+1)}{10}$$

es entero entonces el decil es el dato de la posicion $D_k = x_{\frac{k(n+1)}{10}}; k = 1, 2, 3, \ldots, 9$ Si

$$D_k = \frac{k(n+1)}{10}$$

no es entero entonces el decil es la interpolacion lineal de de los dos valores entre las cuales se encuentra $D_k = \frac{k(n+1)}{10}$

Ejemplo 6.1. Sean los datos: 1, 2, 5, 1 ,5, 6, 7, 8, 9, 3, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 6, 7 ordenados de menor a mayor 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9 entonces

$$D_9 = \frac{9(18+1)}{10} = 17{,}1$$

interpolando el decil 9 es $D_9 = 8 + (9-8) \cdot 0{,}1 = 8{,}1$

6.3.2. Datos agrupados

La fórmula es

$$D_k = L_i + A \left(\frac{\frac{kn}{10} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right)$$

Clase	Y_i	f_i	F_i
$[5,10)$	7.5	1	1
$[10,15)$	12.5	2	3
$[15,20)$	17.5	5	8
$[20,25)$	22.5	7	15
$[25,30)$	27.5	10	25
$[30,35)$	32.5	6	31
$[35,40)$	37.5	5	36
$[40,45]$	42.5	3	39
:——:	:—:	:—:	:—:
$\sum$		39	

$$D_9 = L_i + A \left(\frac{\frac{9 \cdot 39}{10} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right)$$

Entonces $\frac{9 \cdot 39}{10} = 35{,}1$

$$D_9 = 35 + 5 \left(\frac{35{,}1 - 31}{36 - 31} \right) = 39{,}1$$

6.4. Percentiles

Los percentiles, que dividen a la distribución en diez partes es decir $P_1, P_2, \ldots, P_{99}$

6.4.1. Datos no agrupados

Si

$$P_k = \frac{k(n+1)}{100}; k = 1, 2, \ldots, 99$$

es entero entonces el cuartil es el dato de la posicion $P_k = x_{\frac{k(n+1)}{100}}$ Si

$$P_k = \frac{k(n+1)}{100}$$

no es entero entonces el cuartil es la interpolacion lineal de de los dos valores entre las cuales se encuentra $Q_k = \frac{k(n+1)}{100}$

- Ejemplo 1, 2, 5, 1 ,5, 6, 7, 8, 9, 3, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 6, 7 Al ordenar de manera creciente 1, 2, 5, 1 ,5, 6, 7, 8, 9, 3, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 6, 7 y

$$P_k = \frac{k(18+1)}{100}$$

6.4.2. Datos agrupados

$$P_k = L_i + A\left(\frac{\frac{kn}{100} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}}\right)$$

Clase	Y_i	f_i	F_i
$[5, 10)$	7.5	1	1
$[10, 15)$	12.5	2	3
$[15, 20)$	17.5	5	
$[20, 25)$	22.5	7	
$[25, 30$		10	
$[30, 35$		6	
$[35, 40$		5	
$[40, 45$		3	
$\sum$		2	

7

Medidas de asimetría

Podemos decir que la asimetría indica cuánto se desvía nuestra distribución subyacente de la **distribución normal**, ya que la distribución normal tiene **asimetría 0**. Generalmente, tenemos **tres tipos de asimetría**.

1. **Desviación simétrica**: cuando la asimetría es cercana a 0 y la media es casi la misma que la mediana
2. **Desviación negativa**: cuando la cola izquierda del histograma de la distribución es más larga y la mayoría de las observaciones se concentran en la cola derecha. En este caso, también podemos utilizar el término "sesgado a la izquierda" o "cola izquierda". y la **mediana es mayor que la media**.
3. **Desviación positiva**: cuando la cola derecha del histograma de la distribución es más larga y la mayoría de las observaciones se concentran en la cola izquierda. En este caso, también podemos usar el término "sesgado a la derecha" o "cola derecha". y la **mediana es menor que la media**.

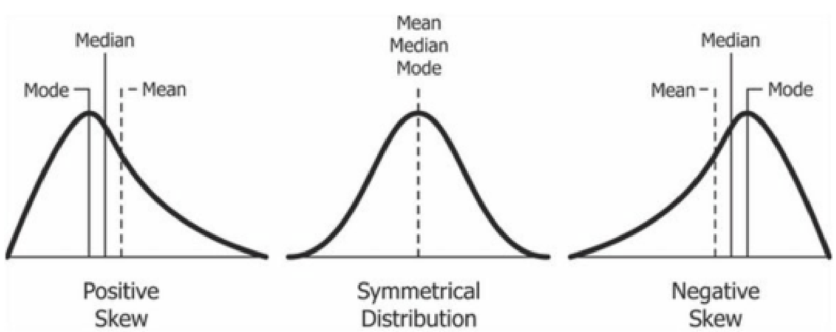


Figura 7.1 Medidas de asimetría

7.1. Índice de simetría de Pearson:

$$A_s = \frac{3(\overline{x} - Me)}{s}$$

$-3 < A_s < 3$

$$A_s = \frac{\overline{x} - Mo}{s}$$

$-3 < A_s < 3$

Ejemplo 7.1. Sea la tabla con intervalos

Tabla 7.1: Pearson en datos tabulados en intervalos

Clase	y_i	f_i	$y_i * f_i$	F_i	$f_i(y_i - \overline{x})^2$
$[5, 10)$	7.5	1	7.50	1	280.56
$[10, 15)$	12.5	2	25.00	3	276.12
$[15, 20)$	17.5	7	122.50	10	318.94
$[20, 25)$	22.5	10	225.00	20	30.62
$[25, 30]$	27.5	12	330.00	32	126.75
$[30, 35]$	32.5	8	260.00	40	544.50
$\sum$		40	970.00		1577.50
		$\overline{x}$	24.25	Me	25.00
		s	6.36	Mo	28.00
		As(Me)	-0.35		
		As(Mo)	-0.59		

7.2. Índice de simetría de Yule Bowley:

$$A_s = \frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$$

$-1 < A_s < 1$

Ejemplo 7.2. Sea la tabla con intervalos

Tabla 7.2: Yule Bowley en datos tabulados en intervalos

Clase	y_i	f_i	$y_i * f_i$	F_i
$[5, 10)$	7.5	1.00	7.5	1.00
$[10, 15)$	12.5	2.00	25	3.00
$[15, 20)$	17.5	7.00	122.5	10.00
$[20, 25)$	22.5	10.00	225	20.00
$[25, 30]$	27.5	12.00	330	32.00
$[30, 35]$	32.5	8.00	260	40.00
$\sum$		40.00	970	
			$Me = Q_2$	25.00
			Q_1	20.00
	As	-0.09	Q_3	29.17

7.3. Índice de simetría de Fisher:

- Datos no agrupados

$$A_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^3}{n\sigma^3}$$

- Datos agrupados

$$A_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^3}{n\sigma^3}$$

- Datos agrupados en intervalos

$$A_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (y_i - \overline{x})^3}{n\sigma^3}$$

Ejemplo 7.3. Sea la tabla con intervalos

Tabla 7.3: Fisher en datos tabulados en intervalos

Clase	y_i	f_i	$y_i * f_i$	$f_i(y_i - \overline{x})^3$.	$f_i(y_i - \overline{x})^2$
$[5, 10)$	7.5	1	7.50	-4699.42	280.56
$[10, 15)$	12.5	2	25.00	-3244.47	276.12
$[15, 20)$	17.5	7	122.50	-2152.83	318.94
$[20, 25)$	22.5	10	225.00	-53.59	30.62
$[25, 30]$	27.5	12	330.00	411.94	126.75
$[30, 35]$	32.5	8	260.00	4492.12	544.50
$\sum$		40	970.00	-5246.25	1577.50
		$\overline{x}$	24.25		
		s	6.36		
		As	-0.85		

8

Medidas de curtosis o apuntamiento

En estadística, usamos la medida de curtosis para describir la “cola” de la distribución, ya que describe la forma de la misma. También es una medida del “pico” de la distribución.

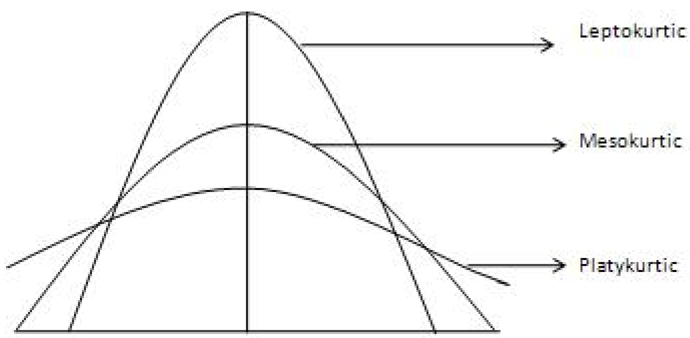


Figura 8.1 Medidas de curtosis

1. **Mesocurtica** : esta es la distribución normal
2. **Leptocurtica** : esta distribución tiene colas más gruesas y un pico más afilado. La curtosis es “positiva”
3. **Platicurtica** : La distribución tiene un pico más bajo y más ancho y colas más delgadas. La curtosis es “negativa”

8.1. En base a la media y desviación típica

1. Datos no agrupados

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^4}{ns^4};$$

2. Datos agrupados

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\,(x_i - \overline{x})^4}{ns^4};$$

3. Datos agrupados en intervalos

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\,(y_i - \overline{x})^4}{ns^4};$$

si $k = 3$ mesocúrtica, $k > 3$ leptocúrtica, además si $k < 3$ platicúrtica

Ejemplo 8.1. Sea la tabla con intervalos

Tabla 8.1: Curtosis en base a la media y desviación típica en datos tabulados en intervalos

Clase	y_i	f_i	$y_i * f_i$	$f_i(y_i - \overline{x}).^4.$	$f_i(y_i - \overline{x})^2$
$[5, 10)$	7.5	1	7.50	78715.32	280.56
$[10, 15)$	12.5	2	25.00	38122.51	276.12
$[15, 20)$	17.5	7	122.50	14531.59	318.94
$[20, 25)$	22.5	10	225.00	93.79	30.62
$[25, 30]$	27.5	12	330.00	1338.80	126.75
$[30, 35]$	32.5	8	260.00	37060.03	544.50
$\sum$		40	970.00	169862.03	1577.50
		$\overline{x}$	24.25		
		s	6.36		
		k	4.28		

8.2. En base a percentiles

$$k = \frac{P_{75} - P_{25}}{2\,(P_{90} - P_{10})}$$

si $k < 0{,}263$ platicúrtica y si $k = 0{,}263$ mesocúrtica, ademas $k > 0{,}263$ leptocúrtica

Ejemplo 8.2. Sea la tabla con intervalos

Tabla 8.2: Curtosis en base a percentiles en datos tabulados en intervalos

Clase	y_i	f_i	$y_i * f_i$	F_i	X6	X7
$[5, 10)$	7.5	1.00		1.00	37.8	p90
$[10, 15)$	12.5	3.00		4.00	4.2	p10
$[15, 20)$	17.5	8.00		12.00	10.5	q1
$[20, 25)$	22.5	10.00		22.00	31.5	q3
$[25, 30]$	27.5	12.00		34.00		
$[30, 35]$	32.5	8.00		42.00		
$\sum$		42.00				
			P_{90}	32.38		
			Q_1	19.06		
	As	0.29	Q_3	28.96		
			P_{10}	15.12		

9

Variables estadísticas bidimensionales

Definición 9.1. Sea (X, Y) una variable estadistica bidimensional tal que los disitnos valores que toman x e y son

$$X : x_1, x_2, \ldots, x_n$$

$$Y : y_1, y_2, \ldots, y_m.$$

Una dsitubicuion bidimensional de frecuencias es un arreglo de los valores observados $(x_1, y_1); (x_1, y_2); \ldots, (x_k, y_1), \ldots, (x_n, y_m)$, de la variable bidimensional (X, Y), con sus respectivas frecuencias, en una tabla de doble entrada de la forma

Clases	y_1	y_2	$\ldots$	y_n	TOTAL
x_1	f_{11}	f_{12}	$\ldots$	f_{1n}	$f_{1.}$
x_2	f_{21}	f_{22}	$\ldots$	f_{2n}	$f_{2.}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_m	f_{m1}	f_{m2}	$\ldots$	f_{mn}	$f_{m.}$
TOTAL	$f_{,1}$	$f_{,2}$	$\ldots$	$f_{.n}$	$n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n}$

9.1. Regresión y correlación lineal

Definición 9.2 (Coeficiente de correlacion muestral)**.** Sean $(x_1, y_1); (x_2, y_2); \ldots, (x_k, y_k)$ valores de la variable estadsitica bidimensional (X, Y) cuyas frecuencias realtivas son $f_1, f_1, \ldots, f_k$ respectivamente. El coeficiente de correlacion muestral entre las variables X e Y es:

$$Corr(X, Y) = r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{s_X^2}\sqrt{s_Y^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{Y})^2}}.$$

Donde

Parte II

Probabilidades

1

Experimento aleatorio, espacio muestral y eventos

1.1. Experimento aleatorio

Definición 1.1 (Experimento aleatorio simple)**.** Experimento aleatorio es la reproducción controlada de un fenómeno, existiendo incertidumbre sobre el resultado que se obtendrá. Un experimento aleatorio bajo el mismo conjunto aparente de condiciones iniciales, puede presentar resultados diferentes, es decir, no se puede predecir o reproducir el resultado exacto de cada experiencia particular. (Ej.: Lanzamiento de un dado, lanzamiento de una moneda, lanzamiento de una carta de una baraja).

Este tipo de fenómeno es opuesto al suceso determinista, en el que conocer todos los factores de un experimento permite predecir exactamente el resultado del mismo. Por ejemplo, conociendo la altura desde la que se arroja un móvil es posible saber exactamente el tiempo que tardará en llegar al suelo en condiciones de vacío. Es al azar ya que es aleatorio.

Denotado por ϵ

Los experimentos pueden dividirse en dos clases: Deterministicos y no Deterministicos

1. Un experimeneto es deterministico si los resultados del experimento estan completamente determinado y puede describirse por un formula matematica (modelo deterministico). Por ejemplos Soltar un objeto en el aire, el movimento horizontal de un objeto impulsada por una fuerza, etc.
2. Un experimeneto es no deterministico si los resultados del experimento no puede predecirse con exactitud antes de realizar el experimento. Por ejemplos: Lanzar una moneda y observar y es cara o sello, lanzar un dado y observar que numero aparece en la cara superior etc.

1.2. Espacio muestral

Definición 1.2 (Espacio muestral)**.** Son los posibles resultados de un experimento. Denotado por Ω

Ejemplo 1.1 (Ejemplo de espacio muestral)**.** Los resultados del experimento aleatorio ϵ: Lanzamiento de una moneda son $\Omega = \{C, S\}$

Definición 1.3 (Experimentos compuestos)**.** Compuesta de dos o más experimentos simples, existen dos tipos: Exclusivos (o) e inclusivos (y)

Definición 1.4 (Experimentos compuestos exclusivos)**.** ϵ es una **o-combinacion** de los ϵ_1 y ϵ_2 simples si solo si ϵ ocurre, cuando ϵ_1 y ϵ_2 ocurre (pero no ambos).

Ejemplo 1.2. ϵ_1: lanzar un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y ϵ_2: lanzar una moneda, $\Omega = \{C, S\}$

Definición 1.5 (Experimentos compuestos inclusivos)**.** ϵ es una **y-combinacion** de los ϵ_1 y ϵ_2 simples si solo si ϵ ocurre cuando ambos ϵ_1 y ϵ_2 ocurren.

El espacio muestral asociado a ϵ es $\Omega = \Omega_1 \times \omega_2$ (el producto cartesiano de los espacios muetrales de los experimentos ϵ_1 y ϵ_2)

Ejemplo 1.3. ϵ_1: lanzar una moneda, $\Omega_1 = \{C, S\}$, ϵ_2: lanzar una moneda, $\Omega_2 = \{C, S\}$ y ϵ_3: lanzar una moneda, $\Omega_3 = \{C, S\}$. Por lo tanto el experimentos y-compuesto genera el espacio muestral $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 = \{CCC, CSC, SCC, SSC, CCS, CSS, SCS, SSS\}$

Definición 1.6 (Espacio muestral discreto)**.** wwwwwwwwww

Definición 1.7 (Espacio muestral continuo)**.** wwwwwwwwwwwwwwww

Definición 1.8 (Eventos)**.** Cualquier subconjunto de un espacio muestral, denotado generalamente por A, B, C, etc. Si A es un evento entonces $A \subset \Omega$, llamaremos *suceso* a todo elemento de un espacio muestral y lo denotaremos por w, x, y, etc. Si x es un suceso entonces $x \in \Omega$. Un evento con un solo elemento, se llama *evento elemental*.

Observación. El evento $\{w\}$ y el susceso w no son lo mismo. En otras palabras, evento es cualquier elemento de $\mathcal{P}(\Omega)$, (asi $\emptyset$ y Ω son eventos).

Ejemplo 1.4. Sea el experimento del lanzamiento de un dado, generando el espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, las potencias de este conjunto es

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

por lo tanto algunos eventos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\emptyset$, $\{1, 2\}$, etc.

Observación. El número de elementos de un conjunto potencia es 2^n donde $n = |S|$, el número de elementos de un conjunto S.

2

Álgebra de eventos

2.1. Operaciones con eventos

Sean A, B y C eventos entonces

1. Sub eventos
2. Inclusion de eventos $A \subset B$, si $\omega \in A \leftrightarrow \omega \in B$
3. Igualdad de eventos ocurre si $A \subset B$ y $B \subset A$
4. Unión de eventos: $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$
5. Intersección de eventos: $AB = A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$
6. Diferencia de eventos: $A - B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$
7. Complento de un evento: $A' = \Omega - A = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$
8. Leyes distributivas $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
9. Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
10. Producto cartesiano: $A \times B = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in A \text{ y } \omega_2 \in B\}$ (refiérase además a experimentos compuestos inclusivos)

2.2. Eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos

Definición 2.1 (Eventos mutuamente excluyentes)**.** Dos eventos A y B definidos en el mismo espacio muestral, se dice que son mutuamente. excluyentes si no pueden ocurrir juntos. Es decir la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro. En símbolos, si $A \cap B = \emptyset$

Definición 2.2 (Eventos colectivamente exhaustivos)**.** Se dice que una colección de n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ definidos sobre el mismo espacio muestral son colectivamente exhaustivos, si la unión es igual al espacio muestral. es decir

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$$

Observación. Algunas observaciones con respecto a eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos

1. Si A y B son eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos ¿son los eventos A y B mutuamente excluyente? ¿Son colectivamente exahustivos?
2. Si A y B son eventos mutuamente excluyentes pero no colectivamente exhaustivos, ¿son los eventos A y B colectivamente exhaustivos?

3

Técnicas de conteo

3.1. Principio de multiplicación

Teorema 3.1. *Si un experimento aleatorio (u operación) ϵ_1 ocurre de n_1 formas y si para cada una de estas, un experimento (u operación) ϵ_2 ocurre de n_2 formas, entonces los dos experimentos juntos ocurren de $n_1 n_2$ formas.*

Observación. Entonces, condición necesaria y suficiente para que se aplique el principio de multiplicación es que se realizan ambos experimentos (u operaciones) uno seguido del otro o simultáneamente.

Ejemplo 3.1. El experimento aleatorio del lanzamiento de un dado y una moneda

3.2. Principio de la adición

Teorema 3.2. *Si un experimento aleatorio (u operación) ϵ_1 ocurre de n_1 formas y un segundo experimento (u operación) ϵ_2 ocurre de n_2 formas, entonces el experimento ϵ que consiste en realizar ϵ_1 o ϵ_2, ocurre de $n_1 + n_2$ formas, siempre que los espacios muestrales Ω_1 y Ω_2 asociados a los experimentos ϵ_1 y ϵ_2 sean disjuntos.*

3.3. Permutación

Definición 3.1 (Permutación)**.** Una disposición de sus miembros en una secuencia u orden lineal, o si el conjunto ya está ordenado, una variación del orden o posición de los elementos de un conjunto ordenado o una tupla

Ejemplo 3.2. Sean $\{a, b, c\}$ entonces las posibles permutaciones son abc, acb, bac, bca, cab y cba

Teorema 3.3. *El número de permutaciones de n objetos diferentes es*

$$P_n^n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$$

Teorema 3.4. *El número de permutaciones de n objetos tomados s a s es*

$$P_n^s = \frac{n!}{(n-s)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-s+1)$$

Ejemplo 3.3. Sea a, b, c, d, e elementos cualesquiera, el numero de permutaciones de 2 a 2 es $P_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$ pues los pares ordenados que se pueden formar con los elementos sin repetición son

$$(a, b); (a, c); (a, d) \text{ y } (a, e)$$
$$(b, a); (b, c); (b, d) \text{ y } (b, e)$$
$$(c, a); (c, b); (c, d) \text{ y } (c, e)$$
$$(d, a); (d, b); (d, c) \text{ y } (d, e)$$
$$(e, a); (e, b); (e, c) \text{ y } (e, d)$$

Observación. Del teorema 3.5 se deduce que en el resultado esta implicito el **principio de la multiplicacion**

Teorema 3.5. *El numero de permutaciones de n objetos distintos alrededor de un circulo es*

$$P_c^n = (n-1)$$

Ejemplo 3.4. ¿De cuántas formas diferentes pudieron sentarse, en la última cena, alrededor de la mesa, Jesucristo y los 12 apóstoles?

1. Si la mesa fuera circular, tendremos la permutación circular. El número de formas es $P_c^{13} = (13-1)! = 12!$
2. Si la mesa no es circular, se tendrá una permutación de las 13 personas. El número de formas es $P =$

3.4. Premutación con repetición

Definición 3.2. El numero de permutaciones de n objetos de los cuales k objetos son de clase $n_1, n_2, \ldots, n_k$ respectivamente y los demas objetos de clase 1 es

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

3.5. Partición de un conjunto

Definición 3.3. El número de formas posibles, que n objetos diferentes en que puedan dividirse en k grupos distinguibles conteniendo $n_1, n_2, \ldots, n_k$ objetos respectivamente, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ es

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

3.6. Combinación

En muchos casos estaremos interesado en el número de formas de seleccianar r objetos de n. sin importar el orden. Estas selecciones se llaman **combinaciones**

Definición 3.4. Un subconjunto de r elementos de un conjunto que tiene n elementos diferentes, se llama una **combinacion de n elementos tomados de r a r**.

$$\binom{r}{n} = C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)}$$

Observación. El número de combinaciones por el número de permutaciones de los elementos de la clase P_r^r (numero delementos de tomados de r a r) es igual al numero de permutaciones de los objetos tomados r a r de P_n^r, es decir

$$C_n^r P_r^r = P_n^r$$

entonces

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{P_r^r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Observación. Una combinación de n elementos distintos tomados de a r, en realidad es una partición del conjunto en dos subconjuntos (o celdas), donde una de ellas contiene r objetos y la otra las $n-r$ restantes. Por lo tanto, el número de tales combinaciones será el número de particiones, es decir

$$\binom{n}{r, n-r} = P_n^{r,n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

4

Definición de probabilidad

Se define de dos maneras

4.1. Probabilidad clásica

Definición 4.1 (Probabilidad clásica)**.** Si $n(\Omega) = n$, número de sucesos posibles de un espacio muestral y $n(A) = n_A$ el número de suscesos del evento A. La probabiilidad del evento A es

$$P(A) = \frac{n(\Omega)}{n(A)} = \frac{n}{n_A}$$

Observación. Sea A es un evento entonces se verifica:

1. La probabilidad de un evento A verifica $0 \leq P(A) \leq 1$, pues $0 \leq n_A \leq n$.
2. A es un evento imposible si $P(A) = 0$. en particular $A = \emptyset$.
3. A es un evento seguro si $P(A) = 1$. en particular $A = \Omega$.
4. Los eventos elementales son equiprobables, es decir $P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Si A es un evento en Ω entonces

$$P(A) = \sum_{w_i \in A} P(\{\omega_i\})$$

5

Probabilidad condicional

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$

6

Teorema de Bayes

Teorema 6.1 (Teorema de Bayes)**.** *Sea* $\{A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n\}$ *un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos, y tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero (0). Sea* B *un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales* $P(B|A_i)$*. Entonces, la probabilidad* $P(A_i|B)$ *viene dada por la expresión:*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

donde:

1. $P(A_i)$ *son las probabilidades a priori,*
2. $P(B|A_i)$ *es la probabilidad de* ***B*** *en la hipótesis* A_i*,*
3. $P(A_i|B)$ *son las probabilidades a posteriori. :::*

7

Eventos independientes y secuencias de experimentos

8

Probabilidad en espacio

Parte III

Inferencia estadística

1

Variables aleatorias

Definición 1.1 (Variable aleatoria)**.** Sea Ω un espacio muestral asociado a una experimento aleatorio ϵ y $\omega \in \Omega$, entonces se genera la función **variable aleatoria**

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

$$f\left(k\right) = \binom{n}{k} p^{k} \left(1-p\right)^{n-k} \tag{1.1}$$

You may refer to it using (1.1)

A

Sumatorias

Una suma de números representados por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se simboliza en forma compacta mediante el simbolo $\sum$ (sigma) es decir la suma de los números anteriores se puede escribir del siguiente modo

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Algunas propiedades son

1. $k \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} kx_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$
3. $\sum_{i=1}^{n} x_i$

   $$\int_1^3 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f^i(x)$$

   citado por (Xie, 2015) Variable estadística variable estadística

A.1. ee

$\sum_{i=1}^{n} x_i$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}$$

A.1.1. eeeee

B

Matrices

Una matriz es un arreglo de números distribuidos en filas y columnas por ejemplo la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{11} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

de **orden** $n \times m$ tiene **entradas** a_{ij} donde el primer subindice indica la fila y el segundo la columna; es usual representar por simplicidad una matriz por $A = [a_{ij}]_{n\times m}$. Si en el orden $n = m$ entonces la matriz recibe el nombre de **matriz cuadrada** la suma de los elementos de la diagonal de una matriz cuadrada $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ se llama **traza**. Si todas las a_{ij} son cero entonces la matriz $A = 0$ recibe el nombre matriz **nula**.

Dos matrices son iguales si tienen el **mismo orden** y cada una de las entradas respectivas son iguales es decir $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ y $B = [b_{ij}]_{n\times m}$ son iguales si $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots n$ y $j = 1, 2, \dots m$

B.1. Algebra de matrices

Sean las matrices

$$A = [a_{ij}]_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{11} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

y

$$B = [b_{ij}]_{p\times q} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{11} & b_{11} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}_{p\times q}$$

entonces la suma y producto de matrices se definen

1. Sea k un escalar entonces se verifica que $kA = [ka_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots n$ y $j = 1, 2, \dots m$ es decir el escalar k multiplica a cada una de las entradas de la matriz.

$$\begin{aligned} kA &= k[a_{ij}]_{n\times m} \\ &= [ka_{ij}]_{n\times m} \\ &= \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{11} & ka_{11} & \dots & ka_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m} \end{aligned}$$

2. La suma o diferencia es posible si $n = p$ y $m = q$ es decir los ordenes de A y B son iguales, entonces la suma o diferencia resulta

$$\begin{aligned} A \pm B &= [a_{ij} + b_{ij}]_{n\times m} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} + b_{11} & a_{11} + b_{11} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m} \end{aligned}$$

donde $i = 1, 2, \dots n$ y $j = 1, 2, \dots m$

3. El producto es posible si $m = p$ es decir el número columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz, el orden de la matriz resultante es $n \times q$ además

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right]_{n\times q} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_{1k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{m} a_{1k} b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{m} a_{1k} b_{kq} \\ \sum_{k=1}^{m} a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{m} a_{2k} b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{m} a_{2k} b_{kq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} a_{nk} b_{k1} & \sum_{k=1}^{m} a_{nk} b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{m} a_{nk} b_{kq} \end{pmatrix}_{n\times q} \end{aligned}$$

donde $i = 1, 2, \dots n$ y $j = 1, 2, \dots m$

Ejemplo B.1. Sean $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 5}$ entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 15 & 3 \\ 5 & -3 & 0 & 13 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

En caso de ser posible la multiplicación entre A, B y C entonces se verfican las siguientes propiedades

1. $A(B + C) = AB + AC$
2. $(A + B)C$
3. $A(BC) = (AB)C$

B.2. Matrices particulares

En esta seccion se considera las siguientes matrices: Matriz triangular, matriz particular de una matriz cuadrada, matriz transpuesta, matriz simetrica, matriz conjugada, matriz hermitica, matriz escalonada.

B.2.1. Matriz triangular

Una matriz cuadrada A cuyos elementos $a_{ij} = 0$ si $i > j$ es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

se llama **matriz triangular superior**; reciprocamente si $i < j$ es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{11} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

se llama **matriz triangular inferior**. Si A es a la vez **matriz triangular superior** y **matriz triangular inferior** entonces recibe el nombre de **matriz diagonal**, representada por

$$(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

además si $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = k$ la matriz recibe el nombre de **matriz escalar** y si $k = 1$ la matriz recibe el nombre de **matriz unidad** representada por I_n por ejemplo

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B.2.2. Matriz particular de una matriz cuadrada

B.2.3. Matriz transpuesta

B.2.4. Matriz simetrica

B.2.5. Matriz conjugada

B.2.6. Matriz hermitica

B.2.7. Matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} w & warnwww & w \\ w & warnwww & w \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

```
xw = 'Es decir los elementos son demagogos y déspotas'
x1 = 'Es decir los elementos son demagogos y déspotas'
```

$$\frac{\sin x}{x^3} = 0{,}3794281$$

$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

1. Www
$$\frac{1}{20\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{300} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-200}{20}\right)^2} dz = 0{,}9999997$$
2. 0.9500042 also Es decir los elementos son demagogos y déspotas
3. Es decir los elementos son demagogos y déspotas

Tabla B.1

Tabla B.1: Caption

Option	N	w	Observation	Description
Es decir los elementos son demagogos y déspotas Es decir los elementos son demagogos y déspotas	1	w	Es decir los elementos son demagogos y déspotas	Es decir los elementos son demagogos y déspotas Es decir los elementos son demagogos y déspotas
Engine	2	w	Es decir los elementos son demagogos y déspotas $\sum_{i=1}^{n} f_i$	Engine to be used for processing templates. Handlebars is the default.
Es decir los elementos son demagogos y déspotas	3	w	$\sum_{i=1}^{n} f_i$	extension to be used for dest files.

variable aleatoria Variable aleatoria entonces

2.7182818 0.9750021 0.7881446

2561

The value of `x` in the Python session is Es decir los elementos son demagogos y déspotas . It is not the same `x` as the one in R.

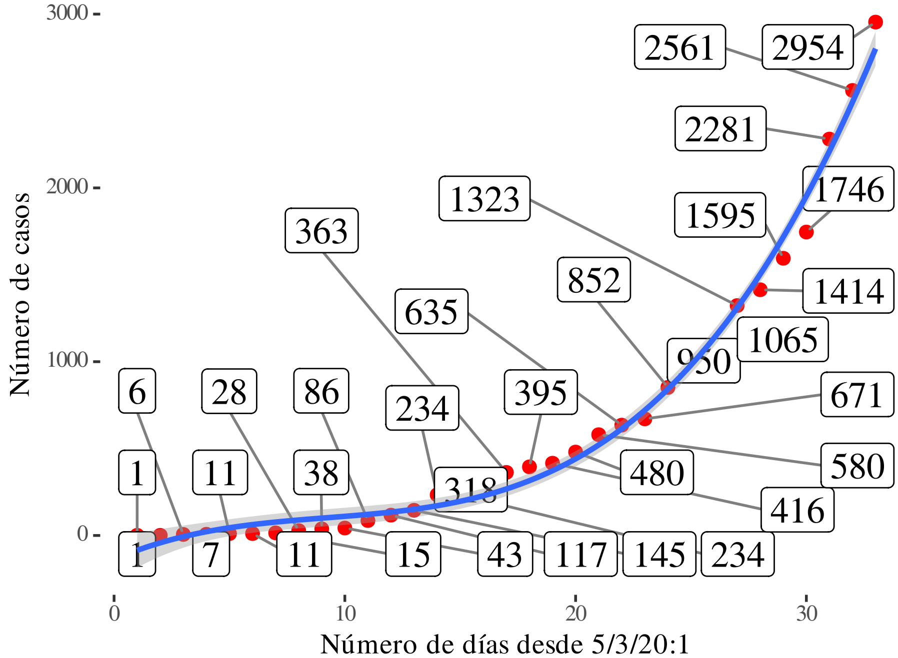


Figura B.1 Regresión lineal

```
## (Intercept)
##    12917.13
```

Bibliografía

Xie, Y. (2015). *Dynamic Documents with R and knitr*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2nd edition. ISBN 978-1498716963.

Índice alfabético