

Ricardo Michel MALLQUI BAÑOS

Elementos de la estadística

estadística descriptiva y probabilidades



Índice general

Índice de tablas	vii
Índice de figuras	ix
Resumen	xi
I Estadística descriptiva	1
1. Preliminares	3
1.1. Pre requisitos	3
1.2. Definiciones básicas	3
1.3. Elementos fundamentales de la estadística	4
2. Organización de datos en tablas de frecuencias	5
2.1. Distribución de frecuencias	5
3. Gráficos estadísticos	11
3.1. Histograma de frecuencias	11
3.2. Circulares	11
4. Medidas de tendencia central	15
4.1. La media	15
4.1.1. Media de datos no agrupados	15
4.1.2. Media de datos agrupados	15
4.1.3. Ejemplo	16
4.2. La moda (Mo)	17
4.2.1. Moda de datos no tabulados	17
4.2.2. Moda de datos tabulados	17
4.2.3. Ejemplo	18
4.3. La mediana (Me)	19
4.3.1. Mediana de datos no tabulados	19
4.3.2. Mediana de datos tabulados	19

4.3.3. Ejemplo	20
4.4. Asignación	21
5. Medidas de dispersión	23
5.1. Rango	23
5.2. Varianza	23
5.2.1. Datos no tabulados	23
5.2.2. Datos tabulados	24
5.3. Desviación típica	25
5.4. Desviación media absoluta	26
5.4.1. Datos no tabulados	26
5.4.2. Datos tabulados	26
5.5. Desviación mediana absoluta	27
5.5.1. Datos no tabulados	27
5.5.2. Datos tabulados	27
5.6. Coeficiente de variación	28
5.7. Asignación	29
6. Medidas de posición (cuantiles)	31
6.1. Cuartiles	31
6.1.1. Datos no agrupados	31
6.1.2. Datos agrupados	32
6.2. Quintiles	33
6.3. Deciles	33
6.3.1. Datos no agrupados	33
6.3.2. Datos agrupados	34
6.4. Percentiles	34
6.4.1. Datos no agrupados	35
6.4.2. Datos agrupados	35
7. Medidas de asimetría	37
7.1. Normal: Simétrica	38
7.2. Normal: Simetría positiva	39
7.3. Normal: Simetría negativa	40
8. Medidas de curtosis o apuntamiento	43
II Probabilidades	45
1. Experimento aleatorio	47

2. Álgebra de eventos	49
3. Técnicas de conteo	51
4. Definición de probabilidad	53
5. Probabilidad condicional	55
6. Teorema de Bayes	57
7. Eventos independientes y secuencias de experimentos	59
8. Probabilidad en espacio	61
III Inferencia estadística	63
1. Variables aleatorias	65
Apéndice	65
A. Sumatorias	67
A.1. $\sum_{i=1}^n x_i$	67
A.1.1. $\sum_{i=1}^n x_i^2$	67
B. Matrices	69
B.1. Álgebra de matrices	69
B.2. Matrices particulares	71
B.2.1. Matriz triangular	71
B.2.2. Matriz particular de una matriz cuadrada	72
B.2.3. Matriz transpuesta	72
B.2.4. Matriz simétrica	72
B.2.5. Matriz conjugada	72
B.2.6. Matriz hermitica	72
B.2.7. Matriz escalonada	72
Bibliografía	75
Índice alfabético	77



Índice de tablas

2.1.	Caption	5
2.2.	Datos cuantitativos (intervalos)	6
2.4.	Datos cualitativos	8
2.6.	Datos cuantitativos (intervalos)	9
4.1.	Captionww	16
4.3.	wwwww	18
4.5.	Mediana	20
B.1.	Caption	73



Índice de figuras

7.1. Medidas de asimetría	37
8.1. wwwwwwwwwwwwwww	43
B.1. Regresión lineal	74



Resumen

La estadística es la ciencia que manipula datos los analiza e interpreta para poder sacar conclusiones razonables de ciertos fenomenos naturales. Esta ciencia puede ser dividido en dos: **estadística descirptiva** y **estadística inferencial**. En la estadística descriptiva se procesan datos de una manera teórica y utilitaria. Estos métodos consisten en la recolección, organización, resumen, descripcion y presenatacion de la información. Si la poblacion está disponible entonces la estadística descriptiva es suficiente para describir ciertos fenomenos. No obstante generalmente no se dispone de toda la población si no de una muestra de ella, es en este caso que se requieren usar técnicas más sofisticadas para tomar decisiones y generalizaciones acerca de la poblacion, desde una pequeña muestra de información. Es cuando entra en el juego la estadística inferencial.

La base teórica de la estadística son las matemáticas

Este libro se compone de dos partes, la primera parte trata sobre la **estadística descirptiva** y la segunda **estadística inferencial**. Cada una de ellas divididas en capítulos.



Parte I

Estadística descriptiva



1

Preliminares

1.1. Pre requisitos

Estar familiarizado con las nociones de matemáticas básicas, **cálculo diferencial e integral**.

1.2. Definiciones básicas

Definición 1.1 (Estadística). Statistics is the science of data. This involves collecting, classifying, summarizing, organizing, analyzing, and interpreting data.

The science of statistics is commonly applied to two types of problems: 1. Summarizing, describing, and exploring data 2. Using sample data to infer the nature of the data set from which the sample was selected

Definición 1.2 (Estadística descriptiva). The branch of statistics devoted to the organization, summarization, and description of data sets is called descriptive statistics.

Definición 1.3 (Estadística inferencial). The branch of statistics concerned with using sample data to make an inference about a large set of data is called inferential statistics.

Definición 1.4 (Muestra). A sample is a subset of data selected from the target population.

Definición 1.5 (Unidad). The object (e.g., person, thing, transaction, specimen, or event) upon which measurements are collected is called the experimental

unit. (Note: A population consists of data collected on many experimental units.)

1.3. Elementos fundamentales de la estadística

Definición 1.6 (Poblacion). A statistical population is a data set (usually large, sometimes conceptual) that is our target of interest.

Definición 1.7 (Variables cuantitativas). Una variable estadística es una **característica** que puede fluctuar y cuya **variación** es susceptible de adoptar **diferentes valores**, los cuales pueden medirse u observarse. Las variables adquieren valor cuando se relacionan con otras variables, es decir, si forman parte de una **hipótesis** o de una **teoría**. Existen dos clases de variables: Cualitativas y cuantitativas.

1. **Cualitativas**. Son aquellas variables que están propensos a ser nominales textualmente.
 - **Nominales**. Son características que simplemente nominan y están propensos a ser jerarquizados u ordenados tales como: El estado civil (soltero, casado, divorciado, viudo), Religión (católica, evangélico, judío, etc).
 - **Ordinales**. Son características que que si están propensos a ser jerarquizados tales como: Nivel de instrucción (inicial, primaria, secundaria, superior).
2. **cuantitativas**. Son aquellas variables que están propensos a ser medidas mediante números ya sean números enteros o reales.
 - **Discretas**. Aquellas que solo son medidos mediante números enteros por ejemplo: Número de hijos, número de habitaciones.
 - **Continuas**. Aquellas que solo son medidos mediante números reales es decir este incluye a los números racionales e irracionales. Estatura, volumen, peso.

2

Organización de datos en tablas de frecuencias

2.1. Distribución de frecuencias

El uso de tablas de distribución de frecuencias y gráficas como un medio para presentar la información de un conjunto de datos de forma resumida. En grados anteriores ya se ha trabajado con gráficas para variables cuantitativas discretas, por lo que esta será la primera vez que el estudiante trabajará con gráficas que son adecuadas para presentar información de variables cuantitativas continuas.

Definición 2.1. La tabulación es un proceso en el cual los datos son ordenados en grupos llamados *clases* para un análisis más eficaz de estos, los datos podrían estar clasificados mediante una variable cualitativa o cuantitativa en el caso de las variables cualitativas Y_i , se considera la siguiente Tabla 2.1

Tabla 2.1: Caption

Y_i	f_i	F_i	F_i^*	h_i	H_i	H_i^*	$h_i \%$	$H_i \%$	$H_i^* \%$
Y_1	f_1	F_1	F_1^*	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{F_1}{n}$	$\frac{F_1^*}{n}$	h_1	H_1	H_1^*
Y_2	f_2	F_2	F_2^*	$\frac{f_2}{n}$	$\frac{F_2}{n}$	$\frac{F_2^*}{n}$	h_2	H_2	H_2^*
Y_3	f_3	F_3	F_3^*	$\frac{f_3}{n}$	$\frac{F_3}{n}$	$\frac{F_3^*}{n}$	h_3	H_3	H_3^*
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
Y_r	f_r	F_r	F_r^*	$\frac{f_r}{n}$	$\frac{F_r}{n}$	$\frac{F_r^*}{n}$	h_r	H_r	H_r^*

En el caso de variables cuantitativas además si los datos son muy variados, que para se clasificados adecuadamente, necesitan generarse particiones de longitudes semejantes entonces se utiliza el siguiente proceso; el **número de las particiones** r se consideran de acuerdo a **tres criterios**.

1. Criterio del investigador r no puede ser más de 20 ni menos de 5

2. $r = \sqrt{n}$ donde n es el número de datos
3. La regla de Sturges que consiste en considerar la fórmula $r = 3,322 \cdot \log_{10} n$. Una vez establecido el número de particiones se procede a generar los límites laterales de cada una de las particiones, sea L la longitud de todo el conjunto es decir $L = x_{\max} - x_{\min}$ entonces la longitud de las particiones o amplitud intervállica se obtiene con $l = \frac{L}{r}$

Tabla 2.2: Datos cuantitativos (intervalos)

Clase	Y_i	f_i	F_i	F_i^*	h_i	H_i	H_i^*	$h_i \%$	$H_i \%$	$H_i^* \%$
$[y_1 - y_2)$	Y_1	f_1	F_1	F_1^*	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{F_1^*}{n}$	$h_1 \%$	$H_1 \%$	$H_1^* \%$
$[y_2 - y_3)$	Y_2	f_2	F_2	F_2^*	$\frac{f_2}{n}$	$\frac{f_2}{n}$	$\frac{F_2^*}{n}$	$h_2 \%$	$H_2 \%$	$H_2^* \%$
...
$[y_{r-1} - y_r)$	Y_r	f_r	F_r	F_r^*	$\frac{f_r}{n}$	$\frac{f_r}{n}$	$\frac{F_r^*}{n}$	$h_r \%$	$H_r \%$	$H_r^* \%$

Tenga en cuenta que n es el número de datos, es decir $n = f_1 + f_2 + \dots + f_r = \sum_{i=1}^r f_i$ donde f_i es número de datos en la partición X_i , una de las r particiones del conjunto total de datos.

1. Las **frecuencias absolutas** f_i indican el número de datos con la característica X_i .
2. Las **frecuencias absolutas acumuladas menor que** F_i obedecen a la fórmula

$$F_m = f_1 + f_2 + \dots + f_m = \sum_{i=1}^m f_i$$

3. Las **frecuencias absolutas acumuladas mayor que** F_i^* obedecen a la fórmula

$$\begin{aligned}
 F_m^* &= f_m + f_{m+1} + \dots + f_r \\
 &= \sum_{i=m}^r f_i \\
 &= n - \sum_{i=1}^{m-1} f_i \\
 &= n - (f_1 + f_2 + \dots + f_{m-1})
 \end{aligned}$$

4. Las **frecuencias absolutas relativas** obedecen a la fórmula

$$h_m = \frac{f_m}{n}$$

5. Las **frecuencias absolutas relativas menor que** obedecen a la fórmula

$$H_m = \frac{f_m}{n}$$

6. Las **frecuencias absolutas relativas mayor que** obedecen a la fórmula

$$H_m^* = \frac{F_m}{n}$$

7. Las **frecuencias absolutas relativas porcentuales** obedecen a la fórmula $h_i \% = 100 \cdot h_i$

8. Las **frecuencias absolutas relativas menor que porcentuales** obedecen a la fórmula $H_i \% = 100 \cdot H_i$

9. Las **frecuencias absolutas relativas mayor que porcentuales** obedecen a la fórmula $H_i^* \% = 100 \cdot H_i^*$

10. Y_i marca de clase o punto medio de la clase i

Ejemplo 2.1. Sean Los 16 tipos de personalidad en un grupo social encuestado. Organice los datos en una tabla de frecuencias

Solución. Se tiene 16 características con los siguientes datos

Personalidad	Cantidad
ESTJ	1
ESTJ	2
ESTP	3
ESFJ	4
ESFP	5
ISTJ	6
ISTP	7
ISFJ	8
ISFP	9
ENTJ	10
ENTP	6
ENFJ	5
ENFP	3
INTJ	2

Personalidad	Cantidad
INTP	1
INFJ	1
INFP	1

Tabla 2.4: Datos cualitativos

Y_i	f_i	F_i	F_i^*	h_i	H_i	H_i^*	$h_i\%$	$H_i\%$	$H_i^*\%$
ESTJ	1	1	75	0.01	0.01	1.00	1.33	1.33	100.00
ESTJ	2	3	150	0.03	0.04	2.00	2.67	4.00	200.00
ESTP	3	6	150	0.04	0.08	2.00	4.00	8.00	200.00
ESFJ	4	10	150	0.05	0.13	2.00	5.33	13.33	200.00
ESFP	6	16	150	0.08	0.21	2.00	8.00	21.33	200.00
ISTJ	6	22	155	0.08	0.29	2.07	8.00	29.33	206.67
ISTP	7	29	157	0.09	0.39	2.09	9.33	38.67	209.33
ISFJ	8	37	158	0.11	0.49	2.11	10.67	49.33	210.67
ISFP	9	46	166	0.12	0.61	2.21	12.00	61.33	221.33
ENTJ	10	56	166	0.13	0.75	2.21	13.33	74.67	221.33
ENTP	6	62	166	0.08	0.83	2.21	8.00	82.67	221.33
ENFJ	5	67	166	0.07	0.89	2.21	6.67	89.33	221.33
ENFP	3	70	166	0.04	0.93	2.21	4.00	93.33	221.33
INTJ	2	72	167	0.03	0.96	2.23	2.67	96.00	222.67
INTP	1	73	169	0.01	0.97	2.25	1.33	97.33	225.33
INFJ	1	74	172	0.01	0.99	2.29	1.33	98.67	229.33
INFP	1	75	176	0.01	1.00	2.35	1.33	100.00	234.67
TOTAL	75						100.00		

Ejemplo 2.2. wwwwwwwwwwwwwwwwwwwww

Edades de cierta comunidad

25 35 38 45 47 48 51 52 53 55 60 62 63 66 67 70 71 72 75 77 78 81 88 89 90
99

Clase	f_i
$[20 - 30[$	1
$[30 - 40[$	2

Clase	f_i
[40 – 50[3
[50 – 60[4
[60 – 70[5
[70 – 80[6
[80 – 90[3
[90 – 100]	2

Tabulando

Tabla 2.6: Datos cuantitativos (intervalos)

Clase	f_i	F_i	F_i^*	h_i	H_i	H_i^*	$h_i \%$	$H_i \%$	$H_i^* \%$
[20 – 30)	1	1	26	0.02	0.01	0.35	2.38	1.33	34.67
[30 – 40)	2	3	68	0.05	0.04	0.91	4.76	4.00	90.67
[40 – 50)	3	6	68	0.07	0.08	0.91	7.14	8.00	90.67
[50 – 60)	4	10	68	0.10	0.13	0.91	9.52	13.33	90.67
[60 – 70)	5	15	68	0.12	0.20	0.91	11.90	20.00	90.67
[70 – 80)	6	21	84	0.14	0.28	1.12	14.29	28.00	112.00
[80 – 90)	3	24	84	0.07	0.32	1.12	7.14	32.00	112.00
[90 – 100]	2	26	84	0.05	0.35	1.12	4.76	34.67	112.00
TOTAL	42						61.90		



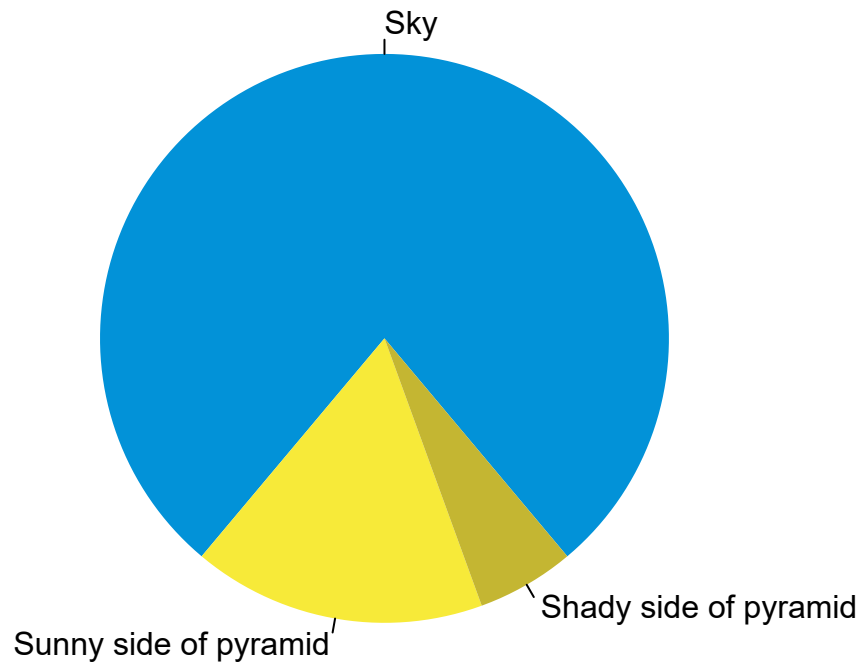
3

Gráficos estadísticos

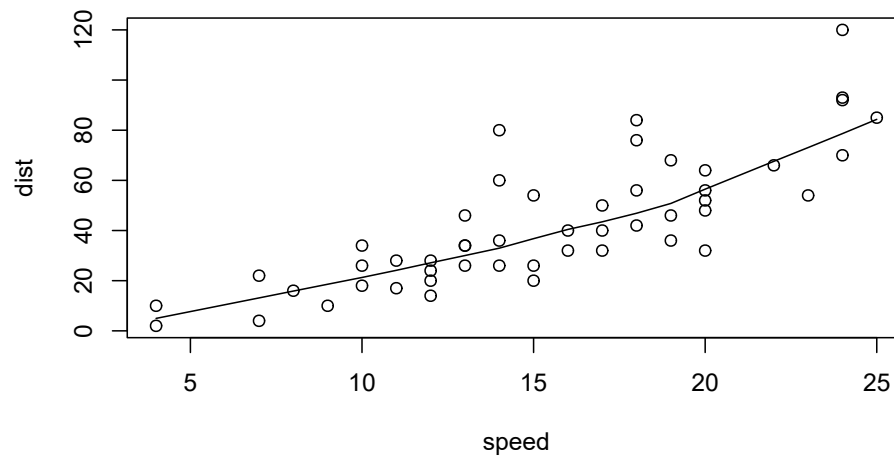
3.1. Histograma de frecuencias

3.2. Circulares

```
par(mar = c(0, 1, 0, 1))
pie(
  c(280, 60, 20),
  c('Sky', 'Sunny side of pyramid', 'Shady side of pyramid'),
  col = c('#0292D8', '#F7EA39', '#C4B632'),
  init.angle = -50, border = NA
)
```



```
plot(cars)  
lines(lowess(cars))
```



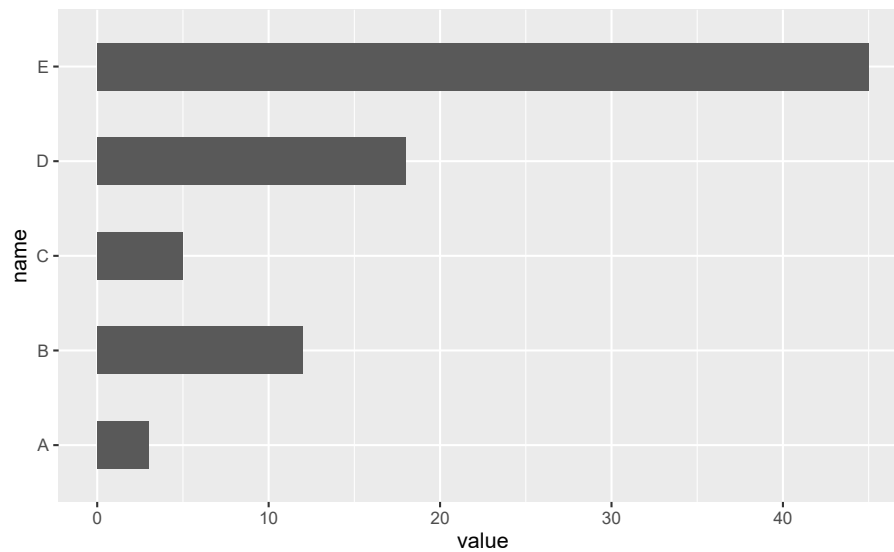
```
library(ggplot2)
```

```
## Warning: package 'ggplot2' was built under R version 4.1.3
```



```
# Create data
data <- data.frame(
  name=c("A", "B", "C", "D", "E") ,
  value=c(3, 12, 5, 18, 45)
)

# Barplot
ggplot(data, aes(x=name, y=value)) +
  geom_bar(stat = "identity", width=0.5) +
  coord_flip()
```





4

Medidas de tendencia central

Son aquellas medidas que buscan un dato representativo central de un conjunto de datos tales como la media, la moda y la mediana.

4.1. La media

A veces llamada *promedio aritmético*, es la medida de tendencia central que pondera los datos.

4.1.1. Media de datos no agrupados

Los datos no están agrupados cuando no están ordenados sobre una tabla de distribución de frecuencias. Sean los n datos x_1, x_2, \dots, x_n entonces la media o promedio aritmético se define como

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

4.1.2. Media de datos agrupados

Considérese la siguiente tabla de distribución de frecuencias entonces el promedio es

$$\bar{x} = \frac{y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i f_i$$

Tabla 4.1: Captionww

Clase	Y_i	f_i	F_i	\dots	$H_i^* \%$
$[y_1, y_2)$	y_1	f_1	\dots	\dots	$H_1^* \%$
$[y_2, y_3)$	y_2	f_2	\dots	\dots	$H_1^* \%$
$[y_3, y_4)$	y_3	f_3	\dots	\dots	$H_1^* \%$
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\dots	\vdots
$[y_{r-1}, y_r]$	y_r	f_r	\dots	\dots	$H_1^* \%$

4.1.3. Ejemplo

Clase	Y_i	f_i	$Y_i * f_i$
$[10, 15)$	12.5	1	12.5
$[15, 20)$	17.5	2	35
$[20, 25)$	22.5	5	112.5
$[25, 30)$	27.5	3	82.5
$[30, 35]$	32.5	2	65
Σ		13	307.5

$$\bar{x} = \frac{12,5 + 35 + 112,5 + 82,5 + 65}{13} = \frac{307,5}{13} = 23,65$$

Ejercicio 4.1. Si el promedio de n datos es \bar{x} entonces el promedio del conjunto inicial más un dato adicional x_{n+1} es

$$\bar{x}' = \frac{n\bar{x} + x_{n+1}}{n + 1}$$

en general si se adicionan r datos y_1, y_2, \dots, y_r entonces el nuevo promedio será

$$\bar{x}' = \frac{n\bar{x} + y_1 + y_2 + \dots + y_r}{n + r}$$

Solución. En efecto sea el promedio

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}}{n + 1} \\ &= \frac{n \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + x_{n+1}}{n + 1} \\ &= \frac{n\bar{x} + x_{n+1}}{n + 1} \end{aligned}$$

4.2. La moda (Mo)

- La moda es el valor que tiene mayor frecuencia absoluta.
- Se representa por Mo
- Si en un grupo hay dos o varias puntuaciones con la misma frecuencia y esa frecuencia es la máxima, entonces la distribución es bimodal es decir, tiene varias modas.
- Cuando todas las puntuaciones de un grupo tienen la misma frecuencia, no hay moda.
- Se puede hallar la moda para variables cualitativas y cuantitativas.
- Cuando todas las puntuaciones de un grupo tienen la misma frecuencia, no hay moda.
- Si dos puntuaciones adyacentes tienen la frecuencia máxima, la moda es el promedio de las dos puntuaciones adyacentes.
- Si dos puntuaciones adyacentes tienen la frecuencia máxima, la moda es el promedio de las dos puntuaciones adyacentes. Ejemplos de ejercicios de moda

4.2.1. Moda de datos no tabulados

En este caso es dato que más repite en un conjunto de datos dados.

La moda es el dato que más se repite por ejemplo sea el conjunto de datos x_1, x_2, x_2, x_2, x_3 entonces la moda es $Mo = x_2$

Halle la moda de los siguientes datos 3, 5, 3, 6, 7, 3, 4, 5, 5 ya que hay hay presencia de datos que se repiten dos veces en tonces este conjunto de datos recibe el nombre de datos bimodal $Mo=3$ y $Mo=5$

4.2.2. Moda de datos tabulados

La moda es el dato que más se repite por ejemplo sea el conjunto de datos tabulados entonces la moda es

$$M_o = L_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot a_i$$

- L_i es el límite inferior de la clase modal
- f_i es la frecuencia absoluta de la clase modal
- f_{i-1} es la frecuencia absoluta inmediatamente inferior a la clase modal
- f_{i+1} es la frecuencia absoluta inmediatamente posterior a la clase modal
- a_i es la amplitud de la clase

Tabla 4.3: wwwwww

Clase	Y_i	f_i	F_i	...	H_i^* %
$[y_1, y_2)$	y_1	f_1	H_1^* %
$[y_2, y_3)$	y_2	f_2	H_1^* %
$[y_3, y_4)$	y_3	f_3	H_1^* %
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$[y_{r-1}, y_r]$	y_r	f_r	H_1^* %

4.2.3. Ejemplo

Clase	f_i
$[10, 15)$	2
$[15, 20)$	5
$[20, 25)$	10
$[25, 30)$	3
$[30, 35]$	1

Primeramente la mayor frecuencia absoluta es 10 y corresponde $f_3 = 10$ por tanto $i = 3$. $L_i = 20$

$$\begin{aligned}
 M_o &= L_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot a_i = \\
 &= 20 + \frac{10 - 5}{(10 - 5) + (10 - 3)} \cdot 5 = 20 + \frac{5}{12} \cdot 5 = 22,08
 \end{aligned}$$

Más información

4.3. La mediana (Me)

4.3.1. Mediana de datos no tabulados

Obtener la mediana consiste en ordenar los datos de menor a mayor y considerar dos casos: El primero si el número de datos es impar entonces el dato $x_{\frac{n+1}{2}}$ del conjunto ordenado será la mediana es decir

$$Me = x_{\frac{n+1}{2}}$$

de otro lado si el número de datos es par entonces la mediana es la semisuma de los dos datos intermedios es decir

$$Me = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

Ejercicio 4.2. Sean los conjuntos de datos 5, 6, 8, 2, 1, 5, 6, 7, 10, 0, 14 y 20, 25, 6, 5, 19, 5 obtener la mediana de estos conjuntos de datos.

Solución. Al ordenarlos se obtiene el siguiente arreglo 0, 1, 2, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 10, 14 y considerando que $x_1 = 0, x_2 = 1, \dots, x_{11} = 14$ en este caso el número de datos es impar entonces el dato $x_{\frac{11+1}{2}} = x_6 = 6$ es la mediana. De otro lado el segundo conjunto de datos al ser ordenados 5, 5, 6, 19, 20, 25 además considerando que $x_1 = 5, x_2 = 5, \dots, x_6 = 25$ conducen a obtener la mediana $Me = \frac{x_{\frac{6}{2}} + x_{\frac{6}{2}+1}}{2} = \frac{6+19}{2} = 12,5$.

4.3.2. Mediana de datos tabulados

La mediana se encuentra en el intervalo donde la frecuencia acumulada llega hasta la mitad de la suma de las frecuencias absolutas.

Es decir tenemos que buscar el intervalo en el que se encuentre.

$$Me = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i$$

L_i es el límite inferior de la clase donde se encuentra la mediana

$\frac{N}{2}$ es la semisuma de las frecuencias absolutas

f_i es la frecuencia absoluta de la clase mediana

F_{i-1} es la frecuencia acumulada anterior a la clase mediana

a_i es la amplitud de la clase

La mediana es independiente de las amplitudes de los intervalos

Tabla 4.5: Mediana

Clase	Y_i	f_i	F_i	...	H_i^* %
$[y_1, y_2)$	y_1	f_1	H_1^* %
$[y_2, y_3)$	y_2	f_2	H_1^* %
$[y_3, y_4)$	y_3	f_3	H_1^* %
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$[y_{r-1}, y_r]$	y_r	f_r	H_1^* %

Más información

4.3.3. Ejemplo

Clase	f_i	F_i
$[10, 15)$	1	1
$[15, 20)$	2	3
$[20, 25)$	5	8
$[25, 30)$	3	11
$[30, 35]$	1	12
Σ	12	

$$\frac{N}{2} = 12/2 = 6$$

ubicando en las frecuencias absolutas acumuladas que corresponde al intervalo $[20, 25)$

$$\begin{aligned}
 M_e &= L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i \\
 &= 20 + \frac{\frac{12}{2} - 3}{5} \cdot 5 = 23
 \end{aligned}$$

por lo tanto la mediana de este conjunto de datos tabulados (agrupados) es $M_e = 23$

4.4. Asignación

Halle la media, la moda y la mediana de los siguientes datos tabulados

Clase	Y_i	f_i	F_i
[100, 150)		1	1
[150, 200)		2	3
[200, 250)		5	
[250, 300)		7	
[300, 350]		10	
[350, 400]		6	
[400, 450]		5	
[450, 500]		2	
[500, 550]		1	

$$\bar{x} = \frac{y_1 f_1 + y_2 f_2 + \cdots + y_n f_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i f_i$$

$$M_o = L_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot a_i$$

$$M_e = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i$$



5

Medidas de dispersión

5.1. Rango

$$R = x_{max} - x_{min}$$

Sean los datos 2, 5, 6, 1, 7, 5, 8, 6

$$x_{max} = 8 \quad x_{min} = 1$$

$$\text{por lo tanto } R = x_{max} - x_{min} = 8 - 1 = 7$$

5.2. Varianza

5.2.1. Datos no tabulados

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Sean los datos 2, 5, 6, 1, 7, 5, 8, 6

$$\bar{x} = 40/8 = 5$$

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \\
&= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2 + (x_5 - \bar{x})^2 + (x_6 - \bar{x})^2 + (x_7 - \bar{x})^2 + (x_8 - \bar{x})^2}{8 - 1} \\
&= \frac{(2 - 5)^2 + (5 - 5)^2 + (6 - 5)^2 + (1 - 5)^2 + (7 - 5)^2 + (5 - 5)^2 + (8 - 5)^2 + (6 - 5)^2}{8 - 1} \\
&= \frac{9 + 0 + 1 + 16 + 4 + 0 + 9 + 1}{7} \\
&= \frac{40}{7} = 5,71
\end{aligned}$$

5.2.2. Datos tabulados

$$s^2 = \frac{\sum f_i (Y_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum Y_i * f_i}{n} = 747,5/31 = 24,11$$

Clase	Y_i	f_i	$Y_i * f_i$
[5, 10)	7.5	1	7.5
[10, 15)	12.5	2	25
[15, 20)	17.5	5	87.5
[20, 25)	22.5	7	157.5
[25, 30]	27.5	10	275
[30, 35]	32.5	6	195
\sum		31	

Por lo tanto la varianza para dotos agrupados es

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{\sum f_i (Y_i - \bar{x})^2}{n - 1} \\
&= \frac{f_1 (Y_1 - \bar{x})^2 + f_2 (Y_2 - \bar{x})^2 + f_3 (Y_3 - \bar{x})^2 + f_4 (Y_4 - \bar{x})^2 + f_5 (Y_5 - \bar{x})^2 + f_6 (Y_6 - \bar{x})^2}{31 - 1} \\
&= \frac{1 (7,5 - 24,11)^2 + 2 (12,5 - 24,11)^2 + 5 (17,5 - 24,11)^2 + 7 (22,5 - 24,11)^2 + 10 (27,5 - 24,11)^2 + 6 (32,5 - 24,11)^2}{31 - 1} \\
&= \frac{1 * 275,89 + 2 * 134,79 + 5 * 43,69 + 7 * 2,59 + 10 * 11,49 + 6 * 7,39}{31 - 1} \\
&= \frac{275,89 + 269,58 + 218,45 + 18,13 + 114,9 + 44,34}{30} \\
&= \frac{941,29}{30} = 31,38
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$s^2 = 31,38$$

5.3. Desviación típica

$$s = \sqrt{s^2}$$

La desviación típica o estándar del siguiente conjunto de datos tabulados

Clase	Y_i	f_i	$Y_i * f_i$
[5, 10)	7.5	1	7.5
[10, 15)	12.5	2	25
[15, 20)	17.5	5	87.5
[20, 25)	22.5	7	157.5
[25, 30]	27.5	10	275
[30, 35]	32.5	6	195
Σ		31	

es

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{31,38} = 5,60$$

5.4. Desviación media absoluta

5.4.1. Datos no tabulados

$$DM = \frac{1}{n} \sum |x_i - \bar{x}|$$

Sean los datos 2, 5, 6, 1, 7, 5, 8, 6

$$\bar{x} = 40/8 = 5$$

Entonces

$$\begin{aligned} DM &= \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} \\ &= \dots \text{Resolver} \end{aligned}$$

5.4.2. Datos tabulados

$$DM = \frac{1}{n} \sum f_i |Y_i - \bar{x}|$$

y_i marca de clase o punto medio de la clase i

$$\bar{x} = \frac{\sum Y_i * f_i}{n} = 747,5/31 = 24,11$$

Clase	Y_i	f_i	$Y_i * f_i$
[5, 10)	7.5	1	7.5
[10, 15)	12.5	2	25
[15, 20)	17.5	5	87.5
[20, 25)	22.5	7	157.5
[25, 30]	27.5	10	275
[30, 35]	32.5	6	195
Σ		31	

Por lo tanto la desviación media absoluta es

$$\begin{aligned}
 DM &= \frac{\sum f_i |Y_i - \bar{x}|}{n} \\
 &= \frac{f_1 |Y_1 - \bar{x}| + f_2 |Y_2 - \bar{x}| + f_3 |Y_3 - \bar{x}| + f_4 |Y_4 - \bar{x}| + f_5 |Y_5 - \bar{x}| + f_6 |Y_6 - \bar{x}|}{31} \\
 &= \frac{1 |7,5 - 24,11| + 2 |12,5 - 24,11| + 5 |17,5 - 24,11| + 7 |22,5 - 24,11| + 10 |27,5 - 24,11| + 6 |32,5 - 24,11|}{31} \\
 &= \frac{1 * 16,61 + 2 * 11,61 + 5 * 6,61 + 7 * 1,61 + 10 * 3,39 + 6 * 8,39}{31} \\
 &= \frac{277,33}{31} = 8,94
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$DM = 8,94$$

5.5. Desviación mediana absoluta

5.5.1. Datos no tabulados

$$DMe = \frac{1}{n} \sum |Y_i - Me|$$

Sean los datos 2, 5, 6, 1, 7, 5, 8, 6 (Ejercicio)

5.5.2. Datos tabulados

$$DMe = \frac{1}{n} \sum f_i |Y_i - Me|$$

$Me = ?$ (Ejercicio)

Clase	Y_i	f_i	$Y_i * f_i$
[5, 10)	7.5	2	7.5
[10, 15)	12.5	3	25
[15, 20)		4	87.5

Clase	Y_i	f_i	$Y_i * f_i$
[20, 25)	22.5	7	157.5
[25, 30]	27.5	10	275
[30, 35]		8	195
Σ			

Por lo tanto la desviación de la mediana absoluta es
(Ejercicio)

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{\sum f_i |Y_i - Me|}{n} \\
 &= \frac{f_1 (Y_1 - Me)^2 + f_2 (Y_2 - Me)^2 + f_3 (Y_3 - Me)^2 + f_4 (Y_4 - Me)^2 + f_5 (Y_5 - Me)^2 + f_6 (Y_6 - Me)^2}{31} \\
 &= complete
 \end{aligned}$$

5.6. Coeficiente de variación

$$Cv = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100$$

Si $Cv > 25\%$ se dice que los datos están muy dispersos Si $Cv < 25\%$ se dice que los datos están muy juntos

Para el conjunto de datos

Clase	Y_i	f_i	$Y_i * f_i$
[5, 10)	7.5	1	7.5
[10, 15)	12.5	2	25
[15, 20)	17.5	5	87.5
[20, 25)	22.5	7	157.5
[25, 30]	27.5	10	275
[30, 35]	32.5	6	195
Σ		31	

$$Cv = \frac{5,60}{24,11} \cdot 100 = 0,23 \cdot 100 = 23 \%$$

5.7. Asignación

Halle el rango, la varianza, la desviación típica, desviación media, desviación mediana absoluta y el coeficiente de variación. Grafique el histograma y ubique estos estadígrafos

Clase	Y_i	f_i	F_i
[50, 100)		8	1
[100, 150)		20	3
[150, 200)		50	
[200, 250)		70	
[250, 300]		100	
[300, 350]		60	
Σ		20	



6

Medidas de posicion (cuantiles)

- Los deciles, que dividen a la distribución en diez partes;
- Los percentiles, que dividen a la distribución en cien partes.

6.1. Cuartiles

Los cuartiles, que dividen a la distribución en cuatro partes (corresponden a los cuantiles 0,25; 0,50 y 0,75); Q_1 , Q_2 , Q_3

6.1.1. Datos no agrupados

Sean los datos 1, 2, 5, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 3, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 6, 7 Ordenar de menor a mayor (creciente)

Si

$$Q_k = \frac{k(n+1)}{4}$$

es entero entonces el cuartil es el dato de la posición $Q_k = x_{\frac{k(n+1)}{4}}$ en caso contrario se interpola los datos extremos donde se encuentra el valor Q_k

- Ejemplo 1, 2, 5, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 3, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 6, 7 ordenados de menor a mayor 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9

$$Q_1 = \frac{1(18+1)}{4} = 4,75 \text{ interpolando } Q_1 = 2 + (2 - 2) \cdot 0,75 = 2$$

$$Q_2 = \frac{2(18+1)}{4} = 9,5 \text{ interpolando } Q_2 = 5 + (5 - 5) \cdot 0,5 = 5$$

$$Q_3 = \frac{3(18+1)}{4} = 14,25 \text{ interpolando } Q_3 = 6 + (7 - 6) \cdot 0,25 = 6,25$$

6.1.2. Datos agrupados

$$Q_k = L_i + A \left(\frac{\frac{kn}{4} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right); k = 1, 2, 3$$

- L_i limite inferior del intervalo que contiene al decil
- F_{i-1} frecuencia acumulada en la clase anterior al decil
- F_i frecuencia acumulada en la clase al decil
- A amplitud intervalica
- n numero de datos
- k indice del cuartil correspondiente

$$\begin{aligned} Q_1 &= L_i + A \left(\frac{\frac{1n}{4} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right) \\ &= L_i + A \left(\frac{\frac{1*39}{4} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right) \\ &= 20 + 5 \cdot \left(\frac{9,75 - 8}{15 - 8} \right) \\ &= 21,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= L_i + A \left(\frac{\frac{2n}{4} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right) \\ &= L_i + A \left(\frac{\frac{2*39}{4} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right) \\ &= 25 + 5 \cdot \left(\frac{19,5 - 15}{25 - 15} \right) \\ &= 27,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= L_i + A \left(\frac{\frac{3n}{4} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right) \\ &= L_i + A \left(\frac{\frac{3*39}{4} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right) \\ &= 30 + 5 \cdot \left(\frac{29,25 - 25}{31 - 25} \right) \\ &= 33,542 \end{aligned}$$

Clase	Y_i	f_i	F_i
[5, 10)	7.5	1	1
[10, 15)	12.5	2	3
[15, 20)	17.5	5	8
[20, 25)	22.5	7	15
[25, 30]	27.5	10	25
[30, 35]	32.5	6	31
[35, 40]	37.5	5	36
[40, 45]	42.5	3	39
Σ		39	

6.2. Quintiles

wwwwwwwww

6.3. Deciles

Los deciles, que dividen a la distribución en diez partes es decir D_1, D_2, \dots, D_9

6.3.1. Datos no agrupados

Sean los datos 1, 2, 5, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 3, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 6, 7 Ordenar de menor a mayor (creciente)

Si

$$D_k = \frac{k(n+1)}{10}$$

es entero entonces el decil es el dato de la posición $D_k = x_{\frac{k(n+1)}{10}}; k = 1, 2, 3, \dots, 9$ Si

$$D_k = \frac{k(n+1)}{10}$$

no es entero entonces el decil es la interpolación lineal de los dos valores entre los cuales se encuentra $D_k = \frac{k(n+1)}{10}$

- Ejemplo 1, 2, 5, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 3, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 6, 7 ordenados de menor a mayor 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9 entonces

$$D_9 = \frac{9(18+1)}{10} = 17,1$$

interpolando el decil 9 es $D_9 = 8 + (9 - 8) \cdot 0,1 = 8,1$

6.3.2. Datos agrupados

$$D_k = L_i + A \left(\frac{\frac{kn}{10} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right)$$

Clase	Y_i	f_i	F_i
[5, 10)	7.5	1	1
[10, 15)	12.5	2	3
[15, 20)	17.5	5	8
[20, 25)	22.5	7	15
[25, 30]	27.5	10	25
[30, 35]	32.5	6	31
[35, 40]	37.5	5	36
[40, 45]	42.5	3	39
Σ		39	

$$D_9 = L_i + A \left(\frac{\frac{9 \cdot 39}{10} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right)$$

Entonces $\frac{9 \cdot 39}{10} = 35,1$

$$D_9 = 35 + 5 \left(\frac{35,1 - 31}{36 - 31} \right) = 39,1$$

6.4. Percentiles

Los percentiles, que dividen a la distribución en diez partes es decir P_1, P_2, \dots, P_{99}

6.4.1. Datos no agrupados

Si

$$P_k = \frac{k(n+1)}{100}; k = 1, 2, \dots, 99$$

es entero entonces el cuartil es el dato de la posición $P_k = x_{\frac{k(n+1)}{100}}$ Si

$$P_k = \frac{k(n+1)}{100}$$

no es entero entonces el cuartil es la interpolación lineal de los dos valores entre los cuales se encuentra $Q_k = \frac{k(n+1)}{100}$

- Ejemplo 1, 2, 5, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 3, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 6, 7 Al ordenar de manera creciente 1, 2, 5, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 3, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 6, 7 y

$$P_k = \frac{k(18+1)}{100}$$

6.4.2. Datos agrupados

$$P_k = L_i + A \left(\frac{\frac{kn}{100} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right) = \int_1^3 f(x)$$

Clase	Y_i	f_i	F_i
[5, 10)	7.5	1	1
[10, 15)	12.5	2	3
[15, 20)	17.5	5	
[20, 25)	22.5	7	
[25, 30]		10	
[30, 35]		6	
[35, 40]		5	
[40, 45]		3	
Σ		2	



7

Medidas de asimetría

Podemos decir que la asimetría indica cuánto se desvía nuestra distribución subyacente de la **distribución normal**, ya que la distribución normal tiene **asimetría 0**. Generalmente, tenemos **tres tipos de asimetría**.

1. **Desviación simétrica:** cuando la asimetría es cercana a 0 y la media es casi la misma que la mediana
2. **Desviación negativa:** cuando la cola izquierda del histograma de la distribución es más larga y la mayoría de las observaciones se concentran en la cola derecha. En este caso, también podemos utilizar el término “sesgado a la izquierda” o “cola izquierda”. y la **mediana es mayor que la media**.
3. **Desviación positiva:** cuando la cola derecha del histograma de la distribución es más larga y la mayoría de las observaciones se concentran en la cola izquierda. En este caso, también podemos usar el término “sesgado a la derecha” o “cola derecha”. y la **mediana es menor que la media**.

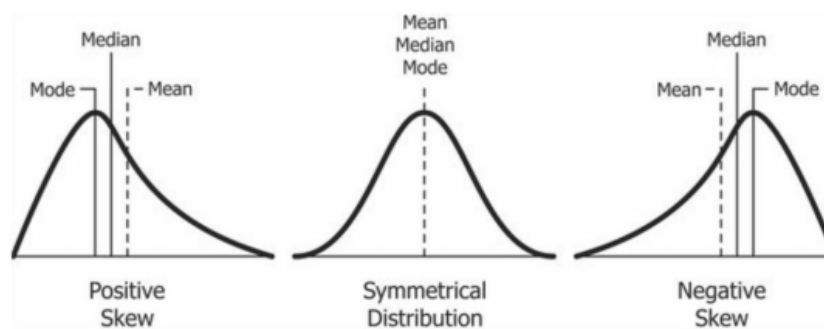


Figura 7.1 Medidas de asimetría

- Índice de simetría de **Pearson**:

$$f_1 = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma}$$

- Índice de simetría de **Fisher**:

$$f_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n\sigma^3}$$

* Simétrico : valores entre -0,5 y 0,5

* Datos asimétricos moderados : valores entre -1 y -0,5 o entre 0,5 y 1

* Datos muy sesgados : valores menores que -1 o mayores que 1

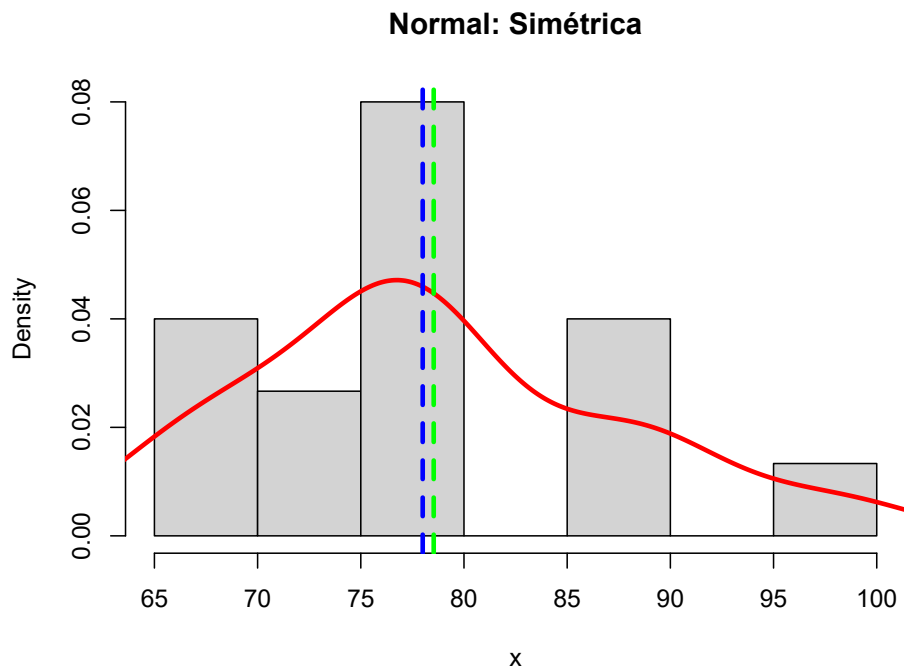
Si la distribución es simétrica, ambos índices son iguales a 0; si es asimétrica a la derecha, ambos son positivos; y si es asimétrica a la izquierda, ambos índices son negativos.

7.1. Normal: Simétrica

wwwwwwwwwwwwwwwwwwwwwwwwwwwwww

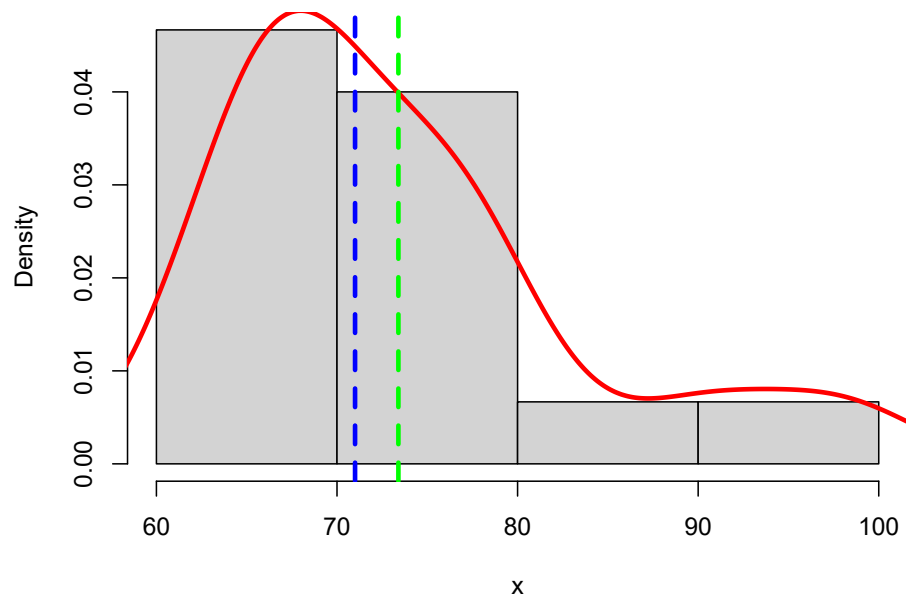
```
## [1] 0.5059805
```

```
## [1] 78.53333
```



7.2. Normal: Simetría positiva

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

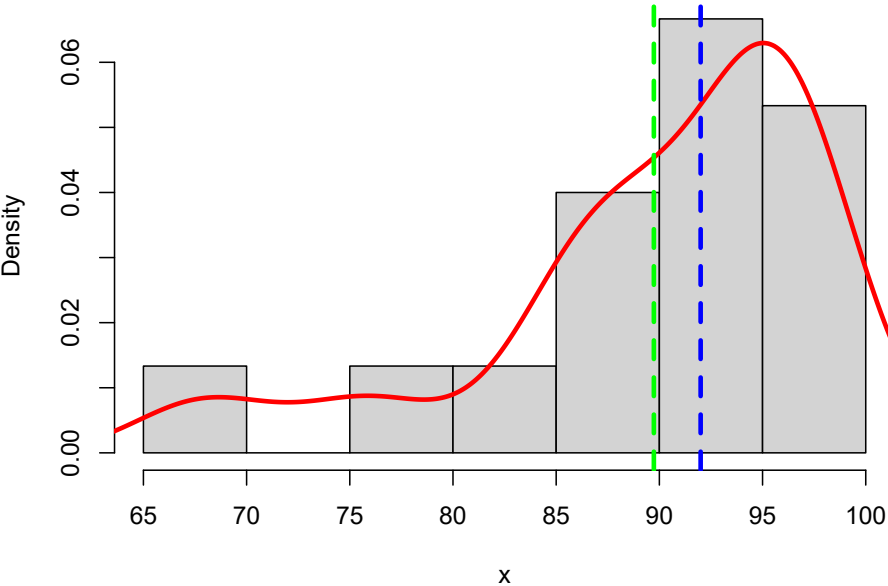
Exponencial: Simetría positiva

```
## [1] 1.216579
```

7.3. Normal: Simetría negativa

```
#####
```

Beta: Simetría negativa



[1] -1.340429

Clase	Y_i	f_i	$Y_i * f_i$
[5, 10)	7.5	2	7.5
[10, 15)	12.5	3	25
[15, 20)		4	87.5
[20, 25)	22.5	7	157.5
[25, 30]	27.5	10	275
[30, 35]		8	195
Σ			



8

Medidas de curtosis o apuntamiento

En estadística, usamos la medida de curtosis para describir la “cola” de la distribución, ya que describe la forma de la misma. También es una medida del “pico” de la distribución.

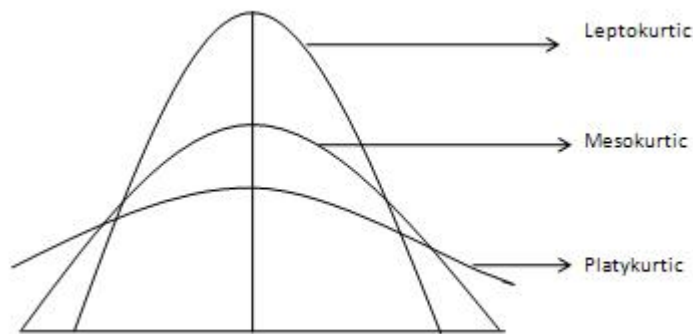


Figura 8.1

1. **Mesocurtica** : esta es la distribución normal
 2. **Leptocurtica** : esta distribución tiene colas más gruesas y un pico más afilado. La curtosis es “positiva” con un valor superior a 3
 3. **Platicurtica** : La distribución tiene un pico más bajo y más ancho y colas más delgadas. La curtosis es “negativa” con un valor superior a 30.263
- En base a la media y desviación típica

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{ns^4};$$

Si $k = 3$ además $k \geq 3$

- En base a percentiles

$$k = \frac{P_{75} - P_{25}}{2(P_{90} - P_{10})}$$

Si $k < 3$ y si $k = 3$ además $k \geq 0,263$

Si este coeficiente es nulo, la distribución se dice normal (similar a la distribución normal de Gauss) y recibe el nombre de mesocúrtica.

Si el coeficiente es positivo, la distribución se llama leptocúrtica, más puntiaguda que la anterior. Hay una mayor concentración de los datos en torno a la media.

Si el coeficiente es negativo, la distribución se llama platicúrtica y hay una menor concentración de datos en torno a la media. sería más achatada que la primera.

Parte II

Probabilidades



1

Experimento aleatorio

Definición 1.1. En experimento aleatorio es un fenómeno que genera un evento





3

Técnicas de conteo

$$P_n^m \ C_n^m$$

$$\binom{m}{n} = \frac{m}{n!(n-m)}$$



4

Definición de probabilidad



5

Probabilidad condicional

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$



6

Teorema de Bayes

Teorema 6.1 (Teorema de Bayes). Sea $\{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n\}$ un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos, y tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero (0). Sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B|A_i)$. Entonces, la probabilidad $P(A_i|B)$ viene dada por la expresión:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

donde:

1. $P(A_i)$ son las probabilidades a priori,
2. $P(B|A_i)$ es la probabilidad de B en la hipótesis A_i ,
3. $P(A_i|B)$ son las probabilidades a posteriori. ∴:



7

Eventos independientes y secuencias de experimentos



8

Probabilidad en espacio



Parte III

Inferencia estadística



1

Variables aleatorias

Definición 1.1 (Variable aleatoria). Sea Ω un espacio muestral asociado a una experimento aleatorio ϵ y $\omega \in \Omega$, entonces se genera la función **variable aleatoria**

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (1.1)$$

You may refer to it using (1.1)



A

Sumatorias

Una suma de números representados por x_1, x_2, \dots, x_n se simboliza en forma compacta mediante el simbolo \sum (sigma) es decir la suma de los números anteriores se puede escribir del siguiente modo

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Algunas propiedades son

1. $k \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n kx_i$
2. $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$
3. $\sum_{i=1}^n x_i$

$$\int_1^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f^i(x)$$

citado por (Xie, 2015) Variable estadística variable estadística

A.1. ee

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}$$

A.1.1. eeeee



B

Matrices

Una matriz es un arreglo de números distribuidos en filas y columnas por ejemplo la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

de **orden** $n \times m$ tiene **entradas** a_{ij} donde el primer subíndice indica la fila y el segundo la columna; es usual representar por simplicidad una matriz por $A = [a_{ij}]_{n \times m}$. Si en el orden $n = m$ entonces la matriz recibe el nombre de **matriz cuadrada** la suma de los elementos de la diagonal de una matriz cuadrada $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ se llama **traza**. Si todas las a_{ij} son cero entonces la matriz $A = 0$ recibe el nombre matriz **nula**.

Dos matrices son iguales si tienen el **mismo orden** y cada una de las entradas respectivas son iguales es decir $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ y $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ son iguales si $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$

B.1. Álgebra de matrices

Sean las matrices

$$A = [a_{ij}]_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

y

$$B = [b_{ij}]_{p \times q} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}_{p \times q}$$

entonces la suma y producto de matrices se definen

1. Sea k un escalar entonces se verifica que $kA = [ka_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$ es decir el escalar k multiplica a cada una de las entradas de la matriz.

$$\begin{aligned} kA &= k[a_{ij}]_{n \times m} \\ &= [ka_{ij}]_{n \times m} \\ &= \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \dots & ka_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m} \end{aligned}$$

2. La suma o diferencia es posible si $n = p$ y $m = q$ es decir los ordenes de A y B son iguales, entonces la suma o diferencia resulta

$$\begin{aligned} A \pm B &= [a_{ij} \pm b_{ij}]_{n \times m} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \pm b_{n1} & a_{n2} \pm b_{n2} & \dots & a_{nm} \pm b_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m} \end{aligned}$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$

3. El producto es posible si $m = p$ es decir el número columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz, el orden de la matriz resultante es $n \times q$ además

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \left[\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right]_{n \times q} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k} b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{1k} b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^m a_{1k} b_{kq} \\ \sum_{k=1}^m a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{2k} b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^m a_{2k} b_{kq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{nk} b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{nk} b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^m a_{nk} b_{kq} \end{pmatrix}_{n \times q} \end{aligned}$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$

Ejemplo B.1. Sean $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 5}$ entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 15 & 3 \\ 5 & -3 & 0 & 13 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

En caso de ser posible la multiplicación entre A , B y C entonces se verifican las siguientes propiedades

1. $A(B + C) = AB + AC$
2. $(A + B)C$
3. $A(BC) = (AB)C$

B.2. Matrices particulares

En esta sección se considera las siguientes matrices: Matriz triangular, matriz particular de una matriz cuadrada, matriz transpuesta, matriz simétrica, matriz conjugada, matriz hermitica, matriz escalonada.

B.2.1. Matriz triangular

Una matriz cuadrada A cuyos elementos $a_{ij} = 0$ si $i > j$ es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

se llama **matriz triangular superior**; reciprocamente si $i < j$ es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

se llama **matriz triangular inferior**. Si A es a la vez **matriz triangular superior** y **matriz triangular inferior** entonces recibe el nombre de **matriz diagonal**, representada por

$$(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

además si $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = k$ la matriz recibe el nombre de **matriz escalar** y si $k = 1$ la matriz recibe el nombre de **matriz unidad** representada por I_n por ejemplo

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B.2.2. Matriz particular de una matriz cuadrada

B.2.3. Matriz transpuesta

B.2.4. Matriz simetrica

B.2.5. Matriz conjugada

B.2.6. Matriz hermitica

B.2.7. Matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} w & warnwww & w \\ w & warnwww & w \end{pmatrix}_{4 \times 3}$$

```
xw = 'Es decir los elementos son demagogos y déspotas'
x1 = 'Es decir los elementos son demagogos y déspotas'
```

$$\frac{\sin x}{x^3} = 0,3794281$$

$$\Phi_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

1. Www

$$\frac{1}{20\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{300} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-200}{20}\right)^2} dz = 0,9999997$$

2. 0.9500042 also Es decir los elementos son demagogos y déspotas

3. Es decir los elementos son demagogos y déspotas

Tabla B.1

Tabla B.1: Caption

Option	N	w	Observation	Description
Es decir los elementos son demagogos y despotas	1	w	Es decir los elementos son demagogos y despotas	Es decir los elementos son demagogos y despotas Es decir los elementos son demagogos y despotas
Engine	2	w	Es decir los elementos son demagogos y despotas $\sum_{i=1}^n f_i$	Engine to be used for processing templates. Handlebars is the default.
Es decir los elementos son demagogos y despotas	3	w	$\sum_{i=1}^n f_i$	extension to be used for dest files.

variable aleatoria Variable aleatoria entonces
2.7182818 0.9750021 0.7881446

2561

The value of \times in the Python session is Es decir los elementos son demagogos y déspotas . It is not the same \times as the one in R.

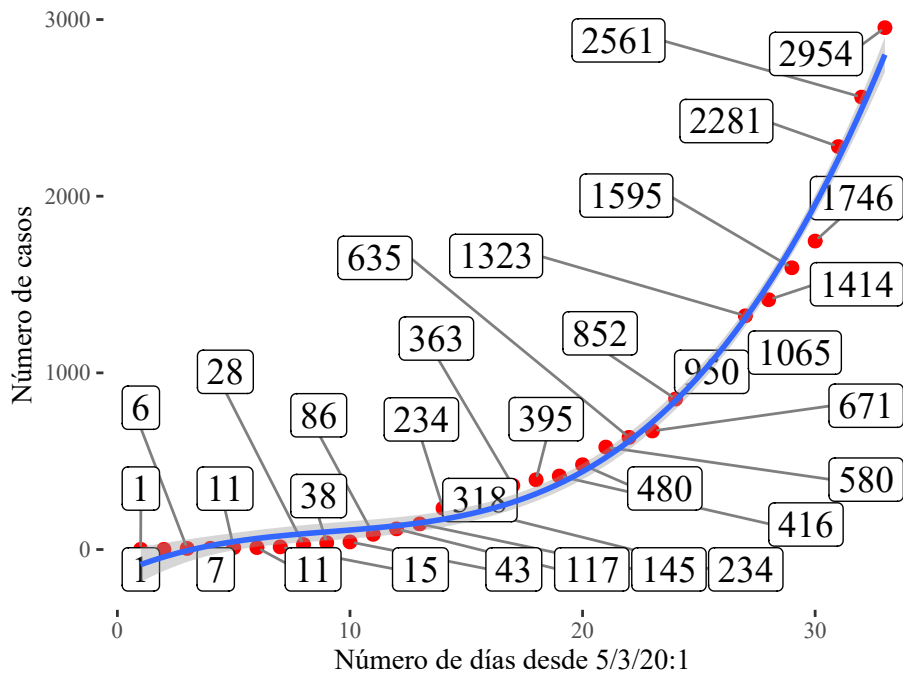


Figura B.1 Regresión lineal

```
## (Intercept)
##      12917.13
```

Bibliografía

Xie, Y. (2015). *Dynamic Documents with R and knitr*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2nd edition. ISBN 978-1498716963.



Índice alfabético

frecuencias absolutas, 6
frecuencias absolutas acumuladas
 menor que, 6
frecuencias absolutas relativas, 6
frecuencias absolutas relativas menor
 que, 7
traza, 69