

Ricardo Michel MALLQUI BAÑOS

Matemáticas básicas

Universidad Nacional San Cristobal de Huamanga

Fisart.cf

Agradecimiento a los estudiantes de la ESFAPA FGPA

A la UNSCH



Índice general

Índice de cuadros	v
Índice de figuras	vii
Resumen	ix
Introducción	xi
1. Lógica	1
2. Conjuntos	3
2.1. Función proposicional y cuantificadores	3
2.1.1. Función proposicional	3
2.1.2. Cuantificadores	3
2.1.3. Negación de las proposiciones universal y existencial	4
2.2. Conjuntos Iguales	6
2.2.1. Propiedades	6
2.3. Inclusión y subconjuntos	6
2.3.1. Propiedades	6
2.4. Conjuntos disjuntos	7
2.5. Conjunto potencia	7
2.5.1. Propiedades	7
2.6. Representación Gráfica de los Conjuntos	7
2.7. Operaciones entre conjuntos	7
2.7.1. Unión	7
2.7.2. Intersección	8
2.7.3. Diferencia	8
2.7.4. Complemento	8
2.7.5. Diferencia simétrica	9
2.7.6. Ejercicios	9
2.8. Número de elementos de un Conjunto. Propiedades	10
3. Funciones y relaciones	11
4. Numeros reales	13
5. Funciones exponenciales logarítmicas	15

6. Inducción matemática	17
7. Sucesiones	19
8. Números complejos	21
9. Polinomios	23
Apéndice	23

Índice de cuadros



Índice de figuras



Resumen

www.



Introducción

www.



1

Logica

www.



2

Conjuntos

Definición 2.1 (Conjunto). Es una colección de elementos con características similares

Definición 2.2 (Determinación de conjuntos). Por extensión y comprensión

Conjuntos universal, vacío, unitario

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$$\phi = \{x/x \neq x\}$$

$$A = \{a\}$$

2.1. Función proposicional y cuantificadores

2.1.1. Función proposicional

Definición 2.3 (Función proposicional). Sea x una variable $P(x)$ un *enunciado*, $P(x)$ es una **función proposicional** si al sustituir la variable con una constante este se convierte en una *proposición*.

Por ejemplo $P(x)$: x es un número par

Al conjunto de todos los valores de x se denomina *dominio de la variable*

2.1.2. Cuantificadores

Definición 2.4 (Cuantificador existencial).

$$\exists$$

Es una generalización de la disyunción Inclusiva. Por ello, es verdadero cuando al menos un valor de x perteneciente al Dominio de A , es Verdadero. Se denota: $\exists x/P(x)$ Se lee: "Existe al menos un x ", "Algunos x ", "Hay x ", "Existe un x ", etc.

Definición 2.5 (Cuantificador universal).

$$\forall$$

Es una generalización de la *conjunción*. Debido a esto es verdadero cuando todos los valores de x que pertenecen al Dominio de A son Verdaderos. Se denota: $\forall x; p(x)$ Se lee: "Para Todo x ", "Para cada x ", "Todos (as) las x ", "Todo x ".

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la función proposicional $3x - 2 < 12$ entonces las proposiciones

1. $\forall x \in A : 3x - 1 < 14$
2. $\exists x \in A : 3x - 2 < 12$

son falsa y verdadera respectivamente

Definición 2.6 (Proposición universal). Una *proposición universal* es aquella que está provista de un *cuantificador universal*, y tiene la forma:

$$\forall x \in A : p(x)$$

Definición 2.7 (Proposición existencial). Una *proposición existencial* es aquella que está provista de un *cuantificador existencial*, y tiene la forma:

$$\exists x \in A : p(x)$$

2.1.3. Negación de las proposiciones universal y existencial

Cambiando el cuantificador universal por el cuantificador existencial, o viceversa, es decir

$$\sim [\exists x \in A; P(x)] \equiv \forall x \in A; \sim P(x)$$

$$\sim [\forall x \in A; P(x)] \equiv \exists x \in A; \sim P(x)$$

La negación del *cuantificador universal* es equivalente a la *afirmación de un cuantificador existencial* respecto de la *función proposicional negada*.

La negación de un *cuantificador existencial* es equivalente a la *afirmación de un cuantificador universal* respecto de la *función proposicional negada*.

Ejemplo 2.1. Dada la proposición: “Si todos los números primos son impares, los números positivos son mayores que -1”

- Expresarla simbólicamente
- Negar oracionalmente la proposición

Solución. Sea $p(x)$: números primos son impares y $q(x)$: números positivos mayores que -1

- $\forall x : [p(x) \rightarrow q(x)]$
- Negando el ítem anterior

$$\begin{aligned}\sim \{\forall x : [p(x) \rightarrow q(x)]\} &\equiv \sim \{\forall x : p(x) \rightarrow \forall x : q(x)\} \\ &= \sim \{\sim [\forall x : p(x)] \vee \forall x : q(x)\} \\ &\equiv \forall x : p(x) \wedge \exists x : \sim q(x)\end{aligned}$$

que se lee: “Todos los números primos son impares y algunos números no son mayores que -1”

Ejemplo 2.2. Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} : -14 < x < 27\}$. Hallar el valor de verdad de

$$s = [(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim q \wedge \sim r)] \leftrightarrow (\sim p \vee r)$$

si $p = (\forall x \in A, \exists y \in A, \forall z \in A)[x^2 - z^2 > y^2]$, $q = (\exists y \in A, \forall z \in A, \exists x \in A)[2x - 4y < -z]$ y $r = (\forall z \in A, \exists x \in A, \forall y \in A)[3x^2 - z^2 > y]$

Solución. $A = \{1, 2, 3, \dots, 26\}$ luego el valor de $V(p) = F$, $V(q) = V$ y $V(r) = V$ pues

- Si $y = 1$ entonces $x^2 - z^2 > y^2 \equiv x^2 > 1 + z^2$ lo cual no es valido $\forall x, z \in A$ entonces $V(p) = F$
- Si $y = 25 \in A$ y $x = 1 \in A$ entonces $2x - 4y < -z \equiv 2 + z < 100$ lo cual es valido $\forall z \in A$ entonces $V(q) = V$
- Si $x = 26 \in A$ entonces $3x^2 - z^2 > y \equiv 3(26)^2 > z^2 + y$ lo cual es valido $\forall z, y \in A$ entonces $V(r) = V$

por lo tanto

$$\begin{aligned}V(s) &= V[(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim q \wedge \sim r)] \iff (\sim p \vee r) \\ &= [(V \wedge F) \Rightarrow (F \wedge F)] \iff (V \vee V) \\ &= [F \Rightarrow F] \iff V \\ &= V\end{aligned}$$

Ejercicio 2.1. Dada la proposición: “Obtendré un puntaje aprobatorio si y solo si estudio concienzudamente el curso”

- Expresarla simbólicamente
- Negar oracionalmente la proposición

Ejercicio 2.2. Dado el conjunto $G = \{x \in \mathbb{Z}^+ : -14 < 2x < 20\}$. Hallar el valor de verdad de

$$s = (p \wedge \sim q) \rightarrow [(\sim q \wedge \sim r) \leftrightarrow (\sim p \vee r)]$$

si $p = (\forall x \in A, z \in \mathbb{N}_\times)[xz \in \mathbb{Z}]$, $q = (\forall z \in A, \exists x \in A)[x \neq y]$ y $r = (\forall z \in A, \forall y \in A)[yx^2 > 500]$

2.2. Conjuntos Iguales

$$\begin{aligned} A = B &\iff \{(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)\} \\ &\iff x \in A \leftrightarrow x \in B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \neq B &\iff \{(\exists x \in A; x \notin B) \vee (\exists x \in B; x \notin A)\} \\ &\iff x \in A \leftrightarrow x \in B \end{aligned}$$

2.2.1. Propiedades

- $A = A$
- $A = B \rightarrow B = A$
- $A = B$ y $B = C$ entonces $A = C$

2.3. Inclusión y subconjuntos

$$\begin{aligned} A \subset B &\leftrightarrow \{x \in A \rightarrow x \in B\} \\ &\leftrightarrow \{\forall x \in A, x \in B\} \end{aligned}$$

$$A \not\subset B \leftrightarrow \exists x \in A \mid x \notin B$$

2.3.1. Propiedades

- $A \subset A$
- $A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A \subset B$
- $A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$
- $\forall A \emptyset \subset A$

2.4. Conjuntos disjuntos

$$A \text{ disjunto de } B \leftrightarrow \nexists x \mid x \in A \wedge x \in B$$

2.5. Conjunto potencia

$$P(A) = \{X \mid X \subset A\}$$

Observación.

- $P(A)$ tiene 2^n elementos
- $\emptyset \in P(A)$
- $A \in P(A)$

2.5.1. Propiedades

- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
 - $A \subset B \leftrightarrow P(A) \subset P(B)$
 - $A = B \leftrightarrow P(A) = P(B)$
-

2.6. Representación Gráfica de los Conjuntos

Diagrama de euler

2.7. Operaciones entre conjuntos

2.7.1. Unión

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

2.7.1.1. Propiedades

- $A \cup A = A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup U = U$
- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2.7.2. Intersección

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

2.7.2.1. Propiedades

- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap U = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

2.7.3. Diferencia

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

2.7.3.1. Propiedades

- $A - A = \emptyset$
- $A - \emptyset = A$
- $\emptyset - A = \emptyset$
- $A - B \subset A$
- $(A - B) = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$

2.7.4. Complemento

$$\mathcal{C}_B A = B - A = \{x/x \in B \wedge x \notin A\}$$

$$x \in \mathcal{C}_B A \leftrightarrow x \in B \wedge x \notin A$$

Si $B = U$ entonces $\mathcal{C}_B A = A' = A^C = \overline{A}$

2.7.4.1. Propiedades

- $\mathcal{C}_B A \subset B$ y $\mathcal{C}_A B \subset A$
- $A' \cup A = U$ o $A \cup \mathcal{C}_A B = A$
- $A \cap A' = \emptyset$ o $A \cap \mathcal{C}_A B = \emptyset$
- $U' = \emptyset$ o $\mathcal{C}_A A = \emptyset$
- $\emptyset' = U$ o $\mathcal{C}_A \emptyset = A$
- $(A')' = A$ o $\mathcal{C}_B(\mathcal{C}_B A) = A$
- $A - B = A \cap B' = A - B = A \cap \mathcal{C}_A B$

2.7.5. Diferencia simétrica

$$A \Delta B = \{x / (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

$$x \in A \Delta B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

2.7.5.1. Propiedades

- $A \Delta B = B \Delta A$
- $A \Delta \emptyset = A$
- $A \Delta B = B \Delta A$
- $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
- $(A \Delta B) \cap C = (A \Delta C) \Delta (B \Delta C)$
- $(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

2.7.6. Ejercicios

1. Sea $U = \{x \in \mathbb{N} | 0 < x \leq 10\}$ y los subconjuntos: $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es primo}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es un cuadrado perfecto}\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es impar}\}$. Hallar

- $(A \cup B)' - C$
- $(A - C)' \cap B$
- $(A \Delta B) - (A \Delta C)$
- $(A \cap C)' - (B \cup C)'$

2. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} | \sim [0 \leq -2 \vee x > 3]\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | \sim [-1 < x \leq 3 \rightarrow x = 5]\}$ y $C = \{x \in \mathbb{Z} | (x < -2 \vee x \geq 2) \rightarrow x > 1\}$ Hallar el resultado de $(B \cap C) \Delta (A \cap B)$

2.8. Número de elementos de un Conjunto. Propiedades

3

Funciones y relaciones



4

*Numero*s reales



5

Funciones exponenciales logarítmicas



6

Inducción matemática



7

Sucesiones



8

Números complejos



9

Polinomios

Temas de reforzamiento o conocimientos preliminares que son necesarios para entender el contenido.



A

Trasformaciones