Ricardo Michel MALLQUI BAÑOS

Matemáticas básicas

Universidad Nacional San Cristobal de Huamanga

Fisart.cf

Agradecimento a los estudiantes de la ESFAPA FGPA

A la UNSCH

Índice general

Índice de cuadros

Índice de figuras

Resumen

www.

Introducción

www.

1

Logica

www.

2

Conjuntos

Definición 2.1 (Conjunto)**.** Es una coleccion de elementos con caractersiticas similares

Definición 2.2 (Determinacion de conjuntos)**.** Por extensión y comprensión

Cornutos universal, vacio, unitario

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$$\phi = \{x/x \neq x\}$$

$$A = \{a\}$$

2.1. Función proposicional y cuantificadores

2.1.1. Función proposicional

Definición 2.3 (Función proposicional)**.** Sea x una variable $P(x)$ un *enunciado*, $P(x)$ es una ***función proposicional*** si al sustituir la variable con una constante este se convierte en una *proposición*.

Por ejemplo $P(x)$: x es un numero par

Al conjunto de todos lo valores de x se denomina *domino de la variable*

2.1.2. Cuantificadores

Definición 2.4 (Cuantificador existencial)**.**

$$\exists$$

Es una generalización de la disyunción Inclusiva. Por ello, es verdadero cuando al menos un valor de x perteneciente al Dominio de A, es Verdadero. Se denota; $\exists x/P(x)$ Se lee: “Existe al menos un x”, “Algunos x”,"Hay x“,”Existe un x", etc.

Definición 2.5 (Cuantificador universal)**.**

$$\forall$$

Es una generalización de la *conjunción*. Debido a esto es verdadero cuando todos los valores de x que pertenecen al Dominio de A son Verdaderos. Se denota: $\forall x; p(x)$ Se lee: “Para Todo x”, “Para cada x”, “Todos (as) las x”, “Todo x”.

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la función proposicional $3x - 2 < 12$ entonces las proposiciones

1. $\forall x \in A : 3x - 1 < 14$
2. $\exists\ x \in A : 3x - 2 < 12$

son falsa y verdadera respectivamente

Definición 2.6 (Proposición universal)**.** Una *proposición universal* es aquella que está provista de un *cuantificador universal*, y tiene la forma:

$$\forall x \in A : p(x)$$

Definición 2.7 (Proposición existencial)**.** Una *proposición existencial* es aquella que está provista de un *cuantificador existencial*, y tiene la forma:

$$\exists x \in A : p(x)$$

2.1.3. Negación de las proposiciones universal y existencial

Cambiando el cuantificador universal por el cuantificador existencial, o viceversa, es decir

$$\sim [\exists x \in A; P(x)] \equiv \forall x \in A; \sim P(x)$$

$$\sim [\forall x \in A; P(x)] \equiv \exists\ x \in A; \sim P(x)$$

La negación del ***cuantificador universal*** es equivalente a la *afirmación de un cuantificador existencial* respecto de la ***función proposicional negada*.**

La negación de un ***cuantificador existencial*** es equivalente a la *afirmación de un cuantificador universal* respecto de la ***función proposicional negada***.

Ejemplo 2.1. Dada la proposición: "Si todos los números primos son impares, los números positivos son mayores que -1"

- Expresarla simbólicamente
- Negar oracionalmente la proposición

Solución. Sea $p(x)$: números primos son impares y $q(x)$: números positivos mayores que -1

- $\forall x : [p(x) \to q(x)]$
- Negando el item anterior

$$\begin{aligned} \sim \{\forall x : [p(x) \to q(x)]\} &\equiv \sim \{\forall x : p(x) \to \forall x : q(x)\} \\ &= \sim \{\sim [\forall x : p(x)] \vee \forall x : q(x)\} \\ &\equiv \forall x : p(x) \wedge \exists\, x : \sim q(x) \end{aligned}$$

que se lee: "Todos los números primos son impares y algunos números no son mayores que -1"

Ejemplo 2.2. Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} : -14 < x < 27\}$. Hallar el valor de verdad de

$$s = [(\sim p \wedge \sim q) \to (\sim q \wedge \sim r)] \leftrightarrow (\sim p \vee r)$$

si $p = (\forall x \in A, \exists y \in A, \forall z \in A)[x^2 - z^2 > y^2]$, $q = (\exists y \in A, \forall z \in A, \exists x \in A)[2x - 4y < -z]$ y $r = (\forall z \in A, \exists x \in A, \forall y \in A)[3x^2 - z^2 > y]$

Solución. $A = \{1, 2, 3, \ldots, 26\}$ luego el valor de $\mathrm{V}(p) = F$, $\mathrm{V}(q) = V$ y $\mathrm{V}(r) = V$ pues

- Si $y = 1$ entonces $x^2 - z^2 > y^2 \equiv x^2 > 1 + z^2$ lo cual no es valido $\forall x, z \in A$ entonces $\mathrm{V}(p) = F$
- Si $y = 25 \in A$ y $x = 1 \in A$ entonces $2x - 4y < -z \equiv 2 + z < 100$ lo cual es valido $\forall z \in A$ entonces $\mathrm{V}(q) = V$
- Si $x = 26 \in A$ entonces $3x^2 - z^2 > y \equiv 3(26)^2 > z^2 + y$ lo cual es valido $\forall z, y \in A$ entonces $\mathrm{V}(r) = V$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(s) &= \mathrm{V}[(\sim p \wedge \sim q) \Longrightarrow (\sim q \wedge \sim r)] \Longleftrightarrow (\sim p \vee r) \\ &= [(V \wedge F) \Longrightarrow (F \wedge F)] \Longleftrightarrow (V \vee V) \\ &= [F \Longrightarrow F] \Longleftrightarrow V \\ &= V \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1. Dada la proposición: "Obtendré un puntaje aprobatorio si y solo si estudio concienzudamente el curso"

- Expresarla simbólicamente
- Negar oracionalmente la proposición

Ejercicio 2.2. Dado el conjunto $G = \{x \in \mathbb{Z}^+ : -14 < 2x < 20\}$. Hallar el valor de verdad de

$$s = (p \wedge \sim q) \rightarrow [(\sim q \wedge \sim r) \leftrightarrow (\sim p \vee r)]$$

si $p = (\forall x \in A, z \in \mathbb{N}_{\nvdash})[xz \in \mathbb{Z}]$, $q = (\forall z \in A, \exists x \in A)[x \neq y]$ y $r = (\forall z \in A, \forall y \in A)[yx^2 > 500]$

2.2. Conjuntos Iguales

$$\begin{aligned} A = B &\Longleftrightarrow \{(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)\} \\ &\Longleftrightarrow x \in A \leftrightarrow x \in B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \neq B &\Longleftrightarrow \{(\exists x \in A; x \notin B) \vee (\exists x \in B; x \notin A)\} \\ &\Longleftrightarrow x \in A \leftrightarrow x \in B \end{aligned}$$

2.2.1. Propiedades

- $A = A$
- $A = B \rightarrow B = A$
- $A = B$ y $B = C$ entonces $A = C$

2.3. Inclusión y subconjuntos

$$\begin{aligned} A \subset B &\leftrightarrow \{x \in A \rightarrow x \in B\} \\ &\leftrightarrow \{\forall x \in A, x \in B\} \end{aligned}$$

$$A \not\subset B \leftrightarrow \exists x \in A \mid x \notin B$$

2.3.1. Propiedades

- $A \subset A$
- $A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A \subset B$
- $A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$
- $\forall A \; \emptyset \subset A$

2.4. Conjuntos disjuntos

$$A \text{ disjunto de } B \leftrightarrow \nexists x \mid x \in A \wedge x \in B$$

2.5. Conjunto potencia

$$P(A) = \{X \mid X \subset A\}$$

Observación. * $P(A)$ tiene 2^n elementos * $\emptyset \in P(A)$ * $A \in P(A)$

Propiedades

- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $A \subset B \leftrightarrow P(A) \subset P(B)$
- $A = B \leftrightarrow P(A) = P(B)$

2.6. Representación Gráfica de los Conjuntos

Diagrama de euler

2.7. Operaciones entre conjuntos

2.7.1. Unión

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

Propiedades

- $A \cup A = A$
- $A \cup \emptyset = A$

- $A \cup U = U$
- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2.7.2. Intersección

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Propiedades

- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap U = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

2.7.3. Diferencia

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

Propiedades

- $A - A = \emptyset$
- $A - \emptyset = A$
- $\emptyset - A = \emptyset$
- $A - B \subset A$
- $(A - B) = (A \cup B) - B) = A - (A \cap B)$

2.7.4. Complemento

$$\mathcal{C}_B A = B - A = \{x/x \in B \wedge x \notin A\}$$

$$x \in \mathcal{C}_B A \leftrightarrow x \in B \vee x \notin A$$

Si $B = U$ entonces $\mathcal{C}_B A = A' = A^C = \overline{A}$

Propiedades

- $\mathcal{C}_B A \subset B$ y $\mathcal{C}_A B \subset A$
- $A' \cup A = U$ o $A \cup \mathcal{C}_A B = A$
- $A \cap A' = \emptyset$ o $A \cap \mathcal{C}_A B = \emptyset$
- $U' = \emptyset$ o $\mathcal{C}_A A = \emptyset$
- $\emptyset' = U$ o $\mathcal{C}_A \emptyset = A$
- $(A')' = A$ o $\mathcal{C}_B(\mathcal{C}_B A) = A$
- $A - B = A \cap B'$ o $A - B = A \cap \mathcal{C}_A B$

2.7.5. Diferencia simétrica

$$A\Delta B = \{x/(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B)\}$$

$$x \in A\Delta B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B)$$

Propiedades

- $A\Delta B = \emptyset$
- $A\Delta\emptyset = A$
- $A\Delta B = B\Delta A$
- $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$
- $(A\Delta B) \cap C = (A\Delta C)\Delta(B\Delta C)$
- $(A\Delta B) \cup (B\Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

2.7.6. Ejercicios

1. Sea $U = \{x \in \mathbb{N} | 0 < x \leq 10\}$ y los subconjuntos: $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es primo}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es es un cuadrado perfecto}\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es impar}\}$. Hallar
   - $(A \cup B)' - C$
   - $(A - C)' \cap B$
   - $(A\Delta B) - (A\Delta C)$
   - $(A \cap C)' - (B \cup C)'$
2. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} | \sim [0 \leq -2 \vee x > 3]\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | \sim [-1 < x \leq 3 \rightarrow x = 5]\}$ y $C = \{x \in \mathbb{Z} | (x < -2 \vee x \geq 2) \rightarrow x > 1\}$ Hallar el resultado de $(B \cap C)\Delta(A \cap B)$

2.8. Número de elementos de un Conjunto. Propiedades

3

Funciones y relaciones

4

Numeros reales

5

Funciones exponenciales logarítmicas

6

Inducción matemática

7

Suceciones

8

Números complejos

9

Polinomios

Temas de reforzamiento o conocimientos preliminares que son necesarias para entender el contenido.

A

Trasformaciones