

Ricardo Michel MALLQUI BAÑOS

Matemáticas básicas

Universidad Nacional San Cristobal de Huamanga

Fisart.cf

Agradecimiento a los estudiantes de la ESFAPA FGPA

A la UNSCH



Índice general

Índice de cuadros	v
Índice de figuras	vii
Resumen	ix
Introducción	xi
1. Lógica	1
2. Conjuntos	3
2.0.1. Conjuntos básicos	3
2.1. Función proposicional y cuantificadores	3
2.1.1. Función proposicional	3
2.1.2. Cuantificadores	4
2.2. Conjuntos Iguales	7
2.2.1. Propiedades	7
2.3. Inclusión y subconjuntos	7
2.3.1. Propiedades	7
2.4. Conjuntos disjuntos	8
2.5. Conjunto potencia	8
2.6. Representación Gráfica de los Conjuntos	8
2.7. Operaciones entre conjuntos	8
2.7.1. Unión	8
2.7.2. Intersección	9
2.7.3. Diferencia	9
2.7.4. Complemento	9
2.7.5. Diferencia simétrica	10
2.7.6. Ejercicios	10
2.7.7. Ejercicios	10
2.8. Número de elementos de un Conjunto. Propiedades	11
3. Funciones y relaciones	13
4. Números reales	15
4.0.1. Ejercicios	16
4.0.2. Potenciación	16

5. Funciones exponenciales logarítmicas	17
6. Inducción matemática	19
7. Sucesiones	21
8. Números complejos	23
9. Polinomios	25
Apéndice	25

Índice de cuadros

1.1. Sed.	1
1.2. Polígonos cerrados regulares.	1



Índice de figuras



Resumen

www.



Introducción

www.



Cuadro 1.1: Sed.

<i>p</i>	<i>q</i>	$w \rightarrow (\sim p \vee q)$	<i>w</i>
V	V	w	w
V	F	w	w
F	V	w	w
F	F	w	w

$\Rightarrow \Leftarrow$

\Leftrightarrow

\Leftrightarrow

$\Leftrightarrow \vee \wedge \rightarrow \left(\int_2^2\right) \left[\int_3^2\right] \{w, w, w, w, w, w, w/x \in W\}$

Refiérase al cuadro 1.2 1.1

Cuadro 1.2: Polígonos cerrados regulares.

Tipo	Número de lados	Número de diagonales	Apotemas
Triángulo equilátero	3	0	3
Cuadrado	4	2	4
Pentágono	5	5	5
Exagono	6	6	6
Heptagono	7	7	7
...



2

Conjuntos

Definición 2.1 (Conjunto). Es una colección de elementos con características similares

Determinación de un conjunto

Definición 2.2 (Determinación de conjuntos). Por extensión y comprensión

* **Extensión**

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

* **Comprensión**

$$A = \{x \in \mathbb{N}; 0 < x < 5\}$$

2.0.1. Conjuntos básicos

Conjuntos universal, vacío, unitario * **Conjunto de los sistemas numéricos**

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

* **Conjunto vacío**

$$\phi = \{x/x \neq x\}$$

* **Conjunto unitario**

$$A = \{a\}$$

2.1. Función proposicional y cuantificadores

2.1.1. Función proposicional

Definición 2.3 (Función proposicional). Sea x una variable $P(x)$ un *enunciado*, $P(x)$ es una **función proposicional** si al sustituir la variable con una constante este se convierte en una *proposición*.

Sea x una variable $P(x)$ un *enunciado*, $P(x)$ es una **función proposicional** si al sustituir la variable con una constante este se convierte en una *proposición*.

Por ejemplo $P(x)$: x es un numero par

Al conjunto de todos lo valores de x se denomina *domino de la variable*

2.1.2. Cuantificadores

Definición 2.4 (Cuantificador existencial).

\exists

Es una generalización de la disyunción Inclusiva. Por ello, es verdadero cuando al menos un valor de x perteneciente al Dominio de A , es Verdadero. Se denota; $\exists x/P(x)$ Se lee: "Existe al menos un x ", "Algunos x ", "Hay x ", "Existe un x ", etc.

\exists

Es una generalización de la disyunción Inclusiva. Por ello, es verdadero cuando al menos un valor de x perteneciente al Dominio de A , es Verdadero. Se denota; $\exists x/P(x)$ Se lee: "Existe al menos un x ", "Algunos x ", "Hay x ", "Existe un x ", etc.

Definición 2.5 (Cuantificador universal).

\forall

Es una generalización de la *conjunción*. Debido a esto es verdadero cuando todos los valores de x que pertenecen al Dominio de A son Verdaderos. Se denota: $\forall x; p(x)$ Se lee: "Para Todo x ", "Para cada x ", "Todos (as) las x ", "Todo x ".

\forall

Es una generalización de la *conjunción*. Debido a esto es verdadero cuando todos los valores de x que pertenecen al Dominio de A son Verdaderos. Se denota: $\forall x; p(x)$ Se lee: "Para Todo x ", "Para cada x ", "Todos (as) las x ", "Todo x ".

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la función proposicional $3x - 2 < 12$ entonces las proposiciones

1. $\forall x \in A : 3x - 1 < 14$
2. $\exists x \in A : 3x - 2 < 12$

son falsa y verdadera respectivamente

Definición 2.6 (Proposición universal). Una *proposición universal* es aquella que está provista de un *cuantificador universal*, y tiene la forma:

$$\forall x \in A : p(x)$$

Una *proposición universal* es aquella que está provista de un *cuantificador universal*, y tiene la forma:

$$\forall x \in A : p(x)$$

Definición 2.7 (Proposición existencial). Una *proposición existencial* es aquella que está provista de un *cuantificador existencial*, y tiene la forma:

$$\exists x \in A : p(x)$$

Una *proposición existencial* es aquella que está provista de un *cuantificador existencial*, y tiene la forma:

$$\exists x \in A : p(x)$$

Negación de las proposiciones universal y existencial

Cambiando el cuantificador universal por el cuantificador existencial, o viceversa, es decir

$$\sim [\exists x \in A; P(x)] \equiv \forall x \in A; \sim P(x)$$

$$\sim [\forall x \in A; P(x)] \equiv \exists x \in A; \sim P(x)$$

La negación del **cuantificador universal** es equivalente a la *afirmación de un cuantificador existencial* respecto de la **función proposicional negada**.

La negación de un **cuantificador existencial** es equivalente a la *afirmación de un cuantificador universal* respecto de la **función proposicional negada**.

Ejemplo 2.1. Dada la proposición: “Si todos los números primos son impares, los números positivos son mayores que -1”

- Expresarla simbólicamente
- Negar oracionalmente la proposición

Solución. Sea $p(x)$: números primos son impares y $q(x)$: números positivos mayores que -1

- $\forall x : [p(x) \rightarrow q(x)]$

- Negando el ítem anterior

$$\begin{aligned}\sim \{\forall x : [p(x) \rightarrow q(x)]\} &\equiv \sim \{\forall x : p(x) \rightarrow \forall x : q(x)\} \\ &= \sim \{\sim [\forall x : p(x)] \vee \forall x : q(x)\} \\ &\equiv \forall x : p(x) \wedge \exists x : \sim q(x)\end{aligned}$$

que se lee: “Todos los números primos son impares y algunos números no son mayores que -1”

Sea $p(x)$: números primos son impares y $q(x)$: números positivos mayores que -1

- $\forall x : [p(x) \rightarrow q(x)]$
- Negando el ítem anterior

$$\begin{aligned}\sim \{\forall x : [p(x) \rightarrow q(x)]\} &\equiv \sim \{\forall x : p(x) \rightarrow \forall x : q(x)\} \\ &= \sim \{\sim [\forall x : p(x)] \vee \forall x : q(x)\} \\ &\equiv \forall x : p(x) \wedge \exists x : \sim q(x)\end{aligned}$$

que se lee: “Todos los números primos son impares y algunos números no son mayores que -1”

Ejemplo 2.2. Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} : -14 < x < 27\}$. Hallar el valor de verdad de

$$s = [(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim q \wedge \sim r)] \leftrightarrow (\sim p \vee r)$$

si $p = (\forall x \in A, \exists y \in A, \forall z \in A)[x^2 - z^2 > y^2]$, $q = (\exists y \in A, \forall z \in A, \exists x \in A)[2x - 4y < -z]$ y $r = (\forall z \in A, \exists x \in A, \forall y \in A)[3x^2 - z^2 > y]$

Solución. $A = \{1, 2, 3, \dots, 26\}$ luego el valor de $V(p) = F$, $V(q) = V$ y $V(r) = V$ pues

- Si $y = 1$ entonces $x^2 - z^2 > y^2 \equiv x^2 > 1 + z^2$ lo cual no es válido $\forall x, z \in A$ entonces $V(p) = F$
- Si $y = 25 \in A$ y $x = 1 \in A$ entonces $2x - 4y < -z \equiv 2 + z < 100$ lo cual es válido $\forall z \in A$ entonces $V(q) = V$
- Si $x = 26 \in A$ entonces $3x^2 - z^2 > y \equiv 3(26)^2 > z^2 + y$ lo cual es válido $\forall z, y \in A$ entonces $V(r) = V$

por lo tanto

$$\begin{aligned}V(s) &= V[(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim q \wedge \sim r)] \iff (\sim p \vee r) \\ &= [(V \wedge F) \Rightarrow (F \wedge F)] \iff (V \vee V) \\ &= [F \Rightarrow F] \iff V \\ &= V\end{aligned}$$

Ejercicio 2.1. Dada la proposición: “Obtendré un puntaje aprobatorio si y solo si estudio concienzudamente el curso”

- Expresarla simbólicamente
- Negar oracionalmente la proposición

Ejercicio 2.2. Dado el conjunto $G = \{x \in \mathbb{Z}^+ : -14 < 2x < 20\}$. Hallar el valor de verdad de

$$s = (p \wedge \sim q) \rightarrow [(\sim q \wedge \sim r) \leftrightarrow (\sim p \vee r)]$$

si $p = (\forall x \in A, z \in \mathbb{N}_\times)[xz \in \mathbb{Z}]$, $q = (\forall z \in A, \exists x \in A)[x \neq y]$ y $r = (\forall z \in A, \forall y \in A)[yx^2 > 500]$

2.2. Conjuntos Iguales

$$\begin{aligned} A = B &\iff \{(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)\} \\ &\iff x \in A \leftrightarrow x \in B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \neq B &\iff \{(\exists x \in A; x \notin B) \vee (\exists x \in B; x \notin A)\} \\ &\iff x \in A \leftrightarrow x \in B \end{aligned}$$

2.2.1. Propiedades

- $A = A$
- $A = B \rightarrow B = A$
- $A = B$ y $B = C$ entonces $A = C$

2.3. Inclusión y subconjuntos

$$\begin{aligned} A \subset B &\leftrightarrow \{x \in A \rightarrow x \in B\} \\ &\leftrightarrow \{\forall x \in A, x \in B\} \end{aligned}$$

$$A \not\subset B \leftrightarrow \exists x \in A \mid x \notin B$$

2.3.1. Propiedades

- $A \subset A$

- $A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A = B$
- $A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$
- $\forall A \emptyset \subset A$

2.4. Conjuntos disjuntos

$$A \text{ disjunto de } B \leftrightarrow \nexists x \mid x \in A \wedge x \in B$$

2.5. Conjunto potencia

$$P(A) = \{X \mid X \subset A\}$$

Observación. * $P(A)$ tiene 2^n elementos * $\emptyset \in P(A)$ * $A \in P(A)$

Propiedades

- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $A \subset B \leftrightarrow P(A) \subset P(B)$
- $A = B \leftrightarrow P(A) = P(B)$

2.6. Representación Gráfica de los Conjuntos

Diagrama de euler

2.7. Operaciones entre conjuntos

2.7.1. Unión

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Propiedades

- $A \cup A = A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup U = U$
- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2.7.2. Intersección

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Propiedades

- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap U = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

2.7.3. Diferencia

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

Propiedades

- $A - A = \emptyset$
- $A - \emptyset = A$
- $\emptyset - A = \emptyset$
- $A - B \subset A$
- $(A - B) = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$

2.7.4. Complemento

$$\mathcal{C}_B A = B - A = \{x/x \in B \wedge x \notin A\}$$

$$x \in \mathcal{C}_B A \leftrightarrow x \in B \wedge x \notin A$$

Si $B = U$ entonces $\mathcal{C}_B A = A' = A^C = \overline{A}$

Propiedades

- $\mathcal{C}_B A \subset B$ y $\mathcal{C}_A B \subset A$
- $A' \cup A = U$ o $A \cup \mathcal{C}_A B = A$
- $A \cap A' = \emptyset$ o $A \cap \mathcal{C}_A B = \emptyset$
- $U' = \emptyset$ o $\mathcal{C}_A A = \emptyset$
- $\emptyset' = U$ o $\mathcal{C}_A \emptyset = A$
- $(A')' = A$ o $\mathcal{C}_B(\mathcal{C}_B A) = A$
- $A - B = A \cap B' = A - B = A \cap \mathcal{C}_A B$

2.7.5. Diferencia simétrica

$$A \Delta B = \{x / (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

$$x \in A \Delta B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

Propiedades

- $A \Delta B = \emptyset$
- $A \Delta \emptyset = A$
- $A \Delta B = B \Delta A$
- $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
- $(A \Delta B) \cap C = (A \Delta C) \Delta (B \Delta C)$
- $(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

2.7.6. Ejercicios

1. Sea $U = \{x \in \mathbb{N} | 0 < x \leq 10\}$ y los subconjuntos: $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es primo}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es un cuadrado perfecto}\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es impar}\}$. Hallar

- $(A \cup B)' - C$
- $(A - C)' \cap B$
- $(A \Delta B) - (A \Delta C)$
- $(A \cap C)' - (B \cup C)'$

2. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} | \sim [x \leq -2 \vee x > 3]\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | \sim [-1 < x \leq 3 \rightarrow x = 5]\}$ y $C = \{x \in \mathbb{Z} | (x < -2 \vee x \geq 2) \rightarrow x > 1\}$ Hallar el resultado de $(B \cap C) \Delta (A \cap B)$

2.7.7. Ejercicios

1. Sombree las regiones correspondientes a los conjuntos

- $\{[(A \cup B)' \cap (C \Delta D)] \cap B\} \Delta C$
- $[(A \cup B)' \cap (C \Delta D)] - (B \cap C)$
- $\{[(A \cup B)' \cap C] \Delta D\} - (A \cup B)$

2.7.7.0.1. *Ejemplo*

$$\{[(A \cup B)' \cap C] \cap B\} \Delta C$$

2.8. Número de elementos de un Conjunto. Propiedades

$$n(A)$$



3

Funciones y relaciones



4

Numeros reales

$$(\mathbb{R}, *, +)$$

4.0.0.1. Axiomas de la adición

- Cerrada (clausura)
- Asociativa y commutativa
- Elemento inverso y neutro aditivo

4.0.0.2. Axiomas de la Multiplicación

- Cerrada (clausura)
- Asociativa $(ab)c = a(bc)$ y commutativa

$$5 \cdot 7$$

$$ab$$

- Elemento inverso y neutro multiplicativo

4.0.0.3. Axiomas distributivas

$$w(a + b) = wa + wb$$

$$(a + b)w = aw + bw$$

$$(a + b)(w + z) = a(w + z) + b(w + z) = aw + az + bw + bz$$

4.0.0.4. Axiomas de orden

Dados a y b solo ocurre que $a = b$, $a > b$ o $a < b$

4.0.0.5. Axioma del supremo

Si S es un conjunto no vacío de elementos de \mathbb{R} superiormente acotado, entonces S tiene un supremo en \mathbb{R} .

4.0.1. EjerciciosHallar el valor de x

$$\blacksquare 5x - [3x - 7 - (\frac{3x-1}{3})] = 10$$

$$\begin{aligned} 5x - [3x - 7 - (\frac{3x-1}{3})] &= 10 \\ 5x - [\frac{9x - 21 - (3x - 1)}{3}] &= 10 \\ 5x - [\frac{6x - 20}{3}] &= 10 \\ [\frac{15x - (6x - 20)}{3}] &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\frac{9x + 20}{3}] &= 10 \\ 9x + 20 &= 30 \end{aligned}$$

$$x = \frac{10}{9}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare a - \frac{m+n}{x} &= b - \frac{m-n}{x} \\ \blacksquare m \frac{(m+x)}{n} &= \frac{n(n+x)}{m} \end{aligned}$$

4.0.2. Potenciación

Teorema

$$\blacksquare a^n a^m = a^{n+m}$$

$$\blacksquare (a^n)^m = a^{nm}$$

$$\blacksquare (ab)^m = a^m b^m$$

$$\blacksquare \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\blacksquare (\frac{a}{a})^n = \frac{a^n}{a^n}$$

1.

$$\underline{(x^2 - \frac{1}{y^2})^x (x^2 - \frac{1}{y^2})^x}$$

5

Funciones exponenciales logarítmicas



6

Inducción matemática



7

Sucesiones



8

Números complejos



9

Polinomios

Temas de reforzamiento o conocimientos preliminares que son necesarios para entender el contenido.



A

Trasformaciones
