Ricardo Michel MALLQUI BAÑOS

Matemáticas básicas

Universidad Nacional San Cristobal de Huamanga

Fisart.cf

Agradecimento a los estudiantes de la ESFAPA FGPA

A la UNSCH

Índice general

Índice de cuadros

Índice de figuras

Resumen

www.

Introducción

www.

1

Logica

Teorema 1.1 (Pythagorean theorem)**.** *For a right triangle, if c denotes the length of the hypotenuse and a and b denote the lengths of the other two sides, we have*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

1.1

1.1. Conjunción

Cuadro 1.1: Conjunción.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$	$p\Delta q \equiv\sim (p \Longleftrightarrow q)$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$$

Refiérase al cuadro 1.1

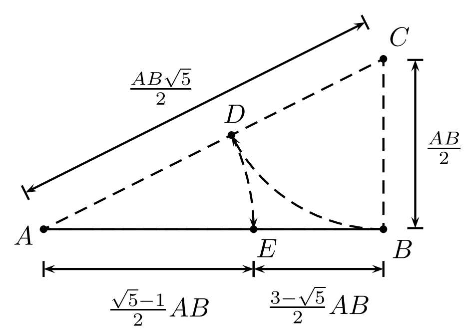

Figura 1.1: wwwwwwwwww

2

Conjuntos

Definición 2.1 (Conjunto)**.** Es una coleccion de elementos con características similares

2.1. Determinación de un conjunto

Definición 2.2 (Determinacion de conjuntos)**.** Por extensión y comprensión. **Extensión**

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Comprensión

$$A = \{x \in \mathbb{N}; 0 < x < 5\}$$

2.2. Conjuntos básicos

- Conjuntos universal
- Conjunto de los sitemas numéricos

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

- Cojunto vacio

$$\phi = \{x/x \neq x\}$$

- Conjunto unitario

$$A = \{a\}$$

2.3. Función proposicional y cuantificadores

2.3.1. Función proposicional

Definición 2.3 (Función proposicional)**.** Sea x una variable $P(x)$ un *enunciado*, $P(x)$ es una ***función proposicional*** si al sustituir la variable con una constante este se convierte en una *proposición*.

Por ejemplo $P(x)$: x es un numero par

Al conjunto de todos lo valores de x se denomina *domino de la variable*

2.3.2. Cuantificadores

Definición 2.4 (Cuantificador existencial)**.** Este cuatificador

$$\exists$$

Es una generalización de la disyunción Inclusiva. Por ello, es verdadero cuando al menos un valor de x perteneciente al Dominio de A, es Verdadero. Se denota; $\exists x/P(x)$ Se lee: “Existe al menos un x”, “Algunos x”, “Hay x”, “Existe un x”, etc.

Definición 2.5 (Cuantificador universal)**.** Este cuatificador

$$\forall$$

Es una generalización de la *conjunción*. Debido a esto es verdadero cuando todos los valores de x que pertenecen al Dominio de A son Verdaderos. Se denota: $\forall x; p(x)$ Se lee: “Para Todo x”, “Para cada x”, “Todos (as) las x”, “Todo x”.

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la función proposicional $3x - 2 < 12$ entonces las proposiciones

1. $\forall x \in A : 3x - 1 < 14$
2. $\exists\ x \in A : 3x - 2 < 12$

son falsa y verdadera respectivamente

Definición 2.6 (Proposición universal)**.** Una *proposición universal* es aquella que está provista de un *cuantificador universal*, y tiene la forma:

$$\forall x \in A : p(x)$$

Definición 2.7 (Proposición existencial)**.** Una *proposición existencial* es aquella que está provista de un *cuantificador existencial*, y tiene la forma:

$$\exists x \in A : p(x)$$

Cambiando el cuantificador universal por el cuantificador existencial, o viceversa, es decir

$$\sim [\exists x \in A; P(x)] \equiv \forall x \in A; \sim P(x)$$

$$\sim [\forall x \in A; P(x)] \equiv \exists\, x \in A; \sim P(x)$$

La negación del ***cuantificador universal*** es equivalente a la *afirmación de un cuantificador existencial* respecto de la ***función proposicional negada.***

La negación de un ***cuantificador existencial*** es equivalente a la *afirmación de un cuantificador universal* respecto de la ***función proposicional negada***.

Ejemplo 2.1. Dada la proposición: “Si todos los números primos son impares, los números positivos son mayores que -1”

- Expresarla simbólicamente
- Negar oracionalmente la proposición

Solución. Sea $p(x)$: números primos son impares y $q(x)$: números positivos mayores que -1

- $\forall x : [p(x) \to q(x)]$
- Negando el item anterior

$$\begin{aligned} \sim \{\forall x : [p(x) \to q(x)]\} &\equiv \sim \{\forall x : p(x) \to \forall x : q(x)\} \\ &= \sim \{\sim [\forall x : p(x)] \vee \forall x : q(x)\} \\ &\equiv \quad \forall x : p(x) \wedge \exists\, x : \sim q(x) \end{aligned}$$

que se lee: “Todos los números primos son impares y algunos números no son mayores que -1”

Ejemplo 2.2. Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} : -14 < x < 27\}$. Hallar el valor de verdad de

$$s = [(\sim p \wedge \sim q) \to (\sim q \wedge \sim r)] \leftrightarrow (\sim p \vee r)$$

si $p = (\forall x \in A, \exists y \in A, \forall z \in A)[x^2 - z^2 > y^2]$, $q = (\exists y \in A, \forall z \in A, \exists x \in A)[2x - 4y < -z]$ y $r = (\forall z \in A, \exists x \in A, \forall y \in A)[3x^2 - z^2 > y]$

Solución. $A = \{1, 2, 3, \ldots, 26\}$ luego el valor de $\mathrm{V}(p) = F$, $\mathrm{V}(q) = V$ y $\mathrm{V}(r) = V$ pues

- Si $y = 1$ entonces $x^2 - z^2 > y^2 \equiv x^2 > 1 + z^2$ lo cual no es valido $\forall x, z \in A$ entonces $\mathrm{V}(p) = F$
- Si $y = 25 \in A$ y $x = 1 \in A$ entonces $2x - 4y < -z \equiv 2 + z < 100$ lo cual es valido $\forall z \in A$ entonces $\mathrm{V}(q) = V$

- Si $x = 26 \in A$ entonces $3x^2 - z^2 > y \equiv 3(26)^2 > z^2 + y$ lo cual es valido $\forall z, y \in A$ entonces $\mathrm{V}(r) = V$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(s) &= \mathrm{V}[(\sim p \wedge \sim q) \Longrightarrow (\sim q \wedge \sim r)] \Longleftrightarrow (\sim p \vee r) \\
&= [(V \wedge F) \Longrightarrow (F \wedge F)] \Longleftrightarrow (V \vee V) \\
&= [F \Longrightarrow F] \Longleftrightarrow V \\
&= V
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.1. Dada la proposición: “Obtendré un puntaje aprobatorio si y solo si estudio concienzudamente el curso”

- Expresarla simbólicamente
- Negar oracionalmente la proposición

Ejercicio 2.2. Dado el conjunto $G = \{x \in \mathbb{Z}^+ : -14 < 2x < 20\}$. Hallar el valor de verdad de

$$s = (p \wedge \sim q) \rightarrow [(\sim q \wedge \sim r) \leftrightarrow (\sim p \vee r)]$$

si $p = (\forall x \in A, z \in \mathbb{N}_{\nvDash})[xz \in \mathbb{Z}]$, $q = (\forall z \in A, \exists x \in A)[x \neq y]$ y $r = (\forall z \in A, \forall y \in A)[yx^2 > 500]$

2.4. Conjuntos Iguales

$$\begin{aligned}
A = B &\Longleftrightarrow \{(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)\} \\
&\Longleftrightarrow x \in A \leftrightarrow x \in B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \neq B &\Longleftrightarrow \{(\exists x \in A; x \notin B) \vee (\exists x \in B; x \notin A)\} \\
&\Longleftrightarrow x \in A \leftrightarrow x \in B
\end{aligned}$$

2.4.1. Propiedades

- $A = A$
- $A = B \rightarrow B = A$
- $A = B$ y $B = C$ entonces $A = C$

2.5. Inclusión y subconjuntos

$$\begin{aligned} A \subset B &\leftrightarrow \{x \in A \rightarrow x \in B\} \\ &\leftrightarrow \{\forall x \in A, x \in B\} \end{aligned}$$

$$A \not\subset B \leftrightarrow \exists x \in A \mid x \notin B$$

2.5.1. Propiedades

- $A \subset A$
- $A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A \subset B$
- $A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$
- $\forall A\ \emptyset \subset A$

2.6. Conjuntos disjuntos

$$A \text{ disjunto de } B \leftrightarrow \nexists x \mid x \in A \wedge x \in B$$

2.7. Conjunto potencia

$$P(A) = \{X \mid X \subset A\}$$

Observación. Tiene las siguientes Propiedades

- $P(A)$ tiene 2^n elementos
- $\emptyset \in P(A)$
- $A \in P(A)$

Propiedades

- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $A \subset B \leftrightarrow P(A) \subset P(B)$
- $A = B \leftrightarrow P(A) = P(B)$

2.8. Representación Gráfica de los Conjuntos

Diagrama de euler

2.9. Operaciones entre conjuntos

2.9.1. Unión

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Propiedades

- $A \cup A = A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup U = U$
- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2.9.2. Intersección

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Propiedades

- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap U = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

2.9.3. Diferencia

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

Propiedades

- $A - A = \emptyset$
- $A - \emptyset = A$
- $\emptyset - A = \emptyset$
- $A - B \subset A$
- $(A - B) = (A \cup B) - B) = A - (A \cap B)$

2.9.4. Complemento

$$\mathcal{C}_B A = B - A = \{x/x \in B \wedge x \notin A\}$$

$$x \in \mathcal{C}_B A \leftrightarrow x \in B \vee x \notin W$$

Si $B = U$ entonces $\mathcal{C}_B A = A' = A^C = \overline{A}$

Propiedades

- $\mathcal{C}_B A \subset B$ y $\mathcal{C}_A B \subset A$
- $A' \cup A = U$ o $A \cup \mathcal{C}_A B = A$
- $A \cap A' = \emptyset$ o $A \cap \mathcal{C}_A B = \emptyset$
- $U' = \emptyset$ o $\mathcal{C}_A A = \emptyset$
- $\emptyset' = U$ o $\mathcal{C}_A \emptyset = A$
- $(A')' = A$ o $\mathcal{C}_B(\mathcal{C}_B A) = A$
- $A - B = A \cap B'$ o $A - B = A \cap \mathcal{C}_A B$

2.9.5. Diferencia simétrica

$$A \Delta B = \{x/(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B)\}$$

$$x \in A \Delta B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B)$$

Propiedades

- $A \Delta B = \emptyset$
- $A \Delta \emptyset = A$
- $A \Delta B = B \Delta A$
- $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
- $(A \Delta B) \cap C = (A \Delta C) \Delta (B \Delta C)$
- $(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

2.10. Ejercicios

Ejercicio 2.3. Resuelva

1. Sea $U = \{x \in \mathbb{N} | 0 < x \leq 10\}$ y los subconjuntos: $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es primo}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es es un cuadrado perfecto}\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es impar}\}$. Hallar
   - $(A \cup B)' - C$
   - $(A - C)' \cap B$
   - $(A \Delta B) - (A \Delta C)$
   - $(A \cap C)' - (B \cup C)'$
2. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} | \sim [x \leq -2 \vee x > 3]\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | \sim [-1 < x \leq 3 \rightarrow x = 5]\}$ y $C = \{x \in \mathbb{Z} | (x < -2 \vee x \geq 2) \rightarrow x > 1\}$ Hallar el resultado de $(B \cap C) \Delta (A \cap B)$

Ejercicio 2.4. Sombree las regiones correspondientes a los conjuntos

- $\{[(A \cup B)' \cap (C \Delta D)] \cap B\} \Delta C$
- $[(A \cup B)' \cap (C \Delta D)] - (B \cap C)$
- $\{[(A \cup B)' \cap C] \Delta D\} - (A \cup B)$

Ejemplo 2.3.

$$\{[(A \cup B)' \cap C] \cap B\} \Delta C$$

2.11. Número de elementos de un Conjunto. Propiedades

Definición 2.8.

$$\{[(A \cup B)' \cap C] \cap B\} \Delta C$$

$$n(A)$$

3

Funciones y relaciones

4

Numeros reales

$$(\mathbb{R}, *, +)$$

4.0.0.1. Axiomas de la adición

- Cerrada (clausura)
- Asociativa y commutativa
- Elemento inverso y neutro aditivo

4.0.0.2. Axiomas de la Multiplicación

- Cerrada (clausura)
- Asociativa $(ab)c = a(bc)$ y commutativa

$$5 \cdot 7$$

$$ab$$

- Elemento inverso y neutro multiplicativo

4.0.0.3. Axiomas distributivas

$$w(a + b) = wa + wb$$

$$(a + b)w = aw + bw$$

$$(a + b)(w + z) = a(w + z) + b(w + z) = aw + az + bw + bz$$

4.0.0.4. Axiomas de orden

Dados a y b solo ocurre que $a = b$, $a > b$ o $a < b$

4.0.0.5. Axioma del supremo

Si S es un conjunto no vacío de elementos de R superiormente acotado, entonces S tiene un supremo en R.

4.0.1. Ejercicios

Hallar el valor de x

- $5x - [3x - 7 - (\frac{3x-1}{3})] = 10$

$$5x - [3x - 7 - (\frac{3x-1}{3})] = 10$$
$$5x - [\frac{9x - 21 - (3x-1)}{3}] = 10$$
$$5x - [\frac{6x-20}{3}] = 10$$
$$[\frac{15x - (6x-20)}{3}] = 10$$

$$[\frac{9x+20}{3}] = 10$$
$$9x + 20 = 30$$

$$x = \frac{10}{9}$$

- $a - \frac{m+n}{x} = b - \frac{m-n}{x}$
- $m\frac{(m+x)}{n} = \frac{n(n+x)}{m}$

4.0.2. Potenciación

Teorema

- $$a^n a^m = a^{n+m}$$
- $$(a^n)^m = a^{nm}$$
- $$(ab)^m = a^m b^m$$
- $$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$
- $$(\frac{a}{a})^n = \frac{a^n}{a^n}$$

1. $$\frac{(x^2 - \frac{1}{y^2})^x (x^2 - \frac{1}{y^2})^x}{}$$

5

Funciones exponenciales logarítmicas

6

Inducción matemática

7

Suceciones

8

Números complejos

9

Polinomios

Temas de reforzamiento o conocimientos preliminares que son necesarias para entender el contenido.

A

Trasformaciones