

*Ricardo Michel MALLQUI BAÑOS*

---

# ***Matemáticas básicas***

Universidad Nacional San Cristobal de Huamanga

Fisart.cf

Agradecimiento a los estudiantes de la ESFAPA FGPA

A la UNSCH



# ***Índice general***

<b>Índice de cuadros</b>	<b>v</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Introducción</b>	<b>xi</b>
<b>1. Lógica</b>	<b>1</b>
<b>2. Conjuntos</b>	<b>3</b>
2.0.1. Conjuntos básicos . . . . .	3
2.1. Función proposicional y cuantificadores . . . . .	3
2.1.1. Función proposicional . . . . .	3
2.1.2. Cuantificadores . . . . .	4
2.2. Conjuntos Iguales . . . . .	7
2.2.1. Propiedades . . . . .	7
2.3. Inclusión y subconjuntos . . . . .	7
2.3.1. Propiedades . . . . .	7
2.4. Conjuntos disjuntos . . . . .	8
2.5. Conjunto potencia . . . . .	8
2.6. Representación Gráfica de los Conjuntos . . . . .	8
2.7. Operaciones entre conjuntos . . . . .	8
2.7.1. Unión . . . . .	8
2.7.2. Intersección . . . . .	9
2.7.3. Diferencia . . . . .	9
2.7.4. Complemento . . . . .	9
2.7.5. Diferencia simétrica . . . . .	10
2.7.6. Ejercicios . . . . .	10
2.7.7. Ejercicios . . . . .	10
2.8. Número de elementos de un Conjunto. Propiedades . . . . .	11
<b>3. Funciones y relaciones</b>	<b>13</b>
<b>4. Numeros reales</b>	<b>15</b>
<b>5. Funciones exponenciales logarítmicas</b>	<b>17</b>

<b>6. Inducción matemática</b>	<b>19</b>
<b>7. Sucesiones</b>	<b>21</b>
<b>8. Números complejos</b>	<b>23</b>
<b>9. Polinomios</b>	<b>25</b>
<b>Apéndice</b>	<b>25</b>

---

## ***Índice de cuadros***

---

1.1. Sed. . . . .	1
1.2. Polígonos cerrados regulares. . . . .	1



## ***Índice de figuras***





---

## ***Resumen***

---

www.



---

# ***Introducción***

---

www.



Cuadro 1.1: Sed.

<i>p</i>	<i>q</i>	$w \rightarrow (\sim p \vee q)$	<i>w</i>
V	V	w	w
V	F	w	w
F	V	w	w
F	F	w	w

$\Rightarrow \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vee \wedge \rightarrow \left(\int_2^2\right) \left[\int_3^2\right] \{w, w, w, w, w, w, w/x \in W\}$

Refiérase al cuadro 1.2 1.1

Cuadro 1.2: Polígonos cerrados regulares.

Tipo	Número de lados	Número de diagonales	Apotemas
Triángulo equilátero	3	0	3
Cuadrado	4	2	4
Pentágono	5	5	5
Exagono	6	6	6
Heptagono	7	7	7
...	...	...	...



# 2

## Conjuntos

**Definición 2.1** (Conjunto). Es una colección de elementos con características similares

### Determinación de un conjunto

**Definición 2.2** (Determinación de conjuntos). Por extensión y comprensión

\* **Extensión**

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

\* **Comprensión**

$$A = \{x \in \mathbb{N}; 0 < x < 5\}$$

### 2.0.1. Conjuntos básicos

Conjuntos universal, vacío, unitario \* **Conjunto de los sistemas numéricos**

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

\* **Conjunto vacío**

$$\phi = \{x/x \neq x\}$$

\* **Conjunto unitario**

$$A = \{a\}$$

## 2.1. Función proposicional y cuantificadores

### 2.1.1. Función proposicional

**Definición 2.3** (Función proposicional). Sea  $x$  una variable  $P(x)$  un *enunciado*,  $P(x)$  es una **función proposicional** si al sustituir la variable con una constante este se convierte en una *proposición*.

Sea  $x$  una variable  $P(x)$  un *enunciado*,  $P(x)$  es una **función proposicional** si al sustituir la variable con una constante este se convierte en una *proposición*.

Por ejemplo  $P(x)$ :  $x$  es un numero par

Al conjunto de todos lo valores de  $x$  se denomina *domino de la variable*

### 2.1.2. Cuantificadores

**Definición 2.4** (Cuantificador existencial).

$\exists$

Es una generalización de la disyunción Inclusiva. Por ello, es verdadero cuando al menos un valor de  $x$  perteneciente al Dominio de  $A$ , es Verdadero. Se denota;  $\exists x/P(x)$  Se lee: "Existe al menos un  $x$ ", "Algunos  $x$ ", "Hay  $x$ ", "Existe un  $x$ ", etc.

$\exists$

Es una generalización de la disyunción Inclusiva. Por ello, es verdadero cuando al menos un valor de  $x$  perteneciente al Dominio de  $A$ , es Verdadero. Se denota;  $\exists x/P(x)$  Se lee: "Existe al menos un  $x$ ", "Algunos  $x$ ", "Hay  $x$ ", "Existe un  $x$ ", etc.

**Definición 2.5** (Cuantificador universal).

$\forall$

Es una generalización de la *conjunción*. Debido a esto es verdadero cuando todos los valores de  $x$  que pertenecen al Dominio de  $A$  son Verdaderos. Se denota:  $\forall x; p(x)$  Se lee: "Para Todo  $x$ ", "Para cada  $x$ ", "Todos (as) las  $x$ ", "Todo  $x$ ".

$\forall$

Es una generalización de la *conjunción*. Debido a esto es verdadero cuando todos los valores de  $x$  que pertenecen al Dominio de  $A$  son Verdaderos. Se denota:  $\forall x; p(x)$  Se lee: "Para Todo  $x$ ", "Para cada  $x$ ", "Todos (as) las  $x$ ", "Todo  $x$ ".

Sea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y la función proposicional  $3x - 2 < 12$  entonces las proposiciones

1.  $\forall x \in A : 3x - 1 < 14$
2.  $\exists x \in A : 3x - 2 < 12$

son falsa y verdadera respectivamente



**Definición 2.6** (Proposición universal). Una *proposición universal* es aquella que está provista de un *cuantificador universal*, y tiene la forma:

$$\forall x \in A : p(x)$$

Una *proposición universal* es aquella que está provista de un *cuantificador universal*, y tiene la forma:

$$\forall x \in A : p(x)$$

**Definición 2.7** (Proposición existencial). Una *proposición existencial* es aquella que está provista de un *cuantificador existencial*, y tiene la forma:

$$\exists x \in A : p(x)$$

Una *proposición existencial* es aquella que está provista de un *cuantificador existencial*, y tiene la forma:

$$\exists x \in A : p(x)$$

### Negación de las proposiciones universal y existencial

Cambiando el cuantificador universal por el cuantificador existencial, o viceversa, es decir

$$\sim [\exists x \in A; P(x)] \equiv \forall x \in A; \sim P(x)$$

$$\sim [\forall x \in A; P(x)] \equiv \exists x \in A; \sim P(x)$$

La negación del **cuantificador universal** es equivalente a la *afirmación de un cuantificador existencial* respecto de la **función proposicional negada**.

La negación de un **cuantificador existencial** es equivalente a la *afirmación de un cuantificador universal* respecto de la **función proposicional negada**.

**Ejemplo 2.1.** Dada la proposición: “Si todos los números primos son impares, los números positivos son mayores que -1”

- Expresarla simbólicamente
- Negar oracionalmente la proposición

*Solución.* Sea  $p(x)$  : números primos son impares y  $q(x)$  : números positivos mayores que -1

- $\forall x : [p(x) \rightarrow q(x)]$

- Negando el ítem anterior

$$\begin{aligned}\sim \{\forall x : [p(x) \rightarrow q(x)]\} &\equiv \sim \{\forall x : p(x) \rightarrow \forall x : q(x)\} \\ &= \sim \{\sim [\forall x : p(x)] \vee \forall x : q(x)\} \\ &\equiv \forall x : p(x) \wedge \exists x : \sim q(x)\end{aligned}$$

que se lee: “Todos los números primos son impares y algunos números no son mayores que -1”

Sea  $p(x)$  : números primos son impares y  $q(x)$  : números positivos mayores que -1

- $\forall x : [p(x) \rightarrow q(x)]$
- Negando el ítem anterior

$$\begin{aligned}\sim \{\forall x : [p(x) \rightarrow q(x)]\} &\equiv \sim \{\forall x : p(x) \rightarrow \forall x : q(x)\} \\ &= \sim \{\sim [\forall x : p(x)] \vee \forall x : q(x)\} \\ &\equiv \forall x : p(x) \wedge \exists x : \sim q(x)\end{aligned}$$

que se lee: “Todos los números primos son impares y algunos números no son mayores que -1”

**Ejemplo 2.2.** Dado el conjunto  $A = \{x \in \mathbb{N} : -14 < x < 27\}$ . Hallar el valor de verdad de

$$s = [(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim q \wedge \sim r)] \leftrightarrow (\sim p \vee r)$$

si  $p = (\forall x \in A, \exists y \in A, \forall z \in A)[x^2 - z^2 > y^2]$ ,  $q = (\exists y \in A, \forall z \in A, \exists x \in A)[2x - 4y < -z]$  y  $r = (\forall z \in A, \exists x \in A, \forall y \in A)[3x^2 - z^2 > y]$

*Solución.*  $A = \{1, 2, 3, \dots, 26\}$  luego el valor de  $V(p) = F$ ,  $V(q) = V$  y  $V(r) = V$  pues

- Si  $y = 1$  entonces  $x^2 - z^2 > y^2 \equiv x^2 > 1 + z^2$  lo cual no es válido  $\forall x, z \in A$  entonces  $V(p) = F$
- Si  $y = 25 \in A$  y  $x = 1 \in A$  entonces  $2x - 4y < -z \equiv 2 + z < 100$  lo cual es válido  $\forall z \in A$  entonces  $V(q) = V$
- Si  $x = 26 \in A$  entonces  $3x^2 - z^2 > y \equiv 3(26)^2 > z^2 + y$  lo cual es válido  $\forall z, y \in A$  entonces  $V(r) = V$

por lo tanto

$$\begin{aligned}V(s) &= V[(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim q \wedge \sim r)] \iff (\sim p \vee r) \\ &= [(V \wedge F) \Rightarrow (F \wedge F)] \iff (V \vee V) \\ &= [F \Rightarrow F] \iff V \\ &= V\end{aligned}$$

**Ejercicio 2.1.** Dada la proposición: “Obtendré un puntaje aprobatorio si y solo si estudio concienzudamente el curso”

- Expresarla simbólicamente
- Negar oracionalmente la proposición

**Ejercicio 2.2.** Dado el conjunto  $G = \{x \in \mathbb{Z}^+ : -14 < 2x < 20\}$ . Hallar el valor de verdad de

$$s = (p \wedge \sim q) \rightarrow [(\sim q \wedge \sim r) \leftrightarrow (\sim p \vee r)]$$

si  $p = (\forall x \in A, z \in \mathbb{N}_\times)[xz \in \mathbb{Z}]$ ,  $q = (\forall z \in A, \exists x \in A)[x \neq y]$  y  $r = (\forall z \in A, \forall y \in A)[yx^2 > 500]$

## 2.2. Conjuntos Iguales

$$\begin{aligned} A = B &\iff \{(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)\} \\ &\iff x \in A \leftrightarrow x \in B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \neq B &\iff \{(\exists x \in A; x \notin B) \vee (\exists x \in B; x \notin A)\} \\ &\iff x \in A \leftrightarrow x \in B \end{aligned}$$

### 2.2.1. Propiedades

- $A = A$
- $A = B \rightarrow B = A$
- $A = B$  y  $B = C$  entonces  $A = C$

## 2.3. Inclusión y subconjuntos

$$\begin{aligned} A \subset B &\leftrightarrow \{x \in A \rightarrow x \in B\} \\ &\leftrightarrow \{\forall x \in A, x \in B\} \end{aligned}$$

$$A \not\subset B \leftrightarrow \exists x \in A \mid x \notin B$$

### 2.3.1. Propiedades

- $A \subset A$

- $A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A = B$
- $A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$
- $\forall A \emptyset \subset A$

## 2.4. Conjuntos disjuntos

$$A \text{ disjunto de } B \leftrightarrow \nexists x \mid x \in A \wedge x \in B$$

## 2.5. Conjunto potencia

$$P(A) = \{X \mid X \subset A\}$$

*Observación.* \*  $P(A)$  tiene  $2^n$  elementos \*  $\emptyset \in P(A)$  \*  $A \in P(A)$

Propiedades

- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $A \subset B \leftrightarrow P(A) \subset P(B)$
- $A = B \leftrightarrow P(A) = P(B)$

## 2.6. Representación Gráfica de los Conjuntos

Diagrama de euler

## 2.7. Operaciones entre conjuntos

### 2.7.1. Unión

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Propiedades

- $A \cup A = A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup U = U$
- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

### 2.7.2. Intersección

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

#### Propiedades

- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap U = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

### 2.7.3. Diferencia

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

#### Propiedades

- $A - A = \emptyset$
- $A - \emptyset = A$
- $\emptyset - A = \emptyset$
- $A - B \subset A$
- $(A - B) = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$

### 2.7.4. Complemento

$$\mathcal{C}_B A = B - A = \{x/x \in B \wedge x \notin A\}$$

$$x \in \mathcal{C}_B A \leftrightarrow x \in B \wedge x \notin A$$

Si  $B = U$  entonces  $\mathcal{C}_B A = A' = A^C = \overline{A}$

Propiedades

- $\mathcal{C}_B A \subset B$  y  $\mathcal{C}_A B \subset A$
- $A' \cup A = U$  o  $A \cup \mathcal{C}_A B = A$
- $A \cap A' = \emptyset$  o  $A \cap \mathcal{C}_A B = \emptyset$
- $U' = \emptyset$  o  $\mathcal{C}_A A = \emptyset$
- $\emptyset' = U$  o  $\mathcal{C}_A \emptyset = A$
- $(A')' = A$  o  $\mathcal{C}_B(\mathcal{C}_B A) = A$
- $A - B = A \cap B' = A - B = A \cap \mathcal{C}_A B$

### 2.7.5. Diferencia simétrica

$$A \Delta B = \{x / (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

$$x \in A \Delta B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

Propiedades

- $A \Delta B = \emptyset$
- $A \Delta \emptyset = A$
- $A \Delta B = B \Delta A$
- $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
- $(A \Delta B) \cap C = (A \Delta C) \Delta (B \Delta C)$
- $(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

### 2.7.6. Ejercicios

1. Sea  $U = \{x \in \mathbb{N} | 0 < x \leq 10\}$  y los subconjuntos:  $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es primo}\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es un cuadrado perfecto}\}$  y  $C = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es impar}\}$ . Hallar

- $(A \cup B)' - C$
- $(A - C)' \cap B$
- $(A \Delta B) - (A \Delta C)$
- $(A \cap C)' - (B \cup C)'$

2. Dados los conjuntos  $A = \{x \in \mathbb{Z} | \sim [x \leq -2 \vee x > 3]\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} | \sim [-1 < x \leq 3 \rightarrow x = 5]\}$  y  $C = \{x \in \mathbb{Z} | (x < -2 \vee x \geq 2) \rightarrow x > 1\}$  Hallar el resultado de  $(B \cap C) \Delta (A \cap B)$

### 2.7.7. Ejercicios

1. Sombree las regiones correspondientes a los conjuntos

- $\{[(A \cup B)' \cap (C \Delta D)] \cap B\} \Delta C$
- $[(A \cup B)' \cap (C \Delta D)] - (B \cap C)$
- $\{[(A \cup B)' \cap C] \Delta D\} - (A \cup B)$

2.7.7.0.1. *Ejemplo*

$$\{[(A \cup B)' \cap C] \cap B\} \Delta C$$

---

## 2.8. Número de elementos de un Conjunto. Propiedades

$$n(A)$$





# 3

## Funciones y relaciones



# 4

---

## *Numeros reales*



# 5

---

## *Funciones exponenciales logarítmicas*

---



# 6

---

## *Inducción matemática*

---





# 7

## Sucesiones



# 8

---

## Números complejos



# 9

## *Polinomios*

Temas de reforzamiento o conocimientos preliminares que son necesarios para entender el contenido.



**A**

***Trasformaciones***