Pruebas no paramétricas rangos con signos de Wilcoxon & Friedman

Wilcoxon & Friedman

Mg. RMMB Fisarth[1]

[1]Departamento de matemática
Universidad Nacional de San Cristobal de Huamanga & ESFA FGPA

Sesión ***prueba de hipótesis no paramétrico*** (Estadística inferencial), 2024

Índice

1. Motivación
   - El problema básico que estudiamos
   - Trabajo previo
2. Nuestros resultados/Contribución
   - Prueba Wilcoxon
   - Prueba de Friedman

Índice

1. Motivación
   - El problema básico que estudiamos
   - Trabajo previo
2. Nuestros resultados/Contribución
   - Prueba Wilcoxon
   - Prueba de Friedman

Prueba de hipótesis (Wilcoxon & Friedman)

- Son pruebas no parámetricas (sin supuesto de normalidad y homocedasticidad)
- Trabaja con variables *ordinales y cuantitativas no normales*
- En **estudios longitudinales de dos o más *grupos relacionados***

Prueba de hipótesis (Wilcoxon & Friedman)

- Son pruebas no parámetricas (sin supuesto de normalidad y homocedasticidad)
- Trabaja con variables *ordinales y cuantitativas no normales*
- En **estudios longitudinales de dos o más *grupos relacionados***

Índice

1. Motivación
   - El problema básico que estudiamos
   - Trabajo previo
2. Nuestros resultados/Contribución
   - Prueba Wilcoxon
   - Prueba de Friedman

Pruebas no parámetricas

- χ^2
  - χ^2 bondad de ajuste.
  - χ^2 de independencia
  - χ^2 de homogeneidad
- McNemar
- Q de Cochran
- U Mann Withney
- Kruskal Wallis

Índice

1. Motivación
   - El problema básico que estudiamos
   - Trabajo previo
2. Nuestros resultados/Contribución
   - Prueba Wilcoxon
   - Prueba de Friedman

Prueba Wilcoxon

(Dos grupos independientes, datos ordinales o continuos no normales)

Si el tamaño de las muestras es inferior a 20, se compara el valor obtenido de W con los valores de una tabla W de Wilcoxon. *Si el W es menor que el valor correspondiente en la tabla, la diferencia es significativa* (rechazar h_0).

Si $n_1 > 20$ y $n_2 > 20$ se puede asumir que W se distribuye de forma aproximadamente normal, rechazando h_0 si el valor absoluto de z calculado es mayor que el valor de z para el α elegido.

Tamaño de efecto en la prueba de los rangos con signos de Wilcoxon

$$r = \frac{z}{\sqrt{n}}, \quad .1 \leq |r| \leq .5 (\text{Efecto grande})$$

Prueba Wilcoxon

- Hipótesis. Nula (h_0: *No hay diferencia (tendencia central) entre los dos grupos de la población*) y alterna (h_1: $\neg h_0$)
- Estadística (n_1 y n_2 mayores a 20 datos)

$$N(0,1) \sim z = \frac{W - \mu_W}{\sigma_W} = \begin{cases} \dfrac{W - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}, & \text{Sin rangos empatados} \\ \dfrac{W - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1) - \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i^3 - t_i}{2}}{24}}}, & \text{Con rangos empatados} \end{cases}$$

donde n_1 y n_2 son el número de datos de cada grupo, $n = n_1 = n_2$, $W^+ = \sum_{z_i > 0} R$, $W^- = \sum_{z_i < 0} R$, W^+ y W^- son las sumas de los *rangos de de las diferencias positivas y negativas respectivamente*. Entonces $W = \min(W^+, W^-)$ además t_i es el número de observaciones repetidas en el i-ésimo grupo.

Prueba Wilcoxon

- Hipótesis. Nula (h_0: *No hay diferencia (tendencia central) entre los dos grupos de la población*) y alterna (h_1: $\neg h_0$)
- Estadística (n_1 y n_2 mayores a 20 datos)

$$N(0,1) \sim z = \frac{W - \mu_W}{\sigma_W} = \begin{cases} \dfrac{W - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}, & \text{Sin rangos empatados} \\ \dfrac{W - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1) - \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i^3 - t_i}{2}}{24}}}, & \text{Con rangos empatados} \end{cases}$$

donde n_1 y n_2 son el número de datos de cada grupo, $n = n_1 = n_2$, $W^+ = \sum_{z_i > 0} R$, $W^- = \sum_{z_i < 0} R$, W^+ y W^- son las sumas de los *rangos de de las diferencias positivas y negativas respectivamente.* Entonces $W = \min(W^+, W^-)$ además t_i es el número de observaciones repetidas en el i-ésimo grupo.

Prueba Wilcoxon

- Nivel de significancia $\alpha = 0.05$.
- Regla de decisión. Si $|z| < z_\alpha$, se rechaza h_1 (se acepta h_0).

Ejemplo Wilcoxon

Rednimento académico en dos periodos diarios (Será lo mismo?)

Mañana: M	Noche: N	$M - N$	$\lvert M - N \rvert$	Rango
43	44	-1	1	1
36	38	-2	2	3
43	41	2	2	3
41	39	2	2	3
37	34	3	3	5
37	41	-4	4	6.5
43	39	4	4	6.5
40	34	6	6	8

h_0: *No hay diferencia (tendencia central) entre los dos grupos de la población*

h_1: *Existe una diferencia (tendencia central) entre los dos grupos de la población.*

Ejemplo Wilcoxon

- $W^+ = 10.5$ y $W^- = 25.5$
- $W = \min\{10.5, 25.5\} = 10.5$
- $n = 8$
- $z = \dfrac{W - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1) - \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i^3 - t_i}{12}}{24}}} = \dfrac{10.5 - \frac{8(8+1)}{4}}{\sqrt{\frac{8(8+1)(2\cdot 8+1) - \left(\frac{3^3-3}{2} + \frac{2^3-2}{2}\right)}{24}}} = \dfrac{10.5-18}{7.1} = -1.06$

$|z| = |-1.06| < z_{0.05} = 1.96$ por lo tanto (Se acepta h_0)

Ejemplo Wilcoxon

- $W^+ = 10.5$ y $W^- = 25.5$
- $W = \min\{10.5, 25.5\} = 10.5$
- $n = 8$
- $z = \dfrac{W - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1) - \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i^3 - t_i}{12}}{24}}} = \dfrac{10.5 - \frac{8(8+1)}{4}}{\sqrt{\frac{8(8+1)(2\cdot 8+1) - \left(\frac{3^3-3}{2} + \frac{2^3-2}{2}\right)}{24}}} = \dfrac{10.5-18}{7.1} = -1.06$

$|z| = |-1.06| < z_{0.05} = 1.96$ por lo tanto (Se acepta h_0)

Índice

1 Motivación
- El problema básico que estudiamos
- Trabajo previo

2 Nuestros resultados/Contribución
- Prueba Wilcoxon
- Prueba de Friedman

Prueba de Friedman

(Tres o más grupos independientes, datos ordinales o continuos no normales)

Si el tamaño de las muestras es inferior a 5, se compara el valor obtenido de Q con los valores de una tabla Kruskal-Wallis. *Si el Q es mayor que el valor correspondiente en la tabla, la diferencia es significativa* (rechazar h_0).
Si $n_1 > 5$, $n_2 > 5$, etc, se puede asumir que Q tiene distribución χ^2_{g-1}, rechazando h_0 si Q calculado es mayor que el valor de $\chi^2_{g-1,\alpha}$.

Prueba de Friedman

- Hipótesis. Nula (h_0 : La distribucion de los tratamientos son lo mismo) y alterna (h_1: $\neg h_0$)
- Estadística $\bar{r}_{\bullet j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{ij} = \frac{1}{n}R_{\bullet j}$, $\bar{r} = \frac{1}{ng}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{g} r_{ij} = \frac{n\frac{g(g+1)}{2}}{ng} = \frac{g+1}{2}$

$$\chi^2_{g-1,\alpha} \sim Q = \begin{cases} \frac{12}{ng(g+1)}\sum_{i=1}^{g}\bar{r}^2_{\bullet j} - 3\left(g+1\right)n, & \text{Sin rangos empatados} \\ \frac{SS_t}{SS_e} = \frac{n\sum_{j=1}^{g}\left(\bar{r}_{\bullet j}-\bar{r}\right)^2}{\frac{1}{n(g-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{g}(r_{ij}-\bar{r})^2}, & \text{Con rangos empatados} \end{cases}$$

donde n es el número de obervaciones en cualquiera de los grupo, r_{ij} es el rango de la observación j enel grupo i, g número de grupos. Además t_i es el número de observaciones repetidas dentro del grupo i.

Prueba de Friedman

- Hipótesis. Nula (h_0 : La distribucion de los tratamientos son lo mismo) y alterna (h_1: $\neg h_0$)
- Estadística $\overline{r}_{\bullet j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{ij} = \frac{1}{n}R_{\bullet j}$, $\overline{r} = \frac{1}{ng}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{g} r_{ij} = \frac{n\frac{g(g+1)}{2}}{ng} = \frac{g+1}{2}$

$$\chi^2_{g-1,\alpha} \sim Q = \begin{cases} \frac{12}{ng(g+1)}\sum_{i=1}^{g}\overline{r}^2_{\bullet j} - 3\left(g+1\right)n, & \text{Sin rangos empatados} \\ \frac{SS_t}{SS_e} = \frac{n\sum_{j=1}^{g}\left(\overline{r}_{\bullet j}-\overline{r}\right)^2}{\frac{1}{n(g-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{g}(r_{ij}-\overline{r})^2}, & \text{Con rangos empatados} \end{cases}$$

donde n es el número de obervaciones en cualquiera de los grupo, r_{ij} es el rango de la observación j enel grupo i, g número de grupos. Además t_i es el número de observaciones repetidas dentro del grupo i.

Prueba de Friedman

- Nivel de significancia $\alpha = 0.05$.
- Regla de decisión. Si $Q > \chi^2_{g-1;\alpha}(Q \geq Q_\alpha)$, se rechaza h_0
- Conclusión. Con un nivel de significancia del 95% se rechaza o acepta la hipótesis nula.

Prueba de Friedman

- Nivel de significancia $\alpha = 0.05$.
- Regla de decisión. Si $Q > \chi^2_{g-1;\alpha}(Q \geq Q_\alpha)$, se rechaza h_0
- Conclusión. Con un nivel de significancia del 95% se rechaza o acepta la hipótesis nula.

Prueba de Friedman

- Nivel de significancia $\alpha = 0.05$.
- Regla de decisión. Si $Q > \chi^2_{g-1;\alpha}(Q \geq Q_\alpha)$, se rechaza h_0
- Conclusión. Con un nivel de significancia del 95% se rechaza o acepta la hipótesis nula.

Ejemplo de Friedman

Supongamos que se ha medido el tiempo de reacción de tres tratamientos y quieres saber si hay alguna diferencia entre ellos

A	B	C
34	45	36
33	36	31
41	35	44
39	43	42
44	42	41
37	42	45
39	46	40

A	B	C
34(3)	45(1)	36(2)
33(2)	36(1)	31(3)
41(2)	35(3)	44(1)
39(3)	43(1)	42(2)
44(1)	42(2)	41(3)
37(3)	42(2)	45(1)
39(3)	46(1)	40(2)
17	11	14

h_0: La distribucion de los tratamientos son lo mismo.

h_1: La distribucion de los tratamientos no son lo mismo.

Ejemplo de Friedman

$n = 7,\ g = 3,\ df = g - 1 = 2,\ \overline{r} = \frac{3+1}{2} = 2$

$$Q = \frac{n\sum_{j=1}^{3}(\overline{r}_{\bullet j} - \overline{r})^2}{\frac{1}{n(g-1)}\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{3}(r_{ij} - \overline{r})^2} = \frac{7\left((\overline{r}_{\bullet 1} - 2)^2 + (\overline{r}_{\bullet 2} - 2)^2 + (\overline{r}_{\bullet 3} - 2)^2\right)}{\frac{1}{7(3-1)}\left((r_{11} - 2)^2 + (r_{21} - 2)^2 + \cdots + (r_{73} - 2)^2\right)}$$

$$= \frac{7\left(\left(\frac{17}{7} - 2\right)^2 + \left(\frac{11}{7} - 2\right)^2 + \left(\frac{14}{7} - 2\right)^2\right)}{\frac{1}{14}\underbrace{\left((3-2)^2 + (2-2)^2 + \cdots + (2-2)^2\right)}_{n \cdot g = 7 \cdot 3 = 21 \text{ sumas}}} = \frac{7 \cdot 0.367}{\frac{1}{14} \cdot 14} = 2.57$$

Por lo tanto $2.57 = Q < \chi^2_{g-1,\alpha} = \chi^2_{2,0.05} = 5.99$ (Se acepta h_0)

Sumario

- Rangos con signos de Wilcoxon.
- Friedman (Adicional - Prueba post-hoc)
- Perspectiva
  - Probar hipótesis asociados con variables ordinales no normales.
  - Realizar investigacion con la prueba de rangos con signos de Wilcoxon y Friedman.

Lecturas complementarias I

- Rufino Moya C.
  Probabilidad e Inferencia Estadística.
  2da. Edición, 1990.
- Miguel A. Gómez Villegas
  Inferencia Estadística
  2da. Edición, 2005.
- Hernando G. C. Alvaro A. P. Ramiro C. Q.
  estadística no paramétrica
  3ra. Edición, 2006