

# LAS MATEMÁTICAS EN EL ARTE PLÁSTICO

MALLQUI BAÑOS Ricardo Michel

14 de abril de 2013



# Dedicatoria

A los artistas  
sedientos de conocimiento



# Índice general

Dedicatoria	III
Introducción	VII
<b>1. La sección áurea</b>	<b>1</b>
1.1. Análisis de la sección áurea . . . . .	2
1.1.1. La parábola y la sección áurea . . . . .	2
1.1.2. 6 casos y la misma razón . . . . .	3
1.2. Propiedades del número $\phi$ . . . . .	7
1.3. Los números de Fibonacci . . . . .	10
<b>2. Formas geométricas sobre el plano</b>	<b>15</b>
2.1. Rectángulos dinámicos . . . . .	15
2.1.1. El cuadrado . . . . .	18
2.1.2. El rectángulo $\sqrt{2}$ . . . . .	19
2.1.3. El rectángulo $\sqrt{3}$ . . . . .	20
2.1.4. El rectángulo $\sqrt{5}$ . . . . .	21
2.1.5. El rectángulo $\phi$ . . . . .	22
2.1.6. El rectángulo $\sqrt{\phi}$ . . . . .	23
2.2. El pentágono y el triángulo áureo . . . . .	23
2.3. Ejemplo de una composición . . . . .	24
<b>3. Sólidos platónicos</b>	<b>27</b>
3.1. El icosaedro . . . . .	28
3.2. El dodecaedro . . . . .	30
3.3. El octaedro . . . . .	31
3.4. El exaedro o cubo . . . . .	32
3.5. El Tetraedro . . . . .	33
3.6. Truncando los sólidos . . . . .	34
3.7. Chaflanando los sólidos . . . . .	34

<b>4. Fractales clásicos</b>	<b>37</b>
4.1. Características de un fractal . . . . .	38
4.2. Sistema de funciones iteradas . . . . .	38
<b>5. Principios de la composición plástica</b>	<b>47</b>
5.1. El ritmo . . . . .	47
5.2. Tópicos de perspectiva Cónica . . . . .	53
5.3. Canon . . . . .	58
<b>6. Superficies</b>	<b>61</b>
6.1. Superficies cerradas . . . . .	62
6.2. Superficies orientables . . . . .	63
6.3. Clases de puntos sobre una superficie . . . . .	64
6.4. Topología de las formas . . . . .	65
<b>7. Apéndice</b>	<b>69</b>
7.1. Sección cónica . . . . .	69
7.2. Vector . . . . .	70
7.3. Superficies cuádricas . . . . .	73

# Introducción

Matemáticas en el arte plástico nace del intento de poner en orden, la noción intuitiva que se tiene sobre la estructura compositiva en el arte plástico y hacerla un tanto rigurosa en un aspecto lógico de formas, sobre una base estructural geométrica.

El número áureo, es uno de los fractales más interesantes, el objetivo es hacer reconocer, de que modo, este número está relacionado con los fractales y generalizarlo, a conceptos mucho más elaborados, para poder aplicarlas en el arte plástico. El universo tiene un lenguaje, basado en los números, que la describe casi por completo, lo cual implica que está presente, en todos los fenómenos de la realidad.

Se sabe que a pesar de lo discutible de su conocimiento sobre el número áureo, Platón se ocupa de estudiar el origen y la estructura del cosmos, caso que intentó, usando los cinco sólidos platónicos, Para Platón los sólidos corresponden a una de las partículas que conformaban cada uno de los elementos es decir la tierra lo asocia con el cubo, el fuego con el tetraedro, el aire con el octaedro, el agua con el icosaedro y finalmente el universo, como un todo asociado con el dodecaedro las cuales se tratan en el Capítulo 3.

Se analizó el libro del teólogo y matemático Lucca Paccioli que trata sobre la sección áurea en base al legado dejado por Platón y Euclides, en su libro *La Divina Proporción* donde describe la construcción de los cinco sólidos platónicos, el nombre *Platónico* debido a la descripción constructiva de estos sólidos por Platón, asociados a la estética, la mística, la cósmica y la teológica, que conmovió a todas las generaciones, desde los pueblos neolíticos hasta nuestros días.

Lucca Pacioli publica su libro *La Divina proporción* en 1509, donde plantea cinco razones por la que estima apropiado considerar *divino* al número de oro, primero la unicidad del número de oro, la compara con la unicidad de dios, segundo el hecho de que esté definido con tres segmentos de recta lo relaciona con la trinidad, tercero la inconmensurabilidad del número de oro y la inconmensurabilidad de Dios son equivalentes, cuarto la

autosimilitud asociada al número de oro lo compara con la omnipotencia e invariabilidad, finalmente el quinto, de la misma manera en que Dios dio ser al universo a través de la quinta esencia, representada por el dodecaedro, el número de oro, dio ser al dodecaedro.

Pero si bien ejemplos y contraejemplos constituyen una trascendencia importante, en algún proceso, se trato de evitar que el lector, se quede con la idea de que los números están trivialmente en alguna aplicación, por ello se ha procurado presentar de manera ordenada en el cuerpo básico del texto, de manera que exista una secuencia de conceptos implicados unos con otros.

Cinco capítulos son los que forman el libro, el primero sobre la sección áurea, el segundo sobre formas geométricas en el plano, el tercero sobre los sólidos platónicos, el cuarto sobre los fractales, el quinto sobre los principios de la composición plástica, el sexto sobre superficies esto con el objetivo de establecer algunos términos en la escultura y reconocer sus propiedades para ser aplicada adecuadamente y finalmente un pequeño apéndice.



# Capítulo 1

## La sección áurea

La geometría tiene dos grandes tratados: uno es el teorema de Pitágoras; el otro, la división de una línea en extrema y media razón. El primero, podemos compararla a una medida de oro; el segundo podemos nombrarla como una preciosa joya [Ghy77].

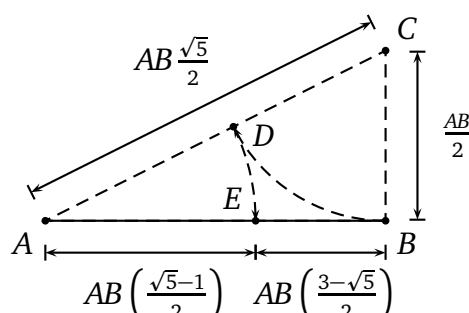


Figura 1.1: Prototipo para el comportamiento geométrico de  $\phi$

Deduzcamos y averigüemos de donde nace el número de oro, empecemos con la frase celebre que dice mucho, lo genera y está relacionado biunívocamente con éste número: “El todo sobre la parte mayor y la parte mayor sobre la menor.” Sea el segmento  $AB$  Dividamos éste de la siguiente manera, tomemos a  $\frac{AB}{2}$  coloquemos éste segmento de manera que sea perpendicular a  $AB$  en cualquiera de sus extremos en este caso sea  $B$  interceptemos la línea  $AC$  con el arco  $BD$  centrado en  $C$  generando el punto  $D$  a partir de este punto tracemos el arco  $DE$  centrado en  $A$  hallando de este modo el punto  $E$  que es el punto que divide al segmento  $AB$  en *extrema y media razón* o sección áurea es decir podemos empezar diciendo que  $\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,61833... = \phi$

es el número de oro *phi* (fi), pues según la Figura 1.1  $\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AB\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  y  $\frac{AE}{EB} = \frac{AB\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{AB\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  o es la raíz positiva de la ecuación  $x^2 - x - 1 = 0$  que se obtiene de la razón  $\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB}$ , considerando  $AE = x$  y  $EB = 1$  es decir  $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \iff x^2 - x - 1 = 0$  y las dos raíces de esta ecuación son  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  de esto se deduce que  $\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61833 \dots$

## 1.1. Análisis de la sección áurea

### 1.1.1. La parábola y la sección áurea

La parábola es una de las cónicas de una familia formada por la hipérbola, la elipse la circunferencia y los casos degenerados de las cónicas (la recta y el punto) lo tratamos aquí porque esta curva bidimensional (parábola) está asociado con el número de oro, pues resulta ser una las raíces de una parábola.

$$ax^2 + bx + c = y$$

$a \neq 0$ , es la ecuación de una parábola vertical y recordando que si se tiene la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(las  $x$  que verifican esta ecuación son aquellas que se obtienen de la intersección de la parábola y la recta  $y = 0$  o el eje  $x$ ) la raíces que satisfacen esta ecuación son  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a)(c)}}{2a}$  pues de

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff x^2 + \left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\ &\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

De otro lado tenemos la equivalencia

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c = y &\iff x^2 + \left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = y \\
 &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} + y \\
 &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = y - \frac{4ac - b^2}{4a^2}
 \end{aligned}$$

Es decir obtuvimos la ecuación

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = y - \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

que es equivalente a

$$ax^2 + bx + c = y$$

donde expone las coordenadas  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)$  del vértice de la parábola y la dirección es vertical, este procedimiento se utilizará luego en las ecuaciones siguientes.

### 1.1.2. 6 casos y la misma razón

Consideremos uno de los segmentos como variables la otra constante y la tercera estará en función de aquella variable y la constante, lo cual verifica  $\frac{\theta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} = \phi$ , refierase a la Figura 1.2

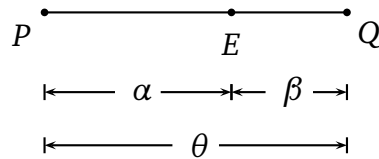


Figura 1.2:  $\frac{\theta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}$

1. Cuando  $\theta = x$ ,  $\alpha = k$  y  $\beta = x - k$

$$\frac{x}{k} = \frac{k}{x - k} \iff x^2 - kx - k^2 = 0 \quad (1.1)$$

2. Cuando  $\theta = x$ ,  $\alpha = x + k$  y  $\beta = k$

$$\frac{x}{k} = \frac{k}{k-x} \iff x^2 - 3kx + k^2 = 0 \quad (1.2)$$

3. Cuando  $\theta = k$ ,  $\alpha = x$  y  $\beta = k - x$

$$\frac{k}{x} = \frac{x}{k-x} \iff x^2 + kx - k^2 = 0 \quad (1.3)$$

4. Cuando  $\theta = x + k$ ,  $\alpha = x$  y  $\beta = k$

$$\frac{x+k}{x} = \frac{x}{k} \iff x^2 - kx - k^2 = 0 \quad (1.4)$$

5. Cuando  $\theta = k$ ,  $\alpha = k - x$  y  $\beta = x$

$$\frac{k}{k-x} = \frac{k-x}{x} \iff x^2 - 3kx + k^2 = 0 \quad (1.5)$$

6. Cuando  $\theta = x + k$ ,  $\alpha = k$  y  $\beta = x$

$$\frac{k+x}{k} = \frac{k}{x} \iff x^2 + kx - k^2 = 0 \quad (1.6)$$

En el texto [Ven06] se pueden encontrar con más detalle las ecuaciones de las cónicas, donde está incluido la de la parábola, en general la ecuación  $Ax^2 + Bxy + Cx^2 + Dx + Ey + F = 0$  representa a una de las secciones cónicas (parábola, elipse, hipérbola, circunferencia, línea y un punto) finalmente las Ecuaciones 1.1, 1.2 y 1.3 coincide con las ecuaciones 1.5, 1.4 y 1.6 respectivamente; es decir solo se obtuvieron tres ecuaciones:

- $x^2 - kx - k^2 = 0$
- $x^2 - 3kx + k^2 = 0$ ,
- $x^2 + kx - k^2 = 0$

cuyas raíces son respectivamente

$$x = \frac{k}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}k = k \left( \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$x = \frac{3}{2}k \pm \frac{\sqrt{5}}{2}k = k \left( \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right),$$

y

$$x = -\frac{k}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}k = k \left( \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$$

estas raíces se pueden visualizar en la Figura 1.3(a), 1.3(b) y 1.3(c) respectivamente, es decir son las intersecciones de las parábolas  $x^2 - 3kx + k^2 = y$ ,  $x^2 - kx - k^2 = y$  y  $x^2 + kx - k^2 = y$  con el eje  $x$ , para dibujarlo se debe recordar que la ecuación de cualquier parábola vertical tal como se muestran en la Figura 1.3 se puede escribir de la forma  $(x - \xi)^2 = 4p(y - \zeta)$  donde  $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$  y  $(\xi, \zeta)$  son la coordenadas del vértice  $V$ , luego al completar cuadrados en las ecuaciones anteriores, de las parábolas se obtienen

$$x^2 - 3kx + k^2 = y \iff \left( x - \frac{3}{2}k \right)^2 = y + \frac{5}{4}k^2$$

$$x^2 - kx - k^2 = y \iff \left( x - \frac{k}{2} \right)^2 = y + \frac{5}{4}k^2$$

y

$$x^2 + kx - k^2 = y \iff \left( x + \frac{k}{2} \right)^2 = y + \frac{5}{4}k^2$$

esto es, los vértices de las tres parábolas tienen la misma ordenada  $-\frac{5}{4}k^2$  (valor numérico en el eje  $y$ ) y la abscisa son  $\frac{3}{2}k$ ,  $\frac{k}{2}$  y  $-\frac{k}{2}$  respectivamente, véase la Figura 1.3.

Si se reemplaza cada una de sus raíces sobre sus correspondientes ecuaciones se obtiene  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , probemos con la primera  $\frac{x}{k} = \frac{k}{x-k}$  donde sus raíces son  $k \left( \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$  entonces reemplazando se obtiene

$$\frac{x}{k} = \frac{k}{x-k} \iff \frac{k \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}{k} = \frac{k}{k \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} - k} \iff \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

es decir con el signo positivo resulta  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$  y con el negativo resulta  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$  en la segunda ecuación  $\frac{x}{k} = \frac{x-k}{k}$  donde sus raíces son  $k \left( \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$  entonces reemplazando se obtiene

$$\frac{k \left( \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right)}{k \left( \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right) - k} = \frac{k \left( \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right) - k}{k} \iff \frac{3 \pm \sqrt{5}}{1 \pm \sqrt{5}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

considerando solo el signo positivo se obtiene  $\phi$  y con el signo negativo resulta  $-\frac{1}{\phi}$  finalmente en la tercera ecuación  $\frac{k}{x} = \frac{x}{k-x}$  donde sus raíces son  $k\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$  entonces reemplazando se obtiene

$$\frac{k}{k\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{k\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)}{k - \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}} \iff \frac{3 \pm \sqrt{5}}{1 \pm \sqrt{5}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

considerando solo el signo positivo se obtiene  $\phi$  y con el signo negativo  $-\frac{1}{\phi}$

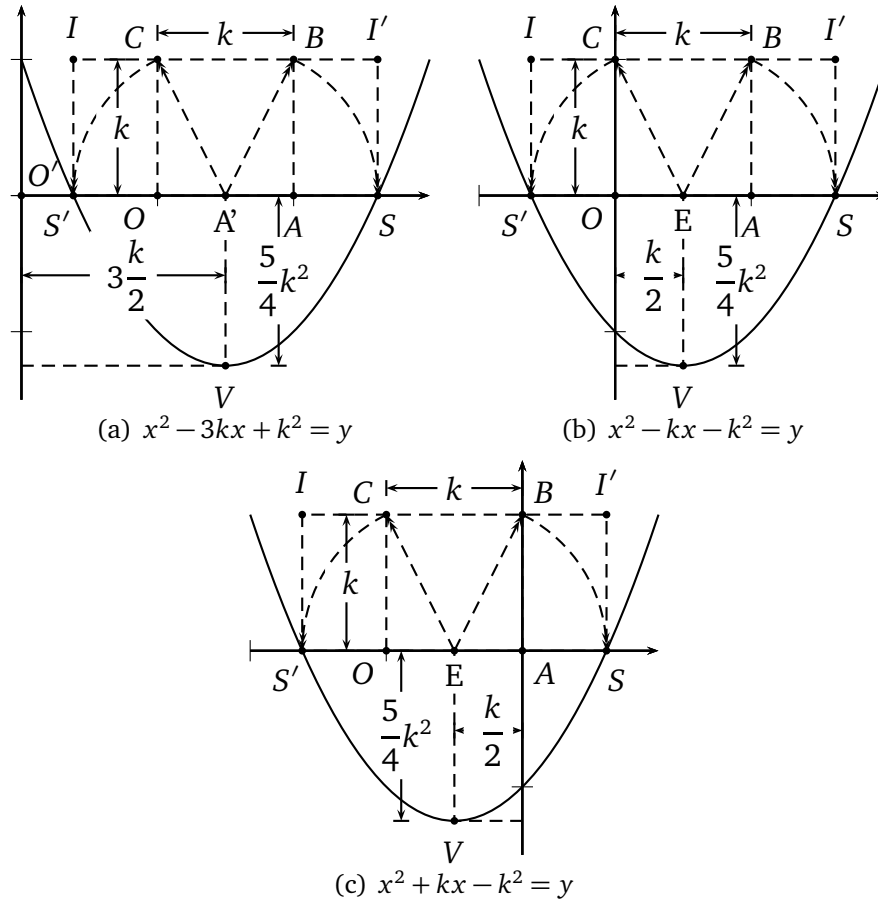


Figura 1.3: Las raíces de 1.1, 1.2 y 1.3 ubicadas en S y S'

## 1.2. Propiedades del número $\phi$

$\phi \approx 1,618033988749894848204586834365638117720309\dots$  es el único número real positivo tal que:  $\phi^2 = \phi + 1$ . La expresión anterior es fácil de comprobar:  $\phi^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{2^2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{2^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  y  $\phi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  también  $\phi$  posee las siguientes propiedades:  $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$   $\phi^3 = \frac{\phi+1}{\phi-1}$ . Las potencias del número áureo pueden expresarse en función de una suma de potencias de grados inferiores del mismo número, establecida una verdadera sucesión recurrente de potencias. El caso más simple es:  $\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$ , cualquiera sea  $n$  un número entero. Este caso es una sucesión recurrente de orden  $k = 2$ , pues se recurre a dos potencias anteriores.

El número áureo definida en la sección anterior,  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$ , la raíz positiva de la ecuación  $x^2 = x + 1$ ,  $\pi$  (la razón entre la longitud circunferencia y su diámetro) y  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; reciben el nombre de números trascendentes.

Llamemos a éste número, razón, o proporción  $\phi$ , y tenemos las siguientes propiedades:

$$\phi = \frac{2 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398875\dots$$

(así que  $1,618\dots$  es una aproximación muy cercana)  $\phi^2 = 2,618\dots = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$   
 $\frac{1}{\phi} = 0,618\dots = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

1. Se sabe que la ecuación  $\phi^2 - \phi - 1 = 0$  se satisface luego podemos operar de infinitas maneras está ecuación trasmutando, dividiendo y multiplicando términos

$$\phi^2 = \phi + 1 = \phi + 1$$

$$\phi^3 = \phi^2 + \phi = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = \phi^3 + \phi^2 = 2\phi + 1 + \phi + 1 = 3\phi + 2$$

$$\dots = \dots\dots$$

$$\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2} = i\phi + j$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \phi^{n-1} = m\phi + n$$

$$\phi^{n+2} = \phi^{n+1} + \phi^n = (i+m)\phi + (j+n)$$

2. También de  $\phi^2 - \phi - 1 = 0$  se deduce que  $\phi = \sqrt{\phi + 1}$  entonces

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

3. De  $\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = \phi^0 + \phi^{-1}$ , se deduce

$$\frac{1}{\phi^2} = \phi^{-2} = \phi^{-3} + \phi^{-4} = \frac{1}{\phi^3} + \frac{1}{\phi^4}$$

$$\frac{1}{\phi^3} = \phi^{-3} = \phi^{-4} + \phi^{-5} = \frac{1}{\phi^4} + \frac{1}{\phi^5}$$

$$\dots = \dots$$

$$\frac{1}{\phi^n} = \phi^{-n} = \phi^{-(n+1)} + \phi^{-(n+2)} = \frac{1}{\phi^{(n+1)}} + \frac{1}{\phi^{(n+2)}}$$

4.  $2 = \phi + \frac{1}{\phi^2}$  pues de  $\phi^3 = \phi^2 + \phi = (\phi + 1) + \phi = 2\phi + 1$  porque

$$\phi^2 = \phi + 1 \text{ luego } \phi^3 = 2\phi + 1 \iff 2 = \phi^2 - \frac{1}{\phi} = \phi + 1 - \frac{1}{\phi} =$$

$$\phi + \frac{\phi(\phi - 1)}{\phi^2} = \phi + \frac{1}{\phi^2}$$

5.  $\phi = \frac{1}{\phi - 1}$  en efecto de  $\phi^2 - \phi - 1 = 0$  al factorizar  $\phi$  y despejar 1 se obtiene  $\phi(\phi - 1) = 1$  (recuerde que  $\phi \neq 0 \implies \phi - 1 \neq 0$ ) ambos miembros de la igualdad y despejar  $\phi$  es decir  $\phi = \frac{1}{\phi - 1}$

6.  $\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$  Pues  $\phi = \phi^0 + \phi^{-1} = 1 + \frac{1}{\phi}$  por la ecuación

hallada anteriormente, es decir al reemplazar  $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$  en el denominador del lado derecho de ésta ecuación se obtiene  $\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}$  luego al iterar llegamos al resultado deseado

7. La progresión geométrica de la serie  $1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots, \phi^n, \dots$  cada termino es la suma de los números anteriores.

8. En la progresión  $1, \frac{1}{\phi}, \frac{1}{\phi^2}, \frac{1}{\phi^3}, \dots, \frac{1}{\phi^m}$  tenemos  $\frac{1}{\phi^m} = \frac{1}{\phi^{m+1}} + \frac{1}{\phi^{m+2}}$  (cada termino es la suma de los dos siguientes)



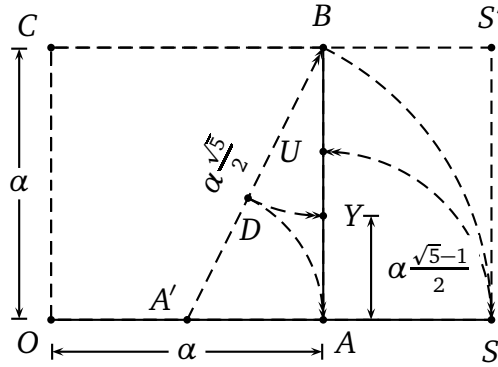


Figura 1.4: Construcción  $BY$  a partir del segmento mayor  $AB$ ,

Se tiene el segmento mayor  $OA$  para obtener el segmento menor  $AS$  de la sección áurea considérese la Figura 1.4 A partir de un cuadrado  $OABC$ ,  $A'$  es punto medio de  $OA$ ,  $S$  es la intersección de la circunferencia centrada en  $A'$  de radio  $A'B$  con la recta generada por  $OA$ ,  $S'$  es la proyección perpendicular de  $S$  sobre la recta generada por  $CB$  y se verifica que  $\frac{OA}{AS} = \frac{\alpha}{\alpha \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \phi$  y  $\frac{OS}{OA} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{\alpha} = \phi$ . También se observa que  $\frac{BY}{YB} = \phi$  este método de obtener la sección áurea se vió al principio es decir el punto  $Y$  es la sección áurea de la línea  $AB$  como lo es el punto  $A$  con respecto a la línea  $OS$ , también  $AY = UB$ ;  $\frac{OA}{AS} = \frac{OS}{OA} = \frac{AU}{UB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .

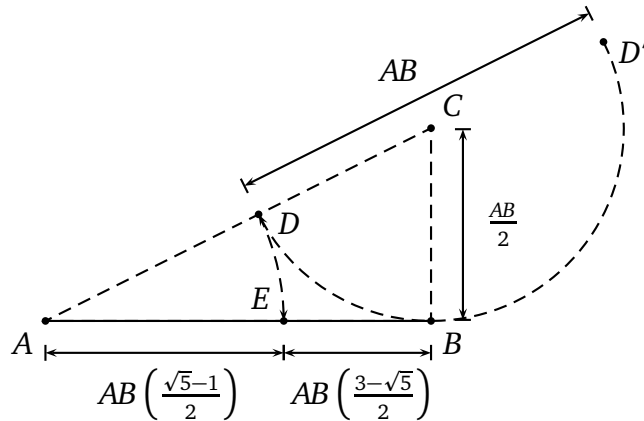


Figura 1.5: Figura derivada de la Figura 1.1

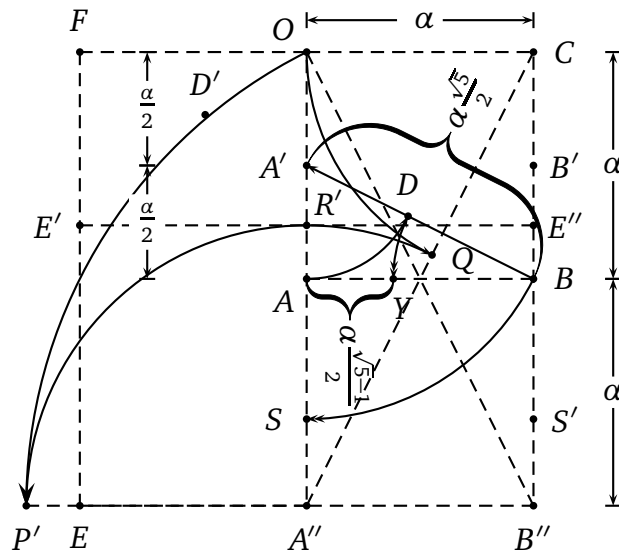


Figura 1.6:  $\frac{AB}{YB} = \frac{A'R'}{R'O} = \phi$ . Se unió los procedimientos anteriores

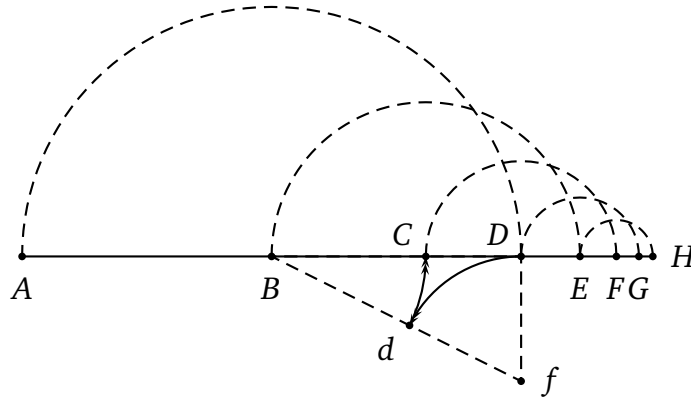


Figura 1.7:  $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AB} = \phi$

### 1.3. Los números de Fibonacci

$f_0, f_1, f_2, f_3, \dots$  quedan definidos por las ecuaciones  $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ , donde  $n = 2, 3, 4, 5, \dots$ . Esto produce los números  $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, \dots$

Los números de Fibonacci aparecen en numerosas aplicaciones de diferentes áreas. Por ejemplo, en modelos de la crianza de conejos o de plantas, al contar el número de cadenas de bits de longitud  $n$  que no tienen ceros

consecutivos y en una vasta cantidad de contextos diferentes. Algunas de las propiedades de esta sucesión son las siguientes:

- La razón o cociente entre un término y el inmediatamente anterior varía continuamente, pero se estabiliza en el número áureo. Es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$$

donde

$$f_0 = 1 \quad f_1 = 1 \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

La razón de oro es el límite de las razones de términos sucesivos de la secuencia de Fibonacci. Mostramos que los cocientes aquí  $f_{n+1}/f_n$  se aproximan a la razón de oro  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  alternativamente menor y mayor que  $\phi$ .

$n$	$f_n$	$\frac{f_n}{f_{n-1}}$	$\phi - \frac{f_n}{f_{n-1}}$
1	1		
2	1	1	0,618033989
3	2	2	-0,381966011
4	3	1,5	0,118033989
5	5	1,666666667	-0,048632678
6	8	1,6	0,018033989
7	13	1,625	-0,006966011
8	21	1,615384615	0,002649374
9	34	1,619047619	-0,00101363
10	55	1,617647059	0,00038693
11	89	1,618181818	-0,000147829
12	144	1,617977528	0,000056461
13	233	1,618055556	-0,000021567
14	377	1,618025751	0,000008238
15	610	1,618037135	-0,000003146
16	987	1,618032787	0,000001202
17	1597	1,618034448	-0,000000459

- Cualquier número natural se puede escribir mediante la suma de un número limitado de términos de la sucesión de Fibonacci, cada uno de ellos distinto a los demás. Por ejemplo,  $17 = 13 + 3 + 1$ ,  $65 = 55 + 8 + 2$ .

- Tan sólo un término de cada tres es par, uno de cada cuatro es múltiplo de 3, uno de cada cinco es múltiplo de 5, etc. Esto se puede generalizar, de forma que la sucesión de Fibonacci es periódica en las congruencias módulo  $m$ , para cualquier  $m$ .
- Cada número de Fibonacci es el promedio del término que se encuentra dos posiciones antes y el término que se encuentra una posición después. Es decir

$$f_n = \frac{f_{n-2} + f_{n+1}}{2}$$

por ejemplo  $8 = \frac{3+13}{2}$ .

- Lo anterior también puede expresarse así, calcular el siguiente número a uno dado es 2 veces éste número menos el número 2 posiciones más atrás.  $f_{n+1} = 2f_n - f_{n-2}$
- La suma de los  $n$  primeros números es igual al número que ocupa la posición  $n + 2$  menos uno. Es decir  $f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$  por ejemplo  $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 55 - 1 = 54$
- Otras identidades interesantes incluyen las siguientes:

- $f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$

$$\begin{array}{ll} f_2 = f_0 + f_1 & \implies f_0 = f_2 - f_1 \\ f_3 = f_1 + f_2 & \implies f_1 = f_3 - f_2 \\ f_4 = f_2 + f_3 & \implies f_2 = f_4 - f_3 \\ \dots = \dots & \dots = \dots \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1} & \implies f_n = f_{n+2} - f_{n+1} \end{array}$$

luego sumando se obtiene el resultado es decir  $f_0 + f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_n = f_{n+2} - f_1 = f_{n+2} - 1$  ya que  $f_1 = 1 = f_0$ .

- $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n+1} = f_{2n+2} - 1$   
pues del caso anterior se desprende

$$\begin{array}{l} f_0 = f_2 - f_1 \\ f_2 = f_4 - f_3 \\ f_4 = f_6 - f_5 \\ \dots = \dots \\ f_{2n} = f_{2n+2} - f_{2n+1} \end{array}$$

entonces

$$f_0 + f_2 + f_4 + \dots + f_{2n} = (f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n+2}) - (f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n+1})$$

lo que es equivalente a  $1 = f_{2n+2} - (f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n+1})$  luego  $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n+1} = f_{2n+2} - 1$ . lo cual implica el siguiente items.

- $f_0 + f_2 + f_4 + \dots + f_{2n+2} = f_{2n+3}$  pues si tenemos

$$\begin{aligned} f_1 &= f_3 - f_2 \\ f_3 &= f_5 - f_4 \\ f_5 &= f_7 - f_6 \\ &\dots = \dots \\ f_{2n+1} &= f_{2n+3} - f_{2n+2} \end{aligned}$$

$$f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n+1} = (f_3 + f_5 + f_7 + \dots + f_{2n+3}) - (f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n+2})$$

equivalentemente  $1 = f_{2n+3} - (f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n+2})$  resultando  $f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n+2} = f_{2n+3} - 1$

- El máximo común divisor de dos números de Fibonacci es otro número de Fibonacci. Más específicamente  $\text{mcd}(f_n, f_m) = f_{\text{mcd}(n,m)}$  Esto significa que  $f_n$  y  $f_{n+1}$  son Números primos entre sí primos relativos y que  $f_k$  divide exactamente a  $f_{nk}$
- Los números de Fibonacci aparecen al sumar las diagonales del triángulo de Pascal. Es decir que para cualquier  $n \geq 0$ , refierase a la figura 1.8
- Si  $f_p = a$ , tal que  $a$  es un número primo, entonces  $p$  también es un número primo, con una única excepción,  $f_4 = 3$ ; 3 es un número primo, pero 4 no lo es.

El concepto fundamental de la sucesión de Fibonacci es que cada elemento es la suma de los dos anteriores. En este sentido la sucesión puede expandirse al conjunto de los números enteros como

$$\dots, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

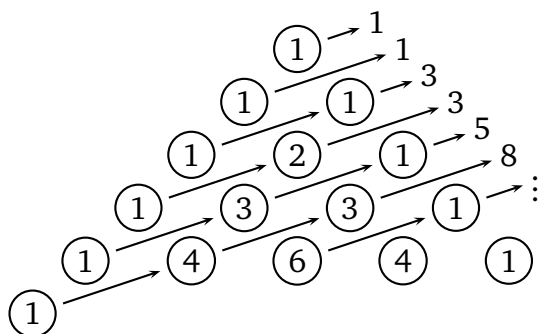


Figura 1.8: El triángulo de Pascal y la sucesión de Fibonacci

de manera que la suma de cualesquiera dos números consecutivos es el inmediato siguiente.

**Sucesión de Lucas.** Un ejemplo de sucesión de Fibonacci generalizada es la “sucesión de Lucas”, descrita por las ecuaciones  $l_0 = 2$ ,  $l_1 = 1$ ,  $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$  para  $n = 2, 3, 4, 5, \dots$

La sucesión de Lucas tiene una gran similitud con la sucesión de Fibonacci y comparte muchas de sus características. Algunas propiedades interesantes incluyen:

- La proporción entre un número de Lucas y su sucesor inmediato se aproxima al número áureo. Es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = \phi$$

- La suma de los primeros  $n$  números de Lucas es el número que se encuentra en la posición  $n + 2$  menos uno. Es decir

$$l_0 + l_1 + l_2 + \dots + l_n = l_{n+2} - 1$$

ya que se parece a la misma ecuación de Fibonacci.

## Capítulo 2

# Formas geométricas sobre el plano

### 2.1. Rectángulos dinámicos

Los rectángulos dinámicos se caracterizan por tener la razón de su lado mayor y su lado menor, números no racionales es decir irracionales aquí observamos que los rectángulo  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ , etc. (excepto el  $\sqrt{4} = 2$  que es un número racional lo cual genera un rectángulo estático ), también se observa que a partir de un cuadrado Figura 2.1 se pueden construir sucesivamente estos rectángulos, en algunos casos obviamente mediante este proceso se podrán hallar rectángulos no dinámicos  $\sqrt{9}$ ,  $\sqrt{16}$ ,  $\dots$ ,  $\sqrt{n^2}$  donde  $n \in \mathbb{N}$  [Ghy77].

refiérase a la Figura 2.1 observemos el rectángulo  $ARKC$  denotado por  $\sqrt{2}$ ,  $ASLC$  denotado por  $\sqrt{3}$ ,  $ATMC$  denotado por  $\sqrt{4} = 2$  que no es un rectángulo dinámico,  $AUNC$  denotado por  $\sqrt{5}$  y los rectángulos relacionado con el número de oro  $ACPP'$  denotado por  $\phi$  construido con la ayuda del punto medio  $D$  del segmento  $OA$  finalmente el rectángulo  $Orr'C$  denotado por  $\sqrt{\phi}$  son los rectángulos más interesantes para la distribución de los elementos en el espacio bidimensional las cuales se subdividirán someramente, para que el lector puede deducir su subdivisión de infinitas maneras.

Si se hace un test a un grupo de personas sobre la prioridad que tiene el rectángulo áureo  $\phi$  en relación a otros, el rectángulo áureo resulta ser más atractivo, debido a que la razón de las longitudes de su lados, están relacionada mediante el número de oro, lo cual evidentemente obedece a sus múltiples propiedades matemáticas que se tratan en éste libro.

Se observará que éste número esta asociado con casi todos los elementos geométricos tratado en éste manual y se las puede asociar del mismo

modo, a los elementos generados por los artistas, ofreciéndole muchas posibilidades de uso, en realidad todo los conceptos tratado esta asociado con una sola concepción, la de relacionar las partes con el todo es decir equivale asociar la unidad y la variedad muy útil en las artes plásticas .

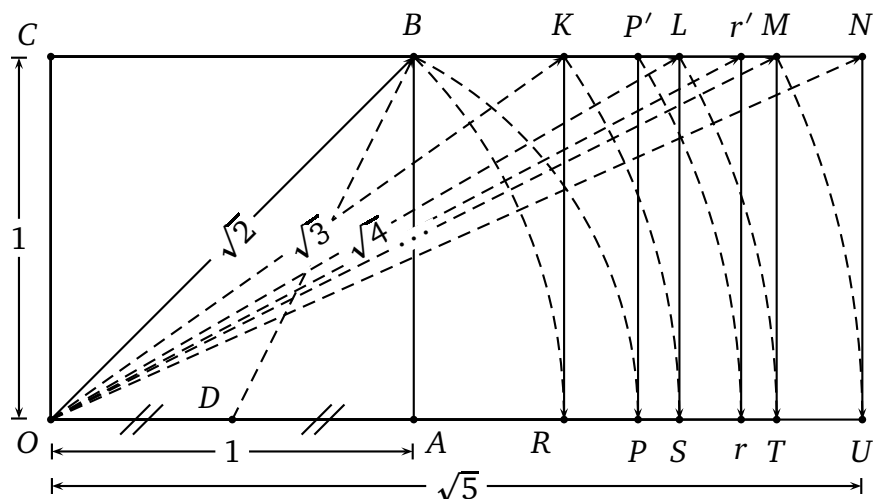


Figura 2.1: Rectángulos Dinámicos  $\sqrt{2}$ ,  $\phi$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ , ...

Se descompondrá armónicamente cada uno de estos rectángulos, saber el procedimiento es muy útil para los artistas plásticos sobre todo para los pintores, en la distribución armónica de los elementos plásticos sobre el plano bidimensional, esta estructura no es un parámetro, es un noción plástica primaria la cual generará un análisis mucho consciente sobre composición plástica, motivando a generar otras estructuras mucho más interesantes a partir de estas.

Los rectángulos dinámicos se pueden descomponer de manera que estos se componen de si mismas, al iterar esta subdivisión se consigue una sucesión infinita de subdivisiones el cual genera una estructura dentro del rectángulo dado, esta nueva concepción sobre los fractales de repetir indefinidamente un proceso sobre una forma dada es reciente debido a Mandelbrot quien lo definió como un proceso iterativo de aplicaciones.

**Comentario 2.1** un rectángulo se puede representar por su diagonal asociada a la pendiente de esta, en un sistema de ejes coordenados usual. Pues si tratamos de averiguar el tipo de rectángulo, lo que se hace es verificar la razón de la longitud de su lado mayor y la longitud de su lado menor es decir, la pendiente de la diagonal con respecto aun sistema de ejes coordenados donde el eje de las  $x$  coincide con el lado mayor es decir, en la Figura 2.2 la pendiente de la diagonal  $AC$  es  $\text{tg } \alpha = \frac{CB}{AB}$ .



Por ejemplo en la Figura 2.3 el rectángulo  $A'B'C'D'$  tiene las mismas proporciones que  $ABCD$  pues la pendiente de  $A'C'$  es la misma que la pendiente de  $AC$ , este principio nos ayudará a demostrar algunas propiedades de los rectángulos dinámicos.

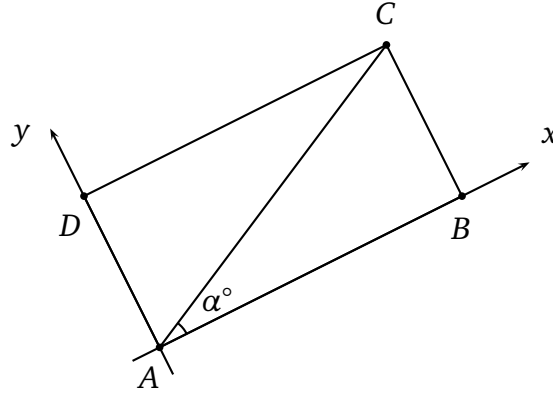


Figura 2.2: Averiguando el tipo de rectángulo

**Comentario 2.2** Se usará la notación  $ABCD = r, r \in \mathbb{I}$  donde  $ABCD$  es un rectángulo, por ejemplo en la Figura 2.3  $A'B'C'D' = \frac{B'C'}{A'B'} = k$  para algún  $k$  real, en la Figura 2.5 se tiene que  $OABC = \frac{AB}{OA} = 1$ .

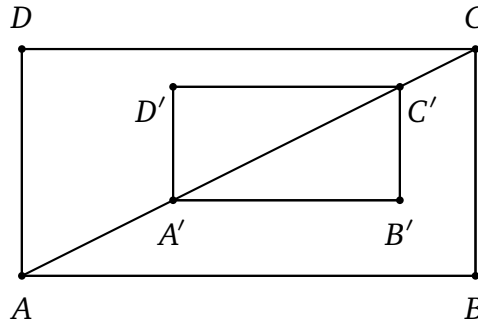
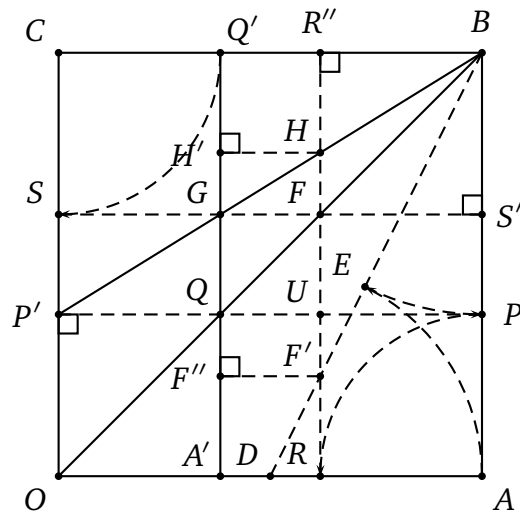


Figura 2.3: Rectángulos semejantes

**Comentario 2.3** En el siguiente criterio mostrada en la Figura 2.4 se toma el punto  $M = \frac{BC}{2}$  se traza el arco  $CB$  centrada en  $M$  luego  $P$  es la intersección de la diagonal del rectángulo  $ABCD$  con éste arco, finalmente  $Q$  es la intersección del lado  $DC$  con la línea  $BP$ . Se usara este principio para resumir las demostraciones de las propiedades de los rectángulos dinámicos, se tiene que  $ABCD \sim P'BCQ$  pues en  $AC \perp BQ$  esto es  $\angle BAC = \angle CBQ$ , luego según el

### 2.1.1. El cuadrado



Para poder particionarlo es necesario hallar la sección áurea en uno de los lados por ejemplo  $P$  sobre el lado  $AB$  con el método ya aprendido,  $P'$  es la

proyección de  $P$  sobre  $OC$ ,  $AR = AP R''$  es la proyección de  $R$  sobre  $CB$ ,  $Q$  es la intersección de  $OB$  y  $PP'$  al proyectar este punto sobre los lados  $CB$  y  $OA$  se obtienen los puntos  $A'$  y  $Q'$  respectivamente luego los rectángulos  $QP'SG$ ,  $GQ'R''F$ ,  $FS''PU$  y  $A'RUQ$  son rectángulos  $\phi$  pues  $OP' = SC = CQ' = R''B = BS'' = PA = AR = A'O$  y  $P'S = Q'R'' = S''P = RA' = QG = GF = FU = UQ$  y  $\frac{CQ}{Q'R''} = \phi$  o en particular  $SGQP' = \phi$  por que tiene la misma diagonal que  $P'CBP$  que es un rectángulo  $\phi$  por que  $\frac{CB}{BP} = \phi$  lo cual también implica que  $GFHH' = \phi$ ,  $QUF'F'' = \phi$  ya que  $F''F'RA' = 1$  incluido en  $A'RUQ = \phi$  que comparten uno de sus lados menores ( $D$  es punto medio de  $A'R$  como lo es de  $OA$  es decir la mitad del cuadrado  $F''F'RA'$  comparte con la diagonal de la mitad del cuadrado  $OABC$ ) también  $QUR''Q' = \phi^2 = \phi + 1$ ,  $F''F'HH' = \sqrt{5} = 2\phi - 1 = \phi + (\phi - 1) = \phi + \frac{1}{\phi} \iff \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ya que  $QUF'F' = GFHH' = \frac{1}{\phi}$  y  $QUFG = 1$ .

A partir de esto al iterar el procedimiento, sobre los rectángulos incluidos en el cuadrado y con la ayuda de las particiones de los rectángulos que se analizarán luego se generan infinidad de posibilidades por ejemplo una de ellas es la que se muestra en la Figura 2.5. Aunque el cuadrado es considerado menos apto (menos dinámica) para las composiciones, con un poco de subdivisiones armónicas se puede obtener una buena composición.

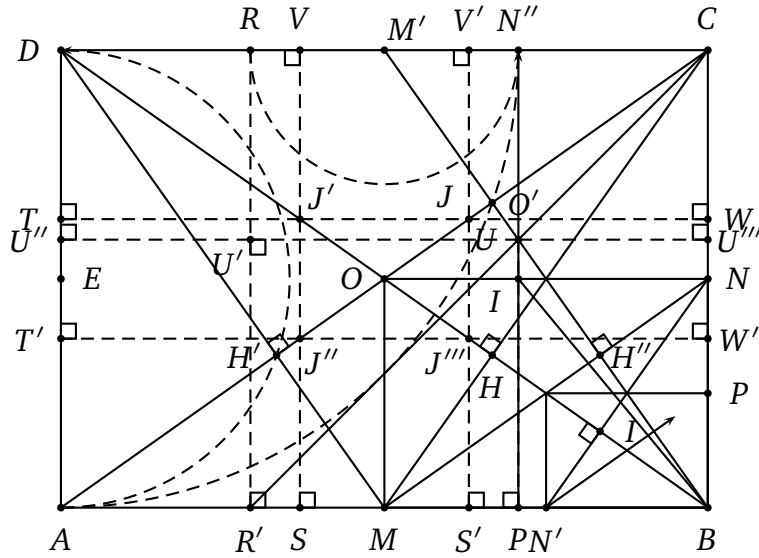
Recuerde que una composición es acotada lo implica que esté inmerso aun entorno cualquiera, en particular en un rectángulo y esto implica distribuir los elementos plásticos dentro del entorno y para esto es necesario particionar el rectángulo adecuadamente para que la distribución, guiada por líneas y puntos, sea ordenada pues la percepción busca eso.

### 2.1.2. El rectángulo $\sqrt{2}$

Siendo  $M'$  y  $M$  puntos medios de  $DC$  y  $AB$  se observa la propiedad de  $DM \perp AC$  pues la pendiente de la recta  $DM$  es  $-\frac{2}{\sqrt{2}}$  y la pendiente de la recta  $AC$  es  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  donde al multiplicar estas pendientes resulta  $-1$ . o use el comentario 2.3.

Otra característica es que  $ONMB$  es otro rectángulo  $\sqrt{2}$  con el lado mayor  $ON = MB$  pues  $OM = \frac{\sqrt{2}}{2}$  y  $NB = \sqrt{2}$  entonces  $\frac{AM}{NB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ , en este rectángulo también se observa que  $MH \perp HB$  pues considerando la pendiente del segmento  $MC$  es  $m_1 = \frac{CB}{MB} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$  y la pendiente del segmento  $BD$  es  $m_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$  lo cual implica que  $m_1 m_2 = -1$ , también mediante este procedimiento se verifica que  $MH \perp HB$ ,  $HH'' \perp H''B$  y  $N'N \perp HB$ .

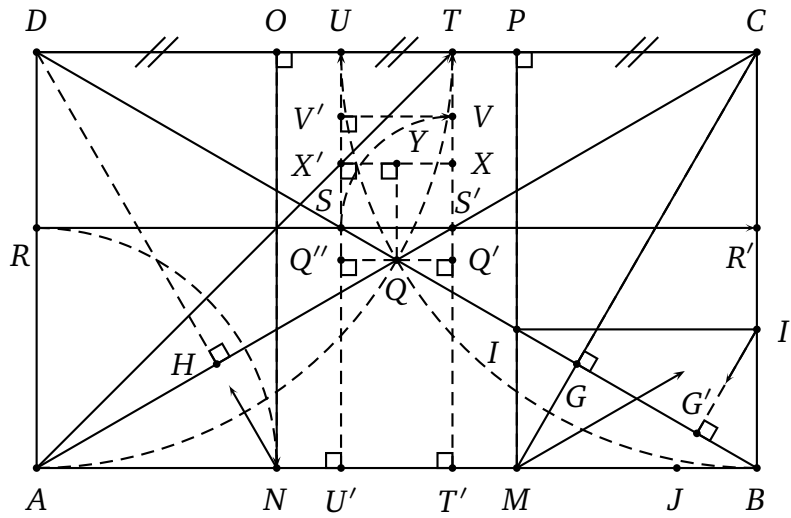
Finalmente se pueden obtener de manera indefinida rectángulos  $\sqrt{2}$  ta-

Figura 2.6:  $\sqrt{2}$ 

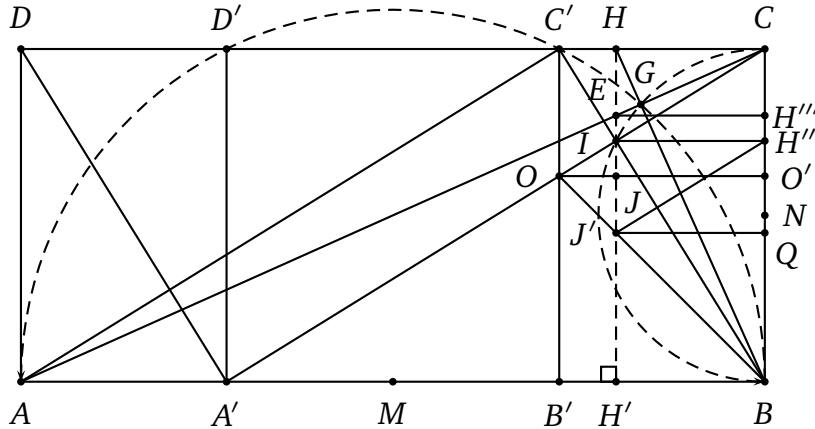
les como  $OMNB$ ,  $KPBN'$ , etc. los cuales convergen hacia el vértice  $B$ . También se los puede hacer converger hacia los demás vértices  $A$ ,  $D$  y  $C$  del mismo modo que en el rectángulo  $MONB$  se puede iterar los procedimientos anteriores indefinidamente, y explorar otro tipo de particiones sobre este rectángulo.

### 2.1.3. El rectángulo $\sqrt{3}$

Como en los casos anteriores, que si lo dividimos en tres franjas verticales iguales tales como  $ANOD$ ,  $ONMP$  y  $PMBC$  obtenemos otros triángulos semejantes al primero  $\sqrt{3}$ , como en el caso anterior se usó las pendientes para averiguar si es correcto poner los ángulos rectos donde lo están, luego es posible iterar esta operación al infinito sobre cada uno de los tres rectángulos, para obtener otros con la misma propiedad pero en escala menor. Verifiquemos que  $ANOD = NMPO = MBPC = \sqrt{3}$ , ya que  $ANOD$ ,  $AN = \frac{\sqrt{3}}{3}$  y  $ON = 1$  luego  $\frac{ON}{AN} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$ , esto es válido para  $ONMP$ ,  $PMBC$  pues  $ON = PM = CB$  y  $AN = NM = MB$ . Para verificar que  $DH \perp AC$  se tiene que la pendiente del segmento  $AC$  es  $m_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  y la pendiente del segmento  $ND$  es  $m_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}/3}$  esto es el producto de las pendientes es  $m_1 m_2 = -1$  lo cual prueba que  $DH \perp AC$ .

Figura 2.7:  $\sqrt{3}$ 

#### 2.1.4. El rectángulo $\sqrt{5}$

Figura 2.8:  $\sqrt{5}$ 

En este rectángulo se incluye los rectángulos  $\phi$  y  $\sqrt{5}$  como se muestra en la Figura 2.8 el rectángulo  $A'B'CD'$  y  $AB'C'D$  son rectángulos  $\phi$ . Se empieza construyendo un cuadrado  $A'B'C'D'$  al tomar uno de sus lados  $A'B'$ , dividirlo en dos segmentos iguales  $A'M = MB'$  el arco generado por  $MC'$  interseca a la proyección de lado  $A'B'$  en los dos puntos  $A$  y  $B$  observe que se utilizó el mismo procedimiento para obtener el rectángulo áureo pero en este caso

Se obtiene  $G$  intersecar el arco  $BC$  con la diagonal  $AC$ ,  $H$  al intersecar el lado  $DC$  con la proyección de  $BG$  finalmente  $H'$  e  $I$  al proyectar  $H$  perpendicularmente sobre el lado  $AB$ ; se sabe que el rectángulo  $OO'CC'$  es un rectángulo  $\phi$  por lo tanto  $IH''CC'$  lo es, pues la diagonal  $IC$  coincide con la del rectángulo  $OO'CC'$  (Se demostró al principio de este capítulo que un rectángulo está definido por el valor de la pendiente de su diagonal) se verifica que  $HC = \frac{1}{5}DC$  por el comentario 2.3, entonces  $H'BCH$  es un rectángulo  $\sqrt{5}$ , entonces como  $H'BQJ' = 1$ , y  $IH''CH = \phi$  se deduce que  $J'QH''I = \phi$ . También  $EH'''CH$  es un  $\sqrt{5}$  pues comparten la diagonal del generador  $ABCD$ ,  $H'BQJ'$  es un cuadrado pues comparten la diagonal del cuadrado  $B'BO'O$

### 2.1.5. El rectángulo $\phi$

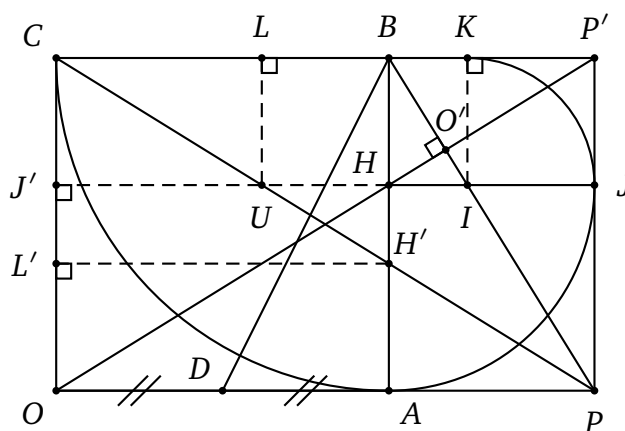


Figura 2.9:  $\phi$

Como en los casos anteriores a partir del rectángulo  $OABC$ ,  $D$  es punto medio del segmento  $OA$ ,  $DB = DP$  resultando que  $\frac{OA}{AP} = \phi$ . Si trazamos la diagonal esta intercepta a la línea  $BA$  en el punto  $H$  luego  $\frac{JH}{HB} = \phi$  pues comparten la misma diagonal, en base a los comentarios dados, se puede experimentar cualquier partición sobre éste rectángulo, la espiral logarítmica generada por éste rectángulo se obtiene al considerar los cuadrados

encajados, en cada uno de los rectángulos áureos que también están encajados, indefinidamente.

### 2.1.6. El rectángulo $\sqrt{\phi}$

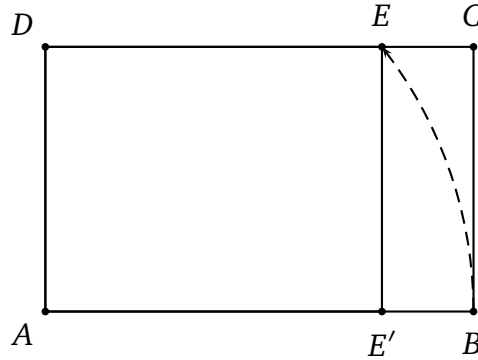


Figura 2.10:  $\sqrt{\phi}$

El rectángulo  $\sqrt{\phi} = AE'ED$  se obtiene a partir de un rectángulo áureo  $\phi$  como se muestra en la Figura 2.10 si  $\phi = ABCD$  entonces  $\sqrt{\phi} = AE'ED$  se obtiene al trazar el arco  $BE$  interceptando la línea  $AC$  en  $E$ , proyectando perpendicularmente este punto sobre la línea  $AB$  se obtiene el cuarto vértice  $E'$  del rectángulo  $\sqrt{\phi}$  pues como se puede verificar se tiene que  $AE'^2 = AE^2 + EE'^2 = \phi^2 - 1 = 2\phi + 1 - 1 = \phi \iff AE' = \sqrt{\phi}$

## 2.2. El pentágono y el triángulo áureo

Es fácil verificar los ángulos mostrados en la Figura pues los ángulos interiores de un pentágono son como  $EDC = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108$  luego el ángulo  $DEC = DCE = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$  ya que  $I'D = I'E$  se deduce que el ángulo  $DI'I'' = 72^\circ$ .

Se prueba fácilmente que  $\frac{a}{b} = \phi$  pues usando la ley de los senos en el triángulo  $ADB$  se tiene que:

$$\frac{a}{\sin 72} = \frac{b}{\sin 36} \iff \frac{a}{b} = \frac{\sin 72}{\sin 36} = \frac{0,95105651629515357211\dots}{0,5877852522924731291\dots} = \phi.$$

Lo mismo ocurre con  $\frac{DI'}{I'I} = \phi$ , pues solo basta probar que los segmentos  $I'I$  y  $I'I''$  son iguales en efecto pues  $I'I''$  es el lado del pentágono que se

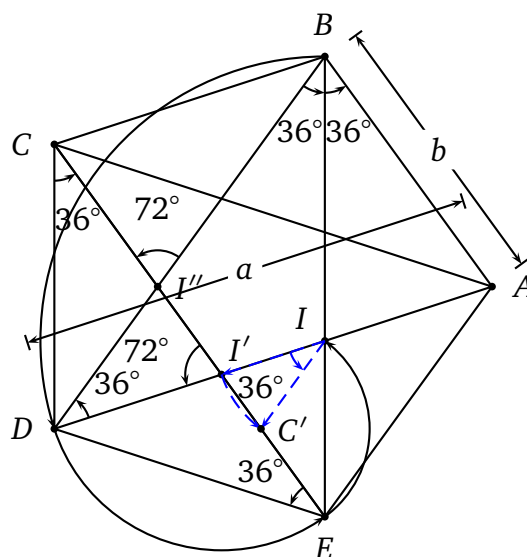


Figura 2.11: El Pentágono y el Triángulo Áureo y la Relación de sus Lados

genera con la diagonales del pentágono  $ABCDE$ , el triángulo áureo es el triángulo  $EDB$  pues su lado mayor  $a$  y su lado menor  $b$  verifican  $\frac{a}{b} = \phi$  hay 5 triángulos  $\phi$  inscritos en el pentágono como se observara luego éste rectángulo servirá de vase, para poder construir el icosaedro, con la ayuda de uno de los triángulos se pueden construir la espiral logarítmica, por ejemplo los arcos  $BD, DE, EI \dots$  están centradas en  $I, I', C' \dots$  lo cual implica que se pueden construir cinco espirales, esto se puede iterar sobre el pentágono pequeño interior que tiene como vertices  $II'I'' \dots$  también se puede experimentar colocando un rectángulo áureo de modo que uno de las lados del rectángulo áureo coincida con un los de los lados del pentágono y observara que sus particiones tiene mucho en común.

### 2.3. Ejemplo de una composición

Tomemos las intersecciones y las líneas, como referencia del contorno de nuestra Figura, tratando de adherirlas a éstas, sin forzarlas por completo refiérase a la Figura 2.12, se puede adicionar otros rectángulos a éste y generar composiciones más complejas, el cuadrado es un rectángulo estático y eso no implica que no pueda generarse composiciones dinámicas, se particionó el cuadrado de manera que dentro de ella existan rectángulos



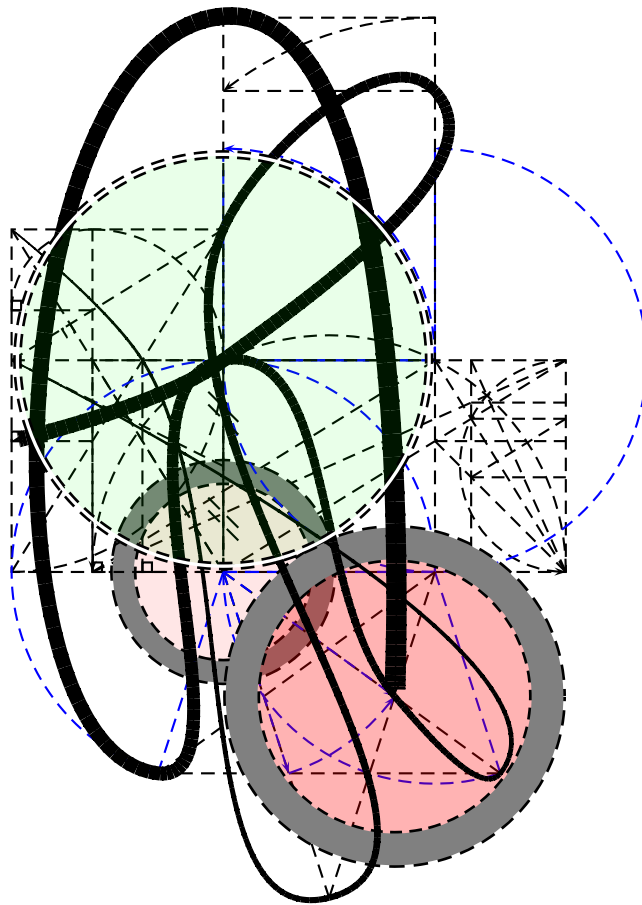


Figura 2.12: Composición con los rectángulos  $\phi$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{\phi}$  y el pentágono.

dinámicos tal como el  $\phi$  y el  $\sqrt{5}$ . En general la partición de un sector del espacio bidimensional es importante para tener referencia sobre esta estructura armónica para la distribución adecuada de los elementos compositivos. En la Figura 2.12 se tiene la composición de los rectángulo  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{\phi}$ ,  $\phi$  y el pentágono, lo cual es una generalización, de la aplicación de las particiones tratadas, sin embargo solo se puede trabajar con uno de los rectángulos dinámicos.



## Capítulo 3

# Sólidos platónicos

Este Capítulo está avocado especialmente a la generación de sólidos regulares (cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro) o platónicos, dado una esfera como construirlos de manera que estén inscritos en ella. El dodecaedro y el icosaedro son los sólidos que tiene relación con la sección áurea debido a que ellos se construyen con la ayuda del pentágono y ya vimos que éste lo está. Se demuestra que si realmente verifican ser regulares y estar inscritos en la esfera dada, [[Pac67](#)].

Una práctica común de como utilizar estos métodos de construcción es en el dibujo, en la escultura y en el diseño tridimensional, a partir de estos se pueden generar otros sólidos mediante el método del chaflanado, truncado y adicionando otros elementos (sólidos) en las aristas o sobre las caras de los sólidos resultantes.

Como en cada cada vértice concurren como mínimo tres caras y la suma de los ángulos de estas tiene que ser menor de  $360^\circ$  se deduce que solo puede existir los siguientes casos.

- 3 triángulos equiláteros nos genera  $3 \times 60^\circ = 180^\circ < 360^\circ$  los cuales componen al Tetraedro.
- 4 triángulos equiláteros nos genera  $4 \times 60^\circ = 240^\circ < 360^\circ$  los cuales componen al Octaedro.
- 5 triángulos equiláteros nos genera  $5 \times 60^\circ = 300^\circ < 360^\circ$  lo cual genera al Icosaedro.
- 6 triángulos equiláteros nos genera  $6 \times 60^\circ = 360^\circ \nless 360^\circ$  pues debe ser menor estrictamente en este caso es igual, lo cual no forma ningún sólido, es un plano.

- 3 cuadrados nos genera  $3 \times 90^\circ = 270^\circ < 360^\circ$  los cuales componen al cubo.
- 4 cuadrados nos genera  $4 \times 90^\circ = 360^\circ \not< 360^\circ$  pues debe ser menor estrictamente en este caso es igual.
- 3 pentágonos regulares nos genera  $3 \times 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$  los cuales componen al Dodecaedro.
- 4 pentágonos regulares nos genera  $4 \times 108^\circ = 432^\circ < 360^\circ$  pues debe ser menor estrictamente en este caso es igual.

Es decir solo pueden existir 5 poliedros (Cubo, Tetraedro, Octaedro, Dodecaedro, Icosaedro) regulares o sólidos platónicos.

Veamos como se pueden construir estos sólidos, es importante tener noción geométrica básica y el uso adecuado del Teorema de Pitágoras, Relaciones métricas sobre triángulos rectángulos y recordar sobre la Sección Áurea.

### 3.1. El icosaedro

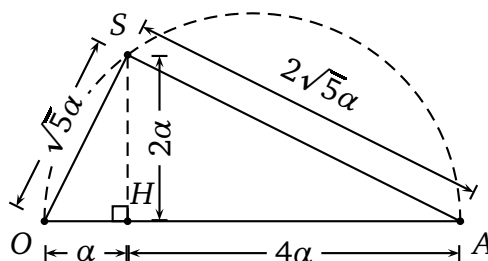


Figura 3.1: Guía bidimensional para construir el icosaedro

Formado por 20 caras triangulares equiláteras iguales, 12 vértices y 20 aristas. Construyamos una icosaedro inscrito en una esfera, con referencia a la Figura 3.1 sea  $OA$  el diámetro de la esfera a inscribirse se ubica  $H$  sobre  $OA$  de modo que  $HA = 4OH$  con ayuda de este punto se halla el punto  $S$  sobre la semicircunferencia que tiene como diámetro  $AB$  donde  $HS$  es perpendicular a  $AB$ , tomemos a  $OS$  de la misma Figura 3.1 como radio y dibuje la circunferencia  $AaBbCcDdEe$  centrada en  $O$  refiérase a la Figura 3.2 y dibujese el pentágono  $ABCDE$  escrito en ella a partir de éste pentágono copiese uno y rote sobre su centro  $O$  un ángulo de  $36^\circ$  es decir los

vértices del pentágono copiado coincide con los puntos medios de los arcos que tiene como sagita a los lados de la pentágono original resultando el pentágono  $abcde$  sobre sus vértices levántense las líneas  $aA'$ ,  $bB'$ ,  $cC'$ ,  $dD'$  y  $eE'$  ortogonales al plano de la circunferencia  $AaBbCcDdEe$  todas ellas de longitud  $OS = \sqrt{5}$  es decir el radio de la circunferencia  $AaBbCcDdEe$ ; los extremos  $A', B', C', D',$  y  $E'$  generan otro pentágono igual al anterior pues la proyección ortogonal del pentágono copiado proyéctese también el centro  $O$  sobre el plano de éste pentágono proyectado, sobre  $O'$  finalmente por los extremos de la línea  $OO'$  las líneas  $OH'$  y  $O'H$  de longitud  $Bd$  (longitud del lado de decágono).

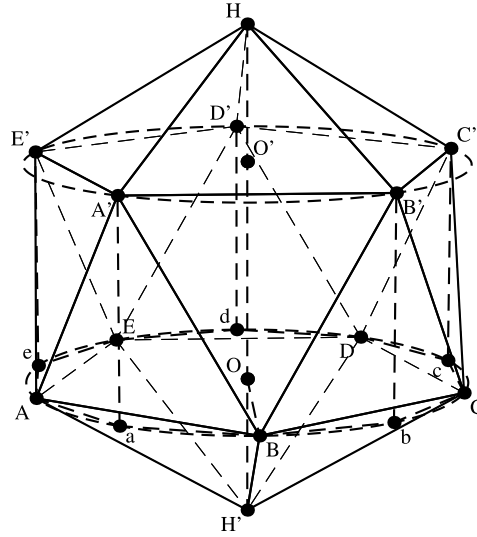


Figura 3.2: Icosaedro

En el triángulo rectángulo  $BbB'$  recto en  $b$  se tiene  $Bb = \frac{OB}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{\sqrt{2}\alpha}{2}(\sqrt{5} - 1)$  (lado del decágono inscrito en la circunferencia  $AaBbCcDdEe$ ),  $BB' = BC = \frac{OB}{2}\sqrt{10 - \sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}\alpha}{2}\sqrt{10 - \sqrt{20}}$  (lado de pentágono  $ABCDE$ ) se verifica que las longitudes de las líneas  $aA'$ ,  $bB'$ ,  $cC'$ ,  $dD'$  y  $eE'$  son iguales a la longitud de la línea  $OB$ , el radio de la circunferencia  $AaBbCcDdEe$  ya que ellas son iguales a  $OO'$  pues, se tiene por el teorema de pitágoras  $OO' = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}\alpha}{2}\sqrt{10 - \sqrt{20}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}\alpha}{5}(\sqrt{5} - 1)\right)^2} = \sqrt{5}\alpha = OB$  también  $OH^2 = BH^2 - OB^2 = \left(\frac{\sqrt{5}\alpha}{2}\sqrt{10 - \sqrt{20}}\right)^2 - (\sqrt{2}\alpha)^2 = \frac{\sqrt{5}\alpha}{2}\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\alpha}{2}\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = \frac{\sqrt{5}\alpha}{2}(\sqrt{5} - 1)$  es decir coincide con la longitud del de-

cágono  $AaBbCcDdEe$  por tanto observamos que  $\frac{OH}{OO'} = \frac{OO'}{O'H} = \frac{O'H'}{OO'} = \phi$  en efecto  $\frac{OH}{OO'} = \frac{\sqrt{5}\alpha + \frac{\sqrt{5}\alpha}{2}(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}\alpha} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$  luego por propiedades ya conocidas se demuestra lo demás.

La relación entre el diámetro de la esfera que circumscribe al icosaedro y la la longitud de una de las aristas de icosaedro es  $\xi^2 = \sqrt{5}\zeta$  donde  $\xi$  es el diámetro de la esfera y  $\zeta$  es la longitud de una de las arista del icosaedro.

### 3.2. El dodecaedro

El objetivo es construir un dodecaedro inscrita en una esfera para esto se tiene en primer lugar el cubo  $ABCD A'B'C'D'$  tómesese uno de sus caras por ejemplo el cuadrado  $ABCD$ , sobre ella ubiques la linea  $KK'$  de modo que  $DK' = K'A$  y  $CK = KB$ ,  $M$  es punto medio de está linea los punto  $O$  y  $O'$  son las secciones áureas de las líneas  $K'M$  y  $MK$  respectivamente, luego  $OE$  y  $OF$  son ortogonales a la superficie del cuadrado  $ABCD$  de longitudes iguales a  $OM = O'M$  es decir el segmento mayor de la sección áurea, se procede de manera similar para obtener los demás vértices del dodecaedro, en las caras adyacentes de la cara  $ABCD$ , teniendo en cuenta que las líneas (tales como  $KK'$ ) que dividen a cada cara no sean consecutivas, los vértices del cubo y los obtenidos mediante este procedimiento generan al dodecaedro cuyas caras son pantanos regulares tales como  $AHBFE$ .

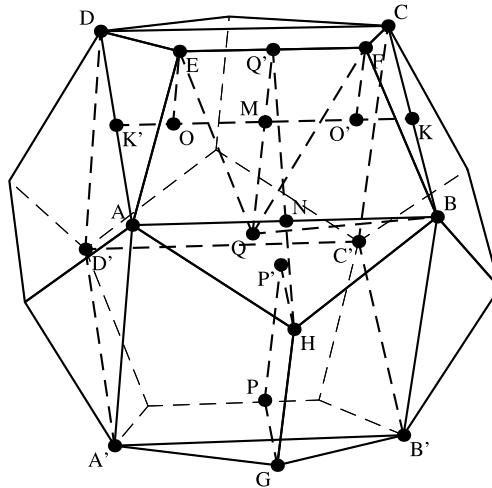


Figura 3.3: Dodecaedro

Los vértices del pentágono regular están sobre un mismo plano pues las

pendientes de las rectas  $HN$  y  $NQ'$  son iguales con respecto aun mismo sistema de referencia en este caso por ejemplo el sistema de ejes coordenados  $x, y$  y  $z$  centrada en  $Q$  paralelas a las aristas del cubo, en efecto se sabe que  $\frac{MK}{O'M} = \phi$  pero como  $MN = MK$  y  $O'M = MQ'$  al reemplazar en  $\frac{MK}{O'M} = \phi$  se obtiene  $\frac{MK}{O'M} = \frac{MN}{MQ'} = \phi$  que la pendiente de la linea  $NQ'$  de otro lado también se conoce que  $\frac{MO}{O'K} = \phi$  como también  $MO = P'H$  y  $O'K = P'N$  al reemplazar esto en  $\frac{MO}{O'K} = \frac{P'H}{P'N} = \phi$  que es la pendiente del alineamiento  $HN$  luego tanto como la linea  $NQ'$  y  $HN$  tiene la misma pendiente con respecto a un mismo sistema de referencia, es esto implica que los vértices del pentágono regular  $AHBC E$  están sobre un mismo plano ya que  $EF$  es paralela a  $AB$

veamos ahora que los vértices del dodecaedro que no pertenecen al cubo realmente están sobre la esfera que circumscribe al cubo  $ABCD A'B'C'D'$  en efecto solo basta probar que  $QF = QB$  donde  $Q$  es el centro del cubo,  $QB$  es la semidiagonal del cubo esto es  $\sqrt{3}\frac{AD}{2}$  luego sabiendo que  $Q'Q = \frac{AD}{2} + \frac{AD}{2}\frac{1}{\phi}$  y  $QF' = \frac{AD}{2}\frac{1}{\phi}$  (pues  $Q'F = MO'$  y de la relación  $\frac{MK}{MO'} = \frac{AD/2}{MO'} = \phi$  se deduce que  $MO = \frac{AD/2}{\phi}$ , ténganse en cuenta también que  $QM = O'M$  y  $QM = \frac{AD}{2}$ ) esto en  $QF^2 = Q'Q^2 + Q'F^2$  resultando  $QF^2 = \left(\frac{AD}{2} + \frac{AD}{2}\frac{1}{\phi}\right)^2 + \left(\frac{AD}{2}\frac{1}{\phi}\right)^2 = \frac{AD^2}{4} \left(\left(\frac{\phi+1}{\phi}\right)^2 + \frac{1}{\phi^2}\right) = \frac{AD^2}{4} \left(\phi^2 + \frac{1}{\phi^2}\right) = 3\frac{AD^2}{4}$  entonces  $QF = \sqrt{3}\frac{AD}{2} = QB$  lo cual verifica que los vértices del dodecaedro están sobre la misma esfera que circumscribe al cubo

### 3.3. El octaedro

Generemos el cuadrado  $ACDE$  refiérase a la Figura 3.4(b) cuyos lados son iguales a  $OS$  de la Figura 3.4(a) inscrito en una circunferencia, por el centro de está circunferencia levantemos las líneas  $OB$  y  $OF$  ortogonales a la superficie del cuadrado  $ACDE$  de longitudes iguales a  $HS$  (Figura 3.4(a)) de longitud  $OS$  que es la mitad de la diagonal de cuadrado  $ABCD$ , es fácil verificar que éste sea la altura del octaedro pues, cada lado es un triángulo equilátero tratemos de generar un triángulo rectángulo para poder aplicar el Teorema de Pitágoras, entonces si proyectamos el punto  $O$  perpendicularmente al segmento  $AC$  obtenemos el segmento  $OP$  donde  $AP^2 + PO^2 = AO^2 \iff 2OP^2 = AO^2 = r^2$  implica que  $OP = \frac{r}{\sqrt{2}}$ , donde  $r$  es el radio de la circunferencia  $AEDC$ , también  $PB = \tan 60^\circ OP = \frac{\sqrt{3}}{1} \frac{r}{\sqrt{2}} = r \sqrt{\frac{3}{2}}$  por lo tanto  $OB = \sqrt{PB^2 - OP^2} = \sqrt{r^2 \sqrt{\frac{3}{2}}^2 - \frac{r^2}{2}} = r$  entonces  $AO = OB$ .

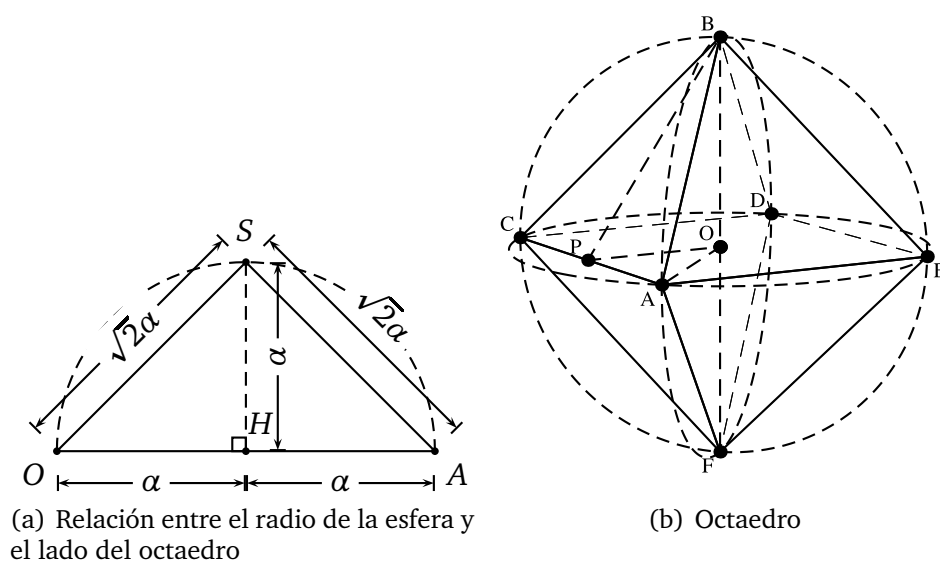


Figura 3.4: Octaedro

### 3.4. El exaedro o cubo

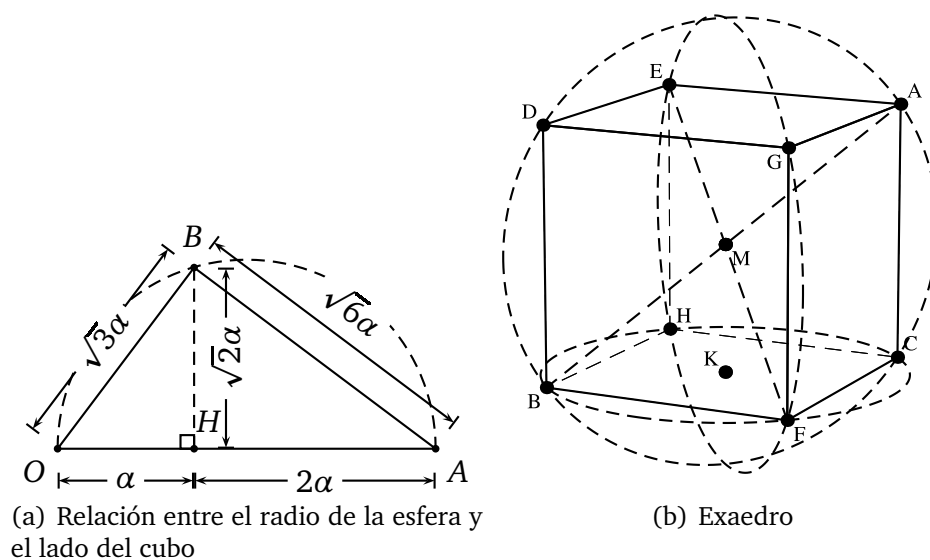


Figura 3.5: Exaedro

Para generar un cubo inscrito en una esfera, usemos la Figura 3.5(a), sea  $OA$  el radio de la esfera que circumscribe al tetraedro, entonces hágase un



cuadrado  $BFCH$  cuyos lados sean igual a la línea  $OB$  y sobre cada uno de sus vértices levántense las líneas  $BD, FG, CA$  y  $HE$  ortogonales a la superficie  $BFCH$ , de longitudes iguales  $OB$  por lo tanto el cubo que se circumscribe en la esfera con diámetro  $OA$  es  $BFCHDGAE$ , debemos destacar que  $\frac{DF}{3}$  y  $\xi^2 = 3\zeta^2$  donde  $\xi$  es el diámetro de la esfera y  $\zeta$  es una de las aristas del cubo, también se verifica que  $3BD^2 = AB^2 \iff AB = \sqrt{3}BD$ .

### 3.5. El Tetraedro

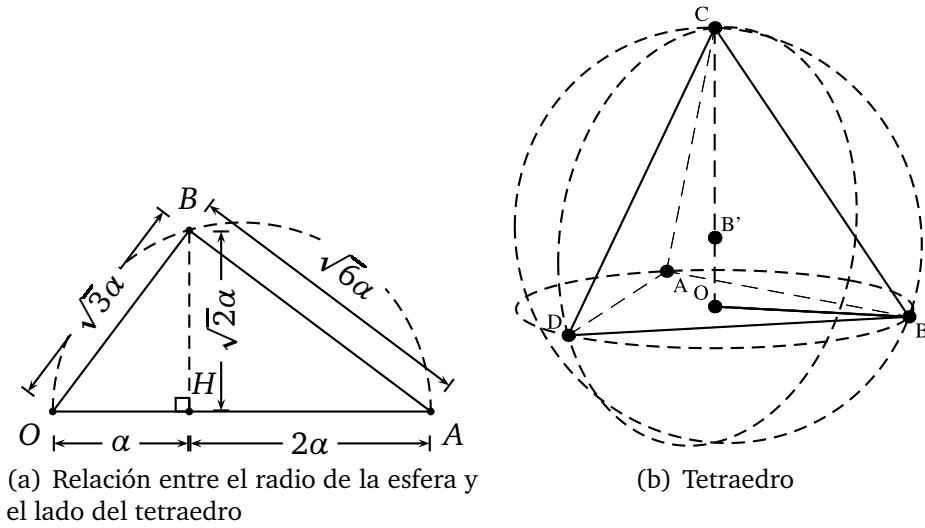


Figura 3.6: Tetraedro

Para inscribir un tetraedro en una esfera de diámetro  $OA$  se dibuja la circunferencia de radio  $HB$  centrada en  $O$  inscrita en esta circunferencia se genera el triángulo equilátero  $ACD$ , sobre su centro  $O$  se levanta perpendicularmente al plano de éste, la línea  $OC$  de longitud  $AH = 2\alpha$  de la Figura 3.6(a) ( $OC = \frac{OB}{\sqrt{2}}$ , el lado del cuadrado inscrito en la circunferencia  $ABD$ ) luego  $ABCD$  es el tetraedro buscado lo cual se inscribe sobre la esfera de diámetro  $OA$  de la Figura 3.6(a). La relación entre el diámetro y un lado del tetraedro es  $\zeta^2 + \frac{\zeta^2}{2} = \delta^2$  donde  $\zeta$  es la longitud de una de las aristas del tetraedro y  $\delta$  es la longitud del diámetro de la esfera que circumscribe al tetraedro, en efecto en la Figura 3.6(a) se tiene el diámetro  $OA = 3\alpha$  y en la Figura 3.6(b)  $BC = \sqrt{3}OA = \sqrt{3}\sqrt{2}\alpha = \sqrt{6}\alpha$  verificando  $BC^2 + \frac{BC^2}{2} = OA^2$ , además la longitud de una de las aristas del tetraedro es igual  $AB = \sqrt{6}\alpha$

### 3.6. Truncando los sólidos

Truncar es el proceso de tomar un plano ortogonal al radio de la esfera que lo circumscribe y pasa por el vértice, desplazarlo sobre el radio hacia el centro de modo que se genera una nueva cara sobre el sólido cuyos lados son la intersección del sólido y el plano. El coeficiente de truncamiento es la razón  $k$  ( $0 \leq k \leq 0,5$ ) es decir si tomamos  $k = 0,5$  el plano recorrerá desde el vértice hasta cubrir la mitad de las aristas, el plano pasara por los tres puntos medios de las aristas adyacentes al vértice, sobre el cual se estuvo el plano, si  $K = 0$  se obtiene el mismo sólido, si  $k = 0,5$  se obtiene un sólido que tiene como vértices los puntos medios de las aristas del sólido original, con este procedimiento se pueden obtener otros sólidos a los ya tratados como ejemplo se tiene en la siguiente Figura 3.7 un dodecaedro truncado con coeficiente (0.3), se deja como ejercicio para el lector aplicarlo sobre los diversos sólidos tratados en este capítulo, con distintos coeficientes.

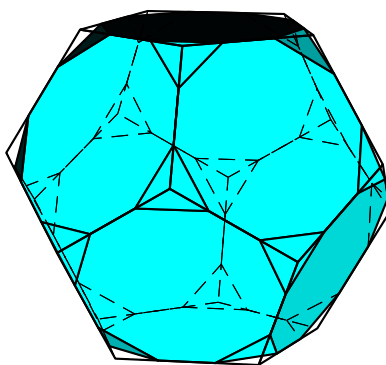


Figura 3.7: Dodecaedro truncado con coeficiente 0.3

### 3.7. Chaflanando los sólidos

Proceso por el cual al contraerse las caras hacia su centro, en un sólido, generan otras caras sobre sus aristas y vértices, el coeficiente de dilatación  $\alpha\mathfrak{W}$  donde  $0 < \alpha < 1$  y  $\mathfrak{W}$  es el radio de la circunferencia que circumscribe a una de las caras de un sólido; lo cual implica que si variamos el valor de  $\alpha$  desde 0 hasta 1 se obtiene infinitas sólidos chaflanados, los casos particulares son cuando  $\alpha = 1$  esto es el mismo sólido y si  $\alpha = 0$  es un nuevo sólido que tiene como vértices los puntos los centros de las caras del sólido chaflanado; en algunos casos se obtienen, uno de los sólidos platónicos

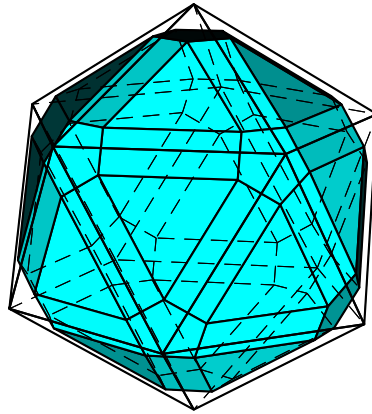


Figura 3.8: Tetraedro chaflanado con coeficiente 0.6

(tetraedro, octaedro, cubo, dodecaedro o icosaedro) en este caso el sólido con coeficiente de chaflanado  $\alpha = 0$  y el sólido original reciben el nombre conjugados.



## Capítulo 4

### Fractales clásicos

La geometría fractal , cuyos principios datan del siglo pasado, ha recibido durante los últimos veinte años, desde la publicación de los trabajos de Mandelbrot, una atención creciente en diversas áreas de la ciencia. Lejos de ser simplemente una herramienta de generación de imágenes virtuales impresionantes, la geometría fractal viene avalada por la geometría de la medida y por innumerables aplicaciones en ciencias dispares como la Física, la Química, la Economía, la informática y otras [Fal90].

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. El término fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975 y deriva del Latín fractus, que significa quebrado o fracturado. Muchas estructuras naturales son de tipo fractal. La propiedad matemática clave de un objeto genuinamente fractal es que su dimensión métrica fractal es un número no entero.

Si bien el término “fractal” es reciente, los objetos hoy denominados fractales eran bien conocidos en matemáticas desde principios del siglo XX. Las maneras más comunes de determinar lo que hoy denominamos dimensión fractal fueron establecidas a principios del siglo XX en el seno de la teoría de la medida.

La definición de fractal en los años 1970, dio unidad a una serie de ejemplos, algunos de los cuales se remontaban a un siglo atrás. A un objeto geométrico fractal se le atribuyen las siguientes características:

- Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.
- Es autosimilar, su forma es hecha de copias más pequeñas de la misma figura.

Posteriormente aparecieron ejemplos con propiedades similares, pero

una definición más geométrica. Dichos ejemplos podían construirse partiendo de una figura inicial (semilla), a la que se aplicaban una serie de construcciones geométricas sencillas. La serie de figuras obtenidas se aproximaba a una figura límite que correspondía al que hoy llamamos conjunto fractal. Así, en 1904, Helge von Koch definió una curva con propiedades similares a la de Weierstrass: el copo de nieve de Koch. En 1915, Waclaw Sierpinski construyó su triángulo y, un año después, su alfombra.

## 4.1. Características de un fractal

Según B. Mandelbrot, un objeto es autosimilar o autosemejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden presentarse a diferente escala y pueden estar ligeramente deformadas. Los fractales pueden presentar tres tipos de autosimilitud:

**Autosimilitud exacta** . este es el tipo más restrictivo de autosimilitud: exige que el fractal parezca idéntico a diferentes escalas. A menudo la encontramos en fractales definidos por sistemas de funciones iteradas (IFS).

**Cuasiautosimilitud:** exige que el fractal parezca aproximadamente idéntico a diferentes escalas. Los fractales de este tipo contienen copias menores y distorsionadas de sí mismos. Matemáticamente D.Sullivan definió el concepto de conjunto cuasiauto-similar a partir del concepto de cuasi-isometría. Los fractales definidos por relaciones de recurrencia son normalmente de este tipo.

**Autosimilitud estadística** . Es el tipo más débil de autosimilitud: se exige que el fractal tenga medidas numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala. Los fractales aleatorios son ejemplos de fractales de este tipo.

## 4.2. Sistema de funciones iteradas

Entre dos figuras semejantes y distintas del plano euclídeo siempre existe una aplicación contractiva que transforma a la mayor en la menor. Esta aplicación contractiva es una composición de *isometrías* (traslaciones, giros y simetrías) y una homotecia contractiva. A continuación se muestran las transformaciones elementales del plano euclídeo cualquier otro giro, simetría u homotecia se puede obtener por composición de las transformaciones elementales siguientes, de la Figura 4.1. Teniendo en cuenta que toda se-

mejanza es una transformación afín [Mic88]

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

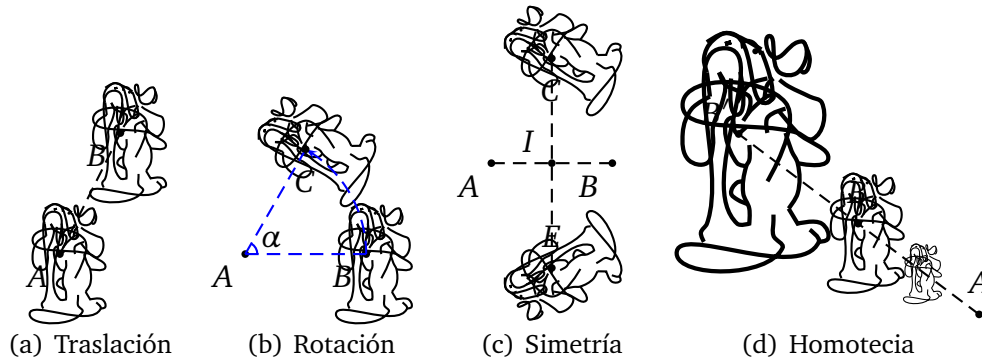


Figura 4.1: Transformaciones elementales

Para determinar el nuevo punto  $M_2$  mediante una traslación de  $\theta$  se obtiene las nuevas coordenadas respecto de esta con la ayuda de la siguiente Figura 4.2

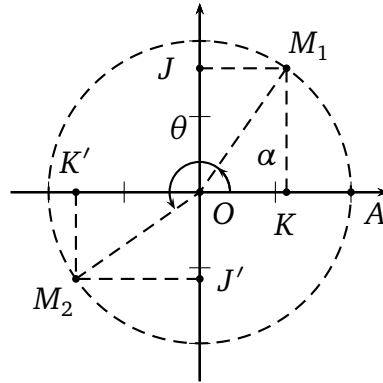


Figura 4.2: rotación de un punto

En la Figura 4.2 se tiene  $M_1 = (x, y) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$  y  $M_2 = (x', y') = (r \cos(\alpha + \theta), r \sin(\alpha + \theta))$  desarrollando

$$r \cos(\alpha + \theta) = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$r \sin(\alpha + \theta) = r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta = x \sin \theta - y \cos \theta$$

por eso  $(x', y') = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$

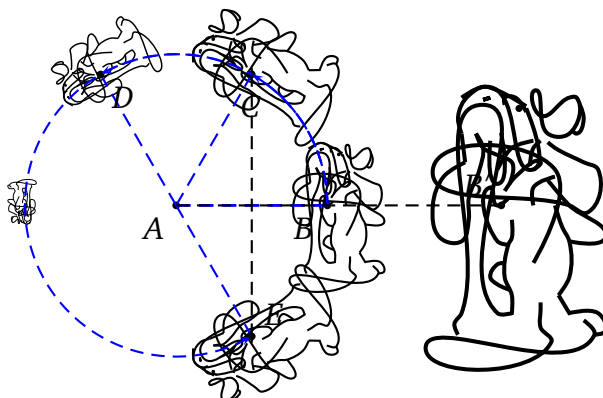


Figura 4.3: Composición de las transformaciones elementales anteriores

Veamos algunos ejemplos

**Ejemplo 4.1** consideremos el triángulo de Sierpinski  $T \subset \mathbb{R}^2$  con referencia a la Figura 4.4

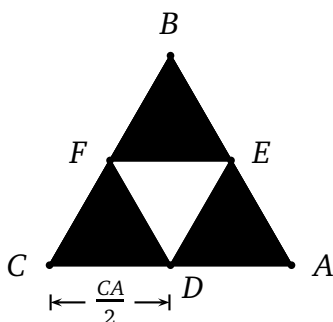


Figura 4.4: Aplicaciones contractivas sobre el Triángulo equilátero

Es posible hacer  $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = T$ , donde  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$  son los triángulos CDF, DAE y FEB. Cada parte  $T_i$   $i = 1, 2, 3$  es semejante al conjunto total  $T$ . Luego existirán semejanzas contractivas  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  tales que  $f_i(T) = T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  donde

$$T = f_1(T) \cup f_2(T) \cup f_3(T)$$



La semejanza  $f_1$  es una homotecia de centro en  $C$  y razón  $\frac{1}{2}$  luego  $f_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$  o matricialmente

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La semejanza  $f_2$  es una homotecia de centro en  $C$  y razón  $\frac{1}{2}$  seguida de una traslación de vector  $\overrightarrow{CD} = \left(\frac{1}{2}CA, 0\right)$ , luego  $f_2(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, 0\right)CD$

$$f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}CD$$

finalmente la semejanza  $f_3$  es una homotecia de centros en el origen y razón  $\frac{1}{2}$  seguida de una traslación del vector  $\overrightarrow{CF} = (CF \cos 60^\circ, CF \sin 60^\circ) = CF \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  luego  $f_3(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + CF \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  o en forma matricial

$$f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + CF \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

es fácil observar que cada una de las aplicaciones contractivas  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  tiene razón igual a  $\frac{1}{2}$ , en la misma Figura 4.4 se aplico las mismas aplicaciones contractivas a los triángulos  $CDF$ ,  $DAE$  y  $FEB$ , estos con contracciones de razón  $\frac{1}{2}$  sobre sus vertices  $C, D$  y  $F$  respectivamente generando la Figura 4.5(a).

**Ejemplo 4.2** consideremos la curva de Cosh  $K \subset \mathbb{R}^2$ . entonces  $K = \bigcup_{i=1}^4 K_i$  siendo  $K_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  las partes del curva de Cosh, se indican en la Figura 4.6 que son semejantes a la curva total  $K$ . Luego existirán semejanzas contractivas  $g_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  tales que  $g_i(K) = K_i$ , por tanto

$$K = \bigcup_{i=1}^4 g_i(K)$$

determinemos estas transformaciones. La semejanza  $g_1$  es una homotecia de centro  $A$  y razón  $\frac{1}{3}$ , luego

$$g_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

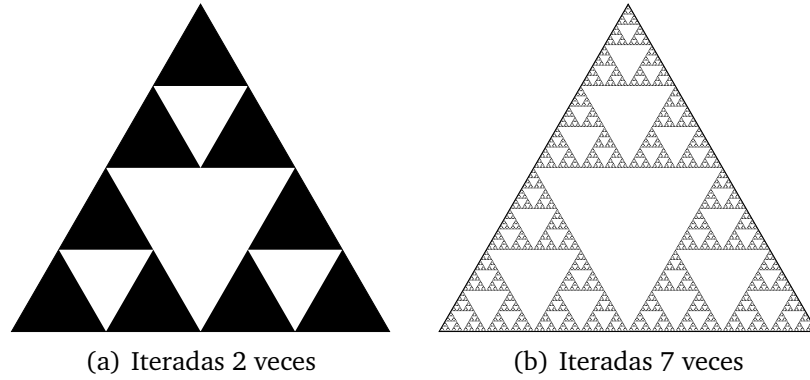


Figura 4.5: Triángulo de sierpinski

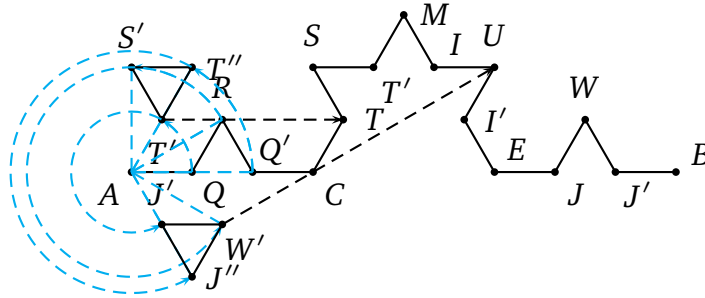


Figura 4.6: Curva de cosh

o equivalentemente  $g_1(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right)$ .

La semejanza  $g_2$  es una homotecia de centro en el origen y razón  $\frac{1}{3}$  seguida de un giro centrada en A de  $60^\circ$  seguido de una traslación del vector  $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$  es decir el triángulo  $ST'T$  es el resultado del triángulo  $S'T''T'$  luego

$$g_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

y desarrollando

$$g_2(x, y) = \left( \frac{x \cos 60^\circ - y \sin 60^\circ + 1}{3}, \frac{x \sin 60^\circ + y \cos 60^\circ}{3} \right).$$

La semejanza  $f_3$  es un homotecia de centro en el origen y razón  $\frac{1}{3}$  seguida de

un giro centrada en  $A$  de  $-60^\circ$ , seguida de una traslación de vector

$$\left( \frac{1}{9} \cos 60^\circ + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{1}}{9} \sin 60^\circ + \frac{1}{3} \tan 30^\circ \right) = \left( \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right)$$

, es decir el triángulo  $IUI'$  es el resultado del triángulo  $J'W'J''$  luego

$$g_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

y desarrollando

$$g_3(x, y) = \left( \frac{x \cos 60^\circ + y \sin 60^\circ}{2} + \frac{1}{2}, \frac{x \sin 60^\circ + y \cos 60^\circ}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right).$$

Po ultimo la semejanza  $f_4$  es una homotecia de centro en el origen y razón

$\frac{1}{3}$  seguidas de una traslación de vector  $(\frac{2}{3}, 0)$  luego  $g_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} +$

$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$  o bien  $f_4(x, y) = (\frac{x+2}{3}, \frac{y}{3})$  todas las aplicaciones  $g_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  son contractivas de razón  $\frac{1}{3}$

De esta manera se puede iterar este procedimiento como en la Figura 4.5.

Éste es el método (IFS) más usado para la generación de fractales, los demás métodos están involucrados con programas diversos entre ellos "Mathematica", otro programa es "Fractal-Quadratic", los cuales se lo puede descargar fácilmente. Para la elaboración de los siguientes ejemplos se recurrió al paquete "pst-fractal" del editor Latex.

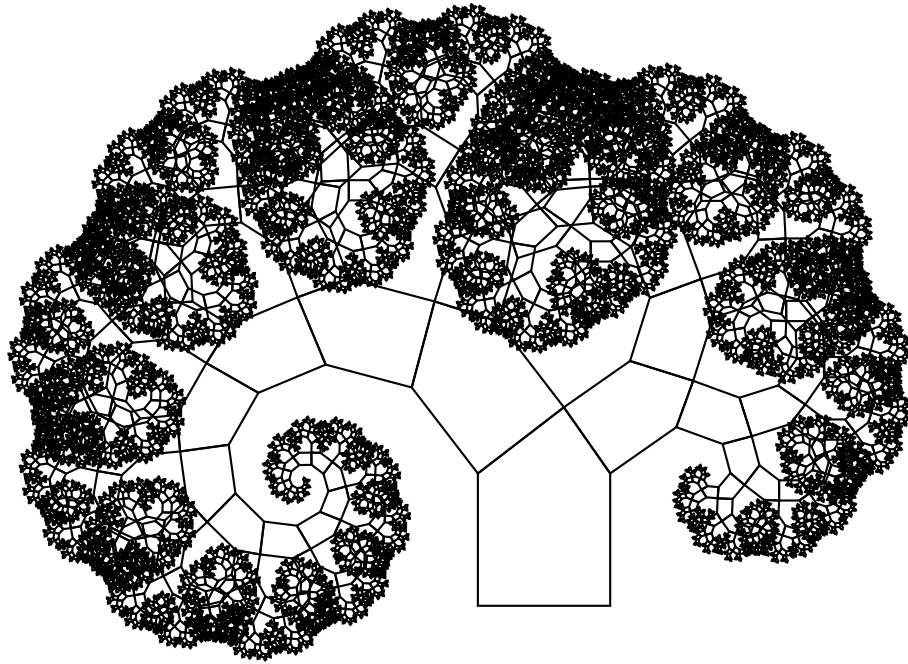


Figura 4.7: Arbol 1

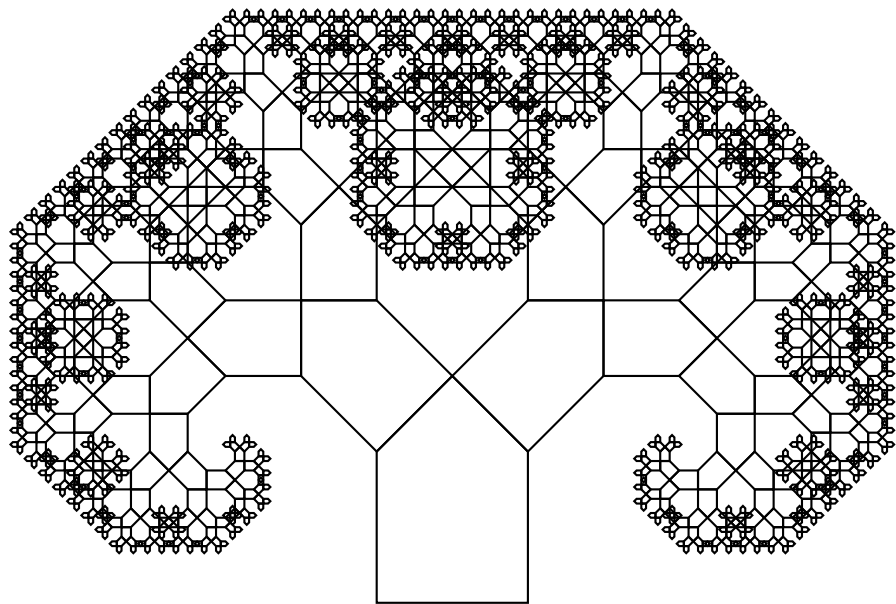


Figura 4.8: Arbol 2

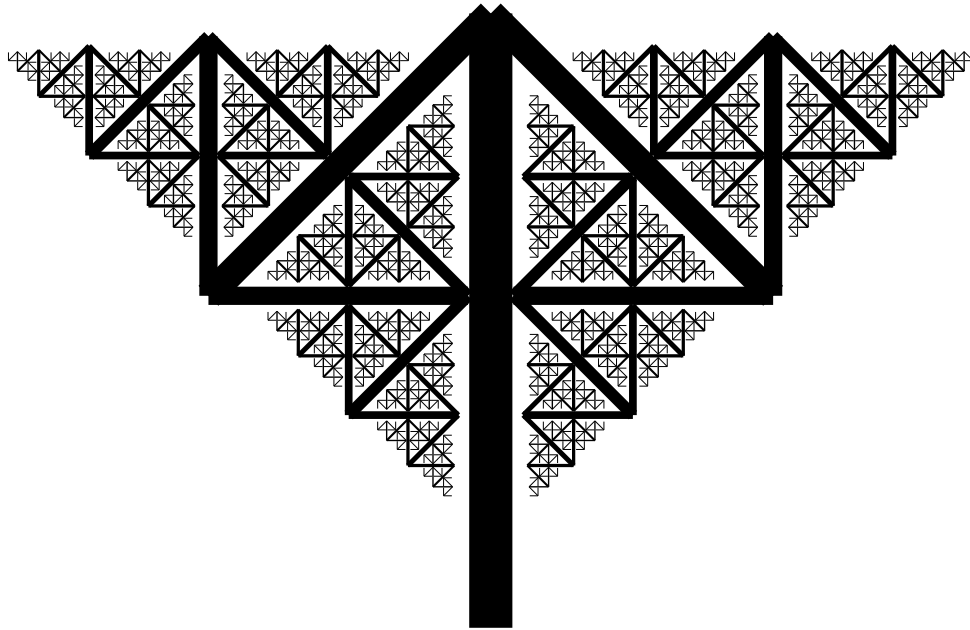


Figura 4.9: Arbol 3

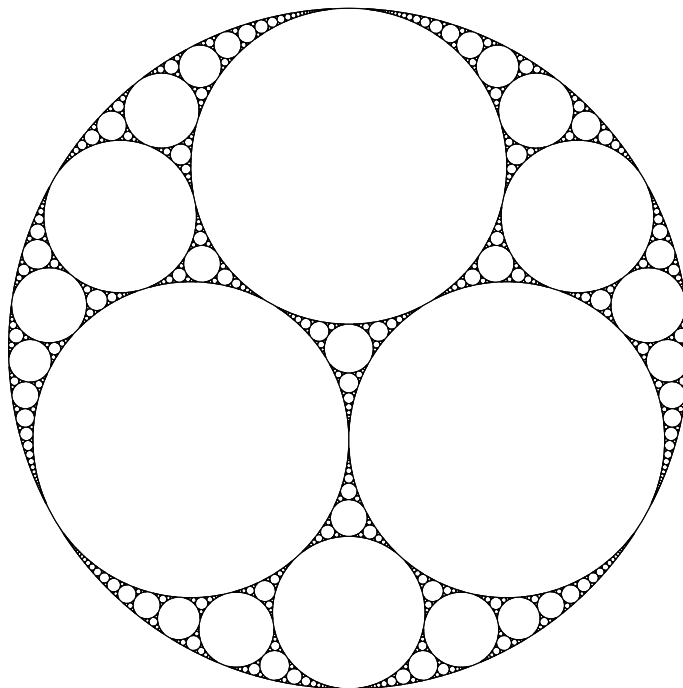


Figura 4.10: Circulo de Apollonius

Figura 4.11: Sierpinski 3d

Figura 4.12: Esponja de Menger

## Capítulo 5

# Principios de la composición plástica

### 5.1. El ritmo

El arte expresa el significado particular que se da, al entorno percibido, anexada a un modo peculiar de representación, y para expresarlo es necesaria la yuxtaposición adecuada de los elementos gráficos en una composición, a éste procedimiento se le conoce como el nombre de *ritmo* encargada de generar un bello lenguaje visual, dominarlo es cuestión de reconocer la variación armónica en el orden de los elementos compositivos de una obra de arte.

Para tener presente sobre como debe operarse, al generar ritmo en nuestros trabajos artísticos se tomaran referencias matemáticas donde se los puede asociar a nuestros objetos en una composición como se verá más adelante en la definición del ritmo, estos temas se tratan someramente sin recurrir a demostraciones matemáticas.

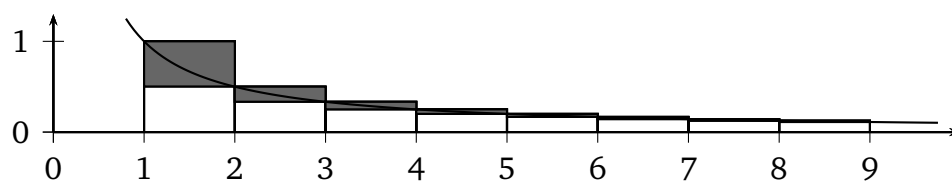
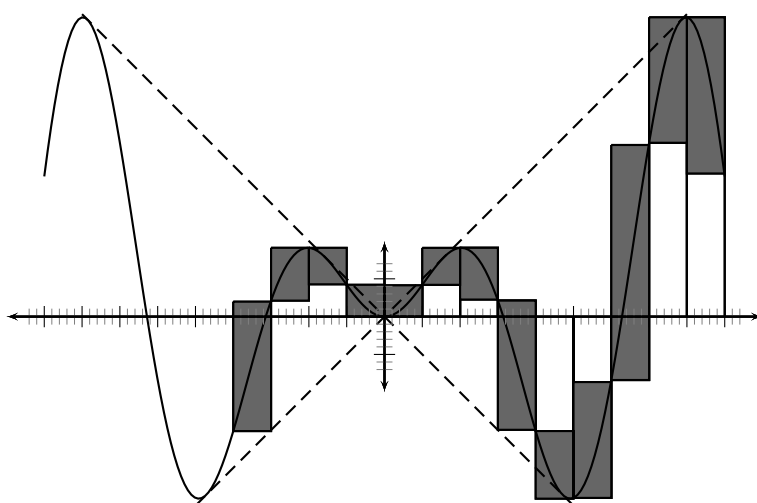
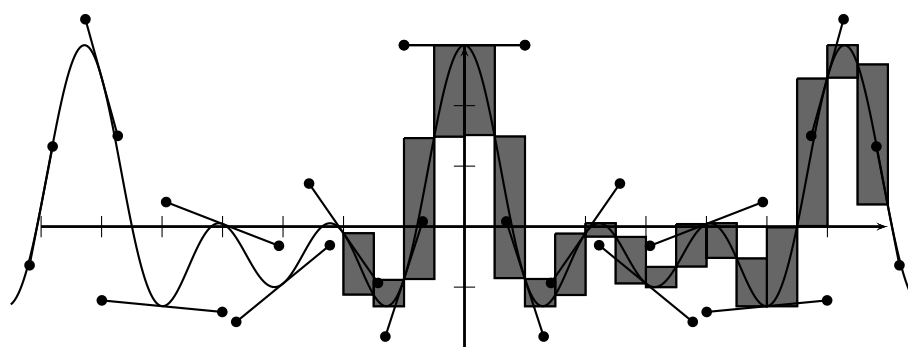
**Definición 5.1 (Sucesión)** Una sucesión de números reales es una función  $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$  que asocia a cada número natural  $n$  un número real  $x_n$ , llamado  $n$  – esimo termino de la sucesión.

Se escribe  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  o  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , o simplemente  $\cdot x_n$ , para indicar la sucesión cuyo  $n$  – esimo termino es  $x_n$ .

No debe confundirse la sucesión  $(x_n)$  con el conjunto  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  de sus términos. Por ejemplo, la sucesión  $(1, 1, \dots, 1, \dots)$  no es lo mismo que el conjunto  $\{1\}$ . O de otra manera la sucesión

$$(0, 1, 0, 1, \dots) \quad \text{y} \quad (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, \dots)$$

son diferentes pero el conjunto de sus términos es el mismo e igual a  $\{0, 1\}$ .

Figura 5.1: La sucesión  $\frac{1}{n}$ Figura 5.2: La sucesión  $n \sin(n)$ Figura 5.3: La sucesión  $\cos(n) + \cos(2n) + \cos(3n)$ 

Una sucesión  $x_n$  se dice acotada superiormente (respectivamente inferiormente) cuando existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $x_n \leq c$  (respectivamente  $x_n \geq c$ ) para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se dice que la sucesión  $(x_n)$  está acotada si lo está superiormente



e inferiormente. Esto decir que existe  $k > 0$  tal que  $|x_n| \leq k$  para todo  $n \in \mathbb{N}$

**Definición 5.2 (Serie)** Una serie es una suma  $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  con un números infinitos de sumandos. Para que esto tenga sentido escribiremos  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ . Como todo limite, este puede existir o no. Por eso hay series convergentes y divergentes. Por ejemplo la serie geométrica  $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a_n + \dots$  es convergente y su suma es  $\frac{1}{1-a}$  y la serie  $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$  también es convergente, y su suma es el número transcendental  $e$ , se observa que una serie genera una sucesión pues su suma parciales lo hacen es decir  $S_m = \sum_{n=1}^m a_n$  por ejemplo en la siguiente Figura 5.1 la sucesión  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\right)$  y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  con su sumas parciales  $S_m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n}$  generan sucesiones distintas; por lo tanto solo se usara el término sucesión para generar nuestros ritmos aunque implícitamente esté inmiscuido una serie en ella.

**Definición 5.3 (Ritmo)** El ritmo es la yuxtaposición armónica de sucesiones (aritméticas geométricas o cualquier otra) convergentes o no (divergente, constantes) donde una sucesión puede depender de otras; asociadas con los objetos por ejemplo con el ancho, largo, profundidad, distancias entre los objetos, la dirección de sus ejes con respecto a otras que también puedan depender de otra sucesión), un punto u otra serie, variación en la textura, el color, el equilibrio, centro de gravedad de los objetos, etc.

La creatividad fluirá mucho más eficientemente si se considera éste procedimiento de creación plástica, pues se tiene la certeza de como funciona, lo manipulado lo cual también implica, entender su funcionamiento de muchas maneras.

Tenemos un ejemplo en la Figura 5.4  $EF$  y  $GH$  son los objetos a los cuales se le aplicó una sucesión en la longitud horizontal de estos objetos (obsérvese que hay objetos antes y después de estos que siguen la misma estructura de la sucesión, lo cual debe generalizarse) tales que la longitud del objeto anterior es la mitad es decir que  $EF = 2GH$  esto es la sucesión  $2nk$  donde  $n \in \mathbb{N}$  y  $k$  un factor que contrae o expande tales longitudes proporcionalmente, también se observa otra sucesión en las distancia entre sus ejes horizontales tales como  $DE, FG$ , de manera que  $FG = DE + k$  donde  $k$  es cualquier constante que funciona semejante al caso anterior, es decir obedece a la sucesión  $\alpha + nk$  donde  $n \in \mathbb{N}$  y  $\alpha$  es un parámetro fijo; recuerde que se puede tomar otras sucesiones, distinta a estas con los mismos objetos y si se genera sucesiones a partir de otras estas también serán sucesiones.

Tenemos un ejemplo en la Figura 5.4  $EF$  y  $GH$  son los objetos a los cuales se le aplicó una sucesión en la longitud horizontal de estos objetos

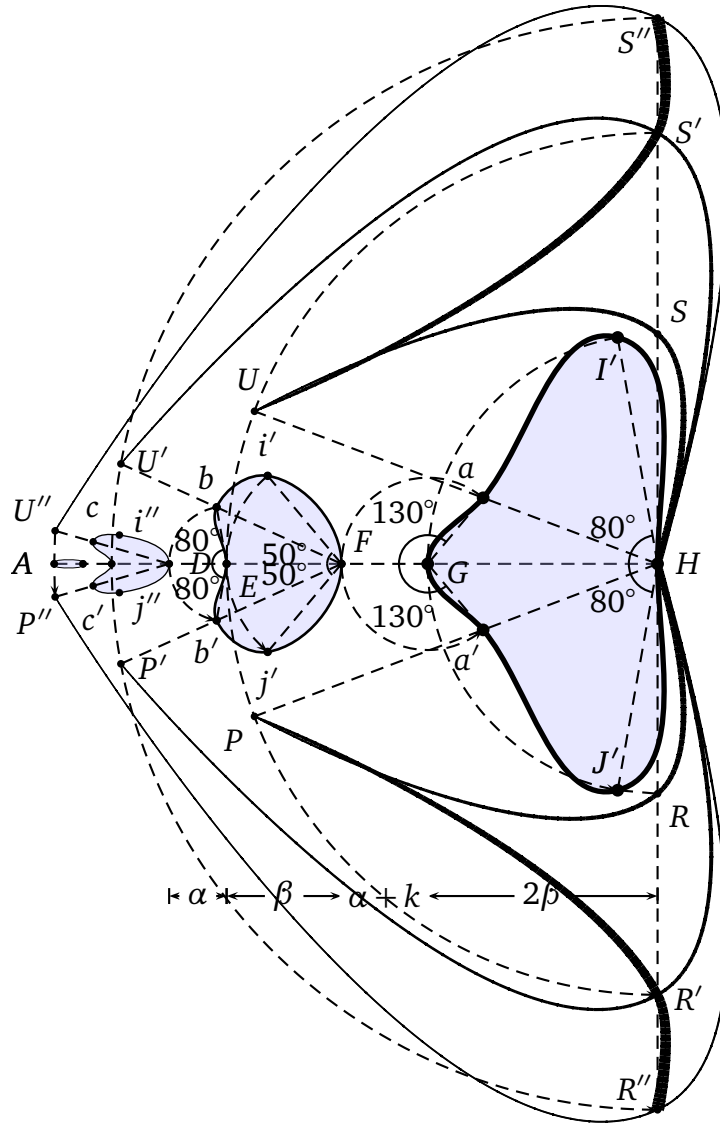


Figura 5.4: Sucesiones en una composición (simétrica)

(obsérvese que hay objetos antes y después de estos que siguen la misma estructura de la sucesión, lo cual debe generalizarse) tales que la longitud del objeto anterior es la mitad es decir que  $EF = 2GH$  esto es la sucesión  $2nk$  donde  $n \in \mathbb{N}$  y  $k$  un factor que contrae o expande tales longitudes proporcionalmente, también se observa otra sucesión en las distancia entre sus ejes horizontales tales como  $DE$ ,  $FG$ , de manera que  $FG = DE + k$  donde  $k$  es cualquier constante que funciona semejante al caso anterior, es decir

obedece a la sucesión  $\alpha + nk$  donde  $n \in \mathbb{N}$  y  $\alpha$  es un parámetro fijo; recuerde que se puede tomar otras sucesiones, distinta a estas con los mismos objetos y si se genera sucesiones a partir de otras estas también serán sucesiones.

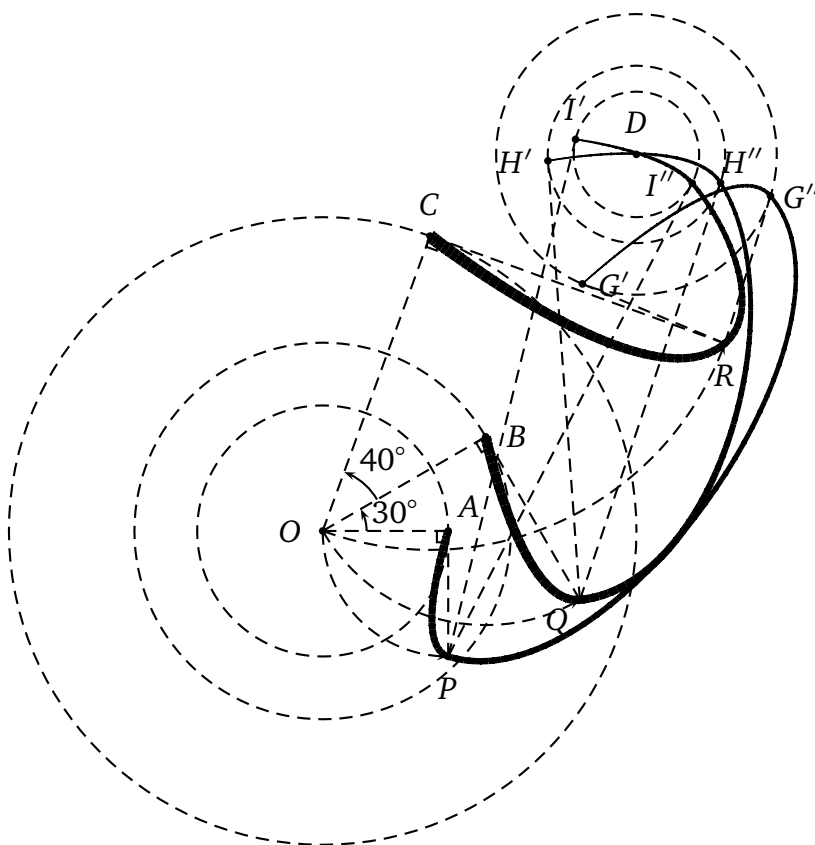


Figura 5.5: Sucesión en una composición (asimétrica)

Observe la sucesión de los pares de puntos  $b, b'$  y  $a, a'$  las cuales respectivamente se obtiene al girar  $D$  y  $F$  sobre los centros  $E$  y  $G$  de  $80^\circ$  y  $130^\circ$  a ambos lados de la línea  $AH$  los ángulos obedecen a la sucesión de Fibonacci multiplicado por 10 es decir  $10(1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$  lo cual en la Figura toma los valores  $10(\dots, 8, 13, \dots)$ ; de manera similar se procede para obtener los puntos  $i', j'$  y  $I', J'$  las cuales se giran los puntos  $E$  y  $G$  de  $50^\circ$  y  $80^\circ$  respectivamente sobre los centros  $F$  y  $H$  a ambos lados de la línea  $AH$ , donde también los ángulos obedecen a la sucesión de Fibonacci  $10(\dots, 5, 8, \dots)$  (corrido un elemento a la izquierda del caso anterior); los puntos  $U, U'$  y  $P, P'$  se obtiene al intersecar las líneas  $Fb', Fb$  con la circunferencia  $HE$  y las líneas  $Ha', Ha$  con la circunferencia  $HD$  respectivamente; se utilizó como

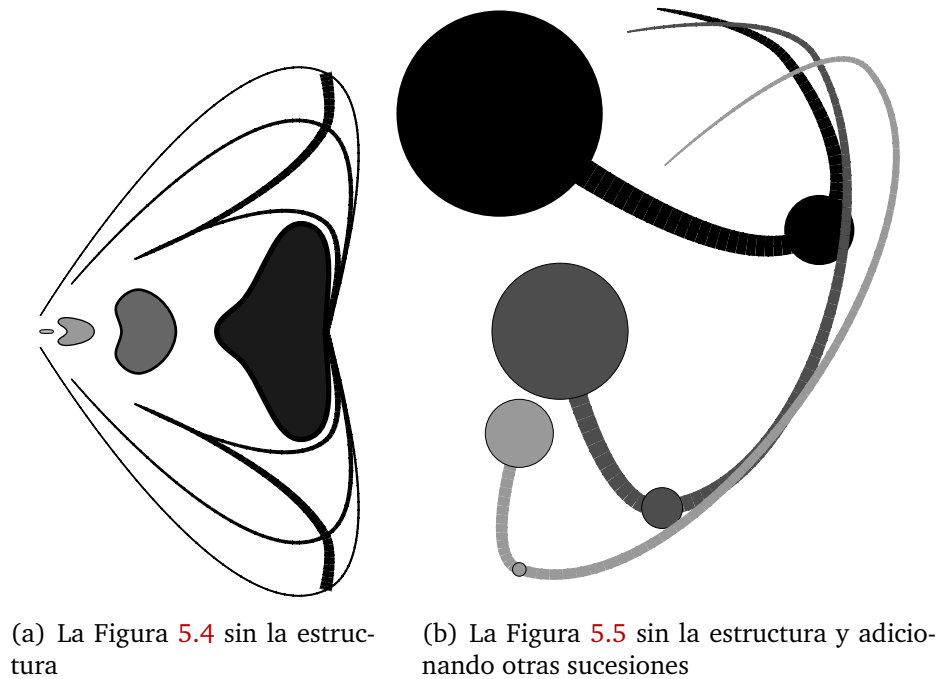


Figura 5.6: Composiciones sin estructura

base de nuestra nueva sucesión, las sucesiones precedentes lo cual también genera una sucesión. Los puntos  $S$ ,  $S'$  y  $R$  y  $S'$  son la proyecciones de los arcos sobre la línea vertical que pasa por  $H$  ( $S$  se obtiene al rotar  $G$  entrada en  $H$  un ángulo de  $90^\circ$  en sentido antihorario); finalmente las líneas de grosor variable se obtiene al unir convenientemente los puntos obtenidos lo cual no implica que sea la única manera.

Otro ejemplo, refiérase a la Figura 5.5 donde se genera el ritmo partir de dos conjuntos de circunferencias concéntricas con centros  $O$  y  $D$ , de radios que siguen la sucesión de Fibonacci multiplicado por un escalar  $\beta$  es decir  $\beta(\dots, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$  esto es  $OA = 2\beta$ ,  $OB = 3\beta$  y  $OC = 5\beta$  donde  $\beta$  es un parámetro (cuyo valor expande o contrae al conjunto), lo cual según el gráfico el valor de  $\beta$ , en el primer grupo es mayor que el del segundo grupo; en el primer grupo se ubican los puntos  $A, B, C$  de modo que  $\angle AOD = \angle BOC$  lo cual está relacionado con la sucesión  $kn = k(\dots, 3, 4, 5, 6, 7, \dots)$   $n \in \mathbb{N}$  en éste caso  $k = 10$  a partir de estos puntos se obtienen los puntos  $P, Q$ , y  $R$  al rotar  $90^\circ$  el punto  $O$  centrado en  $A, B$ , y  $C$  respectivamente; a partir de estos puntos se trazan las tangentes sobre la segunda sucesión de circunferencias centradas en  $D$ , de modo que el punto  $P$  que corresponde a la circunferencia menor del primer grupo, colocará sus dos puntos tangentes

sobre la circunferencia menor del segundo grupo (se pudo considerar al contrario) relativamente los puntos  $Q$   $R$  toman sus puntos tangentes sobre las circunferencias mayores del segundo grupo; de este modo se obtuvieron  $I''$   $H''$   $G''$   $I'$   $H'$  y  $G'$  en particular tomemos estos puntos para trazar las curvas  $APG''G'$ ,  $BQH''H'$  y  $CRI''I'$  de grosor variable.

En la Figura 5.6(a) se descartó la estructura y se adicionan un par de curvas simétricamente, el lector puede adicionar otras en su composición, relativamente en la Figura 5.6(b) se escondió la estructura (líneas punteadas) de la Figura 5.5, con la cual se obtuvo los puntos necesarios para generar el ritmo de esta figura, se pueden adicionar más formas que obedezcan a otra sucesión, derivada de alguna sucesión utilizada para generar éste gráfico, por ejemplo se adiciona sobre los primeros extremos de las curvas de grosor variable, círculos de radio variable, también sobre los segundos puntos estos de radio mucho menor que las anteriores que también siguen, una sucesión en particular, el objetivo es no hacerla rigurosa, es motivar a ser conscientes sobre como debe estructurarse los elementos en una composición la cual no necesariamente es monótona, esto es aplicable incluso en obras abstractas.

**Comentario 5.1** *Existen muchas sucesiones conocidas (sucesión de fibonacci, sucesión de los números naturales, sucesión de la sección áurea) para poder usarlas en nuestras composiciones es necesario considerar otras derivadas de estos o generadas por el artista plástico.*

## 5.2. Tópicos de perspectiva Cónica

Los punto de distancia  $P$  y  $P'$  son equidistantes con respecto al punto principal  $PP$ , lo cual se relaciona con la distancia entre la *línea del horizonte* que pasa por  $P$  y  $P'$  y la *línea de tierra* (paralela a la línea de horizonte) que pasa por los puntos  $F$  y  $E$  es decir  $h \leq d$  y es conveniente si  $h$  es menor que la mitad de  $d$  es decir si  $h \leq \frac{d}{2}$  ó  $h \leq d\infty$  este hecho se justifica porque al observar un cuadrado parado sobre uno de sus vértices y con la diagonal dirigida al punto  $PP$  lo más que se puede ver es un ángulo recto ( $d = h$ ) por debajo y esto no es posible si se observa oblicuamente es decir más alejado de los pies del observador, cuando  $d < h$  la figura se distorsiona. Todos los puntos sobre la línea del horizonte se llaman *puntos de fugas* como casos particulares tenemos a los puntos  $P$  y  $P'$  (llamados también *puntos de distancia* ) y  $PP$  (llamado *punto principal* )

Todas las líneas que convergen al punto principal  $PP$  generan un ángulo de  $90^\circ$  con respecto al línea de tierra refiérase a la Figura 5.8 esto es  $\widehat{EGPP} =$

The diagram illustrates the geometry of the optical system. It shows a horizontal dashed line representing the optical axis and a vertical dashed line representing the image plane. A horizontal distance  $d$  is marked between points  $P$  and  $P'$  on the optical axis. A vertical height  $h$  is marked between the optical axis and the image plane. A dashed arc represents the wavefront. Angles of  $135^\circ$ ,  $90^\circ$ , and  $45^\circ$  are indicated at various points, including  $F$ ,  $D$ ,  $N$ ,  $N'$ , and  $E$ .

$E\hat{D}PP = D\hat{E}PP = 90^\circ$ , las líneas que convergen a los puntos de distancia están inclinadas  $45^\circ$  con respecto a la línea de tierra es decir el ángulo que no contiene al otro punto de distancia, como  $P'\hat{D}E = P\hat{E}D = 45^\circ$ , el sector

comprendido entre las línea de horizonte y la línea de tierra se llama plano de tierra. De lo anterior se deduce que en el plano de tierra se tiene que  $DN' = N'E$  pues el triángulo rectángulo  $DNE$  recto en  $N'$  tiene catetos iguales por ser isósceles, también  $DN = DE$  pues ocurre lo mismo que en el caso anterior, Esto implica que, refiérase a la Figura 5.9 un punto en el plano geométrico por ejemplo  $M$  se puede ubicar al proyectar éste sobre la línea de tierra en el punto  $K$  se mide la longitud  $KM$  y se desplaza sobre la línea de tierra a partir del punto  $K$  es decir  $KH'$ , considerando uno de los extremos de este segmento se procede a unir con uno de los puntos de distancia en este caso  $P$  y el otro extremo con el punto principal  $PP$  de modo que estos dos nuevos segmentos se intersecan en  $N$ , si consideramos el otro punto de distancia  $P'$  es necesario desplazar el punto  $H'$  al lado izquierdo de  $K$  para que se intersequen, de lo contrario no lo harán, de la misma manera se obtiene el punto  $M'$  del plano geométrico, generando el punto  $N'$  en perspectiva.

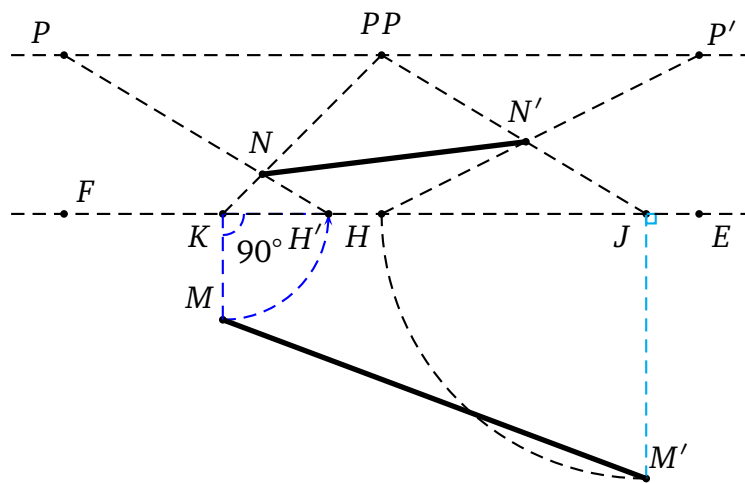


Figura 5.9: Incorrecto

Pero no es satisfactorio el resultado pues el objeto se refleja con respecto a la línea de tierra ahora consideremos la Figura 5.10 en este caso tenemos una línea aleatoria  $H'J'$  de referencia debajo de la línea de tierra, donde también serán proyectadas los puntos  $M$  y  $M'$ , de esta manera con los procedimientos anteriores, obtiene la línea desplazada y no reflejada como se deseaba; si se considera esta línea muy alejada de la línea de tierra resulta que el objeto en perspectiva (segmento  $NN'$ ) se acercará a la línea del horizonte, es decir se hará más pequeña.

Las sombras en perspectiva, refiérase a la Figura 5.11 se tiene una línea vertical  $NF$  hay tres posibles posiciones del foco luminoso (lámpara, sol,

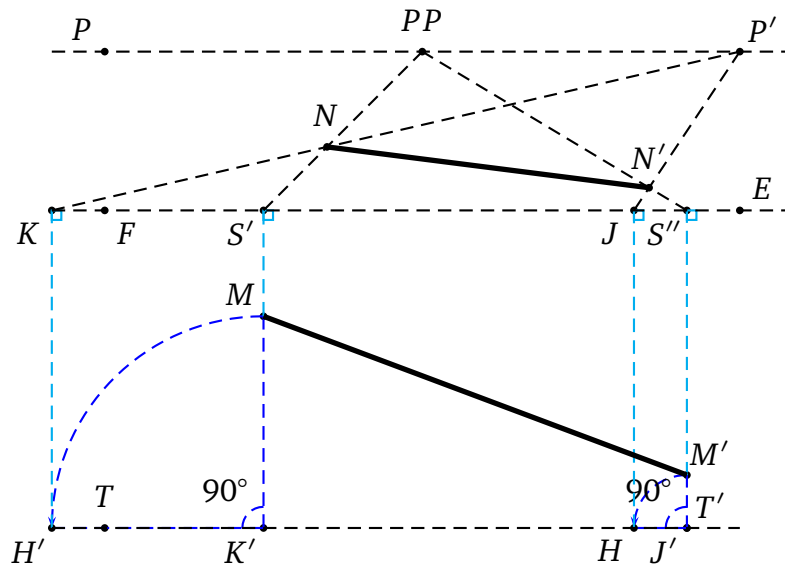


Figura 5.10: Correcto

etc.): posterior, frontal y lateral (en este caso los rayos luminosos tienen su punto de fuga en el infinito, derecho o izquierdo) consideremos el foco luminoso posterior  $S$ , ésta genera la sombra  $NG$  del objeto  $NF$ , al proyectar perpendicularmente el foco  $S$  en  $J$  sobre la línea del horizonte, el punto  $G$  es el resultado de intersecar las líneas  $SF$  y  $JN$  lo cual implica que cada uno de los punto del segmento  $NF$  se proyecta sobre el segmento  $NG$ . Consideremos un foco ilumino frontal donde obviamente sus rayos luminosos convergerán en algún punto debajo de la línea de horizonte, en función del ángulo como se vio en la Figura 5.9 si es perpendicular entonces sus rayos luminoso convergerá debajo del punto principal  $PP$  o diagonalmente si converge fuera de este punto por ejemplo cualquier punto del segmento  $(PP)P'$  sin considerar el punto  $PP$  en este caso se tiene una que converge con ángulo  $\alpha$ ,  $90^\circ < \alpha < 45^\circ$  pues esta dentro del segmento  $(PP)P'$  se deduce fácilmente que cualquier punto del segmento derecho indefinido que tiene como extremo izquierdo al punto  $P'$  implica que los rayos luminosos (paralelos) y el segmento de la línea del horizonte que contiene a los puntos  $P$  y  $P'$  hacen un ángulo  $\beta$  tal que  $45^\circ < \beta < 0^\circ$ , manera similar esta noción es válida si consideramos el lado izquierdo de la línea del horizonte a partir del punto  $PP$ . Si el foco luminoso está sobre el suelo entonces su punto de fuga está sobre la línea de horizonte y si ésta se desplaza hacia arriba o hacia abajo encontrara su punto de fuga abajo o arriba de la línea de horizonte tierra respectivamente, en función al desplazamiento del punto fuga de los rayos luminosos, sobre la línea de horizonte.



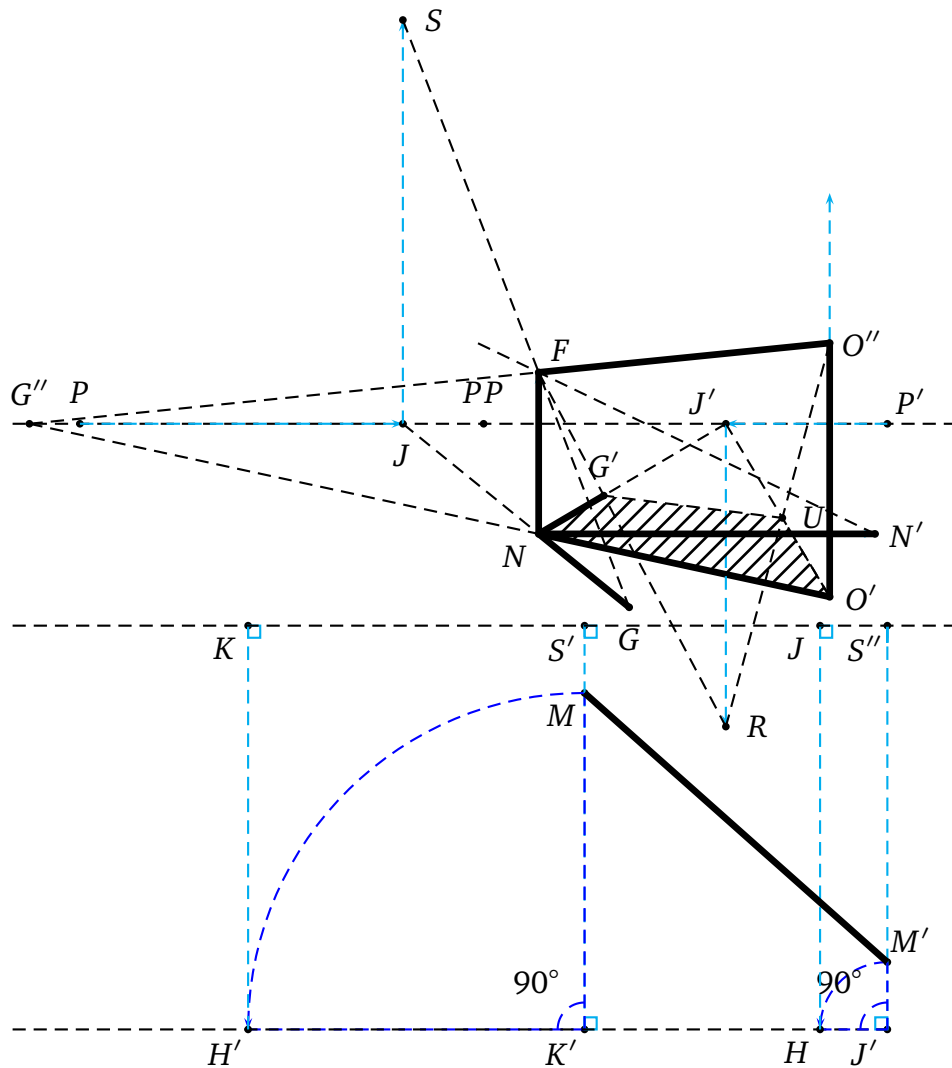


Figura 5.11: Sombras en perspectiva

Finalmente la sombra  $NN'$  del segmento  $NF$  generada por una luz lateral inclinada el ángulo  $\widehat{NN'F}$ , donde  $N'$  es la intersección de la línea horizontal  $NN'$  que parte de la base del segmento  $NF$  y la línea  $FN'$  que pasa por el extremo superior  $F$  y tiene la misma pendiente de las rectas generadas por los rayos luminosos con el plano de tierra.

En la misma Figura 5.11 se tiene un plano  $NO'O''F$  que se obtuvo con la ayuda del segmento  $NO'$  la cual al proyectarse indefinidamente hacia lado izquierdo interseca a la línea de horizonte en el punto  $G''$ , es decir es su punto de fuga, si lo es entonces lo será de otras líneas paralelas a ésta línea en particular de una que tiene su extremo en el punto  $F$  con la ayuda

de este punto se se obtiene el punto  $O''$  al intersecar la linea  $G''F$  con la linea perpendicular al suelo (vertical)  $O'O'' = NF$ , La sombra proyectada del segmento  $NF$  provocada por el foco luminoso que tiene como punto de fuga el punto  $R$ , es el segmento  $NG'$  que se obtiene como en el caso anterior (foco  $S$ ), de la misma manera se obtiene la sombra  $O'U$  del segmento  $O'O''$ , por tanto  $NO'UG'$  es la sombra del plano vertical  $NO'O''F$ , debido a un foco luminoso, que tienen como punto de fuga de sus rayos luminosos al punto  $R$ .

### 5.3. Canon

Razón es comparar dos longitudes a través de una fracción por ejemplo en la Figura 5.12 la razón de la longitud de los dos segmentos es  $\frac{\alpha}{\theta}$  o  $\frac{\theta}{\alpha}$  y proporción es la igualdad de dos razones es decir  $\frac{\alpha}{\theta} = \frac{k\alpha}{k\theta}$  éste concepto es importante para poder escalar un objeto plástico, a partir de un maqueta o boceto, si  $k = 1$  el objeto no modifica su tamaño si  $0 < k < 1$  el objeto decrece y si  $k > 1$  el objeto crece, el ejemplo de la figura 5.12(a) resulta cuando  $0 < k = \frac{1}{3} < 1$ , es decir ambas longitudes decrecen debido al factor  $k$ , debe notarse que una proporción implícitamente incluye la regla de tres simple pues si tenemos la razón  $\frac{\theta}{\alpha}$  al escalar una de las longitudes la otra se escala proporcionalmente con respecto a ésta, y se puede averiguar su longitud con la ayuda de la razón dada  $\frac{\theta}{\alpha} = \frac{AD}{AB}$  es decir si la longitud del segmento  $AB = \alpha$  escalada es  $\eta$ , entonces el valor de la longitud del segmento  $AD = \theta$  resultará de la igualdad  $\frac{\theta}{\alpha} = \frac{AD}{\eta} \iff AD = \frac{\theta\eta}{\alpha}$

Un método clásico de proporcionar las partes de un objeto es relacionar dos segmentos que unen punto importantes de éste (preferentemente puntos que debido al movimiento se mantiene equidistantes), relacionarlos mediante el siguiente procedimiento, de modo que al escalarlos solo se considere esta relación llamada razón, refiérase a la Figura 5.12, con el objetivo de obtener la razón  $\frac{CD}{AB}$ ; tómese uno de los segmentos por ejemplo  $AB$  y acomode de modo que coincida el extremo  $B$  con el extremo  $C$  del otro segmento y tengan la misma dirección que  $RC$  y longitud  $AB$ , observamos que  $CR$  supera al segmento  $DC$ , coincidiremos el residuo  $RD$  y coloquemoslo sucesivamente sobre la linea  $DC$  tales como  $DD'$ ,  $D'D''$ ,  $D''D'''$  y  $D'''D''''$ , hasta cubrir por completo el segmento  $DC$  consideremos otra vez el residuo  $D'''C$  al compararlo con el residuo anterior  $RD$  se verifica que  $\sigma = RD = 2D'''C = 2\eta$  aproximadamente donde  $D'''C = \eta$ , si se desea más exactitud se puede iterar el procedimiento anterior considerando los

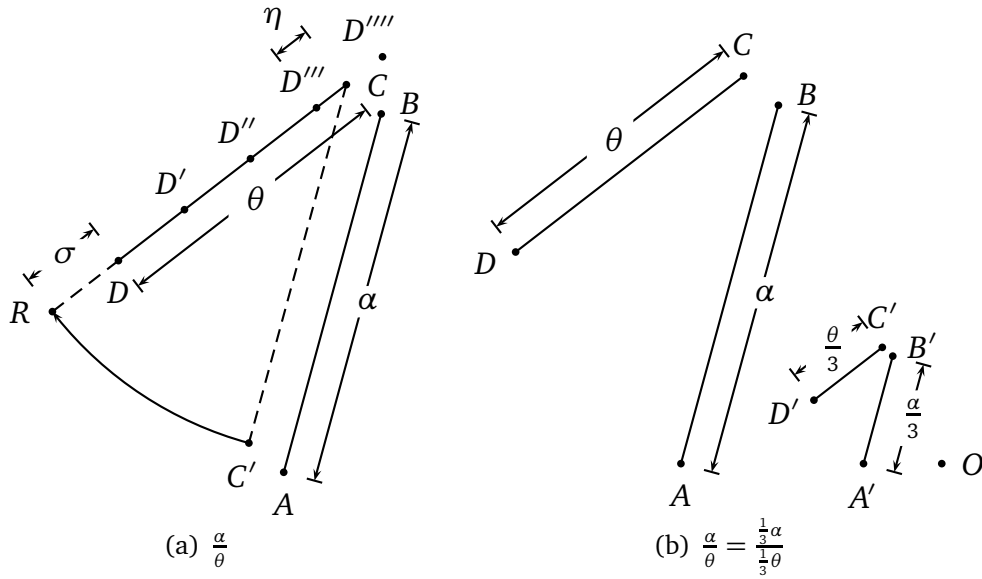


Figura 5.12: Razones y proporciones

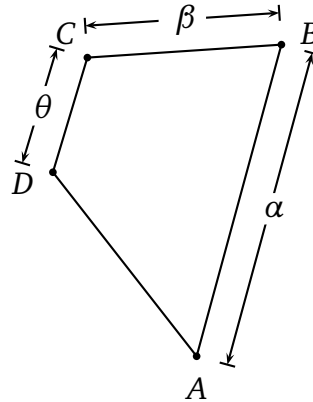


Figura 5.13: Asociando secuencialmente las longitudes

residuos y comparándolos. Se deduce finalmente que  $\alpha - \frac{3\alpha}{10} = AB - \frac{3AB}{10} = \theta = DC \iff \frac{7}{10}AB = DC = \theta$  de esto obtenemos la razón  $\frac{CD}{AB} = \frac{\theta}{\alpha} = \frac{7}{10}$  por lo tanto tenemos una razón que encadena la longitud de estos segmento mediante un razón, que servirá para proporcionalarlos, es decir según lo dicho en el párrafo anterior tenemos un  $K > 0$  con  $k \in \mathbb{R}$  que proporciona el objeto de la Figura 5.12(a) según  $K$ , esto es  $\frac{k\theta}{k\alpha} = \frac{k7}{k10}$ , en la Figura 5.12(b) se tiene el objeto escalado con  $K = \frac{1}{3}$ .

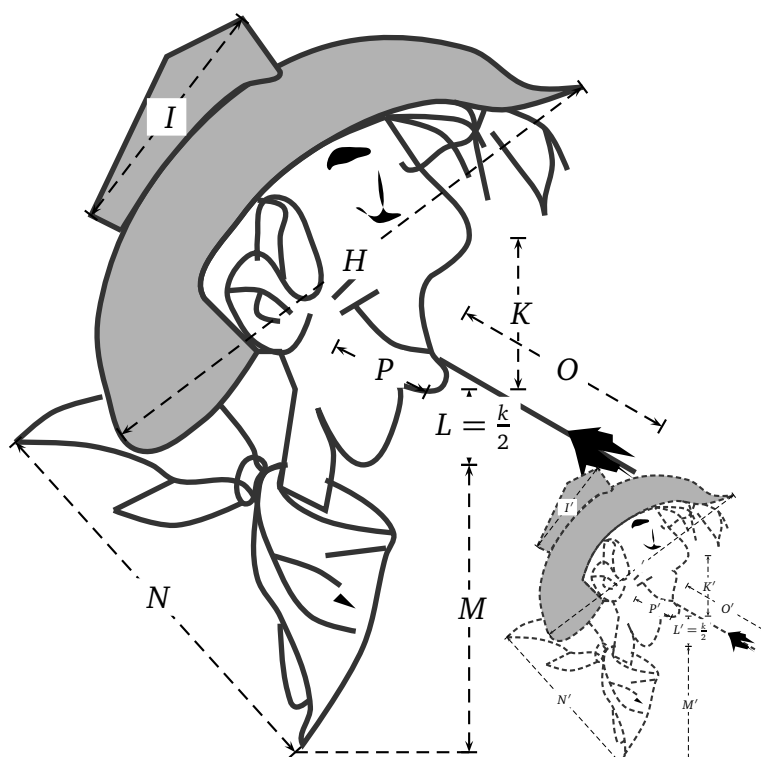


Figura 5.14:  $\frac{I}{H} = \frac{I'}{H'}$ ,  $\frac{I}{N} = \frac{I'}{N'}$  ...

Un canon es la generalización del caso anterior es decir relacionar mediante una razón cada uno de las partes de un objeto, de manera que cada una los segmentos estén relacionados dos a dos, a partir de un objeto dado, establecer relaciones de dos segmentos, mediante una razón a través del cual, una de estas longitudes involucradas  $\alpha$  o  $\beta$  en la razón  $\frac{\alpha}{\beta}$  lo esté con otras que aun no estén relacionados es decir si tenemos la razón  $\frac{\alpha}{\theta}$  dos longitudes involucradas y  $\frac{\alpha}{\theta}$  o  $\frac{\theta}{\beta}$  de la Figura 5.13.

En la Figura 5.13 se tiene el prototipo (modelo) de “Luke” (izquierda) al cual se le ha asociado razones, entre las longitudes de segmentos que unen, dos puntos importantes, en la práctica implica medir el segmento y obtener una razón, por ejemplo los segmentos  $I$  y  $K$  se relacionan mediante la fracción (razón)  $\frac{I}{K}$  proporcionando un valor real  $\mathbb{R}$  lo cual al escalaremos preservan la misma razón es decir debe ocurrir que  $\frac{I}{K} = \frac{I'}{K'}$  en la figura de la derecha (pequeña), este procedimiento se aplica para los demás segmentos.

# Capítulo 6

## Superficies

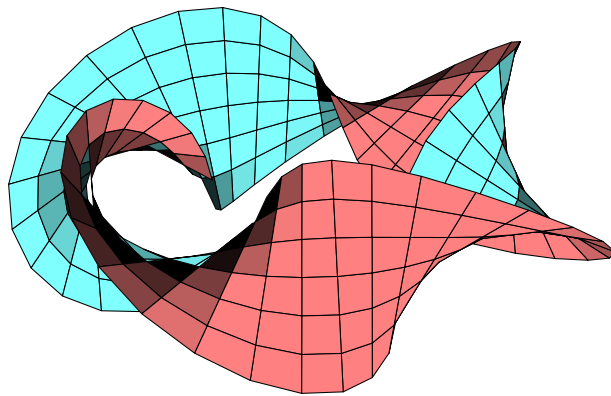


Figura 6.1: Superficie orientable

Una superficie es de hecho un conjunto de puntos de un espacio euclídeo que forma un espacio topológico bidimensional localmente, es decir, visto de cerca se parece al espacio euclídeo bidimensional. Así alrededor de cada punto de una superficie esta se aproxima bien por el plano tangente a la superficie en dicho punto.

Una superficie es una variedad bidimensional, es decir, un objeto topológico que localmente se parece al plano euclídeo (técnicamente localmente homeomorfo al plano). Eso significa que si tomamos una porción muy pequeña de la superficie es parecida a al plano euclídeo, al igual que en medio de una llanura la superficie local de la tierra nos parece plana.

## 6.1. Superficies cerradas

Intuitivamente una superficie cerrada en el espacio tridimensional es cualquier superficie que encierra un volumen, dividiendo a dicho espacio en una región “acotada” y una región “no acotada”.

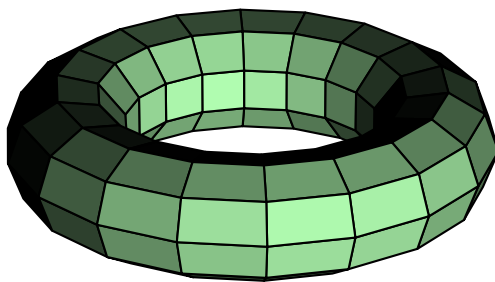


Figura 6.2: Superficie cerrada

Una superficie cerrada es una superficie que no tiene frontera.

- Puede comprobarse que en tres dimensiones una superficie sin frontera encierra un volumen, como por ejemplo la esfera y el toro o “donut”, estas superficies son además superficies orientables. De hecho todas las superficies cerradas inmersas en el espacio tridimensional son orientables,
- Otras superficies cerradas más exóticas son el plano proyectivo y la botella de Klein (definible en 4 dimensiones).
- Un disco (en  $\mathbb{R}^2$ ), un cilindro y la banda de Möbius son ejemplos de superficies con frontera. Como la Figura 6.3.

Intuitivamente una superficie es desarrollable si puede fabricarse a partir de un plano euclídeo mediante “doblado”. El cono y el cilindro son desarrollables, lo cual se manifiesta en que se pueden construir modelos apropiados a partir de una hoja de papel o cartulina plana. Una superficie reglada es cuando el plano tangente para cada punto de la misma contiene una línea recta completamente contenida sobre la superficie.

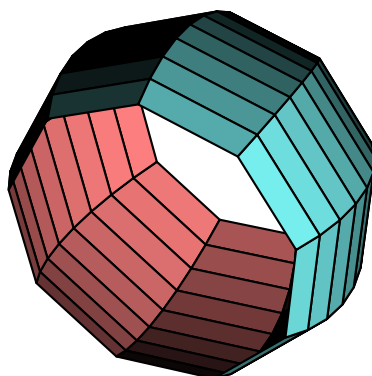


Figura 6.3: Superficie con frontera

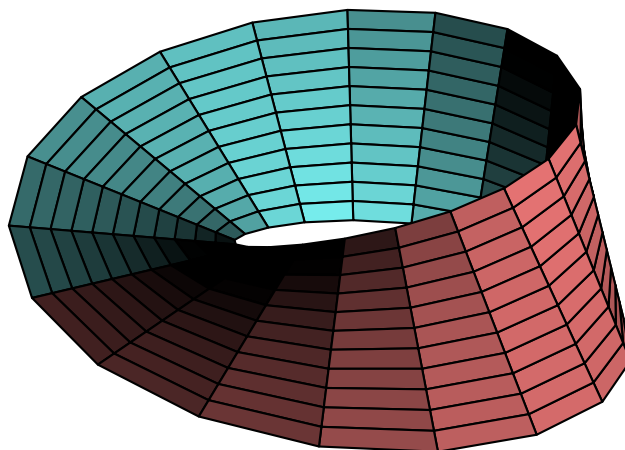


Figura 6.4: Superficie no orientable

## 6.2. Superficies orientables

Una última propiedad menos intuitiva es la de orientabilidad, que permite distinguir entre superficies orientables y no-orientables. Una superficie orientable es aquella que dado un vector ortogonal a la superficie en un punto, al trasladarse sobre la superficie existe una trayectoria cerrada que contiene al punto inicial, donde al trasladarse sobre esta trayectoria el vector se invierte en el punto inicial.

Las superficies orientables cerradas tienen la propiedad de dividir el espacio tridimensional (donde siempre pueden ser encajadas) en dos regiones diferentes y disjuntas: una acotada por dicha superficie que es de volumen finito y otra no acotada exterior a dicho volumen.

Este término se utiliza para distinguirlas de las superficies que no encierran nada en su interior, como un plano infinito en referencia al espacio tridimensional.

### 6.3. Clases de puntos sobre una superficie

Toda superficie se compone de 6 clases de puntos: puntos umbilicales, puntos elípticos, puntos hiperbólicos, puntos planos, puntos de arista y puntos aislados. Son aquellos caracterizados por que dado un entorno muy pequeño del punto la superficie se asemeja a una de la funciones: paraboloide circular, paraboloide elíptico, paraboloide hiperbólico, un plano, respectivamente; los puntos aristas son aquellas que están sobre una arista, finalmente el punto aislado es aquella que posee un entorno que no contiene ninguna superficie.

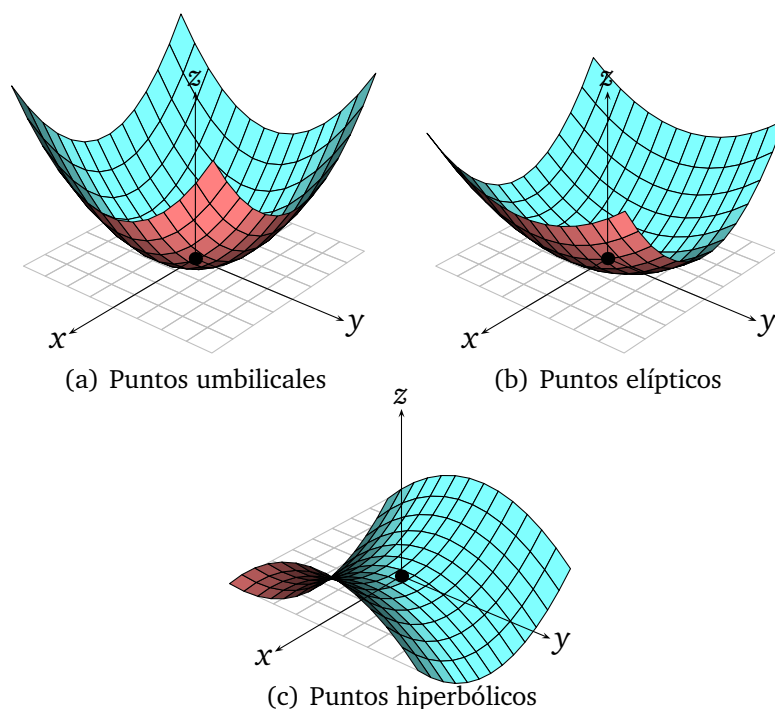


Figura 6.5: Clases de puntos sobre una superficie

El estudio topológico de las superficies implicaría adquirir noción sobre como debe manipularse estos, de manera no intuitiva y deducir factores interesantes para la creación plástica bidimensional, (con la ayuda de la perspectiva cónica) y tridimensional por ello es importante estructurarlo



de acuerdo a ciertos parámetros para que secuencialmente ésta se haga mucho más complejo y sistemático de manera que no exista ambigüedades en su uso, no tan lógico, como imploran los artistas, pues esto nos llevaría a situaciones caóticas, donde el arte aun no ha llegado y no llegará y esto implica que no hay razón para parametrarse por el rechazo, pues ignoramos.

## 6.4. Topología de las formas

Al asociar forma y espacio existen aspectos importantes que se debe considerar y poder interpretar las diferencias, existentes entre la posición o alguna relación de dos o más formas, identificarlas y etiquetarlas para manipularlas, es necesario estudiarlas considerándola como formas abstractas, donde sus propiedades estudiadas, fácilmente se la puede asociar a cualquier forma figurativa. Se espera involucrar los resultados obtenidos en este análisis al arte plástico, sin ningún inconveniente,  $X$  simbolizará a una forma bidimensional o tridimensional, es decir será un conjunto.

El concepto de espacio topológico se extiende más allá del estudio de la recta real y del espacio euclídeo (donde viven las formas bidimensionales y tridimensionales) y del estudio de las funciones continuas sobre estos espacios [RM08]

Figura 6.6: Espacio topológico

Sea  $X$  un conjunto  $X$  es un espacio topológico si tiene una colección de subconjuntos  $\mathcal{T}$  (este conjunto es una colección de secciones de  $X$ ) que verifican

- $\emptyset$  y  $X$  están en  $\mathcal{T}$ .
- La unión de los elementos de cualquier subcolección de  $\mathcal{T}$  están en  $\mathcal{T}$
- La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de  $\mathcal{T}$  están en  $\mathcal{T}$

Formalmente un espacio topológico es un par ordenado  $(X, \mathcal{T})$ . Si  $X$  es un espacio topológico con una topología  $\mathcal{T}$ , diremos que un subconjunto  $K$  de  $X$  es un *conjunto abierto* de  $X$  si  $K$  pertenece a la colección  $\mathcal{T}$ , lo cual implica que  $X$  es un espacio topológico si tiene una colección  $\mathcal{T}$  de subconjuntos abiertos de  $X$ , tales que  $\emptyset$  y  $X$  son ambos abiertos, tal que las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de conjuntos abiertos son abiertos.

Un ejemplo básico de un conjunto discreto (conjunto compuesto de elementos esparcidos) es  $X = \{a, b, c\}$ , hay varias topologías posibles sobre  $X$

Figura 6.7: Conjunto acotado

Formalmente un espacio topológico es un par ordenado  $(X, \mathcal{T})$

Una curva sobre la superficie puede encogerse en un punto entonces se dice que la superficie es conexa por caminos este tipo de conexidad es mucho mas fuerte que la conexidad mediante conjuntos pues pueden ser conexas mediante conjuntos pero no por caminos.

Figura 6.8: Conjunto desconexo



# Capítulo 7

## Apéndice

### 7.1. Sección cónica

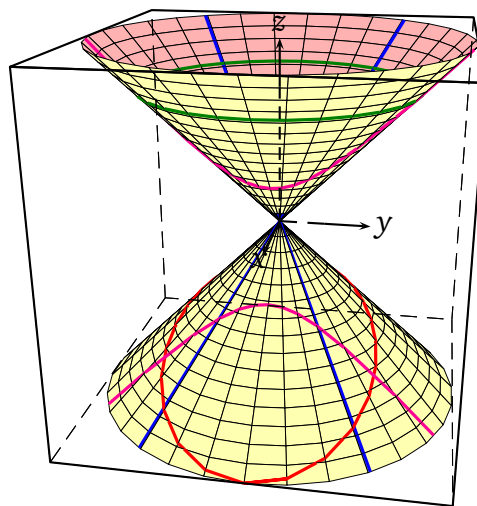


Figura 7.1: Cónicas

Se denomina sección cónica (o simplemente cónica) a todas las curvas intersección entre un cono y un plano; si dicho plano no pasa por el vértice, se obtienen las cónicas propiamente dichas. Se clasifican en tres tipos: elipse, parábola e hipérbola. Un cono circular recto.

En función de la relación existente entre el ángulo de conicidad  $\alpha$  y la inclinación del plano respecto del eje del cono  $\beta$ , pueden obtenerse diferentes secciones cónicas (cuando el plano no contiene al vértice  $E'$ ), a saber:

- $\beta < \alpha$ : Hipérbola

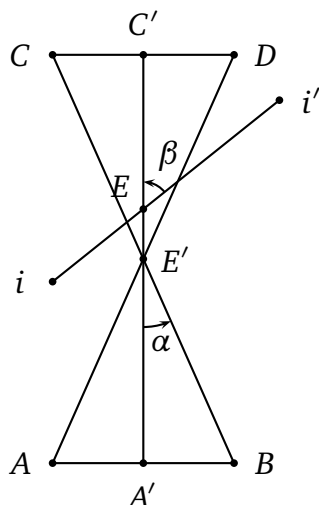


Figura 7.2:  $ii'$  plano de sección,  $C'A'$  eje del cono.

- $\beta = \alpha$ : Parábola
- $\beta > \alpha$ : Elipse
- $\beta = 90^\circ$ : Circunferencia (un caso particular de elipse)

Si el plano pasa por el vértice del cono, se puede comprobar que:

- Cuando  $\beta > \alpha$  la intersección es un único punto (el vértice).
- Cuando  $\beta = \alpha$  la intersección es una recta generatriz del cono (el plano será tangente al cono).
- Cuando  $\beta < \alpha$  la intersección vendrá dada por dos rectas que se cortan en el vértice. Cuando  $\beta$  tiende a 0 el ángulo entre las dos rectas es máxima y es mínima si  $\beta = \alpha$ .

## 7.2. Vector

En física, un vector (también llamado vector euclidiano o vector geométrico) es una herramienta geométrica utilizada para representar una magnitud física definida por su módulo (o longitud), su dirección (u orientación) y su sentido (que distingue el origen del extremo). Los vectores en un espacio euclídeo ( $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}$ ) se pueden representar geoméricamente como segmentos de recta dirigidos “flechas” en el plano o en el espacio.

En matemáticas se define un vector como un elemento de un espacio vectorial, esta noción es más abstracta y para muchos espacios vectoriales

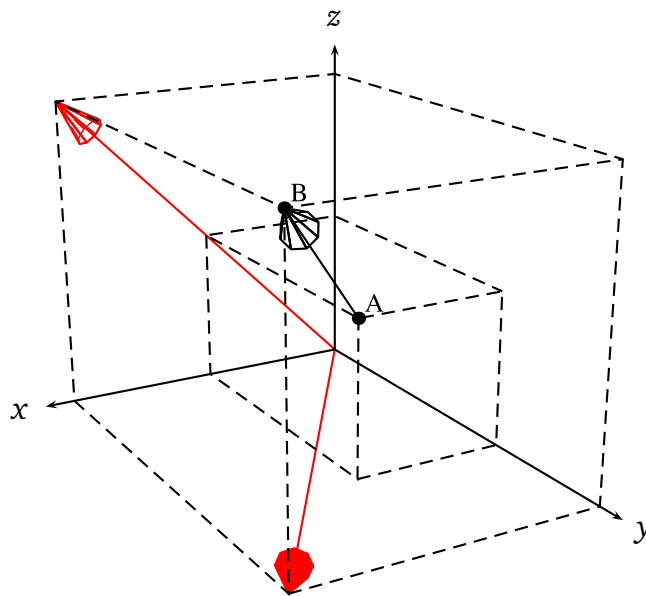


Figura 7.3: Vector en el espacio

no es posible representar sus vectores mediante el módulo, la longitud y la orientación.

Se llama vector de dimensión  $n$  a una tupla de  $n$  número real (que se llaman componentes del vector). El conjunto de todos los vectores de dimensión  $n$  se representa como  $\mathbb{R}^n$  (formado mediante el producto cartesiano).

Así, un vector  $v$  perteneciente a un espacio  $\mathbb{R}^n$  se representa como:  $v = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ , donde  $v \in \mathbb{R}^n$ . Un vector también se puede ver desde el punto de vista de la geometría como vector geométrico (usando frecuentemente el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$  ó bidimensional  $\mathbb{R}^2$ ).

Un vector fijo del plano es un segmento orientado, en el que hay que distinguir tres características:

- módulo: la longitud del segmento
- dirección: la orientación de la recta
- sentido: indica cual es el origen y cual es el extremo final de la recta

En inglés, la palabra “direction” indica tanto la dirección como el sentido del vector, con lo que se define el vector con solo dos características: módulo y dirección.

Se representa como un segmento orientado, con una dirección, dibujado de forma similar a una “flecha”. Su longitud representa el módulo del vector, la recta indica la dirección, y la “punta de flecha” indica su sentido.

Según los criterios que se utilicen para determinar la igualdad de dos vectores, pueden distinguirse distintos tipos de los mismos:

- Vectores libres: no están aplicados en ningún punto en particular.
- Vectores deslizantes: su punto de aplicación puede deslizar a lo largo de su recta de acción.
- Vectores fijos o ligados: están aplicados en un punto en particular.

Podemos referirnos también a:

- Vectores unitarios: vectores de módulo unidad.
- Vectores concurrentes o angulares: son aquellas cuyas direcciones o líneas de acción pasan por un mismo punto. También se les suele llamar angulares por que forman un ángulo entre ellas.
- Vectores opuestos: vectores de igual magnitud y dirección, pero sentidos contrarios. En inglés se dice que son de igual magnitud pero direcciones contrarias, ya que la dirección también indica el sentido.
- Vectores colineales: los vectores que comparten una misma recta de acción.
- vectores paralelos: si sobre un cuerpo rígido actúan dos o más fuerzas cuyas líneas de acción son paralelas.
- Vectores coplanarios: los vectores cuyas rectas de acción son coplanarias (situadas en un mismo plano).

Un vector en el espacio euclídeo tridimensional se puede expresar como una combinación lineal de tres vectores unitarios o versores perpendiculares entre sí que constituyen una base vectorial.

En coordenadas cartesianas, los vectores unitarios se representan por  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , paralelos a los ejes de coordenadas  $x$ ,  $y$ , y  $z$  positivos. Las componentes del vector en una base vectorial determinada pueden escribirse entre paréntesis y separadas con comas:  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  o expresarse como una combinación de los vectores unitarios definidos en la base vectorial. Así, en un sistema de coordenadas cartesiano, será  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ .

Para sumar dos vectores libres (vector y vector) se escogen como representantes dos vectores tales que el extremo final de uno coincida con el extremo origen del otro vector.



Este método permite solamente sumar vectores de dos en dos. Consiste en disponer gráficamente los dos vectores de manera que los orígenes de ambos coincidan en un punto, trazando rectas paralelas a cada uno de los vectores, en el extremo del otro y de igual longitud, formando así un paralelogramo. El vector resultado de la suma es la diagonal de dicho paralelogramo que parte del origen común de ambos vectores.

Dados dos vectores libres,

$$\mathbf{a} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k})$$

$$\mathbf{b} = (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k})$$

El resultado de su suma o de su diferencia se expresa en la forma

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \pm (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k})$$

y ordenando las componentes,

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x) \mathbf{i} + (a_y \pm b_y) \mathbf{j} + (a_z \pm b_z) \mathbf{k}$$

### 7.3. Superficies cuádricas

Una “cuádrlica” es una Superficie superficie determinada por una ecuación de la forma:  $P(x_1, x_2 \dots x_n) = 0$

donde P es un polinomio de segundo grado en las coordenadas  $x_1, x_2 \dots x_n$ .

Cuando no se precisa, es una superficie del espacio tridimensional real usual, en un sistema de coordenadas ortogonal y unitario, y las coordenadas se llaman  $x, y, z$ .

La ecuación normalizada de una cuádrlica tridimensional, centrada en el origen (0, 0, 0) de un espacio tridimensional, es:  $\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} \pm 1 = 0$ .

Por medio de traslaciones y rotaciones cualquier cuádrlica se puede transformar en una de las formas “normalizadas”. En el espacio tridimensional euclídeo, existen 16 formas normalizadas; las más interesantes son las siguientes:

- Elipsoide: Figura 7.4(a)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ 
  - Esferoide (caso particular de elipsoide)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$
  - Esfera (caso particular de esferoide)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0$
  - Paraboloide hiperbólico (caso particular de paraboloide): Figura 7.5(a)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$

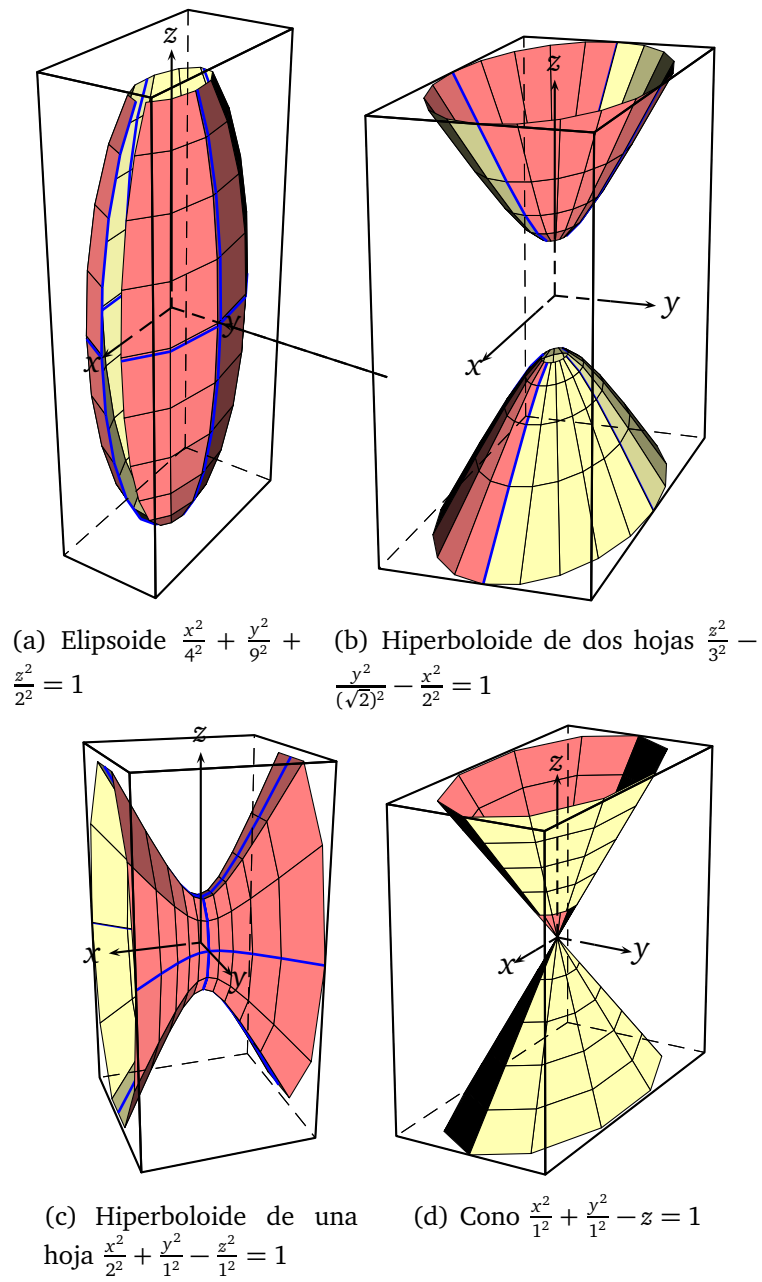


Figura 7.4: Cuádricas con centro

- Paraboloide elíptico (caso particular de paraboloide): Figura 7.5(b)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

- Paraboloide circular (caso particular de paraboloide elíptico)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - z = 0$
- Hiperboloide de una hoja (caso particular de hiperboloide): Figura 7.4(c)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$
- Hiperboloide de dos hojas (caso particular de hiperboloide): Figura 7.4(b)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$

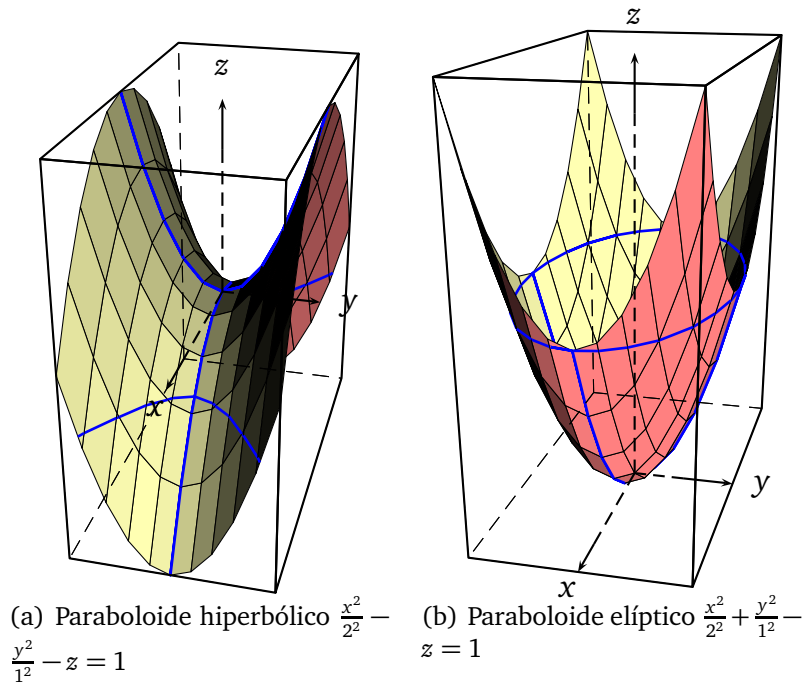


Figura 7.5: Cuádricas sin centro

- Cilindro elíptico (caso particular de cilindro): Figura 7.6(a)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ 
  - Cilindro circular (caso particular de cilindro elíptico)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0$
- Cilindro hiperbólico (caso particular de cilindro): Figura 7.6(b)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

- Cilindro parabólico (caso particular de cilindro): Figura 7.6(c)  $x^2 + 2ay = 0$

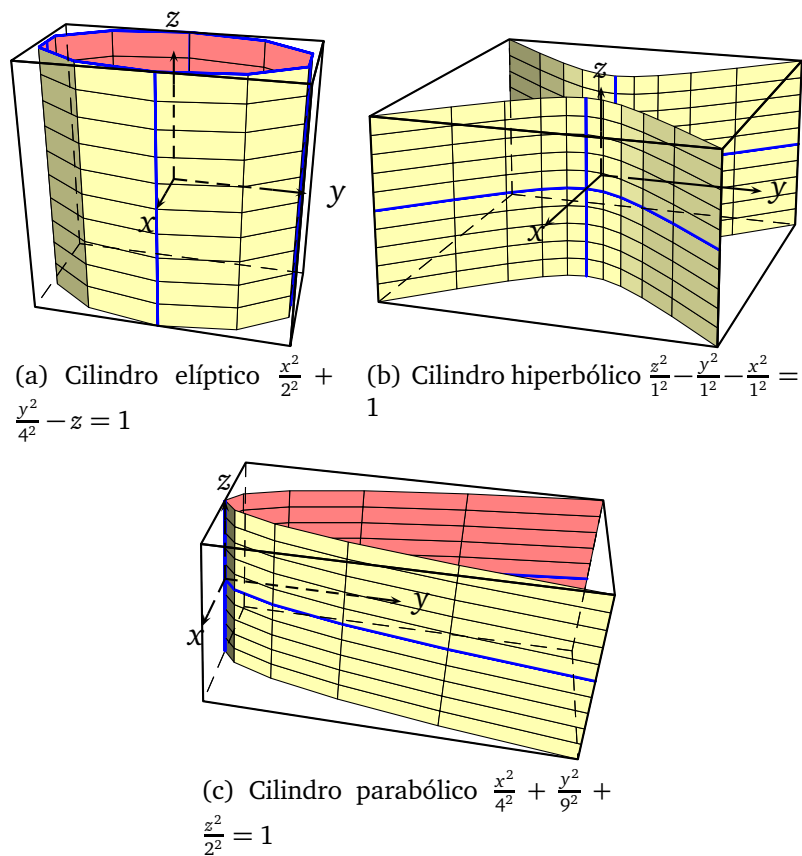


Figura 7.6: Cilindros

- Cono elíptico Figura 7.4(d)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
- Superficie cónica circular (caso particular de cono elíptico)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2} = 0$

# Índice de figuras

1.1.	Prototipo para el comportamiento geométrico de $\phi$ . . . . .	1
1.2.	$\frac{\theta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}$ . . . . .	3
1.3.	Las raíces de 1.1, 1.2 y 1.3 ubicadas en $S$ y $S'$ . . . . .	6
1.4.	Construcción $BY$ a partir del segmento mayor $AB$ , . . . . .	9
1.5.	Figura derivada de la Figura 1.1 . . . . .	9
1.6.	$\frac{AB}{YB} = \frac{A'R'}{R'O} = \phi$ . Se unió los procedimientos anteriores . . . . .	10
1.7.	$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AB} = \phi$ . . . . .	10
1.8.	El triángulo de Pascal y la sucesión de Fibonacci . . . . .	14
2.1.	Rectángulos Dinámicos $\sqrt{2}$ , $\phi$ , $\sqrt{3}$ , $\sqrt{5}$ , ... . . . .	16
2.2.	Averiguando el tipo de rectángulo . . . . .	17
2.3.	Rectángulos semejantes . . . . .	17
2.4.	Un rectángulo arbitrario . . . . .	18
2.5.	Cuadrado . . . . .	18
2.6.	$\sqrt{2}$ . . . . .	20
2.7.	$\sqrt{3}$ . . . . .	21
2.8.	$\sqrt{5}$ . . . . .	21
2.9.	$\phi$ . . . . .	22
2.10.	$\sqrt{\phi}$ . . . . .	23
2.11.	El Pentágono y el Triángulo Áureo y la Relación de sus Lados . . . . .	24
2.12.	Composición con los rectángulos $\phi$ , $\sqrt{5}$ , $\sqrt{\phi}$ y el pentágono. . . . .	25
3.1.	Guía bidimensional para construir el icosaedro . . . . .	28
3.2.	Icosaedro . . . . .	29
3.3.	Dodecaedro . . . . .	30
3.4.	Octaedro . . . . .	32
3.5.	Exaedro . . . . .	32
3.6.	Tetraedro . . . . .	33
3.7.	Dodecaedro truncado con coeficiente 0.3 . . . . .	34
3.8.	Tetraedro chaflanado con coeficiente 0.6 . . . . .	35

4.1. Transformaciones elementales . . . . .	39
4.2. rotación de un punto . . . . .	39
4.3. Composición de las transformaciones elementales anteriores . . . .	40
4.4. Aplicaciones contractivas sobre el Triángulo equilátero . . . .	40
4.5. Triángulo de sierpinski . . . . .	42
4.6. Curva de cosh . . . . .	42
4.7. Arbol 1 . . . . .	44
4.8. Arbol 2 . . . . .	44
4.9. Arbol 3 . . . . .	45
4.10. Circulo de Apollonius . . . . .	45
4.11. Sierpinski 3d . . . . .	46
4.12. Esponja de Menger . . . . .	46
5.1. La sucesión $\frac{1}{n}$ . . . . .	48
5.2. La sucesión $n \sin(n)$ . . . . .	48
5.3. La sucesión $\cos(n) + \cos(2n) + \cos(3n)$ . . . . .	48
5.4. Sucesiones en una composición (simétrica) . . . . .	50
5.5. Sucesión en una composición (asimétrica) . . . . .	51
5.6. Composiciones sin estructura . . . . .	52
5.7. Ritmo en el espacio . . . . .	54
5.8. Estructura del cono visual . . . . .	54
5.9. Incorrecto . . . . .	55
5.10. Correcto . . . . .	56
5.11. Sombras en perspectiva . . . . .	57
5.12. Razones y proporciones . . . . .	59
5.13. Asociando secuencialmente las longitudes . . . . .	59
5.14. $\frac{I}{H} = \frac{I'}{H'}, \frac{I}{N} = \frac{I'}{N'} \dots$ . . . . .	60
6.1. Superficie orientable . . . . .	61
6.2. Superficie cerrada . . . . .	62
6.3. Superficie con frontera . . . . .	63
6.4. Superficie no orientable . . . . .	63
6.5. Clases de puntos sobre una superficie . . . . .	64
6.6. Espacio topológico . . . . .	65
6.7. Conjunto acotado . . . . .	66
6.8. Conjunto disconexo . . . . .	67
7.1. Cónicas . . . . .	69
7.2. $ii'$ plano de sección, $C'A'$ eje del cono. . . . .	70
7.3. Vector en el espacio . . . . .	71
7.4. Cuádricas con centro . . . . .	74

<i>ÍNDICE DE FIGURAS</i>	79
7.5. Cuádricas sin centro . . . . .	75
7.6. Cilindros . . . . .	76





# Bibliografía

## Libros

- [ASY96] Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer y James A. Yorke. *Chaos and introduction to dynamical systems*. Ed. por Banchoff Thomas F. y col. 1.<sup>a</sup> ed. Springer Verlag, 1996.
- [BD89] Karl-Heinz Becker y Michael Dorfler. *Dinamical system and fractal*. Ed. por Ian Stewart. 3.<sup>a</sup> ed. New York: Cambridge University Press, 1989.
- [Cas05] Bill Casselman. *Mathematical Illustrations – a manual of geometry and PostScript*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [Cer03] J. Ceresal. *Método científicos de las investigaciones pedagógicas*. Ed. por Robert Drew Hicks. Lima Perú: Iplac, 2003.
- [Fal90] Kenneth Falconer. *Fractal Geometry*. Ed. por Jhon Wiley y Sons. 1.<sup>a</sup> ed. West Sussex PO19 IUD England, 1990.
- [Fer01] T. Fernandez. *Investigacion educativa*. Ed. por Robert Drew Hicks. Lima Perú: Iplac, 2001.
- [Ghy77] Matila Ghyka. *The Geometry of Art and Life*. Ed. por Jhon Wiley y Sons. 1.<sup>a</sup> ed. West Sussex PO19 IUD England, 1977.
- [GMS94] Michel Goossens, Frank Mittelbach y Alexander Samarin. *The LaTeX Companion*. 1.<sup>a</sup> ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1994. 528 págs.
- [Goo+07] Michel Goossens y col. *The LaTeX Graphics Companion*. 2nd. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 2007.
- [Hen93] Peter Henderson. *Object-oriented specification and design with C++*. London: McGraw-Hill, 1993.
- [Her06] R. Hernandez. *Metodología de la investigación*. Ed. por Robert Drew Hicks. 3.<sup>a</sup> ed. México: McGraw-Hill interamericana, 2006.

- [Hoe98] Alan Hoenig. *T<sub>E</sub>X Unbound: L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X & T<sub>E</sub>X Strategies, Fonts, Graphics, and More*. London: Oxford University Press, 1998.
- [Knu84a] Donald E. Knuth. *The T<sub>E</sub>Xbook*. Addison-Wesley, 1984.
- [Knu84b] Donald E. Knuth. *Computers & Typesetting*. 5 vols. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1984-1986.
- [Knu84c] Donald E. Knuth. *Computers & Typesetting*. Vol. A: *The T<sub>E</sub>Xbook*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1984.
- [Knu86a] Donald E. Knuth. *Computers & Typesetting*. Vol. B: *T<sub>E</sub>X: The Program*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1986.
- [Knu86b] Donald E. Knuth. *Computers & Typesetting*. Vol. E: *Computer Modern Typefaces*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1986.
- [Lam86] Leslie Lamport. *L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X: A Document Preparation System*. Addison-Wesley, 1986.
- [Lim97] Elon Lages Lima. *Análisis real*. Ed. por Camacho Cesar. 1.<sup>a</sup> ed. Peru: Academic Press. Inc, 1997.
- [Ma04] Frank Mittelbach y Michel Goossens et al. *The L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Companion*. 2nd. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 2004.
- [Mic88] Barnsley Michael. *Fractal Everywhere*. Ed. por Jhon Wiley y Sons. 1.<sup>a</sup> ed. 1250 Sixth Avenue, San Diego, CA 92101 Londres: Academic Press. Inc, 1988.
- [Mor94] Del Pino Morales. *Metodología de investigación*. Ed. por Robert Drew Hicks. Clarendon Oxford: Cambridge University Press, 1994.
- [Pac67] Luca Paccioli. *Divina Proporción*. Ed. por Jhon Wiley y Sons. 1.<sup>a</sup> ed. West Sussex PO19 IUD England, 1567.
- [RM08] James R. Munkres. *Topología*. Ed. por Robert Drew Hicks. Clarendon Oxford: Cambridge University Press, 2008.
- [Sal98] J. Saldaña. *Método de investigación*. Ed. por Robert Drew Hicks. Clarendon Oxford: Cambridge University Press, 1998.
- [Ven06] J. Armando Venero. *Introducción al análisis matemático*. 2.<sup>a</sup> ed. Lima Peru: Representaciones Jemar, 2006.
- [Vin77] Leonardo da Vinci. *Tratado Metódico de la Pintura*. Ed. por Jhon Wiley y Sons. 1.<sup>a</sup> ed. West Sussex PO19 IUD England, 1977.
- [Wal01] Hans Walser. *The golden section*. Ed. por The mathematical association of America. 1.<sup>a</sup> ed. West Sussex PO19 IUD England, 2001.

## Artículos

- [Rah96a] Sebastian Rahtz. “An introduction to PSTricks, part I”. En: *Baskerville* 6.1 (feb. de 1996), págs. 22-34.
- [Rah96b] Sebastian Rahtz. “An introduction to PSTricks, part II”. En: *Baskerville* 6.2 (abr. de 1996), págs. 23-33.

## Online

- [CTAN06] CTAN. *The Comprehensive TeX Archive Network*. 2006. URL: <http://www.ctan.org> (visitado 01-10-2006).
- [Itz96] Nissan Itzhaki. *Some remarks on 't Hooft's S-matrix for black holes*. Versión 1. 11 de mar. de 1996. arXiv:[hep-th/9603067](https://arxiv.org/abs/hep-th/9603067).
- [WS10] Jan Wassenberg y Peter Sanders. *Faster Radix Sort via Virtual Memory and Write-Combining*. Versión 1. 17 de ago. de 2010. arXiv:[1008.2849v1](https://arxiv.org/abs/1008.2849v1) [cs.DS].

## Colecciones

- [EB03] *The New Encyclopædia Britannica*. Ed. por Warren E. Preece. 15.<sup>a</sup> ed. 32 vols. Chicago, Ill.: Encyclopædia Britannica, 2003.
- [Gao01] Dilip Parameshwar Gaonkar, ed. *Alternative Modernities*. Durham y London: Duke University Press, 2001. ISBN: 0-822-32714-7.
- [Wes00] Gary Westfahl, ed. *Space and Beyond. The Frontier Theme in Science Fiction*. Westport, Conn. y London: Greenwood, 2000.

# Índice alfabético

- ángulos, 27
- adyacentes, 30
- aplicación contractiva, 38
- aristas, 27
- armónica, 49
- armonía, 15
- artes plásticas, 16
- autosemejante, 38
- autosimilar, 37, 38
- Autosimilitud estadística, 38
- Autosimilitud exacta, 38
- biunívocamente, 1
- cónicas, 2
- canon, 59
- caras, 27
- chaflanado, 27
- circunferencia, 2
- circunferencias concéntricas, 52
- composición, 47
- composición plástica, 16
- constante, 3
- convergentes, 49
- coordenadas, 3, 5
- curva de Cosh, 41
- decágono, 29
- diámetro, 7
- diagonal, 16
- dimensión fractal, 37
- dirección, 58
- diseño tridimensional, 27
- distribución armónica, 16
- divergentes, 49
- ecuación, 2
- eje, 2
- ejes coordenados, 16
- elementos plásticos, 16
- elipse, 2
- equiláteras, 28
- escala, 20, 38
- escalado, 59
- esfera, 27
- espacio bidimensional, 15
- espacio euclídeo bidimensional, 61
- espacio topológico, 61
- estructura, 53
- estructura básica, 37
- estructuras, 16
- estructuras naturales, 37
- extrema y media razón, 1
- Fibonacci, 51
- foco luminoso, 55
- fracción, 58
- fractal, 16
- fractus, 37
- fragmentada, 37
- franjas verticales, 20
- geometría fractal, 37
- hipérbola, 2
- homotecia, 38, 42
- inscrito, 32

- inscritos, 27
- intersecados, 22
- irregular, 37
- iterar, 16, 20, 58
- iterativo, 16
- ley de los senos, 23
- línea
  - horizonte, 53
  - tierra, 53
- luz lateral, 57
- maqueta, 58
- movimiento, 58
- número oro, 1
- número racional, 15
- números trascendentes, 7
- no acotada, 63
- objeto geométrico, 37
- orientabilidad, 63
- orientables, 62
- parábola, 2
- partición, 22
- pendiente, 16
- pendientes, 20
- pentágono, 24
- perpendicular, 28
- perpendicularmente, 23
- plano de tierra, 55
- plano geométrico, 55
- poliedros, 28
- progresión geométrica, 8
- propiedades matemáticas, 15
- proporción, 7
- proporcionalmente, 49
- proporciones, 17
- prototipo, 60
- proyección, 19
- proyección ortogonal, 29
- punto
  - distancia, 53
  - fuga, 53
  - principal, 53
- raíz, 7
- rayos luminosos, 55
- razón, 7, 43, 58
- rectángulos
  - dinámicos, 15
  - estáticos, 15
- recta, 2
- reflejo, 55
- región “acotada”, 62
- regla de tres simple, 58
- regulares, 27
- Relaciones métricas, 28
- residuo, 58
- ritmo, 47
- sólidos platónicos, 28
- sólidos regulares, 27
- sagita, 29
- sección áurea, 1
- serie, 8
- serie geométrica, 49
- series, 52
- sistemas de funciones iteradas, 38
- sombras en perspectiva, 55
- subdivisión, 16
- subdivisiones armónicas, 19
- sucesión acotada, 48
- superficie es desarrollable, 62
- superficies con frontera, 62
- teoría de la medida, 37
- Teorema de Pitágoras, 28
- traslación, 42
- triángulo áureo, 24
- Triángulo equilátero, 40
- triángulos rectángulos, 28
- Truncando, 34

una región “no acotada”, 62  
unidad y la variedad, 16

vértice, 3, 27

variables, 3

variedad bidimensional, 61

volumen, 62

volumen finito, 63

yuxtaposición, 47