

Metody numeryczne, projekt 2: Aproksymacja profilu wysokościowego

Franciszek Fabiński - s197797

3 czerwca 2025

1 Wstęp teoretyczny

Tematyką drugiego projektu jest aproksymacja profilu wysokościowego z wykorzystaniem dwóch metod:

- **Interpolacja Lagrange'a**
- **Splajny kubiczne**

Profil wysokościowy to wykres przedstawiający wysokość bezwzględną terenu w zależności od współrzędnej poziomej. W praktyce profil wysokościowy przydaje się np. w geodezji, gdzie jest wykorzystywany do wyznaczania kształtu terenu, a także przy planowaniu wycieczek turystycznych.

Aproksymacja funkcji stanowi jeden z fundamentalnych problemów analizy numerycznej. W praktyce zbiory danych prawie zawsze są dyskretnie, więc znalezienie funkcji ciągłej, która dobrze aproksymuje dane jest często kluczowe.

Do wykonania tego zadania wykorzystałem bibliotekę **NumPy** do operacji numerycznych oraz **Matplotlib** do wizualizacji wyników.

1.1 Interpolacja Lagrange'a

Interpolacja wielomianowa Lagrange'a pozwala na konstrukcję wielomianu stopnia co najwyżej $n - 1$ dla n punktów węzłowych. Główną zaletą tej metody jest prostota implementacji oraz możliwość bezpośredniego obliczenia wartości funkcji interpolującej w dowolnym punkcie bez konieczności wyznaczania współczynników wielomianu. Jednak dla dużej liczby punktów węzłowych metoda ta może prowadzić do niestabilności numerycznej oraz niepożądanych oscylacji, szczególnie w pobliżu brzegów przedziału interpolacji (zjawisko Rungego).

1.2 Splajny kubiczne

Splajny kubiczne stanowią alternatywę dla interpolacji wielomianowej wysokiego stopnia. Metoda ta polega na podziale przedziału interpolacji na mniejsze segmenty i aproksymacji danych za pomocą wielomianów trzeciego stopnia w każdym z tych segmentów. Kluczową właściwością splajnów kubicznych jest zapewnienie ciągłości funkcji oraz jej pierwszej i drugiej pochodnej w punktach węzłowych, co gwarantuje gładkość wynikowej krzywej. Splajny charakteryzują się również lepszą stabilnością numeryczną oraz mniejszą tendencją do tworzenia niepożądanych oscylacji w porównaniu do interpolacji wielomianowej wysokiego stopnia.

2 Formalizm matematyczny

2.1 Interpolacja Lagrange'a

Dla zbioru n punktów węzłowych $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$, gdzie wszystkie x_i są różne, wielomian interpolacyjny Lagrange'a ma postać:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot L_i(x) \quad (1)$$

gdzie $L_i(x)$ to wielomiany bazowe Lagrange'a zdefiniowane jako:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (2)$$

Każdy wielomian bazowy $L_i(x)$ ma właściwość:

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } k = i \\ 0 & \text{jeśli } k \neq i \end{cases} \quad (3)$$

Dzięki tej właściwości wielomian $P(x)$ przechodzi przez wszystkie punkty węzłowe: $P(x_i) = y_i$ dla $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Stopień wielomianu interpolacyjnego wynosi co najwyżej $n - 1$, gdzie n to liczba punktów węzłowych.

2.2 Splajny kubiczne

Splajn kubiczny dla przedziału $[x_0, x_n]$ z punktami węzłowymi $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ składa się z wielomianów trzeciego stopnia $S_i(x)$ w każdym podprzedziale $[x_i, x_{i+1}]$ dla $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Każdy segment splajnu ma postać:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad (4)$$

dla $x \in [x_i, x_{i+1}]$, gdzie $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Warunki brzegowe i ciągłości

Dla splajnu kubicznego naturalnego ustala się następujące warunki:

1. Interpolacja w punktach węzłowych:

$$S_i(x_i) = y_i \quad (5)$$

$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad (6)$$

2. Ciągłość pierwszej pochodnej:

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) \quad (7)$$

gdzie $S'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2$.

3. Ciągłość drugiej pochodnej:

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}) \quad (8)$$

gdzie $S''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i)$.

4. Warunki brzegowe splajnu naturalnego:

$$S''_0(x_0) = 2c_0 = 0 \quad (9)$$

$$S''_{n-1}(x_n) = 2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1} = 0 \quad (10)$$

gdzie $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Układ równań

Powyższe warunki prowadzą do układu $4n$ równań liniowych z $4n$ niewiadomymi (współczynniki a_i, b_i, c_i, d_i dla każdego segmentu $i = 0, 1, \dots, n - 1$).

Układ można zapisać w postaci macierzowej $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, gdzie: - $\mathbf{x} = [a_0, b_0, c_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, d_{n-1}]^T$ - \mathbf{b} zawiera wartości y_i w odpowiednich pozycjach oraz zera dla warunków ciągłości

Rozwiążanie tego układu pozwala na wyznaczenie wszystkich współczynników splajnu.

3 Analiza wyników

Źródłem danych do aproksymacji były dla mnie zamieszczone przez prowadzącego dane w pakiecie **2018_paths.zip**, które zawierały dane wysokościowe dla różnych tras. W projekcie skupiłem się na czterech trasach:

- **Trasa 1:** Profil Wysokościowy Wielkiego Kanionu
- **Trasa 2:** Profil Wysokościowy Mount Everest
- **Trasa 3:** Profil wysokościowy "spacerniak"
- **Trasa 4:** Profil wysokościowy "ostrowa"

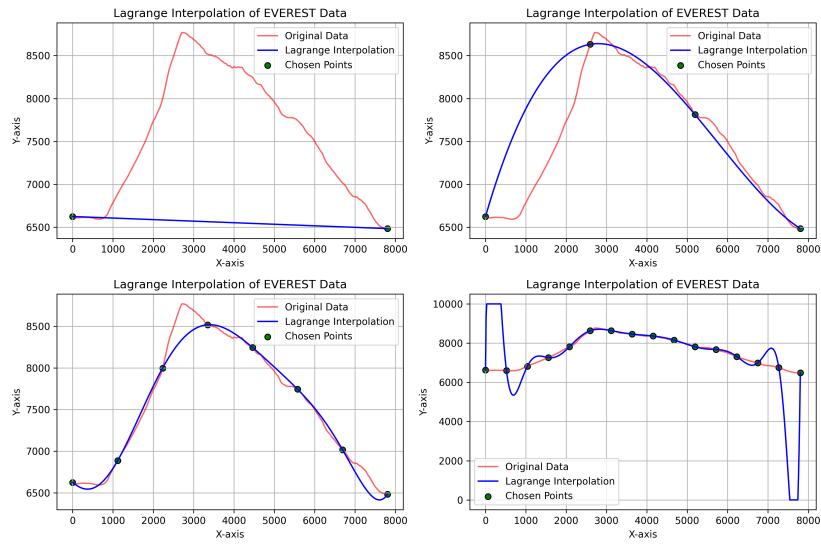
Wszystkie trasy na potrzeby obliczeń interpolacji zostały przeskalowane do dziedziny $[0, 1]$.

Do aproksymacji wykorzystałem następujące wartości wyznaczających ilość punktów węzłowych:

$$n \in \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\} \quad (11)$$

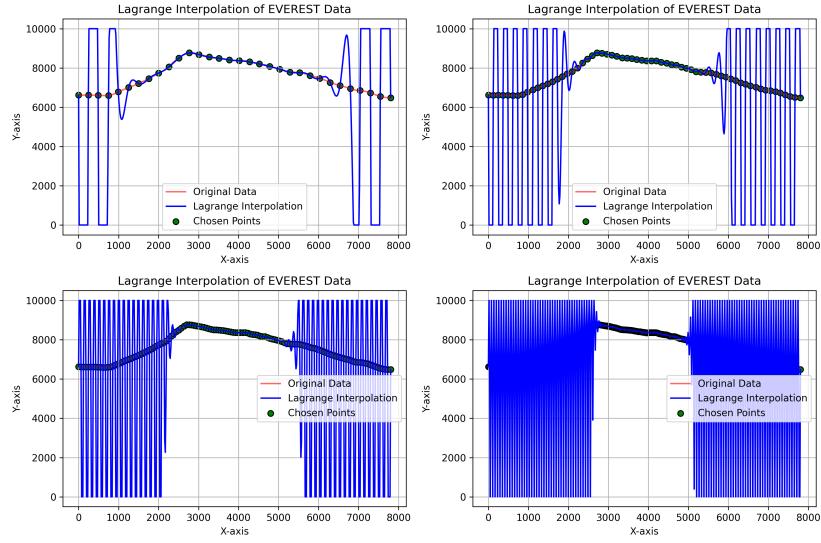
3.1 Interpolacja Lagrange'a

3.1.1 Mount Everest



rys. 1: Rzadkie punkty do interpolacji profilu wysokościowego Mount Everest

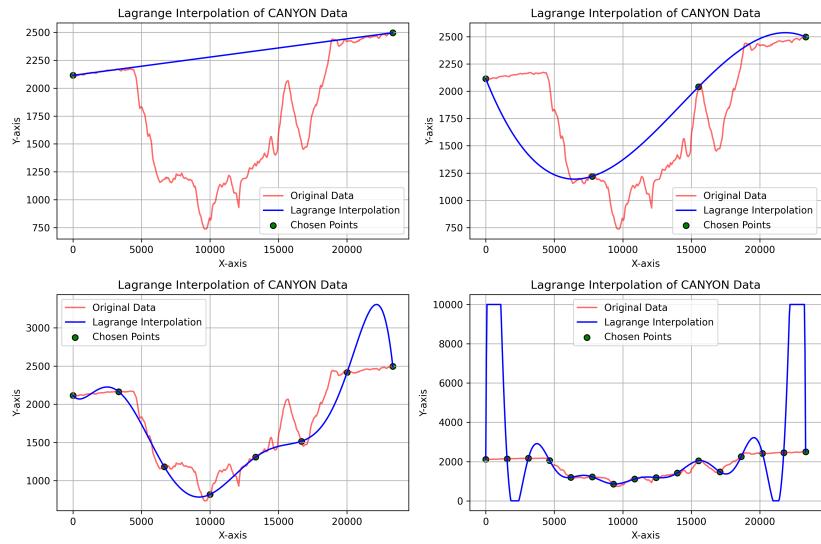
Jak widać na rys. 1 w przypadku interpolacji Lagrange'a dla stosunkowo małej liczby punktów węzłowych (4, 8) otrzymujemy, przy dużej tolerancji, akceptowalną aproksymację profilu wysokościowego. Od 16 punktów węzłowych zaczyna się pojawiać efekt Rungego, który jest widoczny w postaci oscylacji. Nadmierne oscylacje zostały ucięte.



rys. 2: Gęste punkty do interpolacji profilu wysokościowego Mount Everest

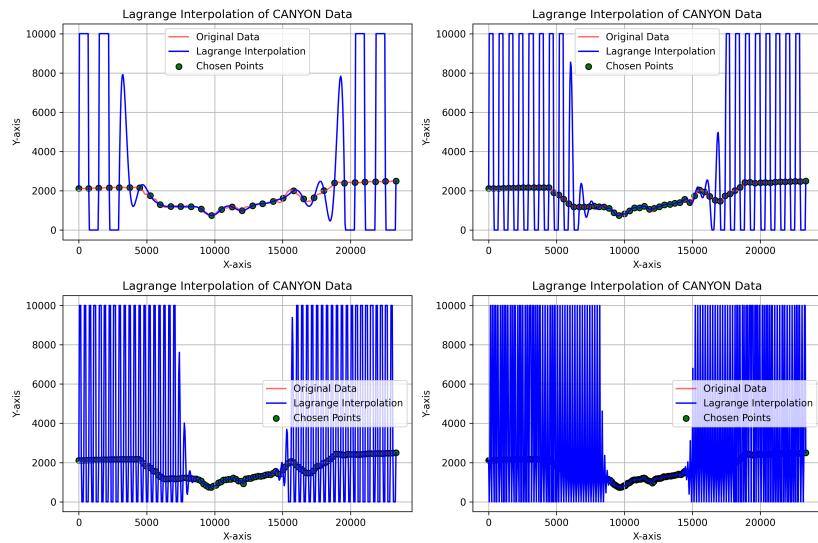
W przypadku gęstych punktów węzłowych (32, 64, 128, 256) efekt Rungego jest zdecydowanie bardziej widoczny. Zwiększa się dokładność aproksymacji, lecz jednocześnie zmniejsza się stabilność numeryczna i co za tym idzie obszar, na którym aproksymacja się sprawdza.

3.1.2 Wielki Kanion



rys. 3: Rzadkie punkty do interpolacji profilu wysokościowego Wielki Kanion

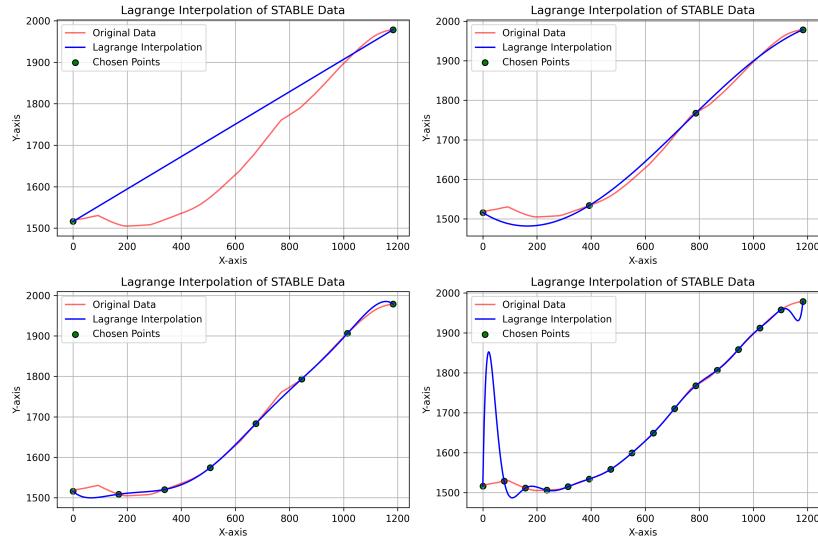
W przypadku profilu wysokościowego Wielkiego Kanionu łatwo zauważać, że interpolacja Lagrange'a nie radzi sobie w miejscach wysokiego skoku pierwszej pochodnej - szybkie zmiany nachylenia wykresu. Widać to przy wykresie dla 4 punktów węzłowych.



rys. 4: Gęste punkty do interpolacji profilu wysokościowego Wielki Kanion

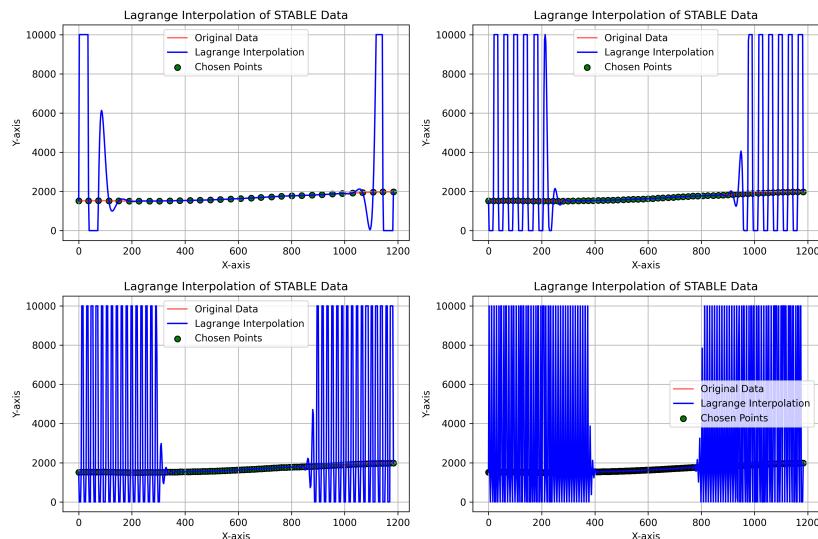
W przypadku gęstszych punktów węzłowych aproksymacja ponownie zyskuje na dokładności lecz traci na zakresie, w którym jest akceptowalna.

3.1.3 Ostrowa



rys. 5: Rzadkie punkty do interpolacji profilu wysokościowego Ostrowa

Przy stabilniejszym profilu wysokościowym interpolacja Lagrange'a dobrze aproksymuje profil wysokościowy. Przy 16 pojawił się efekt Rungego.

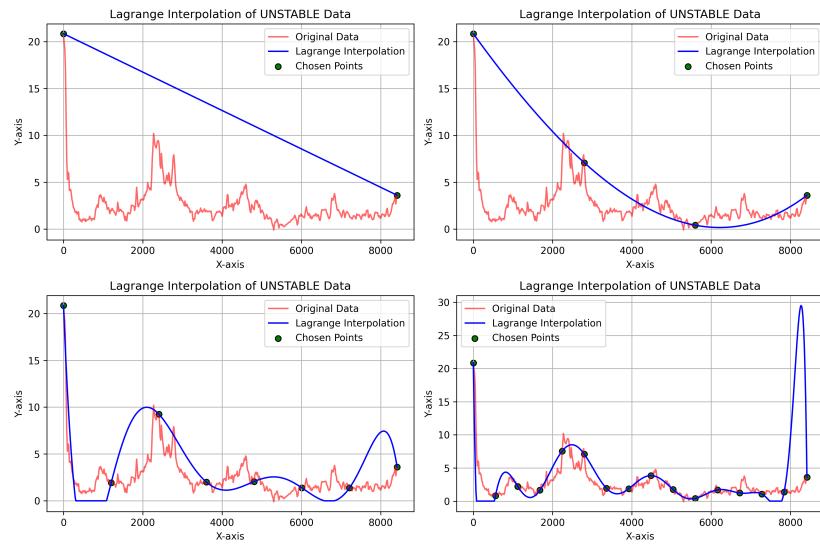


rys. 6: Gęste punkty do interpolacji profilu wysokościowego Ostrowa

W przypadku gęstych punktów węzłowych i stabilnego profilu wysokościowego efekt Rungego jest widoczny, lecz nie wpływa znaczaco na poprawę

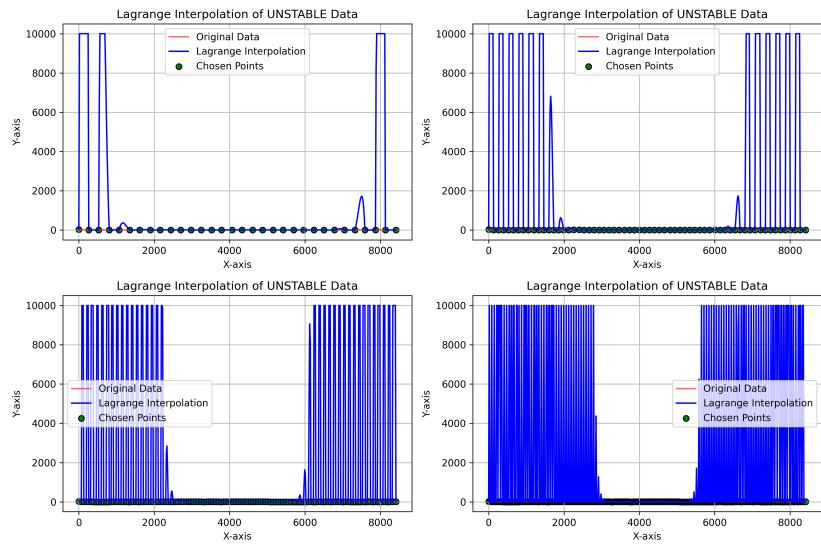
dokładności aproksymacji.

3.1.4 Spacerniak



rys. 7: Rzadkie punkty do interpolacji profilu wysokościowego Spacerniak

W przypadku profilu wysokościowego spacerniaka, który jest raczej niestabilny, ostrość oryginalnego profilu wysokościowego negatywnie wpływa na trafność aproksymacji. Ponownie przy 16 punktach węzłowych pojawia się efekt Rungego.

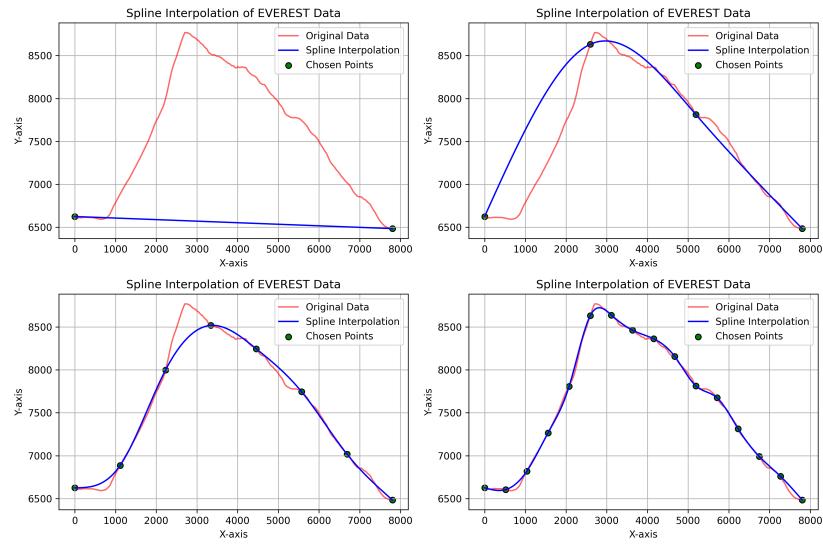


rys. 8: Gęste punkty do interpolacji profilu wysokościowego Spacerniak

Przy tak niskich wartościach wysokościowych danych, efekt Rungego bardzo szybko przesila oryginalne dane.

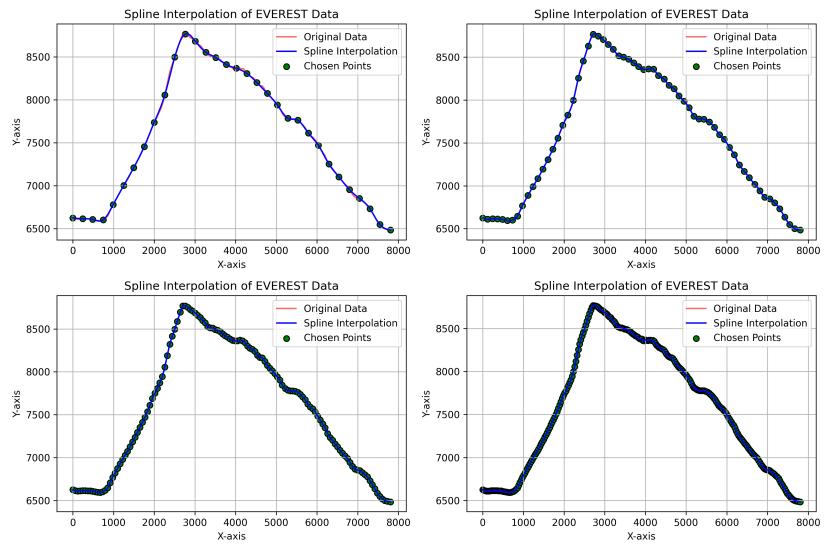
3.2 Splajny kubiczne

3.2.1 Mount Everest



rys. 9: Rzadkie punkty do aproksymacji profilu wysokościowego Mount Everest

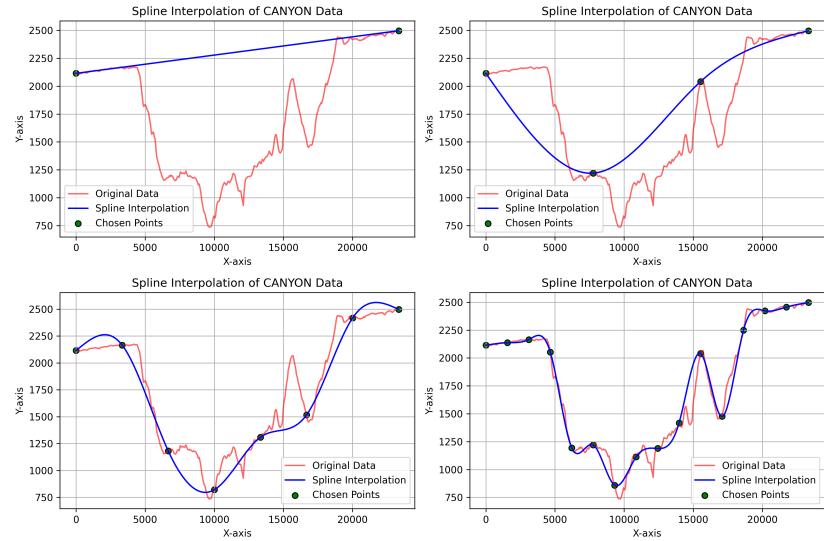
W przypadku splajnów kubicznych, przy 4 punktach węzłowych otrzymujemy średnią dokładność aproksymacji, lecz łatwo ją poprawić przez dodanie kolejnych punktów węzłowych bez konsekwencji w postaci efektu Rungego.



rys. 10: Gęste punkty do aproksymacji profilu wysokościowego Mount Everest

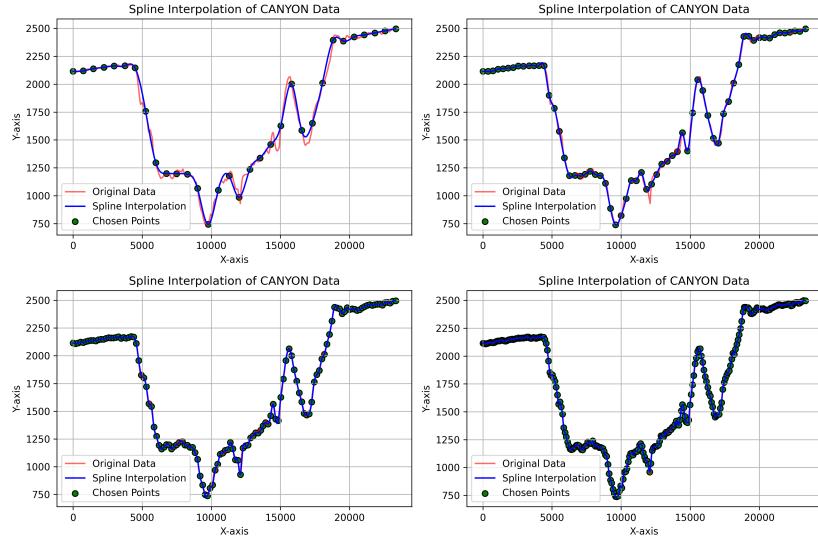
W przypadku gęstych punktów węzłowych, splajn kubiczny bardzo dobrze radzi sobie z aproksymacją profilu wysokościowego. Nie pojawia się efekt Rungego, a dzięki ciągłości pierwszej i drugiej pochodnej, otrzymujemy gładką krzywą.

3.2.2 Wielki Kanion



rys. 11: Rzadkie punkty do aproksymacji profilu wysokościowego Wielki Kanion

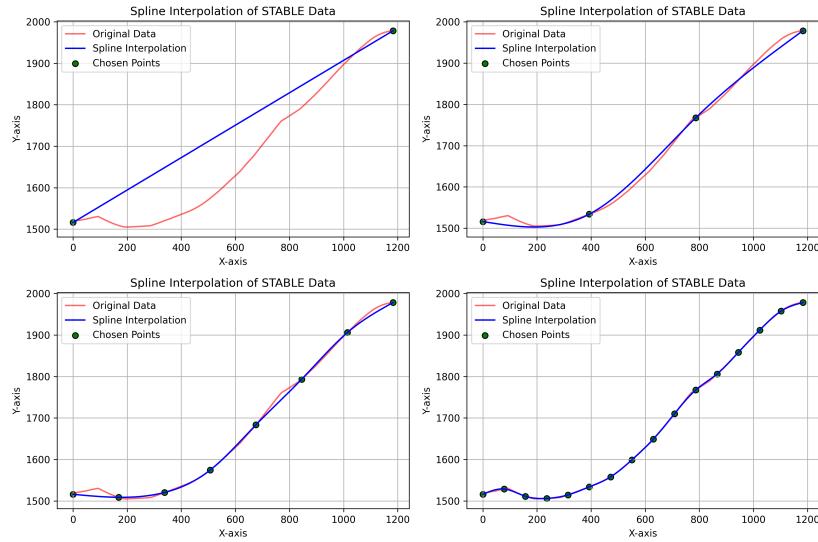
Jak widać na rys. 11 w przypadku profilu wysokościowego Wielkiego Kanionu dla czterech punktów węzłowych jeśli wybieramy punkty węzłowe bez kontekstu względem danych otrzymamy słabą aproksymację, lecz możemy to poprawić dodaniem kolejnych punktów.



rys. 12: Gęste punkty do aproksymacji profilu wysokościowego Wielki Kanion

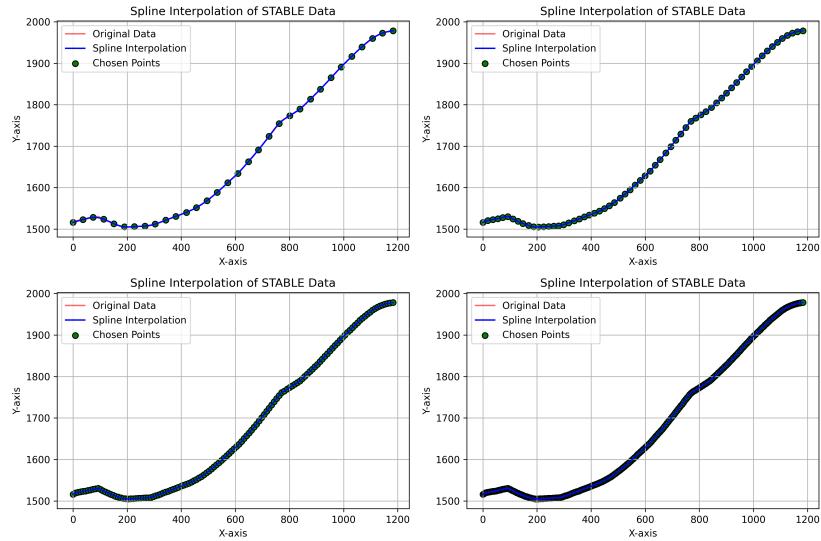
Po raz kolejny splajn kubiczny doskonale poradził sobie z aproksymacją profilu wysokościowego mając dużą liczbę punktów węzłowych.

3.2.3 Ostrowa



rys. 13: Rzadkie punkty do aproksymacji profilu wysokościowego Ostrowa

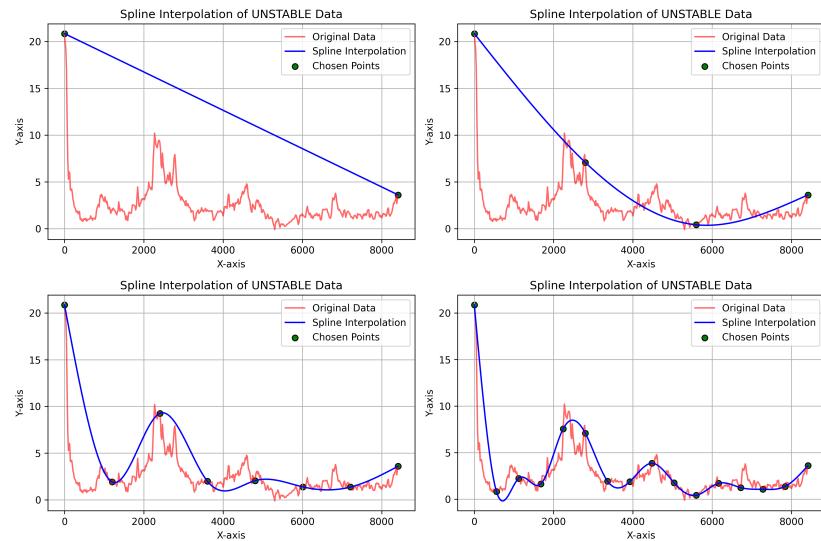
W przypadku stabilnego profilu wysokościowego Ostrowa, splajn kubiczny również dobrze radzi sobie z aproksymacją. Nawet mała ilość punktów węzłowych (4) pozwala na uzyskanie dobrej jakości aproksymacji.



rys. 14: Gęste punkty do aproksymacji profilu wysokościowego Ostrowa

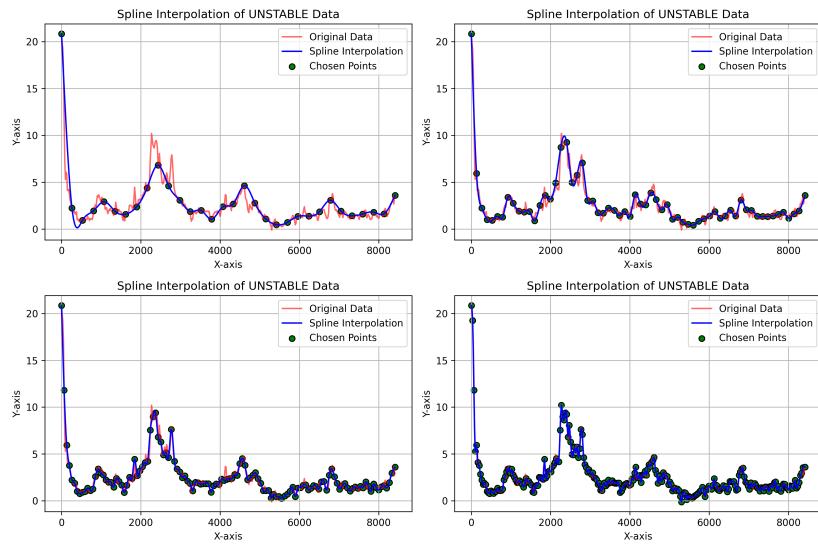
Z gęstą siatką punktów węzłowych splajn kubiczny radzi sobie dobrze.

3.2.4 Spacerniak



rys. 15: Rzadkie punkty do aproksymacji profilu wysokościowego Spacerniak

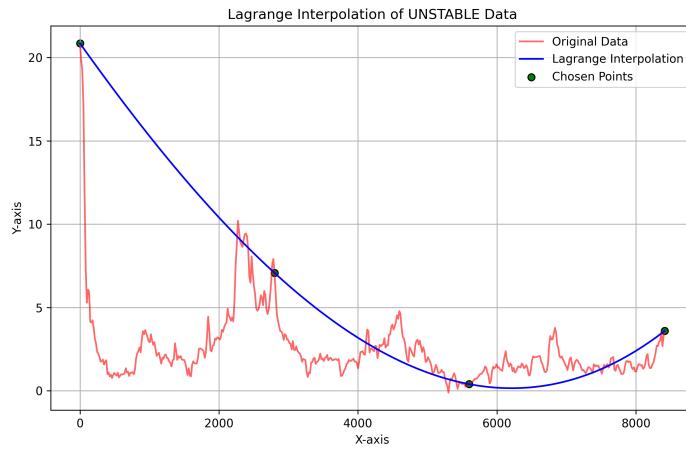
Z profilami wysokościowymi niestabilnymi, splajn kubiczny ma niewielkie problemy dla małej liczby punktów węzłowych. Przy 4 punktach węzłowych zupełnie omija pierwszy spadek wysokości.



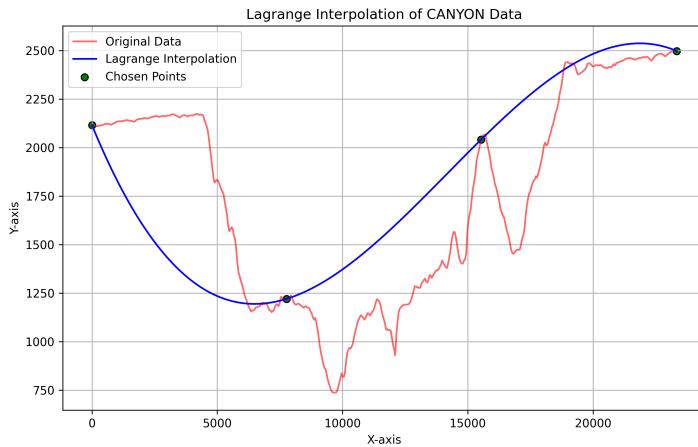
rys. 16: Gęste punkty do aproksymacji profilu wysokościowego Spacerniak

Sytuację ratuje gęsta siatka punktów węzłowych, która pozwala na uzyskanie dobrej jakości aproksymacji.

4 Możliwe ulepszenia



rys. 17: Interpolacja Lagrange'a dla profilu wysokościowego Spacerniak z 4 punktami węzłowymi



rys. 18: Interpolacja Lagrange'a dla profilu wysokościowego Spacerniak z 4 punktami węzłowymi

Dla dwóch powyższych wykresów zauważać można, że wyniki mogłyby się poprawić jeśli zamiast punktów węzłowych jako węzły z równomiernym rozmieszczeniem brać specyficzne, wybrane punkty węzłowe. W obydwu przypadkach trafiły się węzły w warunkach skrajnych, które negatywnie wpłynęły na jakość aproksymacji.

5 Podsumowanie

W projekcie zrealizowano aproksymację profilu wysokościowego z wykorzystaniem dwóch metod: interpolacji Lagrange'a oraz splajnów kubicznych. Obie metody zostały przetestowane na różnych profilach wysokościowych, co pozwoliło na ocenę ich skuteczności i stabilności numerycznej. Interpolacja Lagrange'a okazała się prosta i skuteczna dla małej liczby punktów węzłowych, ale zaczęła tracić na stabilności przy większej liczbie punktów, co prowadziło do efektu Rungego. Splajny kubiczne, z drugiej strony, wykazały się lepszą stabilnością i gładkością aproksymacji, szczególnie przy dużej liczbie punktów węzłowych. Kosztem dobrego dopasowania aproksymacji do danych, splajny kubiczne wymagają większej liczby obliczeń, co może być istotnie przy dużych zbiorach danych.

References

- [1] Wolfram MathWorld (2025) *Cubic Spline*, <https://mathworld.wolfram.com/CubicSpline.html>. Wolfram MathWorld *Lagrange Interpolating Polynomial*, <https://mathworld.wolfram.com/LagrangeInterpolatingPolynomial.html>