

# continuedFractions

Jon Sparring

September 27, 2019

## 1 Lærervejledningn

**Emne** Rekursion

**Sværhedsgrad** Middel

## 2 Introduktion

I denne opgave skal I regne med kædebrøker (continued fractions)<sup>1</sup>. Kædebrøker er lister af heltal, som repræsenterer reelle tal. Listen er endelig for rationelle og uendelig for irrationelle tal.

En kædebrøk skrives som:  $x = [q_0; q_1, q_2, \dots]$ , hvilket svarer til tallet,

$$x = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}. \quad (1)$$

F.eks. listen  $[3; 4, 12, 4]$  evaluerer til

$$x = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{12 + \frac{1}{4}}} \quad (2)$$

$$= 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{12.25}} \quad (3)$$

$$= 3 + \frac{1}{4.081632653} \quad (4)$$

$$= 3.245. \quad (5)$$

Omvendt, for et givet tal  $x$  kan kædebrøken  $[q_0; q_1, q_2, \dots]$  udregnes ved følgende algoritme: For  $x_0 = x$  og  $i \geq 0$  udregn  $q_i = \lfloor x_i \rfloor$ ,  $r_i = x_i - q_i$  og  $x_{i+1} = 1/r_i$  indtil  $r_i = 0$ . Nedenfor ses en udregning for tallet  $x = 3.245$ :

---

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Continued\\_fraction](https://en.wikipedia.org/wiki/Continued_fraction)

$i$	$x_i$	$q_i$	$r_i$	$1/r_i$
0	3.245	3	0.245	4.081632653...
1	4.081632653...	4	0.081632653	12.25
2	12.25	12	0.25	4
3	4	4	0	-

Resultatet aflæses i anden søjle:  $[3; 4, 12, 4]$ .

Kædebrøker af heltalsbrøkker  $t/n$  er særligt effektive at udregne vha. Euclids algoritme for største fællesnævner. Algoritmen i ?? regner rekursivt på relationen mellem heltalsdivision og rest: Hvis  $a = t \text{ div } n$  er heltalsdivision mellem  $t$  og  $n$ , og  $b = t \% n$  er resten efter heltalsdivision, så er  $t = an + b$ . Man kan nu forestille sig  $t$ ,  $n$  og  $b$  som en sekvens af heltal  $r_i$ , hvor

$$r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i, \quad (6)$$

$$r_i = r_{i-2} \% r_{i-1} \quad (\text{rest ved heltalsdivision}), \quad (7)$$

$$q_i = r_{i-2} \text{ div } r_{i-1} \quad (\text{heltalsdivision}), \quad (8)$$

Hvis man starter sekvensen med  $r_{-2} = t$  og  $r_{-1} = n$  og beregninger resten iterativt indtil  $r_{i-1} = 0$ , så vil største fællesnævner mellem  $t$  og  $n$  være lig  $r_{i-2}$ , og  $[q_0; q_1, \dots, q_j]$  vil være  $t/n$  som kædebrøk. Til beregning af største fællesnævner regner algoritmen i ?? udelukkende på  $r_i$  som transformationen  $(r_{i-2}, r_{i-1}) \rightarrow (r_{i-1}, r_i) = (r_{i-1}, r_{i-2} \% r_{i-1})$  indtil  $(r_{i-2}, r_{i-1}) = (r_{i-2}, 0)$ . Tilføjer man beregning af  $q_i$  i rekursionen, har man samtidigt beregnet brøkken som kædebrøk. Nedenfor ses en udregning for brøken  $649/200$ :

$i$	$r_{i-2}$	$r_{i-1}$	$r_i = r_{i-2} \% r_{i-1}$	$q_i = r_{i-2} \text{ div } r_{i-1}$
0	649	200	49	3
1	200	49	4	4
2	49	4	1	12
3	4	1	0	4
4	1	0	-	-

Kædebrøkken aflæses som højre søjle:  $[3; 4, 12, 4]$ .

Omvendt, approksimationen af en kædebrøk som heltalsbrøken  $\frac{t_i}{n_i}, i \geq 0$  fås ved

$$t_i = q_i t_{i-1} + t_{i-2}, \quad (9)$$

$$n_i = q_i n_{i-1} + n_{i-2}, \quad (10)$$

$$t_{-2} = n_{-1} = 0, \quad (11)$$

$$t_{-1} = n_{-2} = 1, \quad (12)$$

Alle approximationerne for  $[3; 4, 12, 4]$  er givet ved,

$$\frac{t_0}{n_0} = \frac{q_0 t_{-1} + t_{-2}}{q_0 n_{-1} + n_{-2}} = \frac{3 \cdot 1 + 0}{3 \cdot 0 + 1} = \frac{3}{1} = 3, \quad (13)$$

$$\frac{t_1}{n_1} = \frac{q_1 t_0 + t_{-1}}{q_1 n_0 + n_{-1}} = \frac{4 \cdot 3 + 1}{4 \cdot 1 + 0} = \frac{13}{4} = 3.25, \quad (14)$$

$$\frac{t_2}{n_2} = \frac{q_2 t_1 + t_0}{q_2 n_1 + n_0} = \frac{12 \cdot 13 + 3}{12 \cdot 4 + 1} = \frac{159}{49} = 3.244897959 \dots, \quad (15)$$

$$\frac{t_3}{n_3} = \frac{q_3 t_2 + t_1}{q_3 n_2 + n_1} = \frac{4 \cdot 159 + 13}{4 \cdot 49 + 4} = \frac{649}{200} = 3.245. \quad (16)$$

Bemærk at approksimationen nærmer sig 3.245 når  $i$  vokser.

### 3 Opgave(r)

1. Skriv en rekursiv funktion

`cfrac2float : lst:int list -> float`

som tager en liste af heltal som kædebrøk og udregner det tilsvarende reelle tal.

2. Skriv en rekursiv funktion

`float2cfrac : x:float -> int list`

som tager et reelt tal og udregner dens repræsentation som kædebrøk.

3. Skriv en rekursiv funktion

`frac2cfrac : t:int -> n:int -> int list`

som tager tæller og nævner i brøken  $t/n$  og udregner dens repræsentation som kædebrøk udelukkende ved brug af heltalstyper.

4. Skriv en rekursiv funktion

`cfrac2frac : lst:int list -> i:int -> int * int`

som tager en kædebrøk og et index og returnerer  $t_i/n_i$  approximationen som tuplen  $(t_i, n_i)$ .

5. Skriv en white- og black-box test af de ovenstående funktioner.