

Metody elementów skończonych

Wstęp teoretyczny

Ogólne założenie MES polega na zamienieniu elementu o ciągłej wartości w dyskretny model, który jest oparty o ograniczoną ilość węzłów, z których tworzone są elementy skończone. Jest to numeryczne rozwiązywanie problemów inżynierii i fizyki matematycznej.

Problemem głównym programu jest symulacja nieustalonych procesów cieplnych stosując równanie Fouriera dla procesu niestacjonarnego.

$$\text{div}(k(t)\text{grad}(t)) + Q = c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

Albo w przypadku anizotropowych własności cieplnych:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y(t) \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \left(Q - c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) = 0.$$

W określonej chwili czasu pochodne temperatury mogą być traktowane jako funkcje współrzędnych x, y, z . W celu znalezienia wyjściowego wektora temperatur dla naszego modelu użyliśmy układu równań, przedstawionego w sposób macierzowy:

$$[H]\{t\} + [C] \frac{\partial}{\partial \tau} \{t\} + \{P\} = 0$$

Gdzie macierz H oraz macierz H_{bc} z warunkami brzegowymi mają postać:

$$[H] = \int_V k(t) \left(\left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \right\}^T \right) dV + \int_S \alpha \{N\} \{N\}^T dS$$

Wektor P

$$\{P\} = - \int_S \alpha \{N\} t_{\infty} dS$$

Macierz C

$$[C] = \int_V c\rho \{N\} \{N\}^T dV$$

$\{t1\}$ – wektor nieznanych temperatur, którego szukamy

$\{t0\}$ – wektor znanych temperatur, wyznaczonych w poprzedniej iteracji

$\Delta \tau$ – krok czasowy

c – ciepło właściwe materiału

ρ – gęstość materiału

α – współczynnik konwekcji

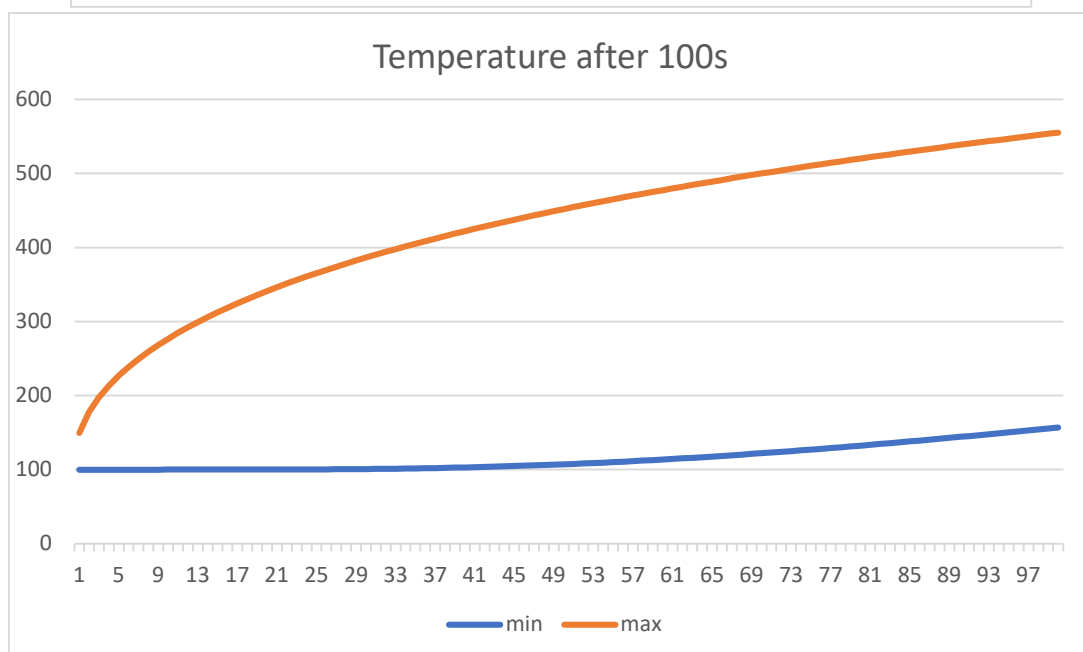
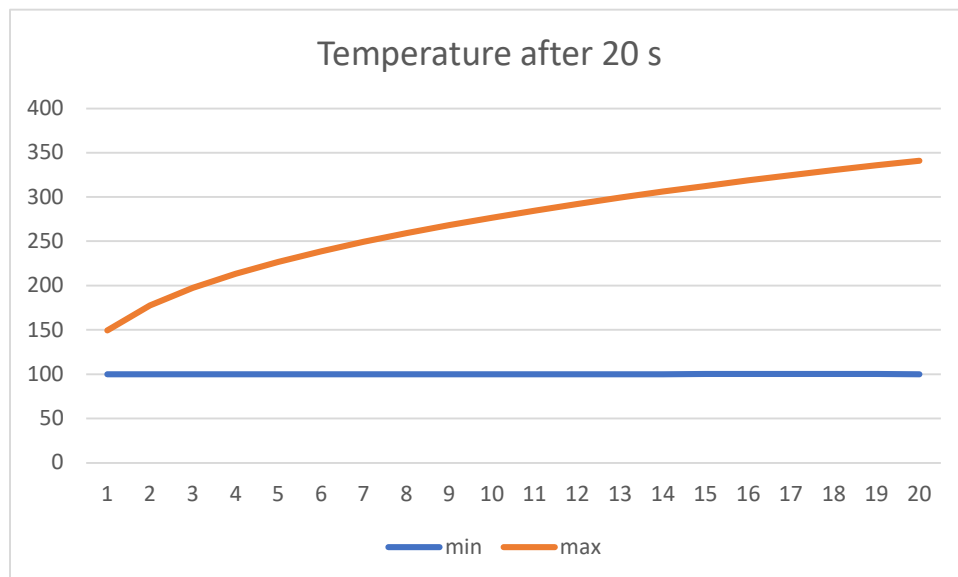
k – współczynnik przewodzenia ciepła

$\{N\}$ – wektor funkcji kształtu

Struktura projektu

1. Node – klasa przechowująca informacje o węźle (X, Y, T).
2. Element – Klasa przechowująca informacje o elemencie (lokalne $H, Hbc, C, detJ$ i P).
3. UniversalElement – statyczna klasa przechowująca dane dla elementu w układzie ξ i η . (*punkty węzłów, całkowania, warunków brzegowych*)
4. UniversalElementService – klasa statyczna wykonująca obliczenia dla elementu w układzie lokalnym.
5. Net – klasa wczytująca dane wejściowe, generująca siatkę, określająca flagę warunków brzegowych.
6. NetService – statyczna klasa dokonująca obliczeń globalnych takich jak inicjalizacja globalnych macierzy, agregacja, wyliczanie wektora temperatur.
7. MatrixFEM – klasa do obsługi macierzy 4×4 .
8. Point – klasa przechowująca współrzędne punktu lokalnego ξ i η oraz jego wagę.
9. Program – klasa statyczna w której zawarta jest funkcja *Main*, gdzie wywoływane są wszystkie funkcje potrzebne do obliczenia każdego kroku symulacji procesu cieplnego.

Porównanie z Test Cases



t	min	max
0	100	149.5569
1	100	177.4449
2	100	197.267
3	100	213.1528
4	100	226.6826
5	100	238.6071
6	100	249.3467
7	100.0001	259.1651
8	100.0002	268.2407
9	100.0004	276.7011
10	100.0008	284.6413
11	100.0016	292.1342
12	100.0029	299.2374
13	100.0051	305.9971
14	100.0086	312.4512
15	100.0137	318.6312
16	100.0212	324.5635
17	100.0316	330.2707
18	100.0457	335.7722
19	100.0643	341.0847

Time[s] MinTemp MaxTemp

1 100 149.56
 2 100 177.44
 3 100 197.27
 4 100 213.15
 5 100 226.68
 6 100 238.61
 7 100 249.35
 8 100 259.17
 9 100 268.24
 10 100 276.7
 11 100 284.64
 12 100 292.13
 13 100 299.24
 14 100.01 306
 15 100.01 312.45
 16 100.01 318.63
 17 100.02 324.56
 18 100.03 330.27
 19 100.05 335.77
 20 100.06 341.08

Wnioski

Porównując dane wyjściowe z mojego programu widać, że dane są identyczne, różnice w przybliżaniu ilości miejsc po przecinku. Badany przekrój elementu skończonego nagrzewa się na brzegach szybciej gdyż działa konwekcja a zmierzając do środka przekroju coraz wolniej, ponieważ działa tylko przewodzenie ciepła.