Khoa CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
ĐH Khoa học Tự nhiên TPHCM

Bài 03: Số chấm động

Phạm Tuấn Sơn

ptson@fit.hcmus.edu.vn

Khoa CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
ĐH Khoa học Tự nhiên TPHCM

Vấn đề với biểu diễn số nguyên

- Số nguyên N bit biểu diễn được 2^N giá trị
  - Biểu diễn không dấu (Unsigned Integer)

    0 à $2^N – 1$

    (N=32, $2^N–1$ = 4,294,967,295)
  - Biểu diễn bù 2

    $-2^{(N-1)}$ à $2^{(N-1)} – 1$

    (N=32, $2^{(N-1)}$ = 2,147,483,648)
- Biểu diễn số rất lớn ? Số giây / 1 nghìn năm
  - 31,556,926,000 (3.1556926×10^{10})
- Biểu diễn số rất nhỏ ? Số giây / 1 nano giây
  - 0.000000001_{10} ($1.0_{10} \times 10^{-9}$)
- Biểu diễn số thập phân 1.5 ?

Biểu diễn phần thập phân

- Biểu diễn số 5.375 thế nào ? Cần bao nhiêu bit ?
- Giả sử dùng 8 bit để lưu trữ phần nguyên

  5 = 4 + 1 = 00000101
- Tương tự có thể dùng 8 bit lưu trữ phần thập phân

  0.375 = 0.25 + 0.125 = 01100000
- Vậy có thể biểu diễn

  5.375 = 00000101.01100000
- Tổng quát ta có:

$$x_{n-1} \ldots x_1 x_0 . x_{-1} x_{-2} \ldots x_{-m} = \sum_{i=-m}^{n} x_i 2^i$$

=> Biểu diễn số chấm tĩnh (fixed point)

i	2^{-i}	
0	1.0	1
1	0.5	1/2
2	0.25	1/4
3	0.125	1/8
4	0.0625	1/16
5	0.03125	1/32
6	0.015625	...
7	0.0078125	
8	0.00390625	
9	0.001953125	
10	0.0009765625	
11	0.00048828125	
12	0.000244140625	
13	0.0001220703125	
14	0.00006103515625	
15	0.000030517578125	

Giới hạn biểu diễn số chấm tĩnh

- Với 8 bit
  - Phần nguyên lớn nhất có thể biểu diễn là

    $2^8 - 1 = 255$
  - Phần thập phân nhỏ nhất có thể biểu diễn là

    $2^{-8} = 1/256 = 0.00390625 \sim 10^{-3}$
- Nếu muốn tính toán với số nhỏ hơn như 0.0001_{10} hay 0.00001_{10} ?

  à Tăng số bit

  Với 16 bit phần thập phân

  min = $1/65536 = 0.0000152587890625 \sim 10^{-5}$
- Có cách nào tốt hơn ?

Số chấm động – Ý tưởng

- Hệ thập phân
  - 123000000000 ~ 1.23×10^{11} và 0.0000000000123 ~ 1.23×10^{-11}
- Tương tự với hệ nhị phân, ta có

  $x = 00000101.01100000 = 2^2 + 2^0 + 2^{-2} + 2^{-3}$
- Ta có thể viết lại

  $x = 1.01011 \times 2^2$
- Thay vì dùng 16 bit để lưu trữ, chỉ cần dùng 7 bit (5 bit phần trị + 2 bit phần mũ)

  $x = 1.\underline{01011}\ \underline{10}$
- Như vậy,
  - Muốn tiết kiệm số bit lưu trữ, ta đã *di chuyển vị trí của dấu chấm* sang phải 14 vị trí
  - Cần lưu: phần trị, phần mũ và …phần dấu

  => Đây là ý tưởng cơ bản của số chấm động (floating point)

Biểu diễn số chấm động

- Biểu diễn số chấm động

S	Exponent	Significand
1 bit	m bits	n bits

  - Sign (S): phần dấu
  - Exponent (E): phần số mũ
  - Significand (S): phần định trị
- Giá trị

  $\pm S \times 2^{E}$

Biểu diễn khoa học

- Giá trị 1 / 1,000,000,000 có thể biểu diễn như sau:
  - $1.0_{10} \times 10^{-9}$ à Dạng chuẩn (Normalized form)
  - $0.1_{10} \times 10^{-8}$, $10.0_{10} \times 10^{-10}$ à Dạng không chuẩn (Denormalized form)
- Dạng chuẩn: phần nguyên gồm 1 chữ số khác 0

decimal point

$$\mathbf{6.02_{10} \times 10^{23}}$$

mantissa **radix (base)** **exponent**

$$\mathbf{1.0_2 \times 2^{-1}}$$

"binary point"

Chuẩn số chấm động IEEE 754

- Biểu diễn số chấm động Single Precision (32 bit)

31	30 … 23	22 … 0
S	Exponent	Significand
1 bit	8 bits	23 bits

  - S: dấu (Sign) – 0: dương, 1: âm
  - Exponent: phần số mũ (lưu dưới dạng số biased)
  - Significand: phần định trị
    - Ngầm định bắt đầu là 1 + phần trị ~ (1 + 23) bits
- Dạng chuẩn: $+/-1.xxx\ldots x_2 \times 2^{yyy\ldots y_2}$
- Ví dụ:

Biểu diễn: 0 10000001 01011000000000000000000

Có giá trị: $+1.0101100\ldots00 \times 2^{10000001} \sim +(1+2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-5}) \times 2^{2} =$ 5.375

Chuyển từ biểu diễn nhị phân sang thập phân

0	**0110 1000**	**101 0101 0100 0011 0100 0010**

- Dấu: 0 **à** dương
- Mũ:
  - 0110 1000 có giá trị (dạng biased) là 104 - 127 = -23
- Trị:
  $1 + 1\text{x}2^{-1} + 0\text{x}2^{-2} + 1\text{x}2^{-3} + 0\text{x}2^{-4} + 1\text{x}2^{-5} + \ldots$
  $= 1+2^{-1}+2^{-3}+2^{-5}+2^{-7}+2^{-9}+2^{-14}+2^{-15}+2^{-17}+2^{-22}$
  $= 1.0 + 0.666115$
- Kết quả: $1.666115\times2^{-23} \sim 1.986\times10^{-7}$
  (~ 2/10,000,000)

Khoa CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
ĐH Khoa học Tự nhiên TPHCM

Chuyển từ biểu diễn thập phân sang nhị phân

-2.340625×10^1

1. Không chuẩn hóa: -23.40625
2. Chuyển phần nguyên:
   23 = 16 + 4 + 2 + 1 = 10111
3. Chuyển phần thập phân:
   .40625 = .25 + .125 + .03125 = .01101
4. Kết hợp và chuẩn hóa:
   $10111.01101 = 1.011101101 \times 2^4$
5. Chuyển phần mũ: 127 + 4 = 10000011

1	**1000 0011**	**011 1011 0100 0000 0000 0000**

Chuyển từ biểu diễn thập phân sang nhị phân (tt)

- 1/3
  - = 0.33333…
  - = 0.25 + 0.0625 + 0.015625 + 0.00390625 + …
  - = 1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + …
  - = $2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-8}$ + …
  - = 0.0101010101… * 2^{0}
  - = 1.0101010101… * 2^{-2}
  - – Dấu: 0
  - – Mũ = -2 + 127 = 125 = 01111101
  - – Trị = 0101010101…

0	0111 1101	0101 0101 0101 0101 0101 010

Các số đặc biệt

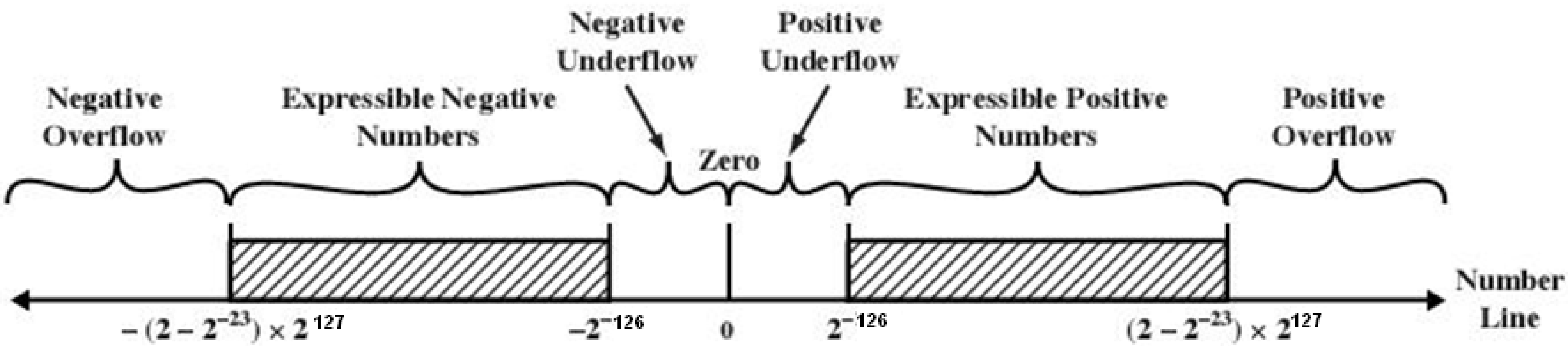
- Phần mũ = 0, phần trị = 0
  – Số zero
- Phần mũ = 0, phần trị $\neq$ 0
  – Số dạng không chuẩn (denormalized)
- Phần mũ toàn bit 1, phần trị = 0
  – Số vô cùng (infinity)
- Phần mũ toàn bit 1, phần trị $\neq$ 0
  – Số báo lỗi (NaN - Not a Number)
    - Signaling NaN
    - Quiet NaN

Những trường hợp tạo số đặc biệt

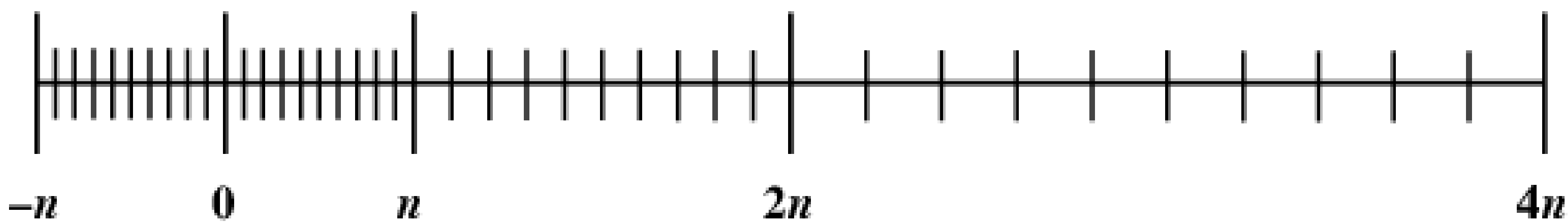
1. $X + (+\infty)$
2. $X - (+\infty)$
3. $X + (-\infty)$
4. $X - (-\infty)$
5. $X \times (+\infty)$
6. $X \; / (-\infty)$
7. $(+\infty) + (+\infty)$
8. $(-\infty) + (-\infty)$
9. $(-\infty) - (+\infty)$
10. $(+\infty) - (-\infty)$
11. $(+\infty) + (-\infty)$
12. $(-\infty) + (+\infty)$
13. $(+\infty) - (+\infty)$
14. $(-\infty) - (-\infty)$
15. $\infty \times 0$
16. $\infty / 0$
17. $X / 0$
18. $0 / 0$
19. ∞ / ∞
20. sqrt(X), $X<0$
21. ……………

Phân bố, phạm vi biểu diễn

- Phạm vi biểu diễn. Chứng minh ?



- Phân bố



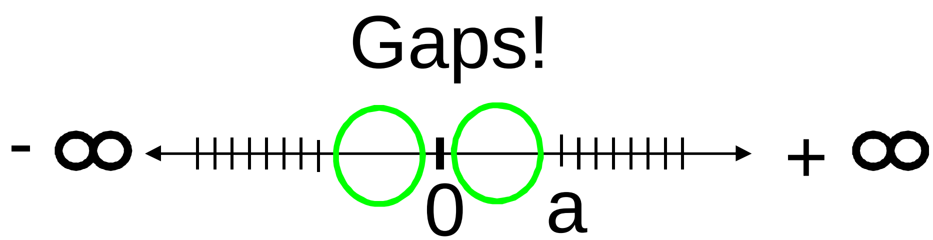
Phân bố

- Đặt `f(1,2)` = số lượng số chấm động trong khoảng 1 và 2
- Đặt `f(2,3)` = số lượng số chấm động trong khoảng 2 và 3
- Hỏi
    1. f(1,2) < f(2,3)
    2. f(1,2) = f(2,3)
    3. f(1,2) > f(2,3)

Số dạng không chuẩn

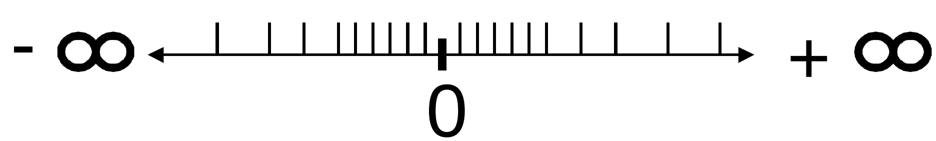
- Số dương nhỏ nhất có thể biểu diễn

  $a = 1.0\ldots_2 \times 2^{-126} = 2^{-126}$



  Lý do: ngầm định 1 + phần trị

- Giải pháp:
  - Qui ước nếu số mũ = 0 (phần trị ≠ 0), không ngầm định bắt đầu là 1 **à** Số dạng không chuẩn (denormalized)
  - Số dương nhỏ nhất có thể biểu diễn
    - $a = 0.00\ldots1_2 \times 2^{-126} = 2^{-23} \times 2^{-126} = 2^{-149}$



Một số loại chấm động

- Single Precision (32 bit)
  - 1/8/23 (kiểu *float* trong C), 10^{-38} **à** 10^{38}
- Double Precision (64 bit)
  - 1/11/52 (kiểu *double* trong C), 10^{-308} **à** 10^{308}
- Half Precision (16 bit)
  - 1/5/10
- Quad Precision (8 bit)
  - 1/4/3
- IEEE 754-2008 “binary128” (128 bit)
  - 1/15/112

en.wikipedia.org/wiki/Floating_point

Biểu diễn số chấm động 8 bit

	s	exp	frac	E	Value	
	0	0000	000	-6	0	
	0	0000	001	-6	1/8*1/64 = 1/512	← closest to zero
Denormalized numbers	0	0000	010	-6	2/8*1/64 = 2/512	
	…					
	0	0000	110	-6	6/8*1/64 = 6/512	
	0	0000	111	-6	7/8*1/64 = 7/512	← largest denorm
	0	0001	000	-6	8/8*1/64 = 8/512	← smallest norm
	0	0001	001	-6	9/8*1/64 = 9/512	
	…					
	0	0110	110	-1	14/8*1/2 = 14/16	
	0	0110	111	-1	15/8*1/2 = 15/16	← closest to 1 below
Normalized numbers	0	0111	000	0	8/8*1 = 1	
	0	0111	001	0	9/8*1 = 9/8	← closest to 1 above
	0	0111	010	0	10/8*1 = 10/8	
	…					
	0	1110	110	7	14/8*128 = 224	
	0	1110	111	7	15/8*128 = 240	← largest norm
	0	1111	000	n/a	inf	

Bảng tóm tắt số chấm động

	Single Precision (32 bit)				Double Precision (64 bit)			
	Dấu	**Mũ**	**Trị**	**Giá trị**	**Dấu**	**Mũ**	**Trị**	**Giá trị**
+0	0	0	0	0	0	0	0	0
– 0	1	0	0	-0	1	0	0	-0
+∞	0	255 (toàn bit 1)	0	∞	0	2047 (toàn bit 1)	0	∞
– ∞	1	255 (toàn bit 1)	0	-∞	1	2047 (toàn bit 1)	0	-∞
Quiet NaN	0/ 1	255 (toàn bit 1)	≠ 0	NaN	0/ 1	2047 (toàn bit 1)	≠ 0	NaN
Signaling NaN	0/ 1	255 (toàn bit 1)	≠ 0	NaN	0/ 1	2047 (toàn bit 1)	≠ 0	NaN
Số dương (dạng chuẩn)	0	0<e<255	f	2^{e-127} (1.f)	0	0<e<2047	f	2^{e-1023} (1.f)
Số âm (dạng chuẩn)	1	0<e<255	f	-2^{e-127} (1.f)	1	0<e<2047	f	-2^{e-1023} (1.f)
Số dương (dạng không chuẩn)	0	0	f ≠ 0	2^{e-126} (0.f)	0	0	f ≠ 0	2^{e-1022} (0.f)
Số âm (dạng không chuẩn)	1	0	f ≠ 0	-2^{e-126} (0.f)	1	0	f ≠ 0	-2^{e-1022} (0.f)

Khái niệm Precision và Accuracy

- Precision: số bit được sử dụng trong máy tính để biểu diễn 1 giá trị.
- Accuracy: độ chính xác mà một kiểu biểu diễn trong máy tính có thể biểu diễn được một giá trị.
- Thường thì precision cao sẽ dẫn tới accuracy cao.
- Ví dụ: float pi = 3.14;
  – pi được biểu diễn bởi 24 bit phần trị (precise cao), nhưng chỉ có thể biểu diễn được gần đúng pi (không accuracy).

Làm tròn (Rounding)

- Khi thực hiện các phép toán trên số chấm động, kết quả nhận được có thể vượt ra ngoài khả năng biểu diễn của phần định trị.
- Phần cứng phục vụ các phép toán trên số chấm động thường có thêm *2 bit nhớ hỗ trợ* cho phần định trị giúp thực hiện việc *làm tròn* để có được kết quả chính xác nhất có thể.
- Ví dụ: thực hiện $(1.00\ldots00 \times 2^1) - (1.11\ldots11 \times 2^0)$

$1.00\ldots.00 \times 2^1$ $- \underline{0.111\ldots.1 \times 2^1}$ $(= 1.11\ldots.11 \times 2^0)$ $0.000..01 \times 2^1$ $= 1.00\ldots00 \times 2^{-22}$	$1.00\ldots.00\ \underline{00} \times 2^1$ $- \underline{0.111\ldots.1\ 10 \times 2^1}$ $(= 1.11\ldots.11 \times 2^0)$ $0.000..00\ \underline{10} \times 2^1$ $= 1.00\ldots00\ \underline{00} \times 2^{-23}$

Chuẩn IEEE làm tròn số chấm động

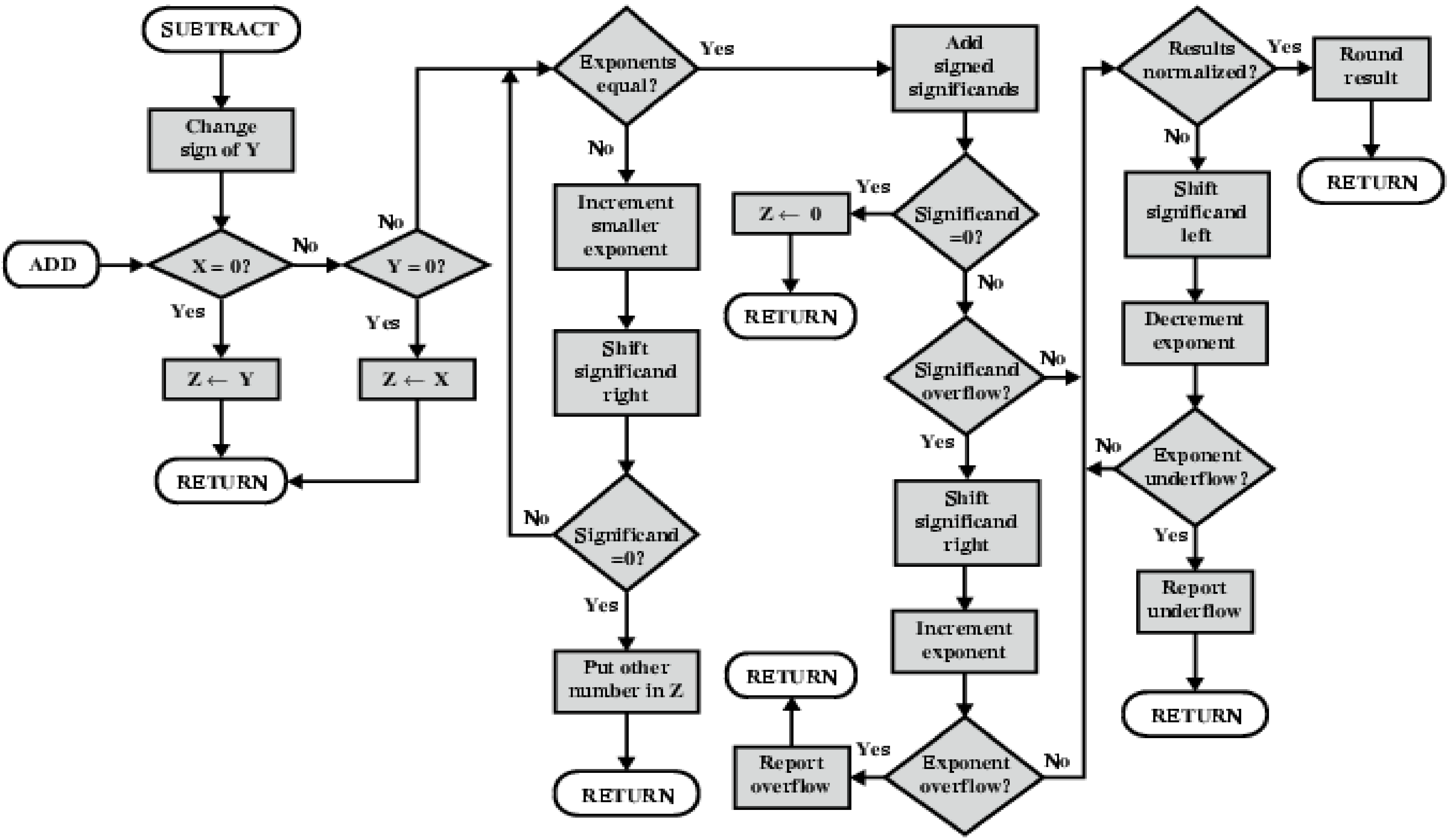
- Làm tròn lên (Round up / Round towards +∞)
  1.01 <u>10</u> → 1.10 , -1.01 <u>10</u> → -1.01
- Làm tròn xuống (Round down / Round towards –∞)
  1.01 <u>10</u> → 1.01, -1.01 <u>10</u> → -1.10
- Làm tròn về 0 (Truncate / Round towards 0)
  – Bỏ giá trị 2 bit nhớ
- Làm tròn về giá trị gần nhất (Round to nearest):
  – 1.01 <u>01</u> → 1.01 , -1.01 <u>11</u> → -1.10
  – Trường hợp 2 bit nhớ là <u>10</u> (halfway) ?
    - Làm tròn về số chẵn gần nhất (mặc định), nghĩa là LSB của phần định trị luôn bằng 0
      1.01 <u>10</u> → 1.10 , -1.10 <u>11</u> → -1.10

Các trường hợp làm tròn khác

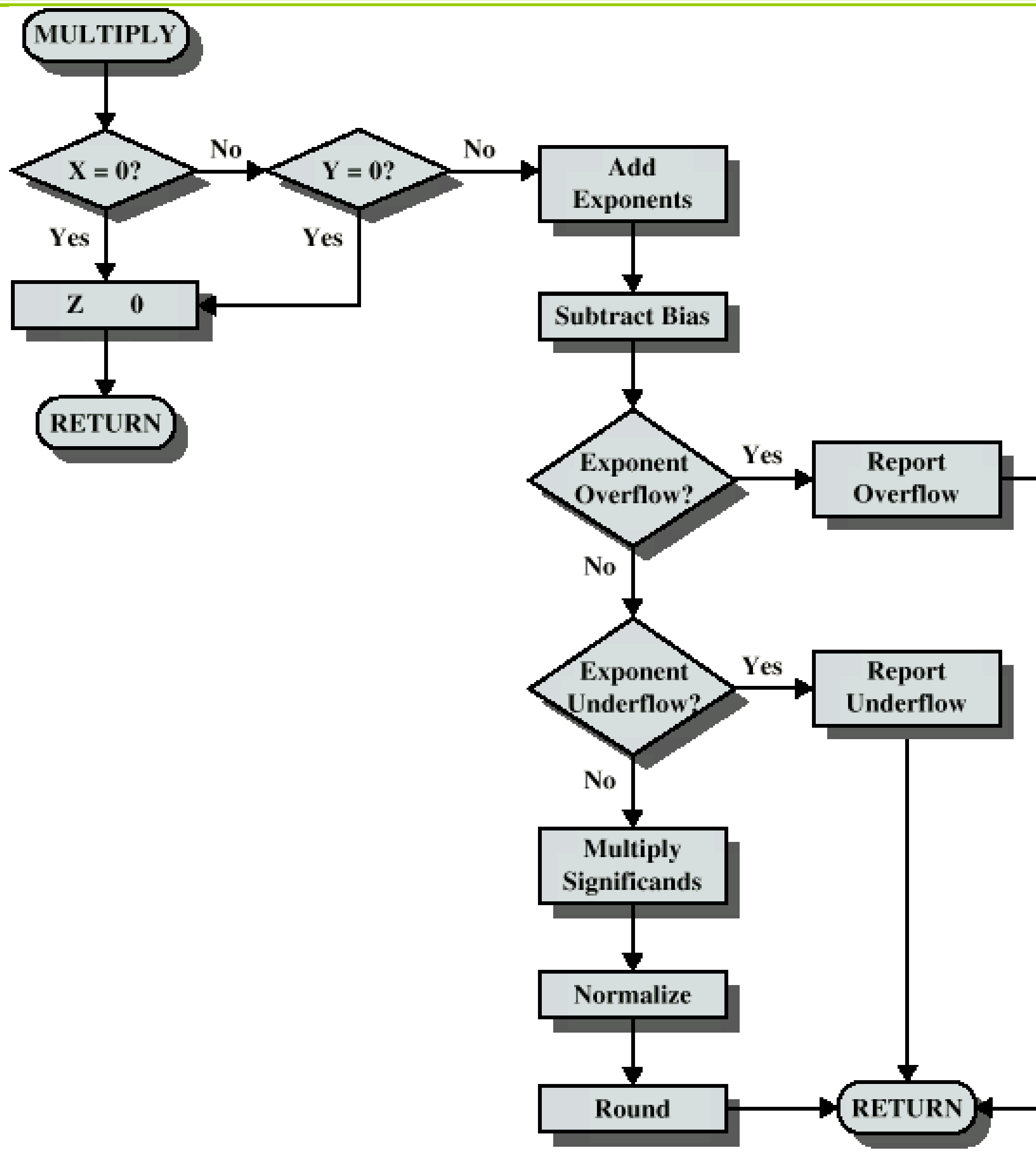
- Làm tròn cũng được thực hiện khi thực hiện chuyển đổi:
  - Chuyển đổi từ kiểu double precision thành single precision
  - Chuyển đổi từ số chấm động thành số nguyên và ngược lại
  - Ép kiểu từ số chấm động thành số nguyên và ngược lại
- Hãy khảo sát các trường hợp sau:

1. Chuyển đổi `float` -> `int` -> `float`. Kết quả như ban đầu ?
2. Chuyển đổi `int` -> `float` -> `int`. Kết quả như ban đầu ?
3. Phép cộng số chấm động có tính kết hợp ?
   `(x+y)+z = x+(y+z)`
4. `i = (int) (3.14159 * f);`
5. `f = f + (float) i;`
6. `if (i == (int)((float) i)) { printf("true"); }`
7. `if (i == (int)((double) i)) { printf("true"); }`
8. `if (f == (float)((int) f)) { printf("true"); }`
9. `if (f == (double)((int) f)) { printf("true"); }`

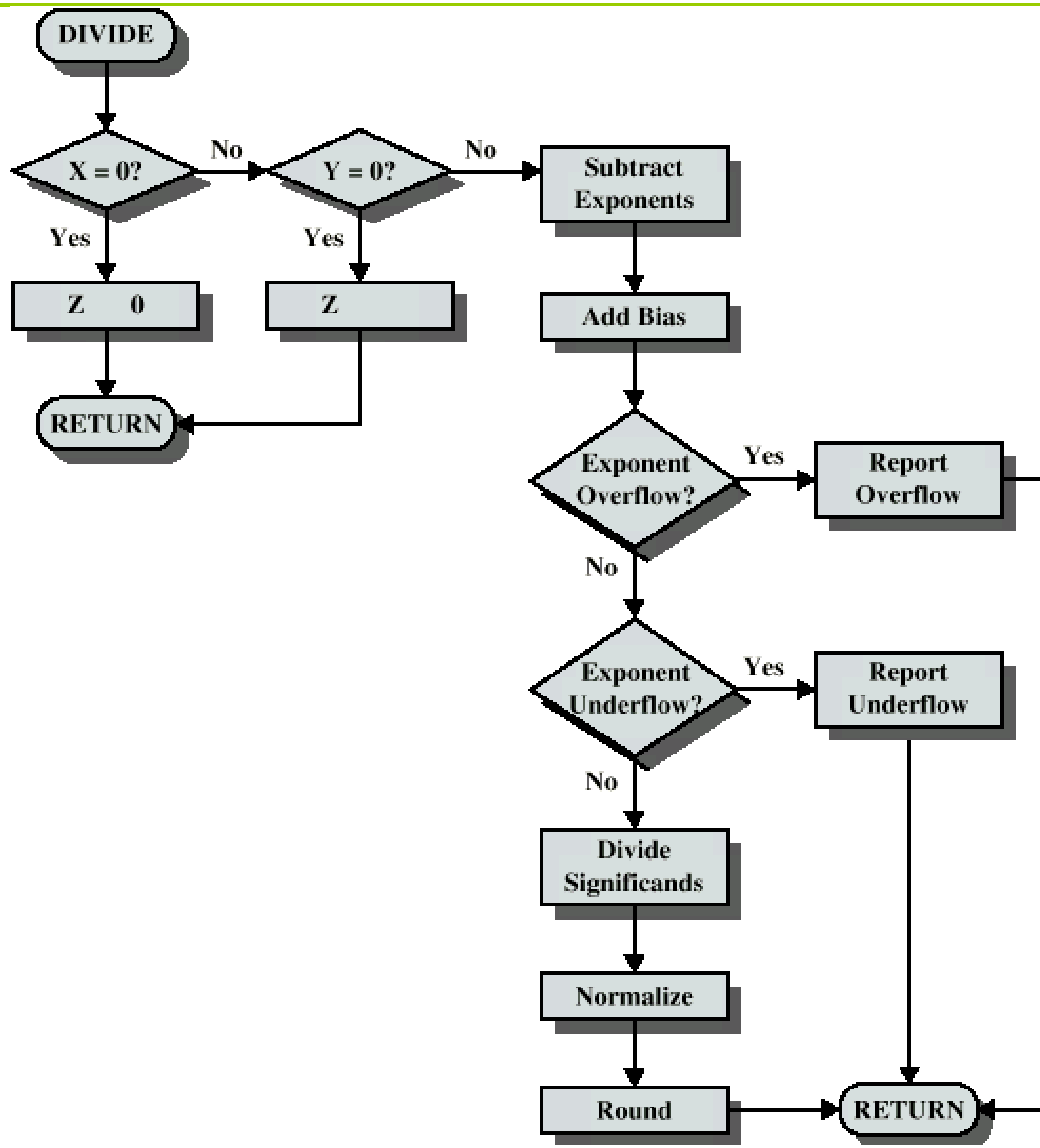
Phép cộng, trừ số chấm động



Phép nhân số chấm động



Phép chia số chấm động



Tham khảo

- Chương 3, P&H
- Chương 9, William Stallings