ĐỀ THI GIỮA KỲ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính ???? – ????

Câu 1: Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + 6x_4 = -2 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 6 \\ -x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Câu 2: Giả sử A là ma trận khả nghịch. Chứng minh điều sau:

a) $A^2 \neq 0$.

b) $A^k \neq 0$ với mọi $k > 2$.

Câu 3: Tính các định thức sau:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ m-1 & 2 & 3 \\ 3 & m+1 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Câu 4: Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Tìm ma trận phụ hợp $\operatorname{adj}(A)$ của A.

b) Từ đó, tính A^{-1}.

Đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính 2009 – 2010

Câu 1: Cho các ma trận $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ và $C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. Tồn tại hay không một ma trận A sao cho $AB = C$? Nếu có hãy tìm tất cả những ma trận A như vậy.

Câu 2: Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & a & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

trong đó $a \in \mathbb{R}$ là một tham số.

a) Tính định thức của A.

b) Tìm các giá trị của tham số a để ma trận A khả nghịch?

Câu 3: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ và $B = A - I_3$.

a) Hãy tính B^n, với n là số nguyên ≥ 1.

b) Áp dụng phần a) để tính $A^n, n \geq 1$.

Đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính 2016 – 2017

Câu 1: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Xác định dạng bậc thang và tìm hạng của ma trận A.

b) Giải hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$.

Câu 2: Tìm nghịch đảo của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Câu 3: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 - (m-1)x_3 = -2 \end{cases}$$

Câu 4: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Tìm một ma trận $B \neq 0$ sao cho $AB = BA = 0$.

Đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính 2017 – 2018

Câu 1: Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của A.

b) Tìm ma trận X sao cho $XA = AB$.

Câu 2: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -7 & 5 \\ 1 & 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

a) Xác định dạng bậc thang và tìm hạng của ma trận A.

b) Giải hệ phương trình $AX = 0$.

Câu 3: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (1-m)x_3 = 1 \\ x_1 - mx_2 + 2x_3 = m+2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Câu 4: Cho $A;\ B \in M_n(\mathbb{R})$, thỏa mãn $AB = 2A - 3B$. Chứng minh rằng $AB = BA$.

Đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính 2018 – 2019

Câu 1: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & m & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

a) Tính định thức của ma trận A. Suy ra giá trị của m để A khả nghịch.

b) Tìm ma trận nghịch đảo của A trong trường hợp $m = 1$.

Câu 2: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

a) Xác định dạng bậc thang và tìm hạng của ma trận A.

b) Giải hệ phương trình $AX = 0$.

Câu 3: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2mx_1 + (m-3)x_2 = 4 \\ (3m+1)x_1 + (m-5)x_2 = m+7 \end{cases}$$

Câu 4: Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^2 = 3A$. Chứng minh rằng $A + I_n$ là ma trận khả nghịch.

Đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính 2019 – 2020

Câu 1: Kiểm tra tính khả nghịch và tìm A^{-1} nếu có với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Câu 2: Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = m \end{cases}$$

Câu 3: Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 & 4m \\ 1 & -3 & 5 & 6m \\ m & m & -2m & m^2 \\ 0 & 1 & 1 & m \end{bmatrix}$

a) Tính định thức $\det A$.

b) Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho $\det B = \det(2A)$

Câu 4: Vết của một ma trận vuông $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, ký hiệu $\operatorname{tr}(A)$, được định nghĩa là tổng của tất cả các hệ số trên đường chéo chính của A, nghĩa là $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Chứng minh rằng nếu $B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa $\operatorname{tr}(BB^\top) = 0$ thì $B = 0$.

Đề thi giữa kỳ đại số tuyến tính 2020 – 2021

Câu 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 5 \end{cases}$$

Câu 2: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của A.

b) Tìm ma trận X sao cho $XA = AB$.

Câu 3: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 = 2 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m + 1 \\ x_1 + 2\,x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Câu 4: Chứng minh rằng, với mọi $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ ta có $\det(A \cdot A^{\top}) = 0$, trong đó $A^{\top}$ là ma trận chuyển vị của A.

ĐỀ THI CUỐI KỲ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2009 – 2010

Câu 1:

1) Cho ma trận $A = \left(a_{kj}\right)_n$ với $a_{kj} \in \mathbb{C}$ và a_{kj} là số phức liên hợp của a_{jk} với mọi $k;\ j$. Chứng minh rằng $\det A$ là số thực.

2) Sử dụng các tính chất của định thức, chứng minh đẳng thức sau

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 & d_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_1x & c_2 & d_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 & d_3 \\ a_4 + b_4x & a_4 - b_4x & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các hệ vector $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3);\ \mathcal{B}' = (v_1;\ v_2;\ v_3)$ với $u_1 = (1;\ 0;\ -1);\ u_2 = (0;\ -2;\ 1);\ u_3 = (0;\ 0;\ 1);\ v_1 = (2;\ 1;\ -1);\ v_2 = (1;\ 1;\ 6);$ $v_3 = (-1;\ 1;\ m)$.

1) Tìm m để $\mathcal{B}'$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

2) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ ứng với $m = 1$.

Câu 3: Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các không gian con $W_1 = \langle(0;\ 0;\ 1;\ 0);\ (1;\ 2;\ 1;\ 0);\ (0;\ 0;\ 1;\ 1)\rangle$ và $W_2 = \langle(0;\ 1;\ 0;\ 1);\ (1;\ 1;\ 0;\ 2);\ (0;\ 1;\ 1;\ 1)\rangle$. Hãy tìm một cơ sở của không gian con $W_1 \cap W_2$.

Câu 4: Cho các ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$ và $g : V \to W$ mà gf là đẳng cấu. Chứng minh rằng $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$ và $V = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

Câu 5: Toán tử tuyến tính φ trên $\mathbb{R}^3$ trong cơ sở $\mathcal{C} = \big((1;\ 1;\ 1);\ (1;\ 2;\ 0);\ (3;\ 0;\ 0)\big)$ có ma trận là

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm một cơ sở và số chiều của $\operatorname{Ker} \varphi$ và $\operatorname{Im} \varphi$.

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2011 – 2012

Câu 1: Gọi W là tập hợp các ma trận đối xứng thuộc $M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng W là không gian vector của $M_n(\mathbb{R})$. Tìm số chiều và một cơ sở của W.

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các hệ vector $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$; $\mathcal{B}' = (v_1;\ v_2;\ v_3)$ với

$u_1 = (1;\ 0;\ 1)$; $u_2 = (0;\ 1;\ 0)$; $u_3 = (2;\ 1;\ 0)$; $v_1 = (0;\ 0;\ 1)$; $v_2 = (0;\ 1;\ -1)$; $v_3 = (m;\ 1;\ 1)$.

1) Tìm m để $\mathcal{B}'$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

2) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ ứng với $m = 1$.

Câu 3: Cho toán tử tuyến tính $f: V \to V$ mà $ff = f$. Chứng minh rằng:

$$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\} \text{ và } V = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$$

Câu 4: Toán tử tuyến tính φ trên $\mathbb{R}^3$ trong cơ sở $\mathcal{C} = \big((1;\ 1;\ -1);\ (1;\ 1;\ 0);\ (2;\ 0;\ 0)\big)$ có ma trận là $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Hãy tìm một cơ sở và số chiều của $\operatorname{Ker}\varphi$ và $\operatorname{Im}\varphi$.

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2012 – 2013

Câu 1: Cho $A = (a_{ij})_n$ là ma trận vuông cấp n ($n \geq 2$) xác định bởi

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{khi } (i; j) \in \{(2;\ 2);\ (3;\ 3);\ \dots;\ (n;\ n)\} \\ 1, & \text{khi } (i; j) \notin \{(2;\ 2);\ (3;\ 3);\ \dots;\ (n;\ n)\} \end{cases}$$

Tính $\det A$.

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các cơ sở $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$; $\mathcal{B}' = (v_1;\ v_2;\ v_3)$ với

$u_1 = (3;\ 2;\ 1)$; $u_2 = (0;\ 2;\ -1)$; $u_3 = (0;\ 0;\ 1)$; $v_1 = (1;\ 1;\ 0)$; $v_2 = (1;\ 0;\ -1)$; $v_3 = (1;\ 1;\ 1)$.

Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.

Câu 3: Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các không gian con

$W_1 = \langle(0;\ 0;\ 1;\ 0);\ (1;\ 2;\ 1;\ 0);\ (0;\ 0;\ 1;\ 1)\rangle$ và $W_2 = \langle(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_4 = x_2 + x_1\rangle$

Hãy tìm một cơ sở của không gian con $W_1 \cap W_2$.

Câu 4: Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là toán tử tuyến tính mà $f \circ f = f$. Giả sử $\mathcal{X} = (w_1;\ w_2;\ \cdots;\ w_r)$ và $\mathcal{Y} = (w_{1+r};\ w_{2+r};\ \cdots;\ w_n)$ lần lượt là cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ và $\operatorname{Im} f$.

a) Chứng minh rằng $\mathcal{C} = (w_1;\ w_2;\ \cdots;\ w_n)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$.

b) Hãy tìm ma trận biểu diễn của toán tử f trong cơ sở $\mathcal{C}$.

Câu 5: Toán tử tuyến tính φ trên $\mathbb{R}^3$ trong cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0 = \big((1;\ 0;\ 0);\ (0;\ 1;\ 0);\ (0;\ 0;\ 1)\big)$ có ma trận biểu diễn là

$$\begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm một cơ sở và số chiều của $\operatorname{Ker} \varphi$ và $\operatorname{Im} \varphi$.

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2013 – 2014

Câu 1: Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tìm tất cả các ma trận 2×2 B sao cho $B \neq 0$; $B \neq I_2$ và B thỏa tính chất $AB = BA$

Câu 2:

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số a

$$\begin{cases} x + \ \ y - \qquad\quad\ z = 2 \\ x + 2y + \qquad\quad z = 3 \\ x + \ \ y + (a^2 - 5)z = a \end{cases}$$

Câu 3: Cho A là ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Tìm một cơ sở cho

a) Không gian dòng của A.

b) Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$.

Câu 4: Giả sử A là một ma trận có kích thước 4×3 và B là một ma trận có kích thước 3×4. Đặt $C = AB$. Hỏi có tồn tại ma trận A và B sao cho các cột của C độc lập tuyến tính hay không? Nếu có, hãy cho một ví dụ. Nếu không, hãy chứng minh.

Câu 5: Cho $V = \mathbb{R}_2[t]$ (không gian các đa thức thực có bậc nhỏ hơn hay bằng 2). Đặt $C = \{2 + t;\ t + t^2;\ 1 + t^2\}$ và $D = \{1;\ 1 + t;\ 1 + t + t^2\}$

a) Kiểm tra C và D là hai cơ sở của V.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở $(C \to D)$.

Câu 6: Cho ánh xạ tuyến tính

$$\begin{aligned} T:\quad \mathbb{R}^3 \quad &\to \qquad\qquad \mathbb{R}^2 \\ (x_1;\ x_2;\ x_3) &\mapsto (x_1 + 2x_2 + 3x_3;\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3) \end{aligned}$$

Đặt $B = \{(1;\ 2;\ -1);\ (2;\ -1;\ 2);\ (3;\ 1;\ -1)\}$ và $C = \{(1;\ 2);\ (2;\ 3)\}$

a) Kiểm tra C và B là hai cơ sở của $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính T theo cơ sở B và C, $[T]_{B;\,C}$.

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2014 – 2015

Câu 1: Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = m \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 3m \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = m + 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = m - 1 \end{cases}$$

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các hệ vector $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$; $\mathcal{B}' = (v_1;\ v_2;\ v_3)$ với $u_1 = (1;\ 0;\ -1)$; $u_2 = (0;\ -2;\ 1)$; $u_3 = (0;\ 1;\ 1)$; $v_1 = (2;\ 1;\ -1)$; $v_2 = (1;\ 1;\ 6)$; $v_3 = (-1;\ 1;\ m)$.

a) Tìm m để $\mathcal{B}'$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ ứng với $m = 1$.

Câu 3: Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa điều kiện $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ với mọi i. Chứng minh rằng $\det A \neq 0$.

Câu 4: Cho các ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$ và $g : V \to W$ mà gf là đẳng cấu. Chứng minh rằng $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$ và $V = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

Câu 5: Toán tử tuyến tính φ trên $\mathbb{R}^4$ trong cơ sở $\mathcal{B}_0 = \big((1;\ 0;\ 0;\ 0);\ (0;\ 1;\ 0;\ 0);\ (0;\ 0;\ 1;\ 0);(0;\ 0;\ 0;\ 1)\big)$ có ma trận là $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 12 & 2 \end{bmatrix}$. Hãy tìm một cơ sở và số chiều của $\operatorname{Ker} \varphi$ và $\operatorname{Im} \varphi$. Toán tử φ có phải là đơn cấu, toàn cấu không? Tại sao?

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2015 – 2016

Câu 1: Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + (3-m)x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + (m+1)x_3 = 3-m \end{cases}$$

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vector $u_1 = (1;\ 1;\ 2)$; $u_2 = (2;\ 1;\ 3)$; $u_3 = (3;\ -1;\ 1)$ và $u = (9;\ 1;\ 9)$.

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1;\ u_2;\ u_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và xác định tọa độ của vector u theo cơ sở $\mathcal{B}$.

b) Xác định cơ sở $\mathcal{C} = \{v_1;\ v_2;\ v_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{C}$ sang $\mathcal{B}$ là

$$(\mathcal{C} \to \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Câu 3: Cho W là không gian của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vector $u_1 = (1;\ 1;\ 2;\ 1)$; $u_2 = (1;\ 2;\ 3;\ 2)$; $u_3 = (-1;\ 3;\ 1;\ 1)$; $u_4 = (5;\ -2;\ 5;\ 2)$

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$ là cơ sở của W và xác định tọa độ của u_4 theo cơ sở $\mathcal{B}$.

b) Cho $u = (1;\ m;\ 3;\ m-2) \in \mathbb{R}^4$. Tìm m để $u \in W$. Với giá trị m vừa tìm được, hãy biểu diễn vector u dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $u_1;\ u_2;\ u_3$.

Câu 4: Cho ánh xạ tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^4;\ \mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x;\ y;\ z;\ t) = (x + y + 2z - t;\ x + 2y - z + t;\ x + 3y - 4z + 3t)$$

a) Tìm một cơ sở của không gian $\operatorname{Im} f$ và một cơ sở của không gian $\operatorname{Ker} f$.

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}$; trong đó $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ và $\mathcal{B} = \{(1;\ 0;\ 1);\ (0;\ -1;\ 0);\ (0;\ 1;\ 2)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Câu 5:

a) Cho V là không gian vector trên $\mathbb{R}$, $\dim V = 3$ và $u;\ v;\ w \in V$. Chứng minh rằng $\mathcal{B} = \{u;\ v;\ w\}$ là cơ sở của V khi và chỉ khi $\mathcal{B}' = \{u + v;\ v - w;\ w + 2u\}$ là cơ sở của V.

b) Cho $A;\ B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $AB = BA$ và $A^2 = B^2 = 0$. Chứng minh rằng $(I_n + A + B)$ khả nghịch và $(A + B + AB)$ không khả nghịch.

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2016 – 2017

Câu 1: Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Tìm ma trận nghịch đảo của A.

b) Tìm ma trận X thỏa mãn $AXA = AB$.

Câu 2: Cho tập hợp $W = \{(x;\ y;\ z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = 2z\}$

a) Chứng minh W là không gian con của không gian vector $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm cơ sở và xác định số chiều của không gian W.

Câu 3: Cho tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1 = (1;\ 2;\ 2);\ u_2 = (1;\ 1;\ -1)\}$ và W là không gian sinh bởi $\mathcal{B}$.

a) Chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của W.

b) Tìm m để vector $u = (1;\ -1;\ m)$ thuộc không gian W và với giá trị đó của m, hãy xác định tọa độ của u theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Câu 4: Giả sử $\mathcal{B} = \{u;\ v\}$ là cơ sở của không gian vector V. Đặt $\mathcal{B}' = \{u - 2v;\ 3u - 5v\}$.

a) Chứng minh $\mathcal{B}'$ là cơ sở của V và xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.

b) Cho $w \in V$ thỏa mãn $[w]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Hãy xác định tọa độ của w theo cơ sở $\mathcal{B}'$.

Câu 5: Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x;\ y;\ z) = (x + 2y - 3z;\ 2x + 3y + z;\ 3x + 4y + 5z)$$

a) Xác định cơ sở cho các không gian $\operatorname{Ker} f$ và $\operatorname{Im} f$.

b) Cho $\mathcal{B} = \{u_1 = (1;\ -1;\ 0);\ u_2 = (1;\ 0;\ -1);\ u_3 = (0;\ -1;\ 0)\}$. Chứng tỏ $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và xác định ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2017 – 2018

Câu 1: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Tìm các giá trị của m để A khả nghịch.

b) Tìm nghịch đảo của A trong trường hợp $m = 1$.

Câu 2: Cho $W = \{(x;\ y;\ z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 2x + z\}$ và $W' = \{(x;\ y;\ z) \in \mathbb{R}^3 | xy = 2xz\}$. Chứng minh rằng W là không gian con của $\mathbb{R}^3$ và W' không là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Câu 3: Trong $\mathbb{R}^3$, cho $u_1 = (1;\ 1;\ 2);\ u_2 = (2;\ 1;\ 1);\ u_3 = (1;\ 3;\ 7)$ và $\mathcal{B} = \{u_1;\ u_2;\ u_3\}$.

a) Chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và tìm tọa độ của vector $u = (5;\ 4;\ 6)$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

b) Tìm m để $v = (1;\ 3;\ m)$ là tổ hợp tuyến tính của $u_1;\ u_2$. Với giá trị m vừa tìm được, hãy xác định dạng biểu diễn tuyến tính của v theo u_1 và u_2.

c) Xác định cơ sở $\mathcal{B}' = \{u_1';\ u_2';\ u_3'\}$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$ là

$$(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Câu 4: Cho ánh xạ tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^4;\ \mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x;\ y;\ z;\ t) = (x + y - z - t;\ x - y + z + 2t;\ x + 3y - 3z - 4t)$$

a) Tìm một cơ sở của không gian $\operatorname{Im} f$ và một cơ sở của không gian $\operatorname{Ker} f$.

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}$; trong đó $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ và $\mathcal{B} = \{(1;\ 0;\ -1);\ (0;\ 1;\ 0);\ (0;\ -1;\ 1)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Câu 5: Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^3 + 3A^2 + 3A + I_n = 0$. Chứng minh rằng A khả nghịch nhưng $A + I_n$ không khả nghịch.

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2018 – 2019

Câu 1: Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1;\ u_2;\ u_3\}$ và W là không gian sinh bởi $\mathcal{B}$, trong đó $u_1 = (1;\ 2;\ -2);\ u_2 = (1;\ 4;\ m-4);\ u_3 = (1;\ m-2;\ -m)$.

a) Tìm các giá trị của m để $W = \mathbb{R}^3$.

b) Trong trường hợp $W \neq \mathbb{R}^3$, hãy biểu diễn u_3 theo $u_1;\ u_2$ và tìm một cơ sở cho không gian W.

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1;\ u_2;\ u_3\}$ và W là không gian sinh bởi $\mathcal{B}$, trong đó $u_1 = (1;\ 1;\ 1;\ 2);\ u_2 = (1;\ 2;\ 2;\ 1);\ u_3 = (1;\ -1;\ -2;\ 1)$.

a) Chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của W và $u = (2;\ 6;\ 7;\ 3) \in W$.

b) Tìm m để $v = (2;\ 1;\ m;\ m) \in W$. Với giá trị m vừa tìm được, hãy xác định tọa độ vector v theo cơ sở $\mathcal{B}$.

c) Xác định cơ sở $\mathcal{B}' = \{u_1';\ u_2';\ u_3'\}$ của W sao cho ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$ là

$$(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Câu 3: Cho f là một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^4$ xác định bởi:

$$f(x;\ y;\ z;\ t) = (x + y + 3z - 2t;\ x + 2y + 5z - 3t;\ x - y - z;\ x + z - t)$$

a) Tìm một cơ sở của không gian $\operatorname{Im} f$ và một cơ sở của không gian $\operatorname{Ker} f$.

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở

$\mathcal{B} = \{u_1 = (1;\ 0;\ -1;\ 0);\ u_2 = (0;\ 1;\ -1;\ 0);\ u_3 = (0;\ 1;\ 0;\ -1);\ u_4 = (1;\ -1;\ 0;\ 1)\}$ của $\mathbb{R}^4$.

Câu 4: Cho V là không gian vector hữu hạn chiều trên $\mathbb{R}$ và W là không gian con của V sao cho $\dim W = \dim V - 1$. Chứng minh rằng tồn tại một cơ sở của V mà không có vector nào nằm trong W.

Đề thi cuối kỳ đại số tuyến tính 2019 – 2020

Câu 1: Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính theo tham số thực m:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 10x_4 = -5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 7x_4 = m \end{cases}$$

Câu 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vector

$$u_1 = (1;\ 3;\ 0);\ u_2 = (2;\ 7;\ 1);\ u_3 = (3;\ 10;\ 2)$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$ của $\mathbb{R}^3$.

c) Tìm tọa độ của vector $u(5;\ 16;\ 3)$ trong cơ sở $\mathcal{B}$.

d) Tìm vector $v \in \mathbb{R}^3$ biết $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Câu 3: Cho f là một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x;\ y;\ z) = (6x - 2y + 4z;\ 18x - 6y + 13z;\ 6x - 2y + 3z)$$

a) Tìm số chiều và một cơ sở cho mỗi không gian $\operatorname{Im} f$; $\operatorname{Ker} f$.

b) Chứng minh $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

c) Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1;\ u_2;\ u_3\}$ được cho như trong Câu 2.

Câu 4: Cho V là không gian vector n chiều, S là một tập sinh của V và $u_1;\ \cdots;\ u_{n-1} \in V$ là $n-1$ vector độc lập tuyến tính. Chứng minh rằng tồn tại $u \in S$ sao cho $\{u_1;\ \cdots;\ u_{n-1};\ u\}$ là một cơ sở của V.