

## LAB 4

### TỐI ƯU LỖI VÀ PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI TIỂU

#### Mục tiêu bài thực hành:

- Nắm vững được Python để viết được các đoạn lệnh.
- Nâng cao kỹ năng lập trình cùng với tư duy toán học.
- Nắm vững một số khái niệm trong giải tích lỗi và các định lý liên quan để tìm nghiệm tối ưu trên máy tính.
- Nắm vững phương pháp bình phương tối thiểu để khớp các đường cong phù hợp với dữ liệu theo yêu cầu.

Trước khi vào phần thực hành, chúng ta có thể nạp các thư viện sau để dùng:

```
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
import sympy
from sympy import Matrix
from fractions import Fraction
```

#### 1. Bài toán tối ưu lỗi

**Ví dụ 1.** Xét tính lồi, lõm của hàm số  $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ .

Ta có thể viết lại  $f$  ở dạng ma trận như sau:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Đặt  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Để kiểm tra tính lồi lõm của hàm  $f$ , ta tìm các trị riêng của ma trận  $A$

và kiểm tra xem tất cả có không âm hay không như sau.

```
In [8]: A=np.array([[3,-1,1],[-1,1,0],[1,0,1]])
A
```

```
Out[8]: array([[ 3, -1,  1],
               [-1,  1,  0],
               [ 1,  0,  1]])
```

```
In [9]: np.linalg.eig(A)[0]
```

```
Out[9]: array([3.73205081, 0.26794919, 1.          ])
```

Như vậy các trị riêng của A đều dương, do đó ma trận A là xác định dương. Suy ra  $f$  là hàm lồi và đạt giá trị nhỏ nhất tại  $x_0 = (0, 0, 0)$ .

## 2. Phương pháp bình phương tối thiểu

Cho ma trận  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  và  $m > n$  và vector  $b \in \mathbb{R}^m$ , nghiệm bình phương tối thiểu của phương trình  $Ax = b$  là  $\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$ .

**Ví dụ 2.** Tìm nghiệm bình phương tối thiểu của  $Ax=b$  biết ma trận A và vector b như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

```
In [10]: A=np.array([[2,0],[-1,1],[0,2]])
b=np.array([[1],[0],[-1]])
print(A)
print(b)
```

```
[[ 2  0]
 [-1  1]
 [ 0  2]]
[[ 1]
 [ 0]
 [-1]]
```

Tính tích  $A^T A$  và gán cho ma trận X.

```
In [11]: X=np.matmul(np.transpose(A),A)
X
```

```
Out[11]: array([[ 5, -1],
                [-1,  5]])
```

Tính tích  $A^T b$  và gán cho ma trận Y.

```
In [12]: Y=np.matmul(np.transpose(A),b)
Y
```

```
Out[12]: array([[ 2],
                [-2]])
```

Tính nghiệm bình phương tối thiểu.

```
In [13]: x_sol_square=np.matmul(np.linalg.inv(X),Y)
x_sol_square
```

```
Out[13]: array([[ 0.33333333],
                [-0.33333333]])
```

Vậy nghiệm bình phương tối tiểu của  $Ax = b$  là  $x_0 = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ .

### 3. Đồ án

**Bài 1.** Kiểm tra tính lồi/lõm và tìm cực trị toàn cục nếu có của hàm  $f(x) = x^T Ax + q^T x + 1$  với

$$x = (x_1, x_2, x_3), A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } q = (1, 2, -1).$$

(Trình bày các câu lệnh Python để kiểm tra).

**Bài 2.** Một người đi xạ trị bệnh bằng việc bơm thuốc vào người. Khi vừa xạ trị xong, lượng thuốc tồn đọng trong người ở mức 10 đơn vị. Sau đó 1 giờ sau lượng thuốc còn lại là 8; lần lượt 2, 3, 4 giờ sau lượng thuốc còn lại là 7, 5 và 2.

Hãy viết các lệnh bằng Python để tìm phương trình tuyến tính bằng phương pháp bình phương tối tiểu với tập các cặp số  $(x, y)$  như bên dưới để tìm công thức giảm lượng thuốc đối với bệnh nhân theo thời gian:

$$(x, y) = \{(0, 10), (1, 8), (2, 7), (3, 5), (4, 2)\}$$

**Bài 3.** Một thí nghiệm xét mối liên hệ giữa độ giảm trọng lượng của hợp chất ( $y$ , tính bằng gam) và khoảng thời gian mà hợp chất tiếp xúc với không khí ( $x$ , tính bằng năm), trong đó số âm có thể hiểu là giai đoạn xử lý nguyên liệu, trước khi điều chế ra hợp chất. Ta có bảng dữ liệu như sau:

x	-2	0	1	2	4
y	-1	1.5	3.1	6.3	11.1

a) Giả sử  $x, y$  thỏa mãn mô hình  $y = a + bx + c \ln(x^2 + 1)$ . Hãy sử dụng phương pháp bình phương cực tiểu, ước lượng các tham số  $a, b, c$ .

b) Vẽ đồ thị cho dữ liệu. Sử dụng kết quả trên để dự đoán  $y$  khi  $x = 6.5$ .

c) Hỏi có nên dùng mô hình  $y=a+bx+\ln(x)$  hoặc  $y = a + bx = \frac{C}{x}$  để xấp xỉ dữ liệu trên không? Vì sao?

### Quy định bài nộp

- Thực hiện toàn bộ bài làm trên 1 tập tin Jupyter Notebook (.ipynb) hoặc Python (.py)
- Bạn nộp tập tin MSSV.zip được nén từ thư mục MSSV chứa các tập tin sau:
  1. Báo cáo toàn bộ bài làm: MSSV.pdf
  2. Mã nguồn: MSSV.ipynb hoặc MSSV.pyTrong đó, nội dung tập tin báo cáo gồm có:
  - Thông tin cá nhân: họ và tên, MSSV
  - Liệt kê các chức năng đã hoàn thành
  - Ý tưởng thực hiện, mô tả các hàm chức năng
  - Hình ảnh kết quả với từng chức năng
- Ví dụ minh họa cây thư mục bài nộp sau khi giải nén tập tin MSSV.zip như sau:

MSSV

```
├─ MSSV.pdf
└─ MSSV.ipynb
```

### Quy định chấm bài

Những trường hợp sau đây sẽ bị 0 điểm toàn bộ đồ án:

- Nộp sai quy định.
- Không có báo cáo.
- Thực thi mã nguồn báo lỗi.

**LƯU Ý: SAO CHÉP BÀI LÀM CỦA NHAU SẼ BỊ 0 ĐIỂM TOÀN BỘ PHẦN THỰC HÀNH**