No.
Date

TOÁN ỨNG DỤNG THỐNG KÊ

- Bài tập tối ưu lồi:

1, Hãy xét tính lồi, lõm của các hàm số và tìm cực đại, cực tiểu nếu có.

a. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

Ta có: $f(x) = x^TAx$ với

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Do đó: $\nabla f(x) = 2Ax \qquad \nabla^2 f(x) = 2A$.

Khảo sát tính xác định của A:

Ta có: $|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6)$

$\Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 3, \vee \lambda = 6$.

Ta thấy, A có các trị riêng đều lớn hơn 0 nên A là ma trận xác định dương. Do đó f lồi ngặt. Do đó f có điểm cực tiểu toàn cục duy nhất là nghiệm của hệ PTTT

$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow 2Ax = 0 \Leftrightarrow x = (0,0,0)$.

Thế vào f ta có $f_{min} = 0$

b. $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$

Ta có: $f(x) = x^TAx$ với

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Do đó: $\nabla f(x) = 2Ax \qquad \nabla^2 f(x) = 2A$.

Khảo sát tính xác định của A:

Ta có: $|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{bmatrix} = (\lambda+1)(-\lambda^2 - 2\lambda + 8) = 0$.

Date

$\Rightarrow |A-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda = -2 \vee \lambda = 4$.

Ta thấy A có các trị riêng vừa âm, vừa dương nên A là ma trận không xác định. Do đó, hàm số f không là lõm hay lồi

c. $f(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

Ta có: $f(x) = x^T A x$ với $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

Do đó: $\nabla f = 2Ax$ $\quad \nabla^2 f = 2A$.

Khảo sát tính xác định của A ta có:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)(-\lambda^2 - 5\lambda - 4)$$

$\Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3 \vee \lambda = -1 \vee \lambda = -4$.

Ta thấy A có các trị riêng đều <0 nên A là ma trận xác định âm. Do đó f lõm ngặt. Do đó, f có điểm cực đại toàn cục duy nhất là nghiệm của hệ PTTT:

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow 2Ax = 0$$

Hệ trên có nghiệm $x = (0, 0, 0)$. Thế vào f ta có $f_{max} = 0$.

2. Cho dữ liệu của 2 đại lượng X, Y khảo sát có kết quả:

X	1	2	3	4
Y	2	2	5	8

a. Mô hình $Y = \theta_1 + \theta_2 X$

Giải bài toán bình phương nhỏ nhất $Ax = b$ với:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Ta có: $A^T.A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A^T.A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$

$A^T.b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 53 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x = (A^T.A)^{-1} . A^T b = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 17 \\ 53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2,1 \end{bmatrix}$

Vậy $\theta_1 = -1$ $\theta_2 = 2,1$

b. Mô hình cubic $y = \theta_1 + \theta_2 x^2$

Đặt $x' = x^2$, mô hình $y = \theta_1 + \theta_2 x'$

Giải bài toán bình phương nhỏ nhất $Ax = b$ với:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \\ 1 & 16 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$

Ta có:

$A^T.A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 30 \\ 30 & 354 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A^T.A)^{-1} = \frac{1}{516} \begin{bmatrix} 354 & -30 \\ -30 & 4 \end{bmatrix}$

No.
Date

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 183 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = (A^T . A)^{-1} . A^T b = \begin{bmatrix} 44/43 \\ 37/86 \end{bmatrix} \Rightarrow \theta_1 = \frac{44}{43}, \ \theta_2 = \frac{37}{86}$$

c. Mô hình đa thức $Y = \theta_1 + \theta_2 X + \theta_3 X^2$.

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma y_i x_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \end{Bmatrix}$$

Ta có: $n = 4$ $\quad \Sigma x_i^3 = 100$ $\quad \Sigma y_i = 17$

$\Sigma x_i = 10$ $\quad \Sigma x_i^4 = 354$ $\quad \Sigma y_i x_i = 53$.

$\Sigma x_i^2 = 30$ $\quad \Sigma x_i^2 y_i = 183$

$\theta_1 = 2,75$ $\quad \theta_2 = -1,65$ $\quad \theta_3 = 0,75$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 53 \\ 183 \end{pmatrix}$$

$$A \quad . \quad X = B \quad \rightarrow X = A^{-1} B.$$

$$A^{-1} \times B = \frac{1}{80} . \begin{bmatrix} +620 & -540 & +100 \\ -540 & +516 & -100 \\ +100 & -100 & +20 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 53 \\ 183 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/4 \\ -33/20 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \theta_1 = 2,75; \quad \theta_2 = -1,65; \quad \theta_3 = 0,75.$$

No.
Date

d. Mô hình tuyến tính $\log Y = \theta_1 + \theta_2 \ln X$.

Đặt $y' = \log Y$, $x' = \ln X$.

Mô hình $y = \theta_1 + \theta_2 x'$

Giải bài toán bình phương tối thiểu $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \ln 2 \\ 1 & \ln 3 \\ 1 & \ln 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \log 2 \\ \log 2 \\ \log 5 \\ \log 8 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$A^T . A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \ln 2 & \ln 3 & \ln 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \ln 2 \\ 1 & \ln 3 \\ 1 & \ln 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3,18 \\ 3,18 & 3,6 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{4,2876} \begin{bmatrix} 3,6 & -3,18 \\ -3,18 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 2,2 \\ 2,23 \end{bmatrix} \Rightarrow x = (A^T A)^{-1} . A^T b = \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,45 \end{bmatrix}$$

e. Mô hình log - tuyến tính $\ln Y = \theta_1 + \theta_2 X$.

Đặt $y' = \ln Y \Rightarrow$ Mô hình $y' = \theta_1 + \theta_2 X$.

Giải bài toán bình phương tối thiểu $Ax = b$ với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \ln 2 \\ \ln 2 \\ \ln 5 \\ \ln 8 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$$ (theo câu a)

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ln 2 \\ \ln 2 \\ \ln 5 \\ \ln 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,075 \\ 15,225 \end{bmatrix}$$

I TIẾN

No.
Date

$\Rightarrow x = (A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5075 \end{bmatrix} \Rightarrow \theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0,5075$

f. Mô hình log - log $\ln Y = \theta_1 + \theta_2 \ln X$.

Đặt $Y' = \ln Y$, $X' = \ln X$

Mô hình $Y' = \theta_1 + \theta_2 X'$, có:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \ln 1 \\ 1 & \ln 2 \\ 1 & \ln 3 \\ 1 & \ln 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \ln 2 \\ \ln 2 \\ \ln 5 \\ \ln 8 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Giải bài toán bình phương tối tiểu $Ax = b$.

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{4,2876} \cdot \begin{bmatrix} 3,6 & -3,18 \\ -3,18 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^Tb = \begin{bmatrix} 5,075 \\ 5,131 \end{bmatrix} \Rightarrow x = (A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{bmatrix} 0,456 \\ 1,023 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = 0,456 \\ \theta_2 = 1,023 \end{cases}$$

4. Dữ liệu 4 điểm:

x	0	1	2	3
y	1	3	4	4

Mô hình tuyến tính $y = a + bx$ Hay $y = \theta_1 + \theta_2 x$

Giải bài toán bình phương bé nhất với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

I TIẾN

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix}14 & -6\\ -6 & 4\end{bmatrix}$$

$$A^Tb = \begin{bmatrix}12\\ 23\end{bmatrix} \Rightarrow x = (A^TA)^{-1}.A^Tb = \begin{bmatrix}3/2\\ 1\end{bmatrix}$$

→ Mô hình đường thẳng phù hợp $y = \frac{3}{2} + x = 1,5 + x$

3. Ycbt ⇔ tìm hệ số b trong mô hình $y = a + bx$.

Giải bài toán bình phương tối thiểu với:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 6,1\\ 1 & 7,6\\ 1 & 8,7\\ 1 & 10,4\end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix}0\\ 2\\ 4\\ 6\end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

Ta có:

$$A^TA = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 6,1 & 7,6 & 8,7 & 10,4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 6,1\\ 1 & 7,6\\ 1 & 8,7\\ 1 & 10,4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 32,8\\ 32,8 & 278,82\end{bmatrix}$$

$$*(A^T.A)^{-1} = \frac{1}{39,44} \cdot \begin{bmatrix}278,82 & -32,8\\ -32,8 & 4\end{bmatrix}.$$

$$A^Tb = \begin{bmatrix}12\\ 112,4\end{bmatrix} \Rightarrow x = (A^TA)^{-1}.A^Tb = \begin{bmatrix}-8,643\\ 1,42\end{bmatrix}$$

Vậy hệ số b (độ cứng lò xo) là 1,42.