CHỦ ĐỀ 7. THỂ TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

• **PHẦN 3. TRẢ LỜI NGẮN**

CÂU HỎI (vì là ngân hàng được tách ra từ các trường, cho nên có trùng lặp câu hỏi thì do các trường tham khảo nhau)

Thể tích

Câu 1. **(KHTN Hà Nội 2025)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 3, $SA \perp ABCD$ và $SC = 3\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Câu 2. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ 2025)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 6 cm, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và số đo góc nhị diện $[B,SC,D]$ bằng $120°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu centimet khối?

Câu 3. **(Sở Tuyên Quang 2025)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 5. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng ABC trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{5\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 4. **(Chuyên Phan Bội Châu - Hà Tĩnh 2025)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3 và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc nhị diện $[B,SC,D]$ bằng 120^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

Câu 5. **(Sở Phú Thọ 2025)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C và $AC = 4$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{12}{5}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

Câu 6. **(THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025)** Cho tứ diện $ABCD$, tam giác ABC đều, tam giác ABD vuông cân tại đỉnh D biết $BC = CD = 3$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$? (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*).

Câu 7. **(THPT Hoằng Hóa 2-Thanh Hóa 2025)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua B, trung điểm I của SO và cắt các cạnh SA, SC và SD lần lượt tại M, N và P. Gọi K là giá trị lớn nhất và k là giá trị nhỏ nhất của tỷ số $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$. Tính giá trị biểu thức $F = 9K + 6k$.

Câu 8. **(THPT Tư Nghĩa 1 - Quảng Ngãi 2025)** Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là $ABCD$ hình thoi cạnh bằng 1, $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $A'AB$ là tam giác đều, $\widehat{B'C'C} = 120°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 9. **(Sở Vũng Tàu 2025)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{7}}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Câu 10. **(THPT Mai Trúc Loan - Hà Tĩnh 2025)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy và $SA = 3$. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng $\frac{12}{5}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho bằng bao nhiêu?

Câu 11. **(THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc 2025)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2\sqrt[3]{26}$, tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60°$, góc giữa cạnh bên BB' và mặt đáy (ABC) bằng $60°$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích của khối tứ diện $A'ABC$.

Câu 12. **(HSG Hải Phòng 2025)** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1; 2. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của cạnh $B'C'$, $A'M=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 13. **(HSG Vũng Tàu 2025)** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $AB=1$, $AC=2$, $\widehat{BAC}=120^\circ$ và $SA\perp(ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SB, SC và α là góc tạo bởi đường thẳng SA và (AMN) sao cho $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Câu 14. **(THPT Cụm trường Hải Dương 2025)** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA=a$. Gọi D,E lần lượt là trung điểm của SA,SC biết BD vuông góc với AE. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a là $\dfrac{a^3\sqrt{m}}{n}$. Tính giá trị của $m+n$.

Câu 15. **(Chuyên KHTN Hà Nội 2025)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 3, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết số đo của góc nhị diện $[B,SC,D]$ bằng 120°. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Câu 16. **(THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh 2, $\widehat{ABC}=120^\circ$, $SB=2$. Mặt phẳng (SAD) vuông góc với đáy và cạnh SA tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng?

Câu 17. **(Chuyên Hạ Long 2025)** Trong không gian cho một điểm O cố định. Các điểm P,Q,R,S thay đổi sao cho chúng luôn là bốn đỉnh của một khối tứ diện đồng thời $OP=OQ=2$ và $OR=OS=\sqrt{10}$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $PQRS$ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả tới hàng phần trăm).

Câu 18. **(Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2025)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2(\text{dm})$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\text{dm})$. Tính thể tích $V(\text{dm}^3)$ của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Câu 19. **(THPT Anh Sơn 3 - Nghệ An 2025)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 4, khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng 3. Tính thể tích khối lăng trụ (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*)

Câu 20. **(THPT Lê Quý Đôn - Hà Nội 2025)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 1, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.Thể tích của khối chóp đã cho là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 21. **(Sở Thái Bình 2025)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng 10. Tính thể tích nhỏ nhất của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

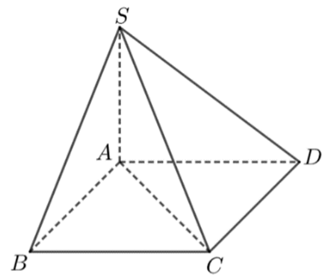
Câu 22. **(Sở Hà Tĩnh 2025)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm đáy, $AB=16cm$, góc nhị diện $[S,CD,O]=\alpha$ với $\tan\alpha=\dfrac{5}{4}$. Thể tích khối chóp là $k(cm^3)$, hãy tính $3k$.

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Thể tích

Câu 1. **(KHTN Hà Nội 2025)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 3, $SA \perp ABCD$ và $SC = 3\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Đáp án: 9.

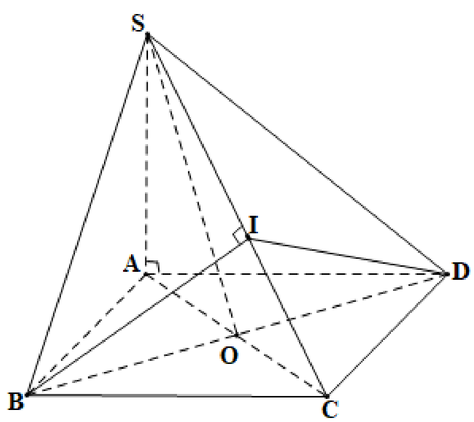
Ta có $AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = 3$

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.3.3^2 = 9$

Câu 2. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ 2025)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 6 cm, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và số đo góc nhị diện $[B, SC, D]$ bằng $120°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu centimet khối?

Lời giải



Đáp án: 72.

Kẻ $BI \perp SC$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Do đó $SC \perp (BDI) \Rightarrow DI \perp SC$.

$\Rightarrow [B, SC, D] = (BI, DI) = \widehat{BID} = 120°$.

Tam giác DIB cân tại I có $BD^2 = 2BI^2 - 2BI^2 \cos BID \Leftrightarrow 3BI^2 - 72 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} BI = 2\sqrt{6} \\ BI = -2\sqrt{6}\ (L) \end{array}\right.$.

ΔSBC vuông tại B có $\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow SB = \sqrt{\frac{BC^2.BI^2}{BC^2 - BI^2}} = 6\sqrt{2}$.

ΔSAB vuông tại A có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 6$.

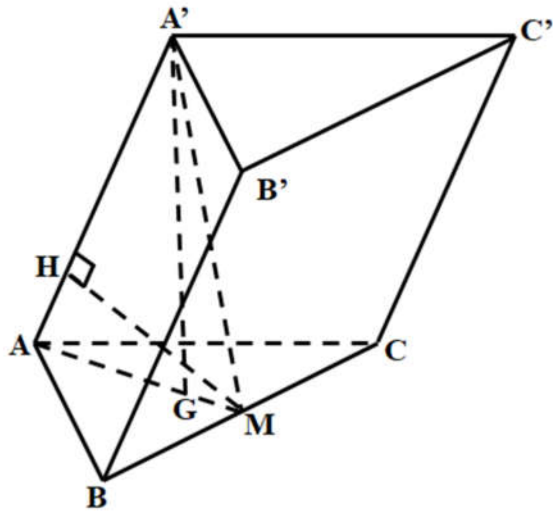
Diện tích hình vuông $ABCD$: $S_{ABCD} = AB^2 = 36$ (đvdt).

Thể tích khối chóp $S.ABCD$: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.6.36=72$ (đvtt).

Câu 3. **(Sở Tuyên Quang 2025)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 5. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng ABC trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{5\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp án: 18.



Gọi M là trung điểm của BC khi đó $AM\perp BC$ và $BC\perp\left(AA'M\right)$.

Dựng $MH\perp AA'\Rightarrow MH=\frac{5\sqrt{3}}{4}=d\left(AA',BC\right)$.

Có $\sin\widehat{HAM}=\frac{HM}{AM}=\frac{\frac{5\sqrt{3}}{4}}{\frac{5\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{HAM}=30^0$.

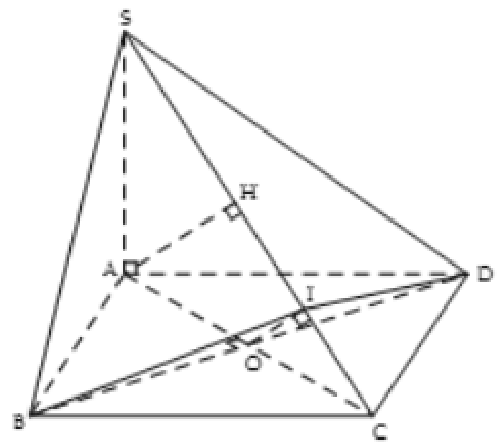
$A'G=AG.\tan 30^0=\frac{2}{3}.\frac{5\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{5}{3}$.

$V_{ABC.A'B'C'}=\frac{5^2\sqrt{3}}{4}.\frac{5}{3}=\frac{5^3\sqrt{3}}{12}\approx 18$.

Câu 4. **(Chuyên Phan Bội Châu - Hà Tĩnh 2025)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3 và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc nhị diện $[B,SC,D]$ bằng 120^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 9.



Trong mặt phẳng (SAC) kẻ $OI \perp SC$ tại I; $AH \perp SC$ tại H.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$, $OI \subset (SAC) \Rightarrow OI \perp BD$.

Vậy $SC \perp (BID) \Rightarrow SC \perp BI; SC \perp DI$ nên góc phẳng nhị diện $[B, SC, D]$ bằng $\widehat{BID} \Rightarrow \widehat{BID} = 120^0$. Suy ra $\widehat{BIO} = 60^0$.

Khi đó, $\tan \widehat{BIO} = \dfrac{BO}{OI} \Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}.3}{OI} \Leftrightarrow OI = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow AH = \sqrt{6}$.

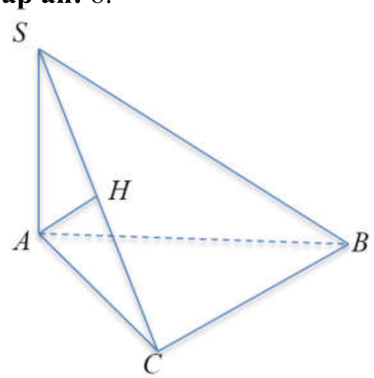
Tam giác vuông SAC có đường cao $AH \Rightarrow \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{AH^2} \Rightarrow SA = 3$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.3.9 = 9$.

Câu 5. (Sở Phú Thọ 2025) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C và $AC = 4$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{12}{5}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 8.



$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$;

ΔABC là tam giác vuông cân tại $C \Rightarrow BC \perp AC$.

Do đó $BC \perp (SAC)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SC. Khi đó $AH \perp (SBC)$ suy ra $AH = d(A, (SBC)) = \dfrac{12}{5}$.

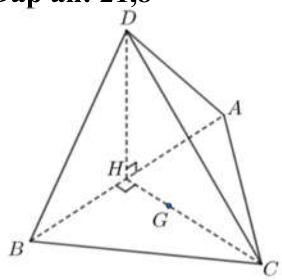
Ta có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AC^2}\Rightarrow\dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{AH^2}-\dfrac{1}{AC^2}=\left(\dfrac{5}{12}\right)^2-\dfrac{1}{4^2}=\dfrac{1}{9}\Rightarrow SA=3$.

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}SA.\dfrac{1}{2}AC^2=\dfrac{1}{6}.3.16=8.$

Câu 6. **(THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025)** Cho tứ diện $ABCD$, tam giác ABC đều, tam giác ABD vuông cân tại đỉnh D biết $BC=CD=3$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$? (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*).

Lời giải

Đáp án: 21,8



Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow DH\perp AB$

Tam giác ABC đều cạnh là 3 $\Rightarrow CH=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$DH=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{3}{2}\Rightarrow CH^2+DH^2=9=DC^2\ \Rightarrow\Delta DHC$ vuông tại H

$\Rightarrow\begin{cases}CH\perp DH\\ CH\perp AB\end{cases}\Rightarrow CH\perp(ABD)$

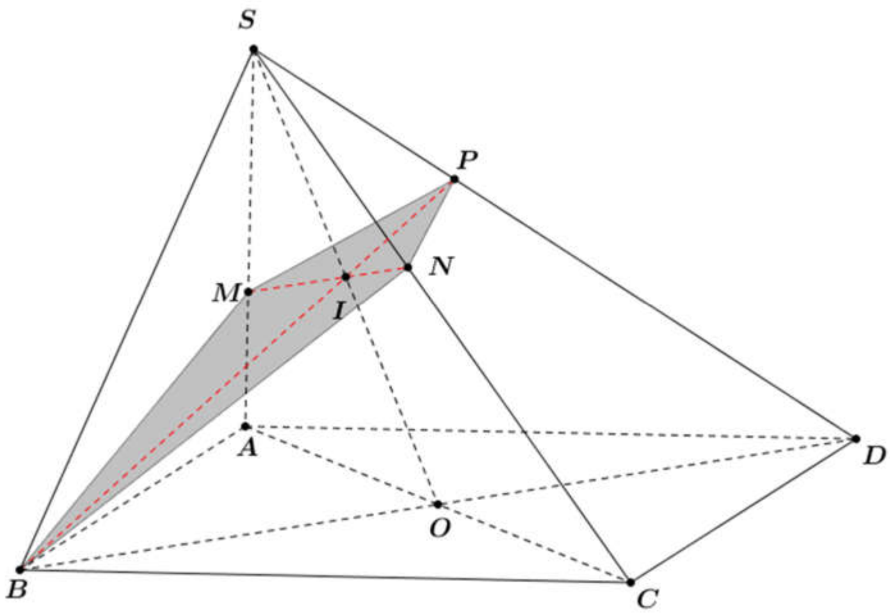
Mà $HA=HB=HD\Rightarrow CH$ là trục của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $ABC\Rightarrow GA=GB=GC=GD=R$

$\Rightarrow R=GC=\dfrac{2}{3}CH=\dfrac{2}{3}.\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\Rightarrow V=\dfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^2\approx 21,8.$

Câu 7. **(THPT Hoằng Hóa 2-Thanh Hóa 2025)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua B, trung điểm I của SO và cắt các cạnh SA,SC và SD lần lượt tại M,N và P. Gọi K là giá trị lớn nhất và k là giá trị nhỏ nhất của tỷ số $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$. Tính giá trị biểu thức $F=9K+6k$.

Lời giải

Trả lời: 3



Ta có $\frac{SA}{SM}+\frac{SC}{SN}=\frac{SB}{SB}+\frac{SD}{SP}=2\frac{SO}{SI}\Rightarrow\frac{SA}{SM}+\frac{SC}{SN}=4;\ \frac{SD}{SP}=2.2-1=3$.

Tỉ lệ thể tích $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{\frac{SA}{SM}+\frac{SC}{SN}+\frac{SB}{SB}+\frac{SD}{SP}}{4\frac{SA}{SM}.\frac{SC}{SN}.\frac{SB}{SB}.\frac{SD}{SP}}=\frac{2}{3.\frac{SA}{SM}.\frac{SC}{SN}}$

Đặt $\frac{SA}{SM}=x\Rightarrow x\geq 1$. Từ $\frac{SA}{SM}+\frac{SC}{SN}=4\Rightarrow\frac{SC}{SN}=4-x$. Do $\frac{SC}{SN}\geq 1\Rightarrow 4-x\geq 1\Rightarrow x\leq 3$

Khi đó $\frac{SA}{SM}.\frac{SC}{SN}=x(4-x),1\leq x\leq 3$.

Đặt $f(x)=x(4-x)$. Ta cần tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$.

Ta có $f(x)=4x-x^2\Rightarrow f'(x)=4-2x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$.

$f(2)=4; f(1)=3, f(3)=3$

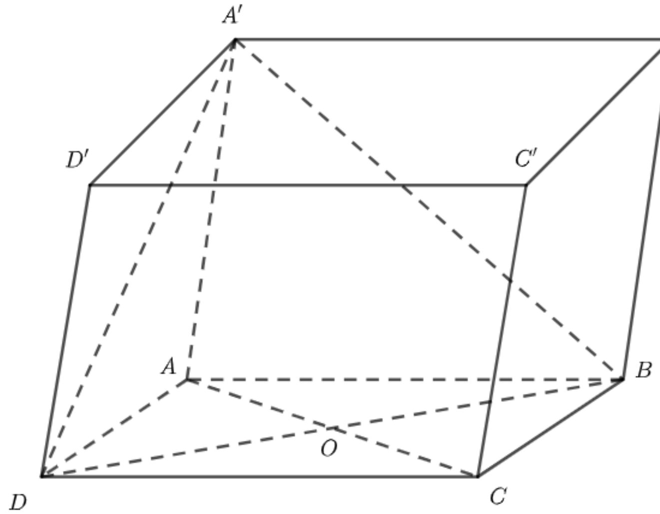
$\Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f(x)=4,\ \min\limits_{[1;3]} f(x)=3\Rightarrow K=\frac{2}{3.3}=\frac{2}{9},\ k=\frac{2}{3.4}=\frac{1}{6}$.

$\Rightarrow F=9K+6k=9.\frac{2}{9}+6.\frac{1}{6}=3$.

Câu 8. **(THPT Tư Nghĩa 1 - Quảng Ngãi 2025)** Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là $ABCD$ hình thoi cạnh bằng 1, $AC=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $A'AB$ là tam giác đều, $\widehat{B'C'C}=120^\circ$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Đáp án: 0,6



Cách 1: Ta tính toán được

$BD=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $\cos\widehat{BAD}=\dfrac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB.AD}=\dfrac{-5}{8}$

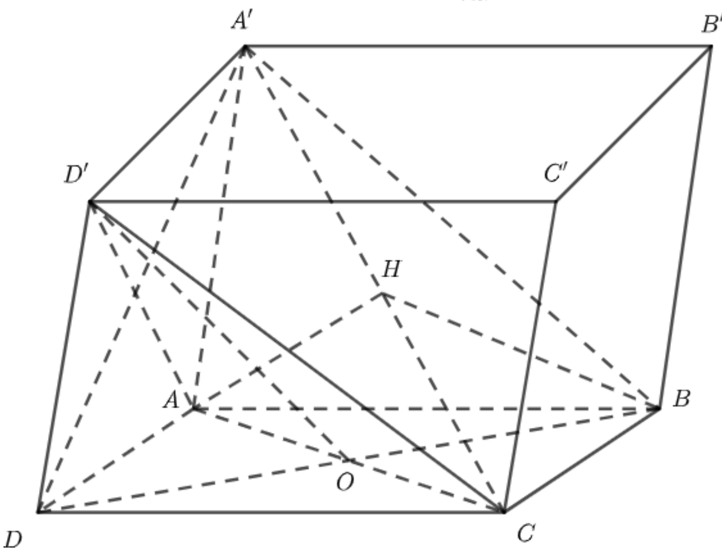
$\widehat{B'C'C}=120^\circ \Rightarrow \widehat{A'AD}=120^\circ \Rightarrow A'D=\sqrt{3}$

Khối chóp $AA'BD$ có $AA'=AB=AD=1$, $\widehat{A'AB}=60^\circ, \widehat{A'AD}=120^\circ, \widehat{BAD}=\alpha \left(\cos\alpha=\dfrac{-5}{8}\right)$ nên

$$V_{AA'BD}=\frac{1.1.1}{6}\sqrt{1+2.\cos 60^\circ.\cos 120^\circ.\left(-\frac{5}{8}\right)-\left(-\frac{5}{8}\right)^2-\cos^2 60^\circ-\cos^2 120^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'}=6V_{AA'BD}=6.\frac{\sqrt{3}}{16}=\frac{3\sqrt{3}}{8}\approx 0,6.$$

Cách 2:



Dễ tính được $D'C=D'A=1 \Rightarrow \Delta D'AC$ cân

$$\begin{cases} AC\perp BD \\ AC\perp D'O \end{cases} \Rightarrow AC\perp\left(BDD'B'\right)\Rightarrow AC\perp DD' \Rightarrow AC\perp AA'$$

Ta có

$BA=BC=BA'=1$ và $\Delta AA'C$ vuông tại A nên kẻ $BH\perp\left(AA'C\right)$ thì H là trung điểm của cạnh huyền $A'C$.

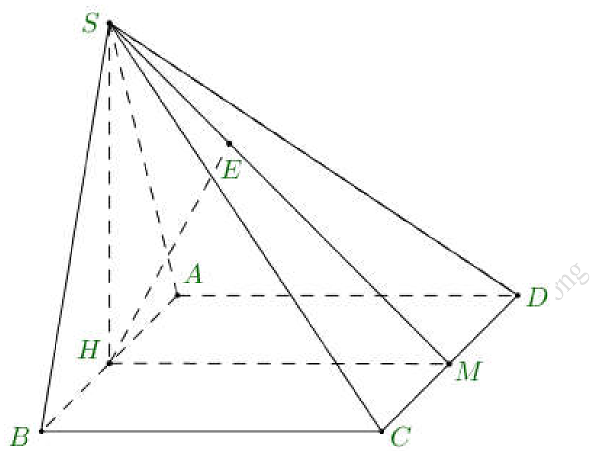
Dễ tính được $A'C=\dfrac{\sqrt{7}}{2}, AH=\dfrac{\sqrt{7}}{4}, BH=\dfrac{3}{4}$

$V_{B.A'AC}=\dfrac{1}{3}.BH.S_{A'AC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{2}.1.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{16}$

$V_{ABCD.A'B'C'D'}=6V_{B.A'AC}=6.\dfrac{\sqrt{3}}{16}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\approx 0,6$.

Câu 9. (Sở Vũng Tàu 2025) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Tam giác SAB đều, suy ra $SH\perp AB$, mà $(SAB)\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Gọi E là hình chiếu của H trên SM.

Suy ra: $HE\perp SM$ và $HE\perp CD$ (do $CD\perp(SHM)$ vì $CD\perp SH, HM$). Do đó: $HE\perp(SCD)$.

Vậy $d(H,(SCD))=HE=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$.

Xét tam giác SHM vuông tại H, có $MH=AB, SH=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$.

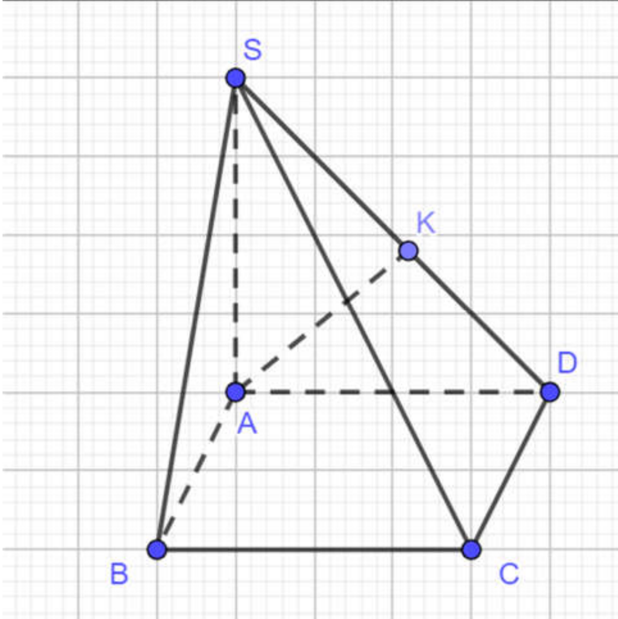
Suy ra: $\dfrac{1}{HE^2}=\dfrac{1}{HM^2}+\dfrac{1}{HS^2}=\dfrac{7}{3AB^2}=\dfrac{7}{9}\Rightarrow AB=\sqrt{3}, SH=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{2}.\left(\sqrt{3}\right)^2=1,5$.

Câu 10. (THPT Mai Trúc Loan - Hà Tĩnh 2025) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy và $SA=3$. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng $\dfrac{12}{5}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 16



Dựng $AK \perp SD$. Dễ nhận thấy $CD \perp (SAD) \supset AK \Rightarrow CD \perp AK$.

Từ đó suy ra: $AK \perp (SDC)$.

Ta có: $AB // (SDC) \supset SD \Rightarrow d(AB, SD) = d(AB, (SDC)) = d(A, (SDC)) = AK = \frac{12}{5}$.

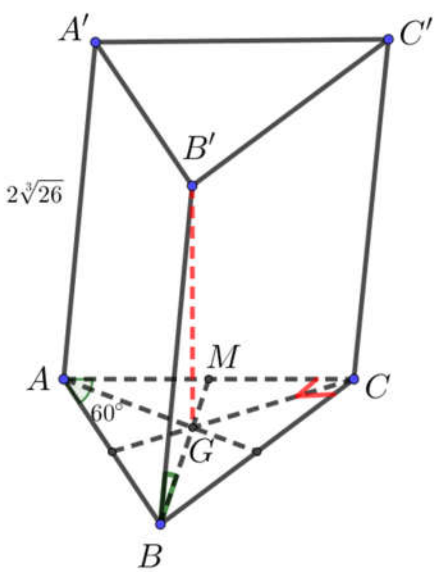
Vì: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow AD = 4$.

Suy ra: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.3.4^2 = 16$.

Câu 11. **(THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc 2025)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2\sqrt[3]{26}$, tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60°$, góc giữa cạnh bên BB' và mặt đáy (ABC) bằng $60°$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích của khối tứ diện $A'ABC$.

Lời giải

Đáp án: 9.



Gọi G là trọng tâm của ΔABC, M là trung điểm của AC.

Suy ra hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) là G hay $B'G \perp (ABC)$.

Vì BG là hình chiếu vuông góc của $B'G$ lên mặt phẳng (ABC)

Nên góc giữa BB' và mặt đáy (ABC) bằng góc giữa BB' và BG và bằng góc $\widehat{B'BG}$.

Suy ra $\widehat{B'BG} = 60°$.

Vì $A'B' // (ABC)$ nên $d(A', (ABC)) = d(B', (ABC)) = B'G$.

Xét $\Delta BB'G$ vuông tại G có $BB' = AA' = 2\sqrt[3]{26}$ và $\widehat{B'BG} = 60°$

$\sin \widehat{B'BG} = \dfrac{B'G}{BB'}$

$\Rightarrow B'G = 2\sqrt[3]{26} \cdot \sin 60° = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{26}$.

Suy ra $d(A', (ABC)) = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{26}$.

$BG = \sqrt{BB'^2 - B'G^2} = \sqrt[3]{26}$.

$\Rightarrow BM = \dfrac{3}{2} BG = \dfrac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{26}$.

ΔACB vuông tại C có $\tan \widehat{CAB} = \dfrac{BC}{AC}$

$\Rightarrow BC = AC \cdot \tan 60° = \sqrt{3} AC$.

ΔMCB vuông tại C có $MB^2 = BC^2 + MC^2$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{26}\right)^2 = 3AC^2 + \dfrac{AC^2}{4} = \dfrac{13}{4} AC^2$

$\Leftrightarrow AC = \dfrac{3\sqrt{13}}{13} \sqrt[3]{26}$.

$\Rightarrow BC = \dfrac{3\sqrt{39}}{13} \cdot \sqrt[3]{26}$

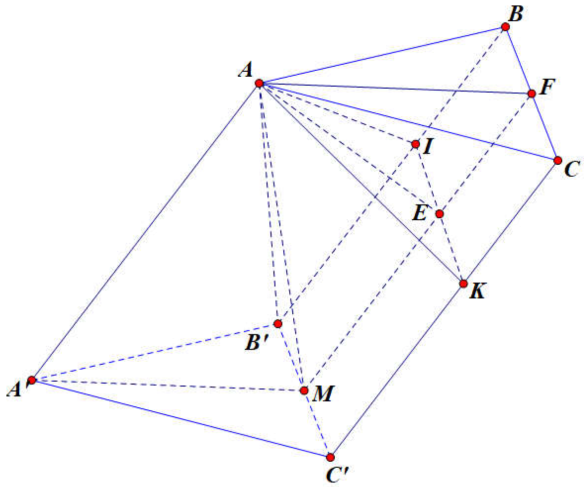
Vậy $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \dfrac{9\sqrt{3}}{26} \cdot \sqrt[3]{26^2}$.

Suy ra $V_{A'ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot B'G \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \sqrt{3} . \sqrt[3]{26} . \dfrac{9\sqrt{3}}{26} \sqrt[3]{26^2} = 9$.

Câu 12. **(HSG Hải Phòng 2025)** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1; 2. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của cạnh $B'C'$, $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: $2,58$.



Kẻ $AI \perp BB'$, $AK \perp CC'$.

Khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1; 2. Khi đó $AI = 1$, $AK = 2$.

Gọi F là trung điểm của BC.

Ta có $AF = A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

Do $\left.\begin{array}{l} BB' \perp AI \\ BB' \perp AK \end{array}\right\} \Rightarrow BB' \perp (AIK)$ hay $BB' \perp IK$.

Vì $CC' // BB' \Rightarrow \mathrm{d}(C, BB') = \mathrm{d}(K, BB') = IK = \sqrt{5}$.

ΔAIK vuông tại A.

Gọi E là trung điểm của IK.

Do $\left.\begin{array}{l} EF // BB' \\ EF \perp (AIK) \end{array}\right\} \Rightarrow EF \perp AE$.

Lại có $AM \perp (ABC)$.

Do đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AIK) là góc giữa EF và AM.

Suy ra $\widehat{AME} = \widehat{FAE}$. Khi đó $\cos \widehat{FAE} = \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{FAE} = 30°$.

Hình chiếu vuông góc của ΔABC lên mặt phẳng (AIK) là ΔAIK nên ta có

$S_{AIK} = S_{ABC}.\cos \widehat{EAF} \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Xét ΔAMF vuông tại A có

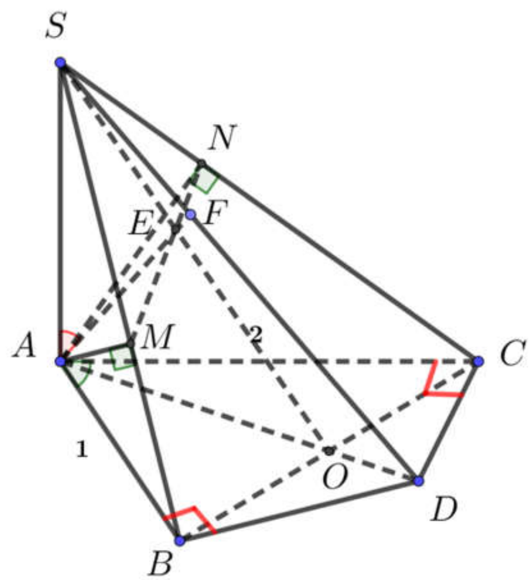
$\tan \widehat{AMF} = \dfrac{AF}{AM} \Rightarrow AM = \dfrac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{5} \Rightarrow V_{ABC \cdot A'B'C'} = \sqrt{5} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Vậy $V_{ABC \cdot A'B'C'} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3} \approx 2{,}58$.

Câu 13. **(HSG Vũng Tàu 2025)** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $AB = 1$, $AC = 2$, $\widehat{BAC} = 120°$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SB, SC và α là góc tạo bởi đường thẳng SA và (AMN) sao cho $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Đáp án: $0,76$.



Gọi điểm D thỏa mãn $DB \perp AB$ và $DC \perp AC$.
Suy ra A, B, C, D nằm trên đường tròn đường kính AD.
Áp dụng định lý cos trong ΔABC.

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot \cos A} = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2\cdot 1\cdot 2\cdot \cos 120°} = \sqrt{7}$.

Áp dụng định lý sin trong ΔABC.

$$\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = 2R$$

$$\Rightarrow AD = \frac{\sqrt{7}}{\sin 120°} = \frac{2\sqrt{21}}{3} \text{ (Vì } AD = 2R\text{)}.$$

Ta có $\begin{cases} DB \perp AB \\ DB \perp SA\left(SA \perp (ABC)\right) \end{cases} \Rightarrow DB \perp (SAB)$.

Suy ra $DB \perp AM$.

$\begin{cases} AM \perp DB \\ AM \perp SB \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow AM \perp SD$ (1).

Chứng minh tương tự ta cũng có $AN \perp (SCD)$.

Suy ra $AN \perp SD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SD \perp (AMN)$.

Gọi $O = AD \cap BC$, $E = MN \cap SO$ và $F = AE \cap SD$.

Ta có $SA \cap (AMN) = A$.

$SF \perp (AMN)$ tại F.

Suy ra AF là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (AMN).

Do đó góc giữa đường thẳng SA và (AMN) là góc giữa SA và AF và bằng $\widehat{SAF}$.

Suy ra $\alpha = \widehat{SAF}$.

Ta có $\sin\widehat{SAF} = \frac{SF}{SA}$

$\Rightarrow SF=\dfrac{\sqrt{21}}{7}SA$.

Xét ΔSAD vuông tại A có AF là đường cao

$SA^2=SF\cdot SD\Leftrightarrow SA^2=\dfrac{\sqrt{21}}{7}SA\cdot\sqrt{SA^2+AD^2}\Leftrightarrow SA=\dfrac{\sqrt{21}}{7}\cdot\sqrt{SA^2+\dfrac{28}{3}}\Rightarrow SA=\sqrt{7}$.

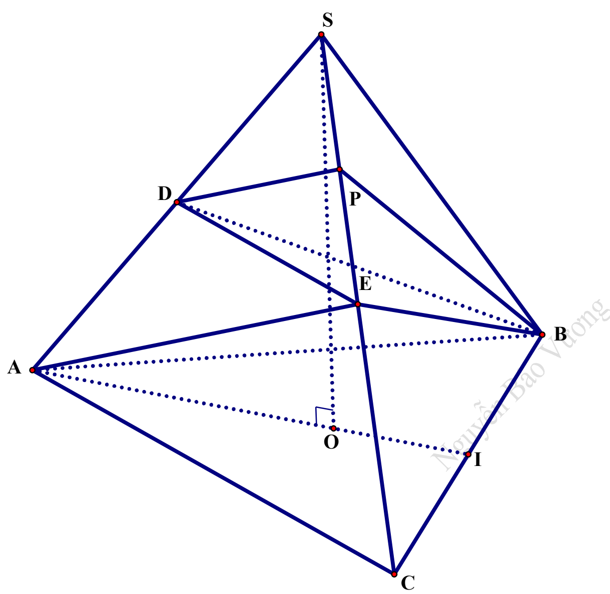
Vậy thể tích của hình chóp $S.ABC$ là

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA\cdot S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{21}}{6}\approx0,76.$

Câu 14. **(THPT Cụm trường Hải Dương 2025)** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA=a$. Gọi D,E lần lượt là trung điểm của SA,SC biết BD vuông góc với AE. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a là $\dfrac{a^3\sqrt{m}}{n}$. Tính giá trị của $m+n$.

Lời giải

Đáp án: 75.



Gọi P là trung điểm của SE, ta có $DP\,//\,AE\Rightarrow DP\perp BD$ suy ra tam giác BDP vuông tại D

Đặt $AB=x\left(x>0\right)$ Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến ta có:

$$AE^2=BE^2=BD^2=\frac{BA^2+BS^2}{2}-\frac{SA^2}{4}=\frac{x^2+a^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2+2x^2}{4}$$

$$BP^2=\frac{BS^2+BE^2}{2}-\frac{SE^2}{4}=\frac{a^2+\dfrac{a^2+2x^2}{4}}{2}-\frac{a^2}{16}=\frac{9a^2}{16}+\frac{x^2}{4};$$

$$DP^2=\frac{AE^2}{4}=\frac{1}{4}.\frac{a^2+2x^2}{4}=\frac{a^2+2x^2}{16}$$

Tam giác BDP vuông tại D nên

$$BD^2+DP^2=BP^2\Leftrightarrow\frac{a^2+2x^2}{4}+\frac{a^2+2x^2}{16}=\frac{9a^2}{16}+\frac{x^2}{4}\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Gọi I là trung điểm của BC nên O là tâm của tam giác đều ABC ta có $SO\perp\left(ABC\right)$

$AI=\frac{\sqrt{3}}{2}.AB=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a\sqrt{2}}{2};AO=\frac{2}{3}AI=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{3}$

$SO=\sqrt{SB^2-AO^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{7}}{3}$

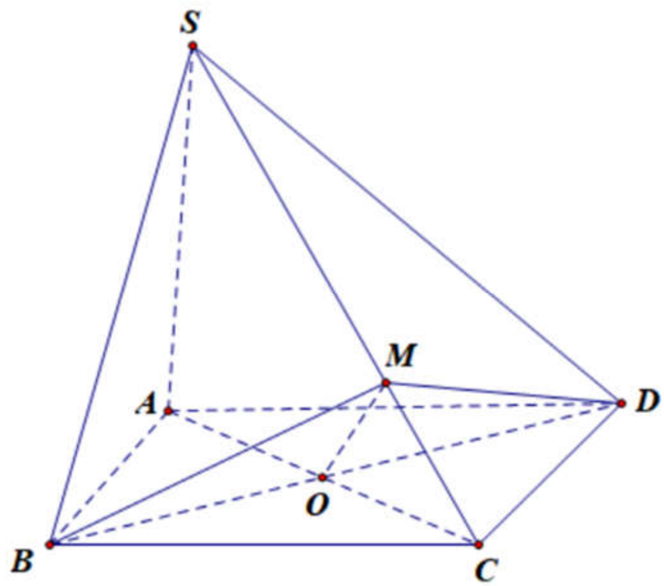
$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SO.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{7}}{3}.\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{21}}{54}$.

Vậy $m+n=21+54=75$.

Câu 15. **(Chuyên KHTN Hà Nội 2025)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 3, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết số đo của góc nhị diện $[B,SC,D]$ bằng $120°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

Đáp án: 9.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp SA \end{cases}\Rightarrow BD\perp (SAC)\Rightarrow BD\perp SC$.

Dựng $BM\perp SC\Rightarrow SC\perp (BMD)\Rightarrow [B,SC,D]=\widehat{BMD}=120°$.

Xét ΔBMD có MO là đường trung tuyến và $MO\perp BD$ $\left(BD\perp (SAC)\right)$

$\Rightarrow \Delta BMD$ cân. Xét ΔBMO vuông tại O ta có: $MO=OB.\cot\widehat{BMO}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.\cot 60°=\frac{3\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Xét Δ vuông SAC và Δ vuông OMC có chung góc $\widehat{C}\Rightarrow \Delta SAC\sim\Delta OMC\Rightarrow\frac{SA}{OM}=\frac{AC}{MC}\Rightarrow SA=\frac{AC.OM}{MC}$.

Có: $\begin{cases} AC = 3\sqrt{2} \\ OM = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ MC = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{3} \end{cases}$

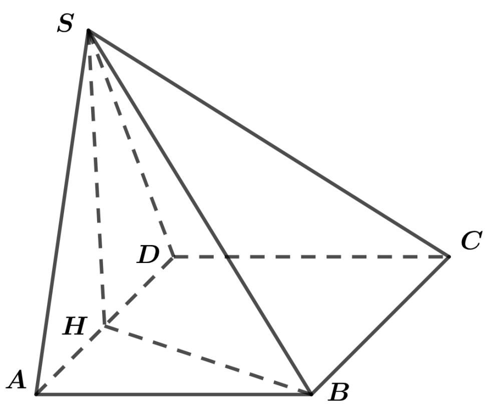
$\Rightarrow SA = \dfrac{3\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{3}} = 3$.

$S_{ABCD} = 3^2 = 9 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}9.3 = 9$.

Câu 16. **(THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh 2, $\widehat{ABC} = 120°$, $SB = 2$. Mặt phẳng (SAD) vuông góc với đáy và cạnh SA tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng?

Lời giải

Đáp án: 1.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên cạnh AD. Vì $(SAD) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Do đó $\widehat{(SA;(ABCD))} = \widehat{SAH} = 60^0$.

$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2.\dfrac{1}{2}.BA.BC.\sin\widehat{ABC} = 2.2.\sin 120^0 = 2\sqrt{3}$

Đặt $AH = x, (0 < x < 2)$

Vì ΔSAH vuông tại H và $\widehat{SAH} = 60^0$ nên $\tan 60^0 = \dfrac{SH}{AH} \Rightarrow SH = x\sqrt{3}$. (1)

Áp dụng định lý cosin cho ΔAHB ta có $HB^2 = x^2 + 2^2 - 2.x.2.cos60^0 = x^2 - 2x + 4$.

ΔSHB vuông tại H ta có $SH^2 = SB^2 - HB^2 = 2^2 - (x^2 - 2x + 4) = 2x - x^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $3x^2 = 2x - x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện chọn $x = \dfrac{1}{2}$.

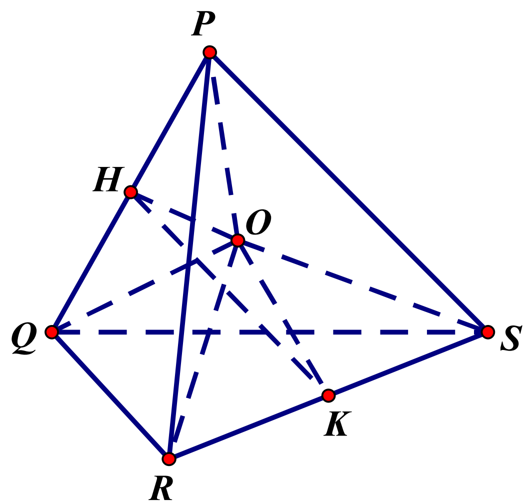
Do đó $SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \dfrac{1}{3}.2\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1$.

Câu 17. **(Chuyên Hạ Long 2025)** Trong không gian cho một điểm O cố định. Các điểm P,Q,R,S thay đổi sao cho chúng luôn là bốn đỉnh của một khối tứ diện đồng thời $OP=OQ=2$ và $OR=OS=\sqrt{10}$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $PQRS$ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả tới hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: $8,49$.



Dựng OH vuông góc với PQ tại H, dựng OK vuông góc với RS tại K, thì H,K lần lượt là trung điểm của PQ và RS.

Đặt $\begin{cases} OK=x<\sqrt{10} \\ OH=y<2 \end{cases}$.

Ta có

$V_{PQRS}=\frac{1}{6}PQ.RS.d\left(PQ,RS\right).\sin\left(PQ,RS\right)$

$\le\frac{1}{6}PQ.RS.d\left(PQ,RS\right)\le\frac{1}{6}PQ.RS.HK\le\frac{2\sqrt{10-x^2}.2\sqrt{4-y^2}.\left(x+y\right)}{6}$.

Ta lại có: $\left(x+y\right)^2=\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}y\right)^2\le\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+2y^2\right)=\frac{3}{2}\left(x^2+2y^2\right)$, do đó

$V_{PQSR}\le\frac{2}{3}\sqrt{10-x^2}.\sqrt{4-y^2}.\left(x+y\right)\le\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(10-x^2\right)\left(8-2y^2\right)\left(x^2+2y^2\right)}$

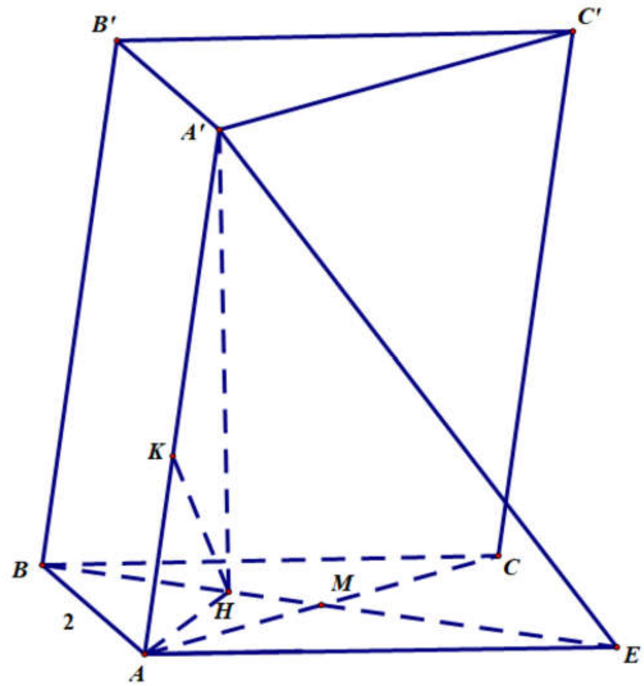
$\le\frac{\sqrt{3}}{3}.\sqrt{\left(\frac{10-x^2+8-2y^2+x^2+2y^2}{3}\right)^3}=6\sqrt{2}\approx 8,49$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Câu 18. **(Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2025)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2\left(\text{dm}\right)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\text{dm}\right)$. Tính thể tích $V\left(\text{dm}^3\right)$ của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Lời giải

Đáp số: 1,15.



Gọi M là trung điểm của AC, H là trọng tâm của tam giác ABC.

$A'H \perp (ABC)$.

Dựng $Ax // BC$ suy ra $BM \cap Ax = \{E\} \Rightarrow BC // (A'AE)$

$\Leftrightarrow d(AA', BC) = d(BC, (A'Ax)) = d(B, (A'AE))$.

Mà $\dfrac{d(B,(A'AE))}{d(H,(A'AE))} = \dfrac{BE}{HE} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow d(H,(A'AE)) = \dfrac{2}{3}(B,(A'AE)) = \dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\text{dm})$.

Dựng $HK \perp A'A$, dễ dàng chứng minh được $HK \perp (A'AE)$ suy ra $d(H,(A'AE)) = HK = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ta có, $AH = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

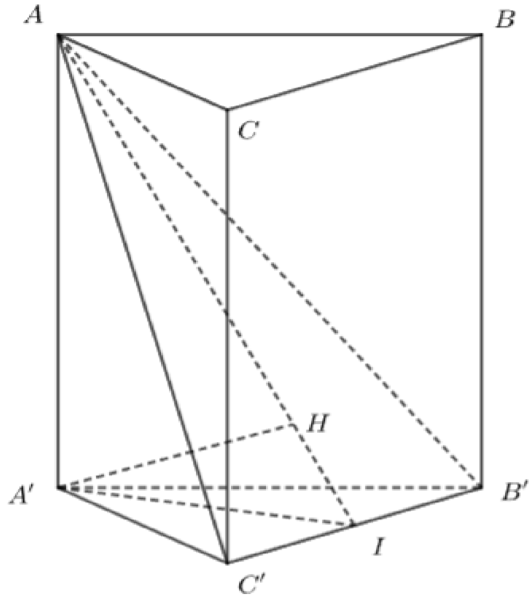
$\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HA'^2} + \dfrac{1}{HA^2} \Rightarrow \dfrac{1}{HA'^2} = \dfrac{1}{HK^2} - \dfrac{1}{HA^2} \Rightarrow \dfrac{1}{HA'^2} = \dfrac{9}{4}, \Rightarrow HA' = \dfrac{2}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ bằng $V = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}(\text{dm}^3) \approx 1,15(\text{dm}^3)$.

Câu 19. **(THPT Anh Sơn 3 - Nghệ An 2025)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 4, khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng 3. Tính thể tích khối lăng trụ (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*)

Lời giải

Đáp án: $41,6$.



Gọi I là trung điểm của $B'C'$, H là hình chiếu của A' lên AI. Khi đó:

$\Delta A'B'C'$ đều nên $B'C' \perp AI$, mà $B'C' \perp AA'$ nên: $B'C' \perp (AA'I)$ suy ra: $B'C' \perp A'H$.

Ta có: $A'H \perp AI, A'H \perp B'C'$ nên: $A'H \perp (AB'C')$. Do đó: $d(A',(AB'C')) = A'H = 3$.

$\Delta A'B'C'$ đều cạnh bằng 4 nên $A'I = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, $S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}.2\sqrt{3}.4 = 4\sqrt{3}$.

Trong tam giác $AA'I$:

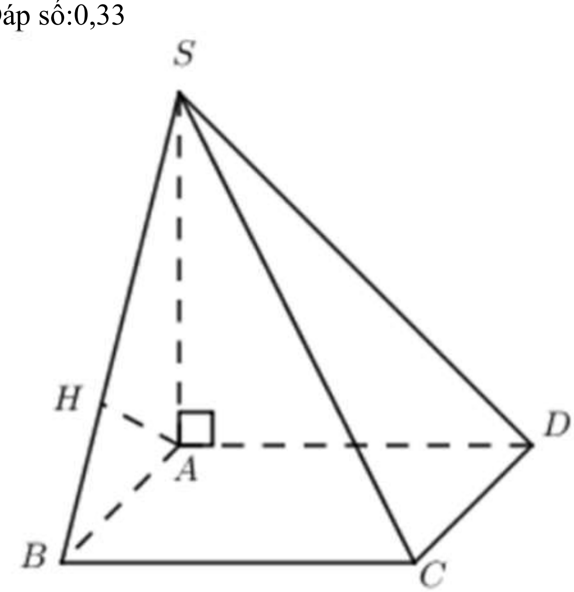
$$\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'I^2} + \frac{1}{AA'^2} \Rightarrow \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{A'H^2} - \frac{1}{A'I^2} = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{\left(2\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{36} \Rightarrow AA' = 6$$

$V_{ABC.A'B'C'} = 4\sqrt{3}.6 = 24\sqrt{3} \approx 41,6$.

Câu 20. **(THPT Lê Quý Đôn - Hà Nội 2025)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 1, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.Thể tích của khối chóp đã cho là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp số:0,33



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

$\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Xét ΔSAB vuông tại A ta có

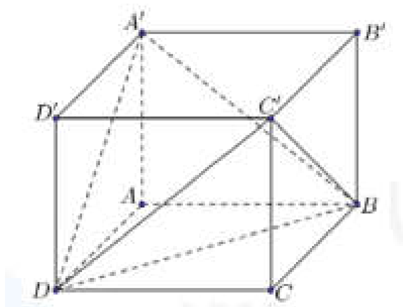
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{SA^2} \Rightarrow SA = 1$

$V = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.1.1 = \dfrac{1}{3} \approx 0,33$

Câu 21. **(Sở Thái Bình 2025)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng 10. Tính thể tích nhỏ nhất của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Đáp số: 5196



Giả sử $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$ thì thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = abc$.

Gọi khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng $(A'BD)$ là h.

Xét hình chóp $A.A'BD$ có AA', AB, AD đôi một vuông góc nên ta có $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \Rightarrow \dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

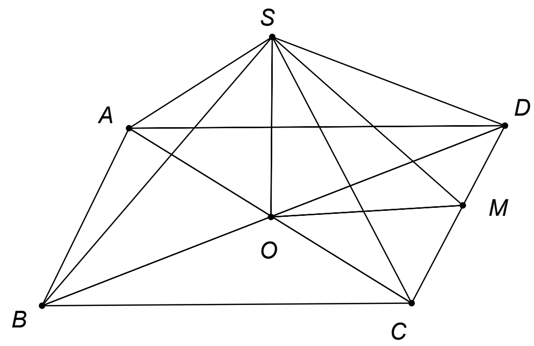
Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2b^2c^2}} \Rightarrow \dfrac{1}{100} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2b^2c^2}} \Rightarrow a^2b^2c^2 \ge 27.100^3 \Rightarrow V^2 \ge 27.10^6 \Rightarrow V \ge 3000\sqrt{3}$

Thể tích nhỏ nhất của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là 5196 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{300}$.

Câu 22. **(Sở Hà Tĩnh 2025)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm đáy, $AB = 16cm$, góc nhị diện $[S,CD,O] = \alpha$ với $\tan\alpha = \dfrac{5}{4}$. Thể tích khối chóp là $k\left(cm^3\right)$, hãy tính $3k$.

Lời giải

Đáp số 2560



Gọi M là trung điểm của CD ta có $OM \perp CD; SM \perp CD$ nên $[S,CD,O] = \alpha = \widehat{SMO}$; $\tan\alpha = \frac{SO}{OM} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow SO = \frac{5}{4}OM = \frac{5}{4}.\frac{AB}{2} = 10$. Vậy thể tích của khối chóp là k nên ta có $3k = 3.\frac{1}{3}.16^2.10 = 2560\left(cm^3\right)$.