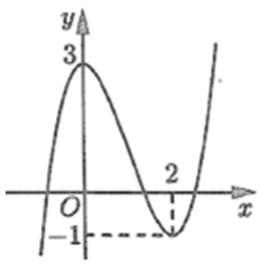
CHỦ ĐỀ 3. KHẢO SÁT HÀM BẬC BA

• **PHẦN 2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI**

CÂU HỎI (vì là ngân hàng được tách ra từ các trường, cho nên có trùng lặp câu hỏi thì do các trường tham khảo nhau)

KHẢO SÁT HÀM BẬC BA

Câu 1. **(THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



a) Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng 2.

b) Trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;2\right)$

d) Phương trình $f\left(x\right)-1=0$ có đúng hai nghiệm.

Câu 2. **(THPT Gia Bình - Bắc Ninh 2025)** Cho hàm số $y=\frac{1}{8}\left(x^3-3x^2-9x-5\right)$ có đồ thị là $\left(C\right)$

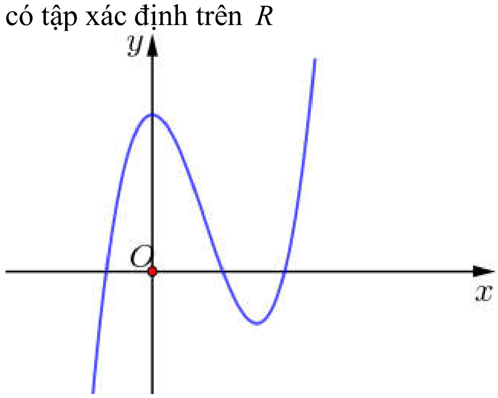
a) Phương trình tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị $\left(C\right)$ đi qua điểm $A\left(0;-\frac{7}{3}\right)$.

b) Trên đoạn $\left[4;8\right]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số đạt được tại $x=4$

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có tọa độ là $\left(1;-2\right)$.

d) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 3. **(THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025)** Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hình vẽ dưới đây và có tập xác định trên R



a) Đồ thị hàm số đã cho là của hàm số $y=\frac{2x^2-1}{x+1}$.

b) Hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

c) Hàm số có đồ thị đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

Câu 4. **(THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc 2025)** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+5$. Đặt $g(x)=f(x)+mx$ (Với m là tham số).

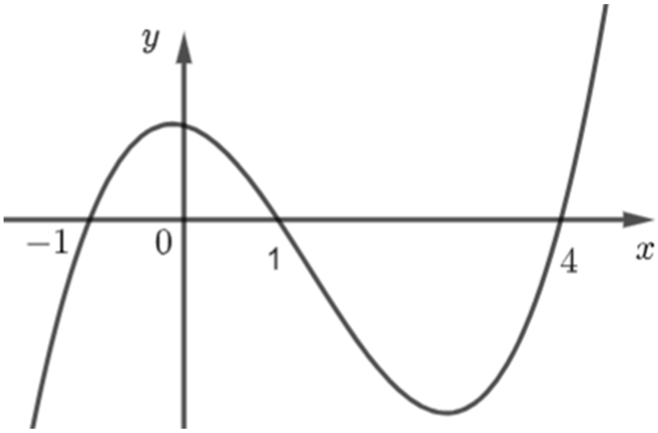
a) Hàm số $g(x)$ đạt cực trị khi và chỉ khi $m<3$.

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

d) Khi $m=-9$, giá trị lớn nhất của hàm $g(x)$ trên khoảng $(-\infty;0)$ bằng 10.

Câu 5. **(THPT Thuận Thành 1&2 - Bắc Ninh 2025)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới đây.



a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$

b) Trên đoạn $\left[-1;4\right]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ là $f\left(1\right)$.

c) $f\left(1\right)>f\left(2\right)>f\left(4\right)$.

d) Hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai cực trị

Câu 6. **(THPT Triệu Sơn 3 - Thanh Hóa 2025)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(1;5\right)$.

b) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$.

c) $a>0$.

d) Phương trình $2f(x)-e=0$ luôn có một nghiệm âm.

Câu 7. **(THPT Triệu Sơn 4 - Thanh Hóa 2025)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2-3x+2\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

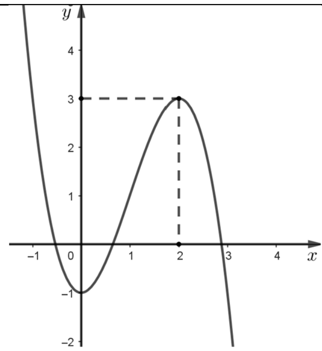
a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$

b) Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $x=1$

c) Hàm số $f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị.

d) Hàm số $y=f\left(x^2-4x+1\right)$ có ba điểm cực tiểu.

Câu 8. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An 2025)** Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình sau đây



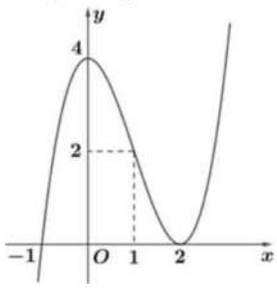
a) Giá trị cực tiểu của hàm số $f\left(x\right)$ bằng -1

b) Phương trình $\log_3\left(f\left(x\right)+6\right)=2$ có 2 nghiệm

c) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;3\right)$

d) Tổng $2025a+b+c+d=-2023$

Câu 9. **(HSG Hải Phòng 2025)** Cho hàm đa thức $y=f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



a) Phương trình $f'\left(\cos x\right)=3$ có đúng 4 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

b) $\min\limits_{\mathbb{R}} f\left(x\right)=f\left(-1\right)$.

c) Hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;2\right)$.

d) Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x-2024\right)-2023x+2022$ có đúng 2 điểm cực trị.

Câu 10. **(THPT Cụm trường Hải Dương 2025)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2-3x+2\right)$ với mọi $x\in R$.

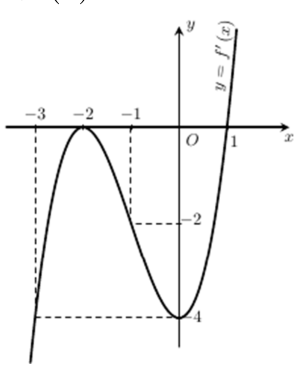
a) Phương trình $f'\left(x\right)=0$ có duy nhất một nghiệm $x=2$

b) Hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-3;0\right)$.

c) Hàm số $f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị.

d) Hàm số $y=f\left(x^2-6x+1\right)$ có ba điểm cực đại.

Câu 11. **(THPT Cụm trường Hải Dương 2025)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

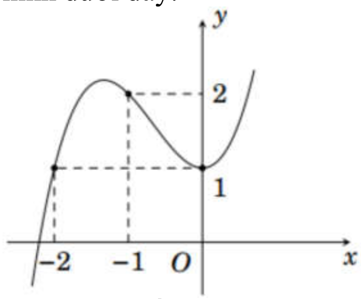
a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) $f'(2)=4$.

d) $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+x+2024$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 12. **(THPT Lê Xoay - Vĩnh Phúc 2025)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây:



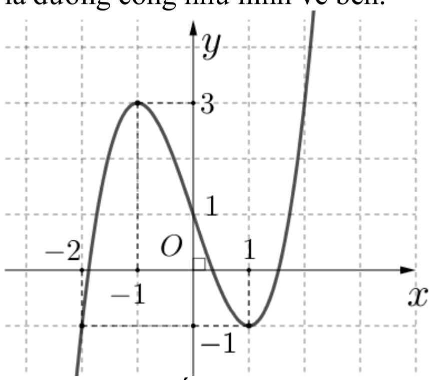
a) Trong 4 số a,b,c,d có ba số dương.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

c) Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có toạ độ $(0;1)$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 13. **(Cụm trường THPT Bắc Ninh 2025)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.



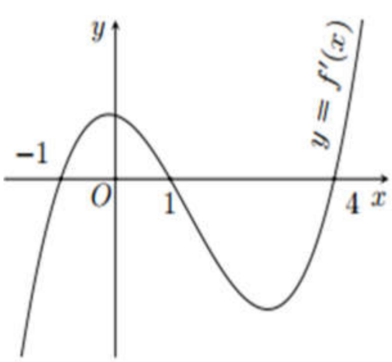
a) Trong các số a,b,c,d có ba giá trị dương.

b) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $(-2;1)$ bằng 3.

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có hoành độ bằng 1.

d) Phương trình $f(f(x))=\frac{5}{2}$ có sáu nghiệm phân biệt.

Câu 14. **(THPT Cẩm Xuyên - Hà Tĩnh 2025)** Cho hàm số $f(x)$. Hàm só $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



a) $f(-1) > f(-3)$

b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ và $x=4$.

c) Hàm số $y=f(2-x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

d) Trên đoạn $[2024;2025]$ hàm số $g(x)=f(2-x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=2024$.

Câu 15. **(Chuyên KHTN Hà Nội 2025)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6	$\searrow$	1	$\nearrow$	8

a) Hàm số đã cho có hai điểm cực đại

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(\sqrt{x-3}+1\right)$ trên nửa khoảng $[3;+\infty)$ là 1.

c) Phương trình $f(x)+x^2-6x=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1

d) Có đúng 7 số nguyên m để phương trình $f\left(\sqrt{x-3}+1\right)+m\left(x+2-4\sqrt{x-3}\right)=10$ có hai nghiệm

Câu 16. **(Chuyên Thái Bình 2025)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Các khẳng định sau đúng hay sai?

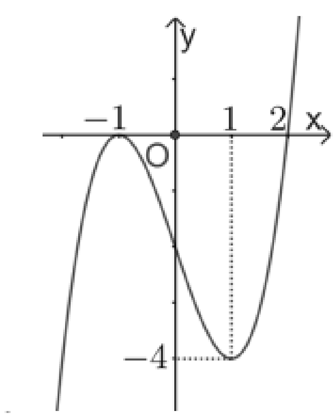
a) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

b) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 2, giá trị nhỏ nhất bằng -2.

c) Hàm số $g(x)=3-2f(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $A(-1;-2)$.

Câu 17. **(Cụm trường Nghệ An 2025)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



a) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;3\right]$ bằng -4.

c) Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

d) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng.

Câu 18. **(Cụm trường Nguyễn Hiền - Lê Hồng Phong - Quảng Nam 2025)** Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+4$ có đồ thị $\left(C\right)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

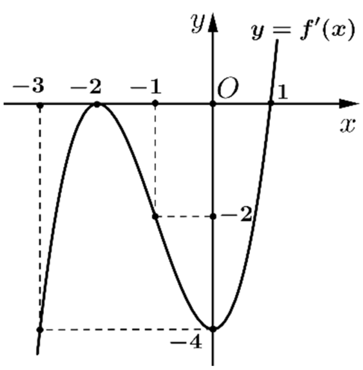
a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$ và $y'=-3x^3+6x$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;2\right)$.

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị và phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $2x+y-4=0$.

d) Diện tích của tam giác OAB bằng 4, với O là gốc tọa độ và A,B là các điểm cực trị của $\left(C\right)$.

Câu 19. **(THPT Anh Sơn 3 - Nghệ An 2025)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-2\right)$.

b) Hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị.

c) Trên đoạn $\left[-2;1\right]$, hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$.

d) Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ và $\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Câu 20. **(Sở Quảng Bình 2025)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-3x^2+4$.

a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;2\right)$.

b) Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$.

c) Gọi A,B lần lượt là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$. Khi đó độ dài AB bằng $\sqrt{5}$.

d) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{f\left(x\right)}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng.

Câu 21. **(Sở Đà Nẵng 2025)** Cho hàm số $f\left(x\right)=-2x^4+4x^2+1$ có đồ thị (C).

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'\left(x\right)=-8x^3+8x+1$.

c) Tập nghiệm của phương trình $f'\left(x\right)=0$ là $S=\left\{-1;0;1\right\}$.

d) Giá trị lớn nhất của $f\left(x\right)$ là 1.

Câu 22. **(Sở Thái Nguyên 2025)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3+bx^2+cx+2$ đạt cực trị bằng 0 tại $x=1$ (với b và c là hằng số)

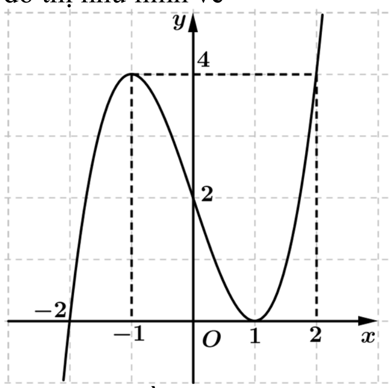
a. Giá trị của $b+c$ bằng -3.

b. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực trị tại $x=-1$.

c) Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 0.

d) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(-1;0\right)$.

Câu 23. **(THPT Hoằng Hóa 2-Thanh Hóa 2025)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

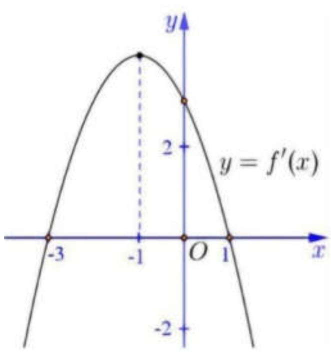
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

b) Hàm số có $f'\left(x\right)>0\ \forall x\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

c) Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)+1$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;2\right)$.

d) Hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ đồng biến trên $\left(-1;0\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

Câu 24. **(Đề thi vào ĐHSPHN 2025)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đạo hàm $f^{'}(x)$ có đồ thị như hình sau:



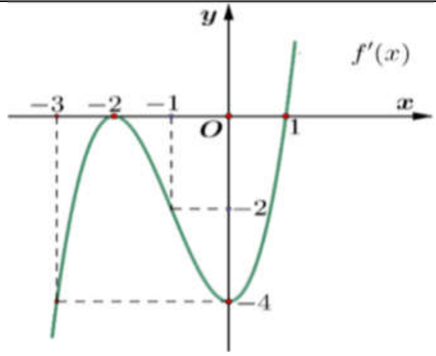
a) Phương trình $f^{'}(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $x=-3$.

d) Nếu $g(x)=f(1-x^2)$ thì $g(2025)<g(2026)$.

Câu 25. **(THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'\left(x\right)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị.

c) $\underset{[-2;1]}{Max} f(x) = f(-2)$.

d) Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{x+2}{f'(x)}$ có tất cả 2 đường tiệm cận.

Câu 26. **(THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ, m là số thực tùy ý

Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2022	$\searrow$	m

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-1;3]$ bằng 2022 đạt tại $x = 3$.

b) Hàm số $y = f(x-2024)$ đồng biến trên $(-2025;-2021)$.

c) Đồ thị hàm số $y = f(x) - 2$ có tọa độ điểm cực tiểu là $(-1;-2)$.

d) Bất phương trình $f(x) \geq a$ (tham số a) có nghiệm trên đoạn $[-1;3]$ khi $a \leq 2022$.

Câu 27. **(Sở Bắc Ninh 2025)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

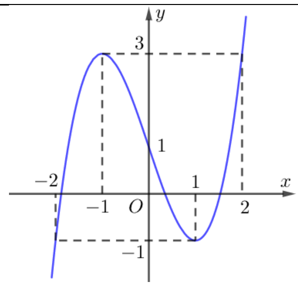
a) Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-3;5)$.

c) Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{x-4}{f(x)-5}$ có 3 đường tiệm cận.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \dfrac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 12.

Câu 28. **(Sở Hậu Giang 2025)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



a. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

b) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) Trên đoạn $[-2;2]$, hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 2

d) $f(x)=x^3-3x+1$.

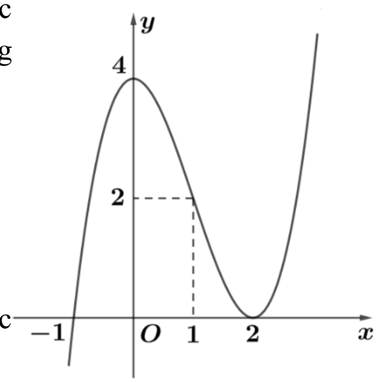
Câu 29. **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa 2025)** Cho hàm đa thức $y=f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ là đường cong trong hình vẽ bên.

a) Hàm số $g(x)=f\left(x\right)-2025x+2024$ có đúng 2 điểm cực trị.

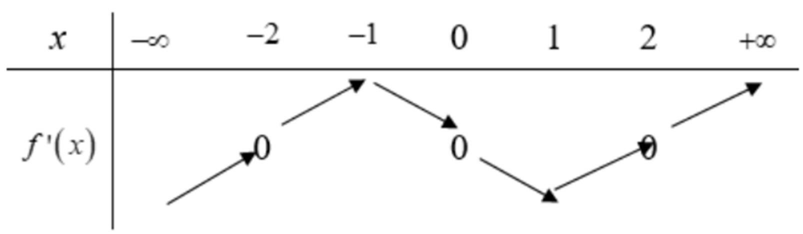
b) $\min\limits_{\mathbb{R}} f\left(x\right)=f\left(-1\right)$.

c) Hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;2\right)$.

d) Phương trình $f'\left(\cos x\right)=3$ có đúng 5 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.



Câu 30. **(Cụm THPT Hoàn Kiếm - Hai Bà Trưng - Hà Nội 2025)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như dưới đây



a) $\underset{[0;2]}{Min} f(x)=f(1)$.

b) Trên $\left[-2;2\right]$, hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=0$.

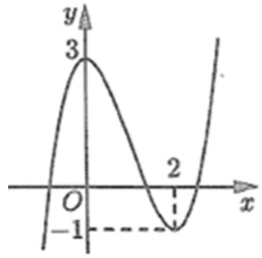
c) $\forall m\geq f(-2)$, phương trình $f(x)=m$ luôn có nghiệm trên $\left[0;2\right]$.

d) Giá trị lớn nhất của $g(x)=f(x)-\sin^2 x$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$ là $f(0)$.

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

KHẢO SÁT HÀM BẬC BA

Câu 1. **(THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



a) Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng 2.

b) Trên khoảng $(0;+\infty)$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

d) Phương trình $f(x)-1=0$ có đúng hai nghiệm.

Lời giải

a) Sai. Vì từ đồ thị suy ra giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.

b) Đúng.

c) Đúng.

d) Sai.

Phương trình $f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=1$ (*)

Đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm nên phương trình có đúng ba nghiệm.

Câu 2. (THPT Gia Bình - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y=\frac{1}{8}\left(x^3-3x^2-9x-5\right)$ có đồ thị là (C)

a) Phương trình tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C) đi qua điểm $A\left(0;-\frac{7}{3}\right)$.

b) Trên đoạn $[4;8]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số đạt được tại $x=4$

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có tọa độ là $(1;-2)$.

d) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị.

Lời giải

Ta có $y=\frac{1}{8}\left(x^3-3x^2-9x-5\right) \Rightarrow y'=\frac{1}{8}\left(3x^2-6x-9\right)$

a)Sai. Ta có

$y'=\frac{1}{8}\left(3x^2-6x-9\right)=\frac{3}{8}\left[(x-1)^2-4\right] \geq -\frac{3}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x_0=1 \Rightarrow y_0=-2$.

Vậy tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số (C) là tiếp tuyến tại điểm $(1;-2)$ có phương trình là $y=y'(1)(x-1)-2=-\frac{3}{2}(x-1)-2=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ nên tiếp tuyến không đi qua điểm $A\left(0;-\frac{7}{3}\right)$

b) Sai. Hàm số $y=\frac{1}{8}\left(x^3-3x^2-9x-5\right)$ liên tục trên $[4;8]$

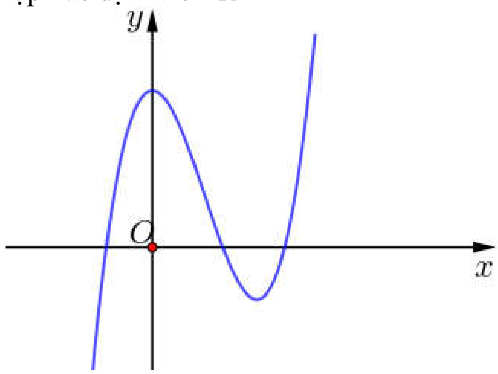
Giải $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \notin [4;8] \\ x=3 \notin [4;8] \end{array}\right.$.

Ta có $y(4)=-\frac{25}{8}$; $y(8)=\frac{243}{8} \Rightarrow \max\limits_{[4;8]} y=y(8)=\frac{243}{8}$.

c) Đúng. Ta có: $y''=\frac{1}{8}(6x-6)$. Giải $y''=0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}(6x-6)=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=-2$ nên tọa độ tâm đối xứng là $(1;-2)$.

d) Đúng. Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là $A(-1;0)$; $B(3;-4)$.

Câu 3. (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025) Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hình vẽ dưới đây và có tập xác định trên R



a) Đồ thị hàm số đã cho là của hàm số $y=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$.

b) Hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

c) Hàm số có đồ thị đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

Lời giải

a) Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$ có đường tiệm cận đứng $x=-1$ nhưng đồ thị đã cho không có tiệm cận đứng. Suy ra a) **sai**

b) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Nên hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Suy ra b) **đúng.**

c) Ham số có đồ thị đã cho có hai điểm cực trị, vì vậy không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy c) **sai,** d) **đúng.**

Câu 4. (THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+5$. Đặt $g(x)=f(x)+mx$ (Với m là tham số).

a) Hàm số $g(x)$ đạt cực trị khi và chỉ khi $m<3$.

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

d) Khi $m=-9$, giá trị lớn nhất của hàm $g(x)$ trên khoảng $(-\infty;0)$ bằng 10.

Lời giải

a) $g'(x)=f'(x)+m=3x^2-6x+m$

Hàm số đạt cực trị khi $g'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là $3x^2-6x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta'=9-3m>0 \leftrightarrow m<3$. Suy ra **mệnh đề đúng**.

b) Ta có: $f'(x)=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. Suy ra **mệnh đề đúng.**

c) $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2+5=0$. Sử dụng máy tính thấy phương trình có 1 nghiệm suy ra đồ thị cắt trục hoành tại 1 điểm. **Mệnh đề sai.**

d) Với $m=-9$ thì $g(x)=x^3-3x^2-9x+5$

$g'(x)=3x^2-6x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in(-\infty;0) \\ x=3 \notin(-\infty;0) \end{array}\right.$

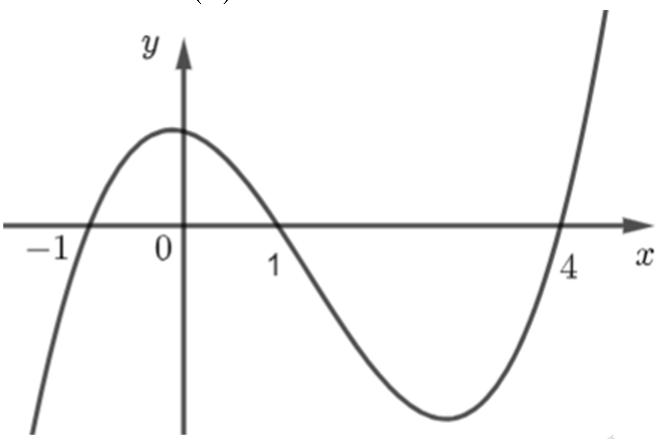
BBT:

x	$-\infty$		-1		0
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	10	$\searrow$	

$\max\limits_{(-\infty;0)} g(x) = g(-1) = 10$. Suy ra **mệnh đề đúng.**

Câu 5. **(THPT Thuận Thành 1&2 - Bắc Ninh 2025)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

b) Trên đoạn $[-1;4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là $f(1)$.

c) $f(1) > f(2) > f(4)$.

d) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị

Lời giải

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

a) Hàm số đồng biến trên $(-1;1),(4;+\infty)$.

Chọn sai.

b) Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1;4]$ là $f(1)$.

Chọn đúng.

c) Vì hàm số nghịch biến trên $(1;4)$ nên $f(1) > f(2) > f(4)$

Chọn đúng.

d) Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Chọn sai.

Câu 6. **(THPT Triệu Sơn 3 - Thanh Hóa 2025)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;5)$.

b) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$.

c) $a>0$.

d) Phương trình $2f(x)-e=0$ luôn có một nghiệm âm.

Lời giải

a) Sai.

b) Đúng

c) Sai.

d) Đúng.

Câu 7. **(THPT Triệu Sơn 4 - Thanh Hóa 2025)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-3x+2)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$

b) Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $x=1$

c) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

d) Hàm số $y=f(x^2-4x+1)$ có ba điểm cực tiểu.

Lời giải

a) Sai

Ta có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-3x+2)=(x-1)^3(x-2)$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên $y=f(x)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1),(2;+\infty)$.

b) Sai

c) Đúng

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta thấy hàm số có hai điểm cực trị.

d) Đúng

Ta có $y=f(x^2-6x+1)\Rightarrow y'=(x^2-4x+1)'f'(x^2-4x+1)=(2x-4)f'(x^2-4x+1)$.

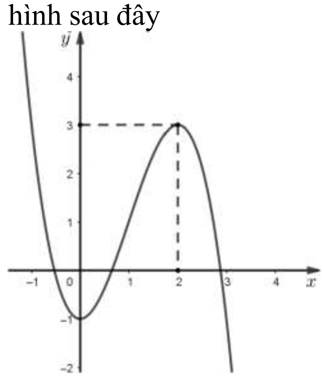
$$y'=0 \Leftrightarrow (2x-4)f'\left(x^2-4x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-4=0 \\ x^2-4x+1=1 \\ x^2-4x+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \\ x=4 \\ x=2+\sqrt{5} \\ x=2-\sqrt{5} \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên $y=f\left(x^2-4x+1\right)$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		0		2		4		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x^2-4x+1\right)$ ta thấy hàm số có ba điểm cực tiểu.

Câu 8. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An 2025) Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình sau đây



a) Giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ bằng -1

b) Phương trình $\log_3\left(f(x)+6\right)=2$ có 2 nghiệm

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$

d) Tổng $2025a+b+c+d=-2023$

Lời giải

a) Đúng

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ bằng -1

b) Đúng

Ta có: $\log_3\left(f(x)+6\right)=2 \Leftrightarrow f(x)+6=9 \Leftrightarrow f(x)=3$ $(*)$

Số nghiệm của phương trình $(*)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=3$. Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $(*)$ có 2 nghiệm

c) Sai

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;3)$

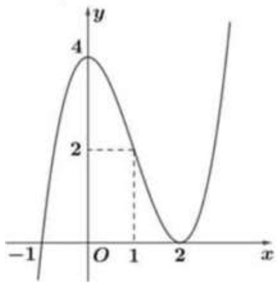
d) Đúng

Ta có: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} f'(0)=0 \\ f'(2)=0 \\ f(0)=-1 \\ f(2)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 12a+4b+c=0 \\ d=-1 \\ 8a+4b+2c+d=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=0 \\ d=-1 \end{cases}$

Tổng $2025a+b+c+d=-2025+3+0-1=-2023$

Câu 9. (HSG Hải Phòng 2025) Cho hàm đa thức $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



a) Phương trình $f'(\cos x)=3$ có đúng 4 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

b) $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=f(-1)$.

c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

d) Hàm số $g(x)=f(x-2024)-2023x+2022$ có đúng 2 điểm cực trị.

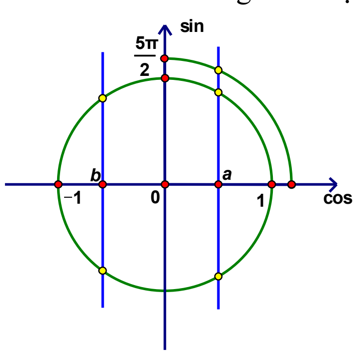
Lời giải

a) Sai

Dựa vào đồ thị của $f'(x)$ ta suy ra $f'(x)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-1;0) \\ x=b\in(0;1) \\ x=c\in(2;+\infty) \end{array}\right.$.

Do đó, phương trình $f'(\cos x)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=a\in(-1;0) \\ \cos x=b\in(0;1) \\ \cos x=c\in(2;+\infty)\ (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=a\in(-1;0) \\ \cos x=b\in(0;1) \end{array}\right.$.

Biểu diễn trên đường tròn lượng giác, ta được hình vẽ như sau:



Dựa vào hình vẽ, ta suy ra:

Phương trình $\cos x=a\in(-1;0)$ có 3 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$

Phương trình $\cos x=b\in(0;1)$ có 2 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$

Vậy phương trình $f'(\cos x)=3$ có đúng 5 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$. Vậy a) sai

b) Đúng

Dựa vào đồ thị của $f'(x)$ ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2\ (\text{BC}) \end{array}\right.$

BBT cho hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$f(2)$	↗	$+\infty$

Từ BBT, ta suy ra $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=f(-1)$. Vậy b) đúng.

c) Sai

Dựa vào đồ thị của $f'(x)$ ta có $f'(x)>0,\ \forall x\in(0;2)$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;2)$

Vậy c) Sai.

d) Sai

Ta có: $g'(x)=f'(x-2024)-2023=0 \Leftrightarrow f'(x-2024)=2023$

$\Leftrightarrow x-2024=d\in(2;+\infty) \Leftrightarrow x=2024+d$

Vậy hàm số $g(x)=f(x-2024)-2023x+2022$ có đúng 1 điểm cực trị.

Vậy d) sai.

Câu 10. (THPT Cụm trường Hải Dương 2025) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-3x+2)$ với mọi $x\in R$.

a) Phương trình $f'(x)=0$ có duy nhất một nghiệm $x=2$

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$.

c) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

d) Hàm số $y=f(x^2-6x+1)$ có ba điểm cực đại.

Lời giải

a) Sai.

Ta có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-3x+2)$

Khi $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2-3x+2)=0 \Leftrightarrow (x-1)^3(x-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Vậy $f'(x)=0$ có 2 nghiệm.

b) Đúng.

Vì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$.

c) Đúng.

Vì $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

d) Sai

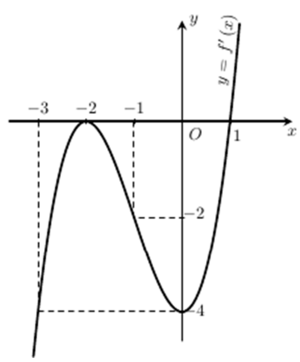
Ta có $y=f\left(x^2-6x+1\right)\Rightarrow y'=(2x-6)f'\left(x^2-6x+1\right)=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-6=0\\ f'\left(x^2-6x+1\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x^2-6x+1=1\\ x^2-6x+1=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=0\\ x=6\\ x=3+\sqrt{10}\\ x=3-\sqrt{10}\end{array}\right.$$

x	$-\infty$		$3-\sqrt{10}$		0		3		6		$3+\sqrt{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y=f\left(x^2-6x+1\right)$ có 2 điểm cực đại.

Câu 11. **(THPT Cụm trường Hải Dương 2025)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) $f'(2)=4$.

d) $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+x+2024$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$				$\nearrow$	$+\infty$

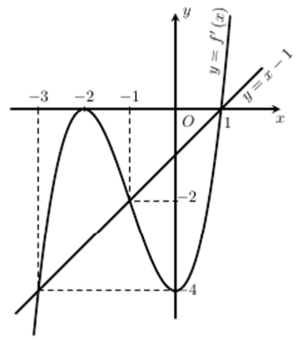
a) Sai. Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

b) Sai. Hàm số có một điểm cực trị.

c) Sai. Từ đò thị hàm số $y=f'(x)$ ta suy ra: $f'(x)=(x+2)^2(x-1)$.

Do đó $f'(2)=(2+2)^2(2-1)=16$.

d) Đúng. Ta có $g'(x)=f'(x)-x+1=f'(x)-(x-1)$.



Ta vẽ hai đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=x-1$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

Suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-(x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right. .$$

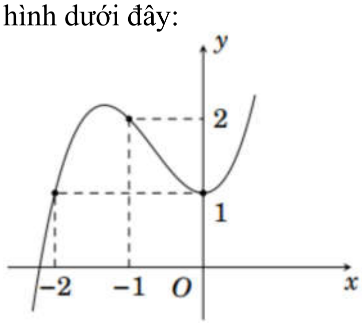
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta thấy $\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)\subset(-3;-1)$ nên hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Câu 12. **(THPT Lê Xoay - Vĩnh Phúc 2025)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây:



a) Trong 4 số a,b,c,d có ba số dương.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

c) Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có toạ độ $(0;1)$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

Lời giải

a) Đúng.

$y'=f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ nên $c=0$.

Đồ thị đi qua điểm $(0;1)$ nên $d=1$.

Đồ thị đi qua các điểm $(-1;2);(-2;1)$ nên $-a+b+1=2$ và $-8a+4b+1=1$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}-a+b=1\\-8a+4b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$.

Vậy $a=1,b=2,c=0,d=1$. Trong 4 số a,b,c,d có ba số dương.

b) Sai.

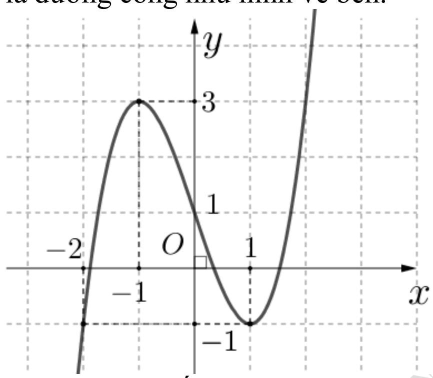
Trên khoảng $(-\infty;-1)$ hàm số vừa đồng biến vừa nghịch biến.

c) Đúng.

d) Sai.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Câu 13. **(Cụm trường THPT Bắc Ninh 2025)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.



a) Trong các số a,b,c,d có ba giá trị dương.

b) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $(-2;1)$ bằng 3.

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có hoành độ bằng 1.

d) Phương trình $f(f(x))=\frac{5}{2}$ có sáu nghiệm phân biệt.

Lời giải

a) Từ đồ thị ta có: $\begin{cases}f(-1)=3\\f(1)=-1\\f(0)=1\\f(-2)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a+b-c+d=3\\a+b+c+d=-1\\d=1\\-8a+4b-2c+d=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-3\\d=1\end{cases}$

Vậy $y=f(x)=x^3-3x+1$. Từ hàm số suy ra có 2 số dương. Suy ra a) **sai.**

b) Từ đồ thị, trong khoảng $(-2;1)$ hàm số có giá trị lớn nhất bằng 3. Suy ra b) **đúng.**

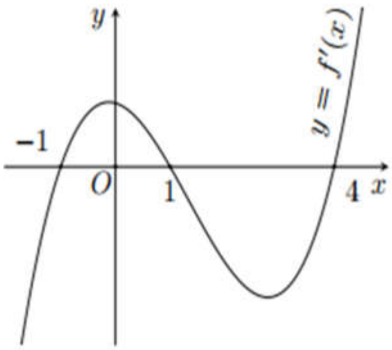
c) Từ đồ thị, tâm đối xứng của đồ thị có hoành độ bằng 0. Suy ra c) **sai.**

d) Ta có $f(f(x))=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=a\ \left(a\in(-2;-1)\right)\ (1)\\f(x)=b\ \left(b\in(-1;0)\right)\ (2)\\f(x)=c\ \left(c\in(1;2)\right)\ (3)\end{array}\right.$.

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và đường thẳng $y=a,y=b,y=c$.

Từ đồ thị suy ra phương trình $(1),(2),(3)$ lần lượt có 1 nghiệm, 3 nghiệm, 3 nghiệm. Vậy phương trình $f(f(x))=\frac{5}{2}$ có 7 nghiệm. Suy ra d) **sai.**

Câu 14. (THPT Cẩm Xuyên - Hà Tĩnh 2025) Cho hàm số $f(x)$. Hàm só $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



a) $f(-1)>f(-3)$

b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ và $x=4$.

c) Hàm số $y=f(2-x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

d) Trên đoạn $[2024;2025]$ hàm số $g(x)=f(2-x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=2024$.

Lời giải

a) Sai.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng xét dấu $f(-1)<f(-3)$.

b) Đúng.

Dựa bảng biến thiên. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ và $x=4$.

c) Đúng.

Vì $y'=-f'(2-x) \Leftrightarrow f'(2-x)=0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x=-1 \\ 2-x=1 \\ 2-x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y=f(2-x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Do đó hàm số $y=f(2-x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

d) Đúng

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(2-x)$ ta thấy:

Trên đoạn $[2024;2025]$ hàm số $g(x)=f(2-x)$ đồng biến nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=2024$.

Câu 15. (Chuyên KHTN Hà Nội 2025) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6	$\searrow$	1	$\nearrow$	8

a) Hàm số đã cho có hai điểm cực đại

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(\sqrt{x-3}+1\right)$ trên nửa khoảng $\left[3;+\infty\right)$ là 1.

c) Phương trình $f\left(x\right)+x^2-6x=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1

d) Có đúng 7 số nguyên m để phương trình $f\left(\sqrt{x-3}+1\right)+m\left(x+2-4\sqrt{x-3}\right)=10$ có hai nghiệm

Lời giải

Câu a) sai.

+ Hàm số đã cho có hai điểm cực tiểu, một điểm cực đại.

Câu b) đúng

+ Đặt $t=\sqrt{x-3}+1$ $\left(1\le t\right)$. Khi đó xét hàm $y=f\left(t\right)$ trên $\left[1;+\infty\right)$.

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 tại $t=3\Leftrightarrow\sqrt{x-3}+1=3\Leftrightarrow x=7$.

Câu c) đúng.

+ Xét hàm số $h\left(x\right)=f\left(x\right)+x^2-6x\Rightarrow h'\left(x\right)=f'\left(x\right)+2x-6$.

Trên $\left(1;+\infty\right)$: $f'\left(x\right)=0$ và $2x-6=0$ cùng có nghiệm duy nhất $x=3\Rightarrow h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=3$.

$h\left(3\right)=f\left(3\right)+9-18=-8<0; h\left(1\right)=f\left(1\right)+1-6=1$.

Lập BBT của hàm $h\left(x\right)$ trên $\left(1;+\infty\right)$ ta thấy phương trình $h\left(x\right)=f\left(x\right)+x^2-6x=0$ có duy nhất một nghiệm trên khoảng $\left(1;3\right)$ và một nghiệm duy nhất trên khoảng $\left(3;+\infty\right)$.

Câu d) sai.

+ Đăt $t=\sqrt{x-3}+1\Rightarrow t\ge 1$. Khi đó ta có phương trình $f\left(t\right)+m\left(t^2-4t+8\right)=10\Leftrightarrow m=\dfrac{10-f\left(t\right)}{t^2-4t+8}$ với $t\ge 1$.

Ta có $1\le f\left(t\right)<8\Rightarrow 2<10-f\left(t\right)\le 9; 4\le t^2-4t+8$ do đó $\dfrac{1}{2}<\dfrac{10-f\left(t\right)}{t^2-4t+8}\le\dfrac{9}{4}$ nên phương trình $m=\dfrac{10-f\left(t\right)}{t^2-4t+8}$ có nghiệm thì $\dfrac{1}{2}<m\le\dfrac{9}{4}$. Do đó chỉ có hai giá trị nguyên của m làm cho phương trình có nghiệm. Nên không thể có 7 giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm được.

Câu 16. **(Chuyên Thái Bình 2025)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

b) Hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 2, giá trị nhỏ nhất bằng -2.

c) Hàm số $g(x) = 3 - 2f(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.

d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $A(-1;-2)$.

Lời giải

a) Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nên a) đúng

b) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên b) sai.

c) Ta có $g'(x) = -2f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $g(x) = 3 - 2f(x)$ đồng biến trên $(0;2)$ nên c) Sai.

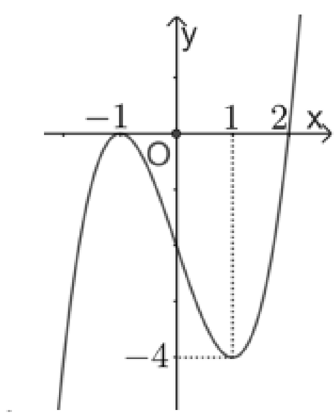
d)Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $M(0;2)$ và $N(2;-2)$

nên: $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f(0) = 2 \\ f(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b = 0 \\ d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b = 0 \\ d = 2 \\ 8a + 4b = -4 \end{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$.

$\Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $A(-1;-2)$ nên d) đúng.

Câu 17. **(Cụm trường Nghệ An 2025)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

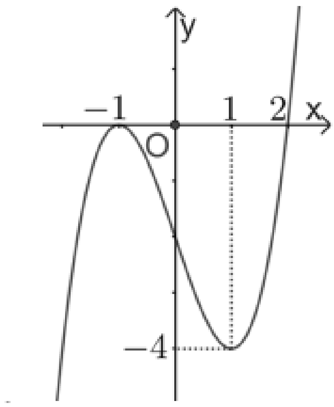
b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;3]$ bằng -4.

c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có kết luận như sau:



a) Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và đạt cực tiểu tại $x=1$ nên hàm số có hai điểm cực trị.

Vậy a đúng.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;3\right]$ bằng -4.

Vậy b đúng.

c) Từ đồ thị hàm số suy ra hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

Vậy c Sai.

d) Dựa vào đồ thị ta thấy $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$, suy ra đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ có đúng 2 tiệm cận đứng $x=-1;x=2$.

Vậy d Đúng.

Câu 18. **(Cụm trường Nguyễn Hiền - Lê Hồng Phong - Quảng Nam 2025)** Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+4$ có đồ thị $\left(C\right)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$ và $y'=-3x^3+6x$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;2\right)$.

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị và phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $2x+y-4=0$.

d) Diện tích của tam giác OAB bằng 4, với O là gốc tọa độ và A,B là các điểm cực trị của $\left(C\right)$.

Lời giải

Câu 2	a)	b)	c)	d)
Ý	S	Đ	S	Đ

a) Xét hàm số $y=-x^3+3x^2+4$ có $D=\mathbb{R}$.

$y'=-3x^2+6x$.

b) $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(0;2)$.

c) Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;4), B(2;8)$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-4}{8-4} \Leftrightarrow y=2x+4 \Leftrightarrow 2x-y+4=0$.

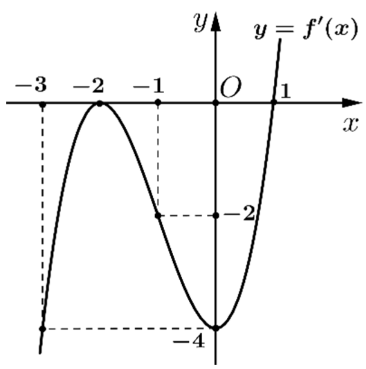
d) $S_{OAB}=\frac{1}{2}.AB.d(O;AB)$.

Trong đó $AB=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

$d(0;AB)=\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Vậy Diện tích tam giác OAB là: $S_{OAB}=\frac{1}{2}.2\sqrt{5}.\frac{4}{\sqrt{5}}=4$.

Câu 19. **(THPT Anh Sơn 3 - Nghệ An 2025)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) Trên đoạn $[-2;1]$, hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$.

d) Hàm số $g(x)=f(x^2-2)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-\sqrt{3})$ và $(0;\sqrt{3})$.

Lời giải

a) Sai

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ dễ thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Sai

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có duy nhất một điểm cực trị tại $x=1$.

c) Đúng

Trên đoạn $[-2;1]$, hàm số $y=f(x)$ nghịch biến nên giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x=1$.

d) Sai

Xét $g'(x)=2xf'(x^2-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $f'(x)$:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ và $\left(0;\sqrt{3}\right)$ hàm số $g(x)=f(x^2-2)$ nghịch biến chứ không đồng biến.

Câu 20. **(Sở Quảng Bình 2025)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-3x^2+4$.

a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;2\right)$.

b) Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty$.

c) Gọi A,B lần lượt là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$. Khi đó độ dài AB bằng $\sqrt{5}$.

d) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{f\left(x\right)}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng.

Lời giải

a) Ta có: $f'\left(x\right)=3x^2-6x$;

$f'\left(x\right)<0\Leftrightarrow 3x^2-6x<0\Leftrightarrow 0<x<2$. Do đó hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;2\right)$. Vậy a) **đúng.**

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty$. Vậy **b) đúng.**

c) $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Suy ra hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(0;4\right),B\left(2;0\right)$.

$AB=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. **Vậy c) sai.**

d) Xét hàm số $y=\dfrac{x+1}{f\left(x\right)}$:

$f\left(x\right)=x^3-3x^2+4=\left(x-2\right)^2\left(x+1\right)$.

$\Rightarrow y=\dfrac{x+1}{f\left(x\right)}=\dfrac{x+1}{\left(x-2\right)^2\left(x+1\right)}=\dfrac{1}{\left(x-2\right)^2}$.

Suy ra đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{f\left(x\right)}$ có đúng một đường tiệm cận đứng. **Vậy d) sai.**

Câu 21. **(Sở Đà Nẵng 2025)** Cho hàm số $f\left(x\right)=-2x^4+4x^2+1$ có đồ thị (C).

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'\left(x\right)=-8x^3+8x+1$.

c) Tập nghiệm của phương trình $f'\left(x\right)=0$ là $S=\left\{-1;0;1\right\}$.

d) Giá trị lớn nhất của $f\left(x\right)$ là 1.

Lời giải

a) Đúng

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

b) Sai

$f'(x) = -8x^3 + 8x$

c)Đúng

$f'(x) = -8x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

d) Sai

$f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 1 = -2(x^2 - 1)^2 + 3 \le 3$

Vậy giá trị lớn nhất bằng 3 khi $x = \pm 1$.

Câu 22. **(Sở Thái Nguyên 2025)** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 2$ đạt cực trị bằng 0 tại $x = 1$ (với b và c là hằng số)

a. Giá trị của $b + c$ bằng -3.

b. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = -1$.

c) Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 0.

d) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-1;0)$.

Lời giải

a) $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$.

Hàm số $y = f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 2$ đạt cực trị bằng 0 tại $x = 1$ nên $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + b + c + 2 = 0 \\ 3 + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -3 \\ 2b + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -3 \end{cases}$. Suy ra mệnh đề a) **đúng.**

Khi đó $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

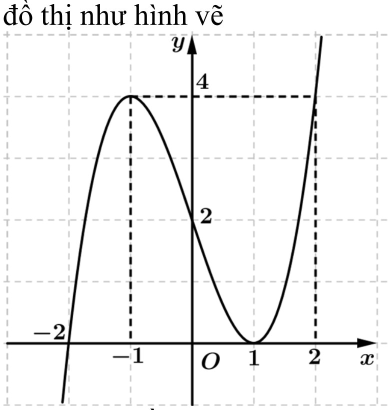
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) Theo bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$. Suy ra mệnh đề b) **đúng**.

c) Theo bảng biến thiên, giá trị cực đại của hàm số bằng 4. Suy ra mệnh đề c) **sai**.

d) Theo bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-1;0)$ là mệnh đề **sai.**

Câu 23. **(THPT Hoằng Hóa 2-Thanh Hóa 2025)** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

b) Hàm số có $f'(x)>0\ \forall x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

c) Hàm số $g(x)=f(x)+1$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

d) Hàm số $y=f(|x|)$ đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Lời giải

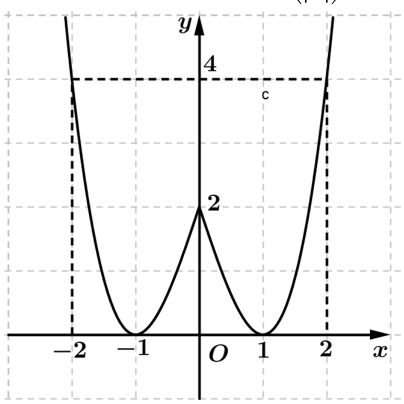
a)Đúng

b)Đúng

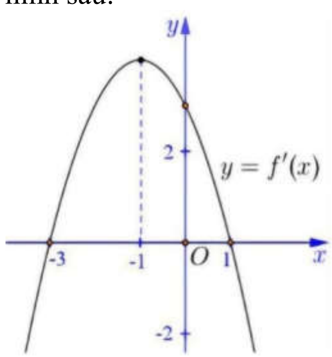
Dựa vào đồ thị trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$ đồ thị đi lên nên hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$ hay $f'(x)>0\ \forall x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

c)Sai. $g'(x)=f'(x)$. Ta có $g'(x)<0\Leftrightarrow f'(x)<0\Leftrightarrow -1<x<1$

d)Đúng. Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ như hình vẽ. Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y=f(|x|)$ đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.



Câu 24. **(Đề thi vào ĐHSPHN 2025)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đạo hàm $f^{'}(x)$ có đồ thị như hình sau:



a) Phương trình $f^{'}(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $x=-3$.

d) Nếu $g(x)=f(1-x^2)$ thì $g(2025)<g(2026)$.

Lời giải

a) Đúng.

Từ đồ thị hàm số hàm số $y=f^{'}(x)$ ta thấy: đồ thị hàm số $y=f^{'}(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm $x=-3;x=1$ nên phương trình $f^{'}(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt là $x=-3;x=1$.

b) Sai.

Từ đồ thị hàm số hàm số $y=f^{'}(x)$ ta thấy: $f^{'}(x)>0$ với mọi $x\in(-1;1)$ nên hàm số đồng biến trên $(-1;1)$.

c) Sai.

Từ đồ thị hàm số hàm số $y=f^{'}(x)$ ta thấy: $f^{'}(x)<0$ với mọi $x\in(-\infty;-3)$ và $f^{'}(x)>0$ với mọi $x\in(-3;1)$ nên hàm số có điểm cực tiểu tại $x=-3$.

d) Đúng

Ta có: $g(x)=f(1-x^2)$ thì $g^{'}(x)=-2x.f^{'}(1-x^2)$

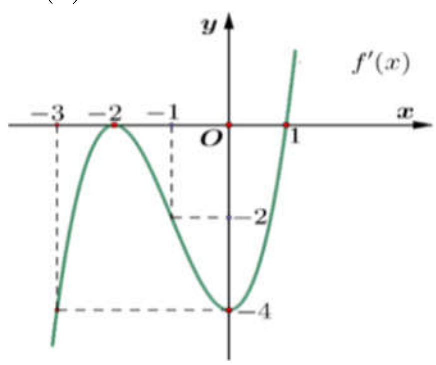
Với mọi $x\in(2025;2026)$ thì $1-x^2<-3$ nên từ đồ thị trên suy ra $f^{'}(1-x^2)<0$

Ta có bảng xét dấu $g^{'}(x)$ trên $(2025;2026)$

x	$(2025;2026)$
$f^{'}(1-x^2)<0$	-
$g^{'}(x)=-2x.f^{'}(1-x^2)$	+

Vậy hàm số $g(x)=f(1-x^2)$ đồng biến trên $(2025;2026)$ nên $g(2025)<g(2026)$.

Câu 25. **(THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'\left(x\right)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-2\right)$.

b) Hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai cực trị.

c) $\underset{[-2;1]}{Max}\, f\left(x\right)=f\left(-2\right)$.

d) Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{x+2}{f'\left(x\right)}$ có tất cả 2 đường tiệm cận.

Lời giải

‣ Từ đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ ta suy ra $f'\left(x\right)\le 0 \Leftrightarrow x\le 1;\ f'\left(x\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$. Do đó a) Sai.

‣ Ta cũng suy ra hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left[-2;1\right]$ nên $\underset{[-2;1]}{Max}\, f\left(x\right)=f\left(-2\right)$.

Do đó c) Đúng.

‣ Cũng từ đồ thị ta thấy $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=-2;x=1$. $f'\left(x\right)$ chỉ đổi dấu từ $-\ qua\ +$ khi qua $x=1$. Suy ra hàm số $f\left(x\right)$ chỉ có một điểm cực trị.Do đó b) Sai.

‣ $f'\left(x\right)$ là hàm số bậc ba nên từ đồ thị ta suy ra $f'\left(x\right)=a\left(x+2\right)^2\left(x-1\right)$.

$f'\left(0\right)=-4\Rightarrow -4a=-4\Rightarrow a=1\Rightarrow f'\left(x\right)=\left(x+2\right)^2\left(x-1\right)$.

$g\left(x\right)=\dfrac{x+2}{\left(x+2\right)^2\left(x-1\right)}=\dfrac{1}{\left(x+2\right)\left(x-1\right)},\forall x\ne 2.$

Suy ra đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ có hai tiệm cận đứng là $x=-2;x=1$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$. Do đó d) Sai.

Tóm lại: a)S b)S c)Đ d) S.

Câu 26. **(THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ, m là số thực tùy ý

Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2022	$\searrow$	m

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên $\left[-1;3\right]$ bằng 2022 đạt tại $x=3$.

b) Hàm số $y=f\left(x-2024\right)$ đồng biến trên $\left(-2025;-2021\right)$.

c) Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)-2$ có tọa độ điểm cực tiểu là $\left(-1;-2\right)$.

d) Bất phương trình $f\left(x\right)\geq a$ (tham số a) có nghiệm trên đoạn $\left[-1;3\right]$ khi $a\leq 2022$.

Lời giải

a) Đúng.

Ta có dựa vào bảng biến thiên giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên $\left[-1;3\right]$ bằng 2022 đạt tại $x=3$.

b) Sai.

Ta có $y'=f'\left(x-2024\right)$

Hàm số đồng biến khi $y'\geq 0\Leftrightarrow f'\left(x-2024\right)\geq 0\Leftrightarrow -1\leq x-2024\leq 3\Leftrightarrow 2023\leq x\leq 2027$.

Hàm số $y=f\left(x-2024\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(2023;2027\right)$

c) Đúng.

Ta có $y'=f'\left(x\right)$ nên hàm số $y=f\left(x\right)-2$ đạt cực tiểu tại $x_{CT}=-1\Rightarrow y_{CT}=f(-1)-2=-2$

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)-2$ có tọa độ điểm cực tiểu là $\left(-1;-2\right)$.

d) Đúng

Dựa vào bảng biến thiên bất phương trình $f\left(x\right)\geq a$ (tham số a) có nghiệm trên đoạn $\left[-1;3\right]$ khi $a\leq 2022$.

Câu 27. **(Sở Bắc Ninh 2025)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ có 2 điểm cực trị.

b) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(-3;5\right)$.

c) Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{x-4}{f\left(x\right)-5}$ có 3 đường tiệm cận.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 12.

Lời giải

a) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị tại $x=0$ và $x=4$.

Chọn Đúng.

b) Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;4)$.

Chọn Sai.

c) Xét hàm số $g(x)=\frac{x-4}{f(x)-5}$

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(x)=5$ có một nghiệm $x=5$ và một nghiệm $x=a<0$.

Nhận thấy rằng $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{x-4}{f(x)-5}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 5^+}\frac{x-4}{f(x)-5}=+\infty$. Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng.

Ta cũng có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-4}{f(x)-5}=0$, do tử số là đa thức bậc nhất trong khi mẫu số là đa thức bậc ba.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận ngang.

Tóm lại, đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận.

Chọn Đúng.

d) Xét hàm số $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

Ta có

$$\begin{aligned} g'(x)&=(4-2x)f'\left(4x-x^2\right)+x^2-6x+8 \\ &=2(2-x)f'\left(4x-x^2\right)+(x-4)(x-2) \\ &=2(2-x)\left[f'\left(4x-x^2\right)-(x-4)\right] \end{aligned}$$

Xét hàm số $u(x)=4x-x^2$, trên đoạn $[1;3]$ có $3\le u(x)\le 4$ suy ra $f'(u(x))\ge 0$, hơn nữa $x-4<0$ với $x\in[1;3]$. Vậy nên $f'\left(4x-x^2\right)-(x-4)\ge 0, \forall x\in[1;3]$, dấu "=" xảy ra khi $x=4$.

Trên $[1;3]$, phương trình $g'(x)=0$ có một nghiệm $x=2$.

Có

$$g(1)=f(3)+\frac{17}{3}$$

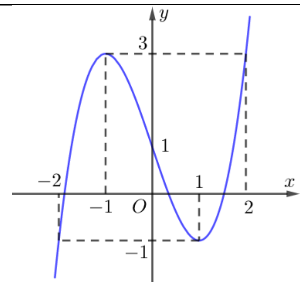
$$g(3)=f(3)+\frac{19}{3}$$

$$g(2)=f(4)+7=12$$

Do $f(3)<f(4)$ và $\frac{17}{3}<\frac{19}{3}<7$ nên giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 12.

Chọn Đúng.

Câu 28. **(Sở Hậu Giang 2025)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



a. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

b) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) Trên đoạn $[-2;2]$, hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 2

d) $f(x)=x^3-3x+1$.

Lời giải

a) Đúng.
Trong khoảng $(-1;1)$ hàm số $f(x)$ nghịch biến.

b) Đúng.
Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị là $x=-1$ và $x=1$.

c) Sai.
Trên đoạn $[-2;2]$, hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 3.

d) Đúng.
Hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba $\Rightarrow y=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a\neq 0)$

Đồ thị hàm số đi qua 4 điểm $(-2;-1)$; $(-1;3)$; $(0;1)$ và $(1;-1)$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(-2)^3a+(-2)^2b+(-2)c+d=-1\\(-1)^3a+(-1)^2b+(-1)c+d=3\\0^3a+0^2b+0c+d=1\\1^3a+1^2b+1c+d=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-8a+4b-2c+d=-1\\-a+b-c+d=3\\d=1\\a+b+c+d=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=0\\c=-3\\d=1\end{cases}$

$\Rightarrow y=f(x)=x^3-3x+1$.

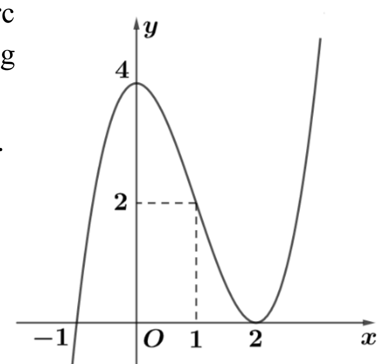
Cách khác:

d) Hàm số có hai điểm cực trị $-1;1$ nên $f'(x)=3a(x+1)(x-1)=a(3x^2-3)$

$\Rightarrow f(x)=a(x^3-3x)+d$

Do đồ thị hàm số $y=f(x)$ qua $(0;1),(1;-1)$ nên có $f(x)=x^3-3x+1$.

Câu 29. **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa 2025)** Cho hàm đa thức $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



a) Hàm số $g(x)=f(x)-2025x+2024$ có đúng 2 điểm cực trị.

b) $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=f(-1)$.

c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

d) Phương trình $f'(\cos x)=3$ có đúng 5 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Lời giải

a) Ta có $g'(x)=f'(x)-2025$ nên $g'(x)=0$ cho ta $f'(x)=2025$. Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$ thì ta có phương trình $f'(x)=2025$ có một nghiệm đơn $x=x_0$ nên $g'(x)$ đổi dấu qua nghiệm này. Vậy hàm số $g(x)=f(x)-2025x+2024$ có đúng một điểm cực trị. Chọn **SAI.**

b) Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=f(-1)$. Chọn đáp án **ĐÚNG.**

c) Dựa vào bảng biến thiên ta cũng thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;2)$ nên ta chọn đáp án **SAI.**

d) Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ thì ta có phương trình $f'(\cos x)=3$ có các nghiệm thoả mãn $\cos x=a\in(-1;0)$; $\cos x=b\in(0;1)$ và $\cos x=c\in(1;2)$.

+ $\cos x=a\in(-1;0)$ cho 2 nghiệm x phân biệt thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

+ $\cos x=b\in(0;1)$ cho 3 nghiệm x phân biệt thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

+ $\cos x=c\in(2;+\infty)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình $f'(\cos x)=3$ có đúng 5 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$. Chọn đáp án **ĐÚNG.**

Câu 30. **(Cụm THPT Hoàn Kiếm - Hai Bà Trưng - Hà Nội 2025)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như dưới đây

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

a) $\underset{[0;2]}{Min}\, f(x)=f(1)$.

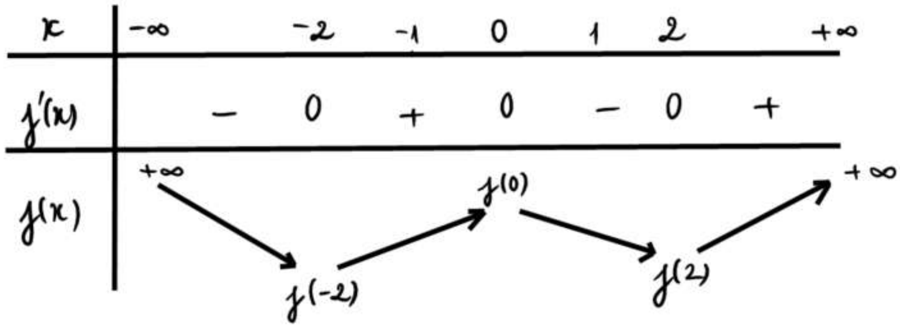
b) Trên $[-2;2]$, hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=0$.

c) $\forall m\ge f(-2)$, phương trình $f(x)=m$ luôn có nghiệm trên $[0;2]$.

d) Giá trị lớn nhất của $g(x)=f(x)-\sin^2 x$ trên đoạn $[-1;1]$ là $f(0)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số



$y = f(x)$ như sau

a)Đúng. Ta có: $\underset{[0;2]}{Min} f(x) = f(2)$

Suy ra **a) sai.**

b)Đúng. Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có:

$\underset{[-2;2]}{Max} f(x) = f(0)$

Suy ra **b) đúng.**

c)Sai. Vì $f'(x) = a(x+2)x(x-2) = ax(x^2-4)$ nên $y = f(x)$ là hàm bậc bốn trùng phương $\Rightarrow f(-2) = f(2)$

Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm trên $[0;2] \Leftrightarrow f(2) \le m \le f(0) \Leftrightarrow f(-2) \le m \le f(0)$

Suy ra **c) sai.**

d)Đúng. Ta có: $g(x) = f(x) - \sin^2 x \le f(x), \forall x \in [-1;1]$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $f(x) \le f(0), \forall x \in [-1;1]$

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;1]} g(x) = f(0)$ đạt được khi $\begin{cases} x = 0 \\ \sin^2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Suy ra **d) đúng.**