

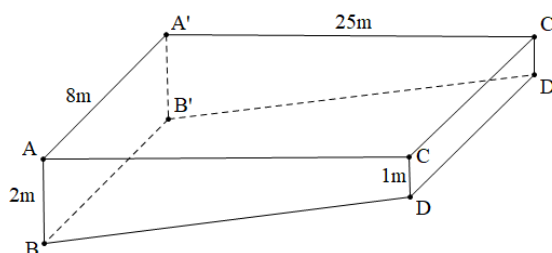
## CHỦ ĐỀ 8. TOÁN THỰC TẾ TRONG KHÔNG GIAN

### • PHẦN 3. TRẢ LỜI NGẮN

**CÂU HỎI** (vì là ngân hàng được tách ra từ các trường, cho nên có trùng lặp câu hỏi thì do các trường tham khảo nhau)

#### Thực tế

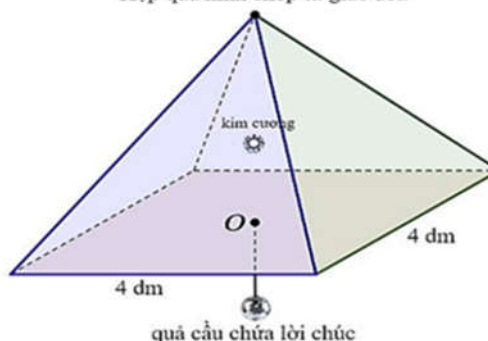
- Câu 1.** (Sở Thái Nguyên 2025) Mặt bể bơi của một dự án chung cư cao cấp có dạng một hình chữ nhật với chiều dài  $25m$  và chiều rộng  $8m$ . Bể bơi sâu  $1m$  ở bên đầu nông và sâu  $2m$  bên đầu sâu. Biết hai đầu nông, sâu thuộc hai bên theo chiều dài của bể bơi (tham khảo hình vẽ minh họa). Ban đầu bể không có nước, nước bắt đầu được bơm vào bể lúc 7 giờ sáng với tốc độ  $1m^3$  mỗi phút. Vào lúc 8 giờ 4 phút sáng thì mực nước dâng lên với tốc độ  $\frac{1}{a} m / \text{phút}$ . Giá trị của  $a$  bằng bao nhiêu?



- Câu 2.** (THPT Lê Thánh Tông - Nguyễn Khuyến 2025) Vào ngày lễ tình nhân, Ronaldo đã tặng cho cô bạn gái Georgina một viên kim cương vô cùng giá trị. Viên kim cương nằm trong một gói quà độc đáo có dạng hình chóp tứ giác đều với cạnh đáy bằng  $4dm$ , vị trí đặt kim cương là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp đó.



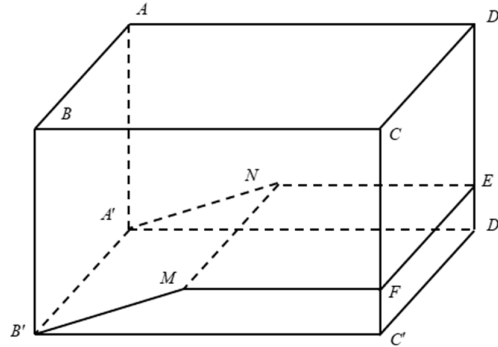
Hộp quà hình chóp tứ giác đều



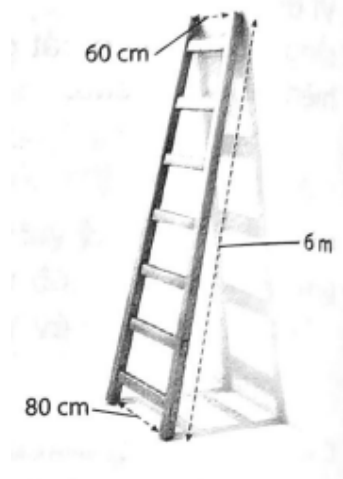
Từ vị trí tâm  $O$  của đáy hình chóp, có một sợi dây dùng để treo một quả cầu nhỏ, bên trong quả cầu đó chứa những lời chúc có cánh của huyền thoại bóng đá dành cho người tình. Gói quà được treo cân bằng trong căn phòng sao cho đỉnh hình chóp ở vị trí cao nhất và đáy hình chóp song

song với mặt đất; khi đó viên kim cương và quả cầu đối xứng nhau qua  $O$ ; đồng thời tâm quả cầu cách đều tất cả các cạnh hình chóp. Hỏi gói quà hình chóp đều đó có thể tích bao nhiêu dm khối (làm tròn đến hàng đơn vị)?

- Câu 3.** (Sở Yên Bái 2025) Một bể bơi ban đầu có dạng hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$ . Sau đó người ta làm lại mặt đáy như hình vẽ. Biết rằng  $A'B'MN$  và  $MNEF$  là các hình chữ nhật,  $(MNEF) \parallel (A'B'C'D')$ ,  $AB = 10\text{ m}$ ,  $AD = 30\text{ m}$ ,  $AA' = 20\text{ m}$ ,  $MF = DE = 17\text{ m}$ . Tính tỉ số thể tích của bể sau khi làm lại mặt đáy với thể tích của bể lúc ban đầu (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



- Câu 4.** (THPT Đô Lương 1 - Nghệ An 2025) Một chiếc thang có dạng hình thang cân có chiều dài thanh bên 6 m. Khoảng cách hai chân thang là 80 cm và hai ngọn thang là 60 cm. Thang được dựa vào bờ tường như hình bên. Tính góc giữa đường thẳng chân tường và thanh bên của hình thang. (Đơn vị độ, làm tròn đến hàng đơn vị)



- Câu 5.** (Sở Đà Nẵng 2025) Một chiếc lều hình chóp có đáy là hình vuông, mỗi cạnh dài  $200\text{ cm}$ . Đỉnh lều nằm thẳng đứng phía trên tâm của hình vuông và chiều cao của chiếc lều là  $206\text{ cm}$ . Người ta dùng 4 cọc bằng nhau nối từ 4 góc của đáy đến đỉnh lều để dựng lều. Chiều dài tối thiểu của mỗi cây cọc là bao nhiêu centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của  $\text{cm}$ )?
- Câu 6.** (THPT Hương Hóa - Quảng Trị 2025) Số đo góc nhị diện hợp bởi nửa mặt phẳng chứa màn hình và nửa mặt phẳng chứa bàn phím của laptop gọi là độ mở của laptop. Nghiên cứu tư thế ngồi sử dụng laptop để đảm bảo sức khỏe và hiệu quả công việc các chuyên gia khuyến cáo tư thế ngồi như hình vẽ 1. Khi đó laptop để trên giá đỡ có độ mở màn hình như hình vẽ 2. Kích thước các cạnh đo được  $AB = AC = 23\text{ cm}$ ;  $BC = 39\text{ cm}$ . Tính độ mở của laptop (đơn vị: độ, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

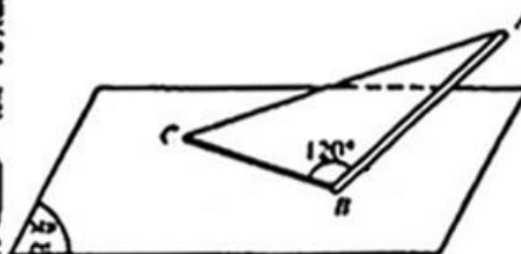


Hình vẽ 1



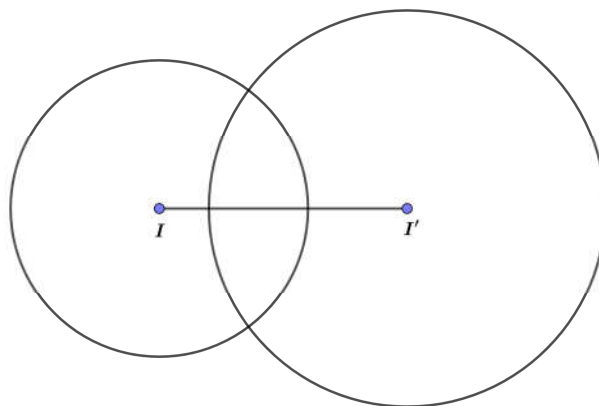
Hình vẽ 2

- Câu 7. (Sở Bình Thuận 2025)** Bánh tráng sau khi tráng, người ta sẽ đặt chúng trên tấm liếp tre rồi phơi nắng. Trên mặt đất phẳng, người ta dựng tấm liếp tre ( xem như đoạn  $AB$  ) có chiều dài bằng  $3m$  và tạo với mặt đất một góc  $60^\circ$ . Tại một thời điểm dưới ánh sáng mặt trời, bóng  $BC$  của tấm liếp tre ( đoạn thẳng  $BC$  ) trên mặt đất dài  $3,6m$  và tạo với tấm liếp một góc bằng  $120^\circ$  ( tức là  $\widehat{ABC} = 120^\circ$  ) ( hình vẽ bên dưới).



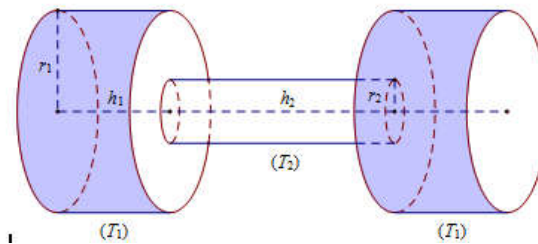
Góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên bằng bao nhiêu độ? (làm tròn tới hàng đơn vị).

- Câu 8. (Sở Lào Cai 2025)** Người ta làm một sân khấu có hình dạng hai hình tròn giao nhau như hình vẽ. Bán kính hai hình tròn lần lượt là  $30\text{ m}$  và  $40\text{ m}$ . Khoảng cách giữa tâm hai hình tròn là  $50\text{ m}$ . Tính diện tích phần giao nhau của hai hình tròn theo  $m^2$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



- Câu 9. (Sở Quảng Ninh 2025)** Cho một hộp quà hình lập phương có cạnh bằng  $10\text{ cm}$ . Trong hộp có một quả cầu pha lê lớn đặc được đặt vừa khít vào hộp sao cho quả cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hộp. Ở 8 góc của hình lập phương, có 8 quả cầu pha lê nhỏ cùng tiếp xúc với các mặt hộp và tiếp xúc với quả cầu lớn. Đồ epoxy resin (một loại keo tổng hợp trong suốt dùng trong thủ công mỹ nghệ) vào đầy hộp để trang trí. Tính thể tích phần keo cần đổ, theo đơn vị lít (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

- Câu 10. (Sở Vũng Tàu 2025)** Một chiếc tạ tay có hình dạng gồm 3 khối trụ, trong đó hai khối trụ ở hai đầu bằng nhau và khối trụ làm tay cầm ở giữa. Gọi khối trụ làm đầu tạ là  $(T_1)$  và khối trụ làm tay cầm là  $(T_2)$  lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là  $r_1, h_1, r_2, h_2$  thỏa mãn  $r_1 = 4r_2$ ,  $h_1 = \frac{1}{2}h_2$  (tham khảo hình vẽ bên).



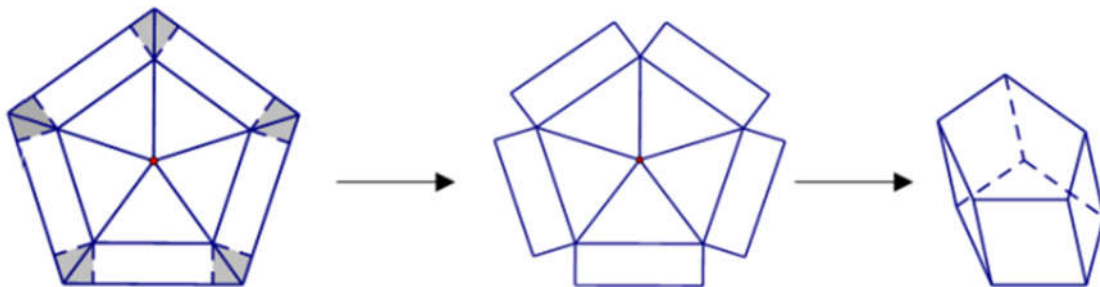
Biết rằng thể tích của khối trụ tay cầm  $(T_2)$  bằng  $30\text{cm}^3$  và chiếc tạ làm bằng inox có khối lượng riêng là  $D = 7,7\text{g/cm}^3$ . Hỏi khối lượng của chiếc tạ tay bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Câu 11. (THPT Mai Trúc Loan - Hà Tĩnh 2025)** Cho một tấm tôn hình một ngũ giác đều có cạnh bằng  $6\text{dm}$ . Người ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Cắt ở mỗi đỉnh của ngũ giác đều đó hai tam giác vuông bằng nhau.

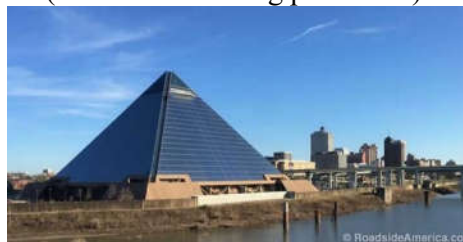
Bước 2: Cắt theo nét đứt đoạn để thu được hình hợp bởi một ngũ giác đều và năm hình chữ nhật.

Bước 3: Gấp các hình chữ nhật để tạo thành khối lăng trụ ngũ giác đều (tham khảo hình vẽ).



Thể tích của khối lăng trụ lớn nhất bằng bao nhiêu đề-xi-mét khối? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

**Câu 12. (THPT Đào Duy Từ - Thanh Hóa 2025)** Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao  $98\text{m}$  và cạnh đáy  $180\text{m}$ . Gọi góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy là  $\alpha$ . Tính  $\tan \alpha$ . (Làm tròn đến hàng phần trăm)

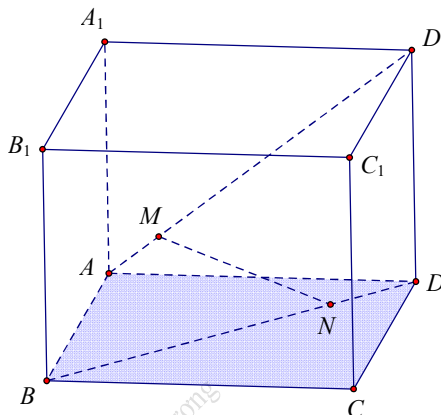


**Câu 13. (THPT Lý Thường Kiệt - Hà Nội 2025)** Một khay đá gồm 6 ngăn nhỏ có dạng là các hình chóp cụt với miệng đáy là hình vuông.



Ta đo được độ dài cạnh đáy nhỏ, cạnh đáy lớn lần lượt bằng  $1\text{ cm}$  và  $3\text{ cm}$  và chiều cao mặt bên bằng  $\sqrt{2}\text{ cm}$ . Tính  $a+b$  biết cosin góc giữa đường chéo của viên đá với cạnh đáy của viên đá có dạng  $\frac{a}{b}$  ( $a, b$  là hai số nguyên tố cùng nhau).

- Câu 14. (Sở Ninh Bình 2025)** Một kỹ sư thiết kế mô hình trang trí cho một sân khấu nổi có dạng hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  với độ dài các cạnh bằng  $5\text{ m}$ . Để tạo ra nét độc đáo cho sân khấu, người kỹ sư muốn thiết kế một dàn đèn ánh sáng nổi từ một điểm  $M$  trên đoạn thẳng  $AD_1$  xuống một điểm  $N$  trên đoạn thẳng  $BD$  thỏa mãn  $AM = DN$ . Dàn đèn ánh sáng có chiều dài ngắn nhất là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



- Câu 15. (THPT Triệu Sơn 3 - Thanh Hóa 2025)** Một sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt đều như hình vẽ dưới. Đáy và miệng sọt là các hình vuông có cạnh tương ứng bằng  $80\text{ cm}$  và  $60\text{ cm}$ . Cạnh bên của sọt dài  $50\text{ cm}$ . Tính thể tích của sọt theo đơn vị mét khối, lấy kết quả đến hàng phần trăm.



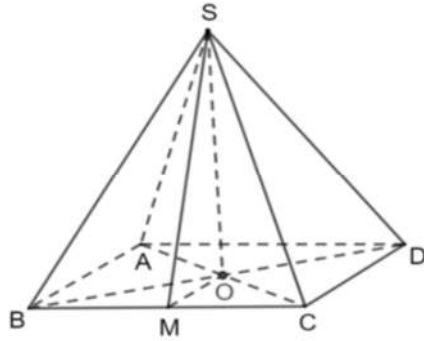
- Câu 16. (Cụm trường THPT Hải Dương 2025)** Một ống khói có cấu trúc gồm một khối chóp cụt tứ giác đều có thể tích  $V_1$  và một khối hộp chữ nhật có thể tích  $V_2$  ghép lại với nhau như hình vẽ bên dưới. Cho biết bản vẽ hình chiếu của ống khói với phương chiều trùng với phương của một cạnh đáy khối chóp cụt, hãy tính tỉ số thể tích  $\frac{V_1}{V_2}$ , kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.



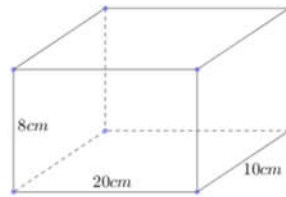
- Câu 17. (THPT Kinh Môn - Hải Dương 2025)** Độ dốc của mái nhà là tang của góc tạo bởi mái nhà đó với mặt phẳng nằm ngang. Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều. Biết rằng diện tích để lát tất cả các mặt của kim tự tháp bằng  $80300\text{ m}^2$  (gồm



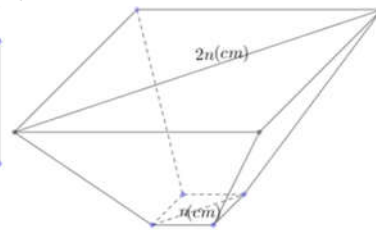
mặt bên và đáy) và độ dốc mặt bên kim tự tháp bằng  $\frac{9}{5}$ . Tính chiều cao của kim tự tháp. (Làm tròn đến hàng đơn vị)



- Câu 18. (Cụm trường THPT Bắc Ninh 2025)** Một chiếc khay đựng đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước: chiều dài  $20\text{ cm}$ , chiều rộng  $10\text{ cm}$ , chiều cao  $8\text{ cm}$  (hình a). Để san bớt nước cho đỡ đầy, người ta đổ nước từ chiếc khay thứ nhất đó sang chiếc khay thứ hai có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với đáy khay là hình vuông nhỏ có đường chéo dài  $n\text{ (cm)}$ , miệng khay là hình vuông lớn có đường chéo dài  $2n\text{ (cm)}$  (hình b). Sau khi đổ, mực nước ở khay thứ hai cao bằng  $\frac{2}{5}$  chiều cao của khay đó và lượng nước trong khay thứ nhất giảm đi  $\frac{1}{4}$  so với ban đầu. Thể tích của chiếc khay thứ hai theo đơn vị centimet khối có kết quả chính xác đến hàng đơn vị là  $a\text{ (cm}^3\text{)}$ . Tổng các chữ số của  $a$  bằng bao nhiêu?

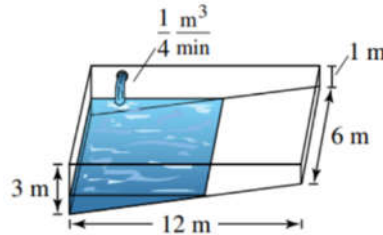


Hình a



Hình b

- Câu 19. (Sở Hà Tĩnh 2025)** Một hồ bơi được chế tạo từ một khối hộp chữ nhật có chiều dài 12 mét, rộng 6 mét, sâu 1 mét ở đầu nông và sâu 3 mét ở đầu sâu (như hình vẽ). Nước được bơm vào hồ bơi với tốc độ  $0,25$  mét khối mỗi phút. Biết rằng trong bể có 1 mét nước ở đầu sâu. Để lượng nước đạt  $75\%$  dung tích bể bơi thì cần bơm trong thời gian bao lâu? (đơn vị tính bằng phút).

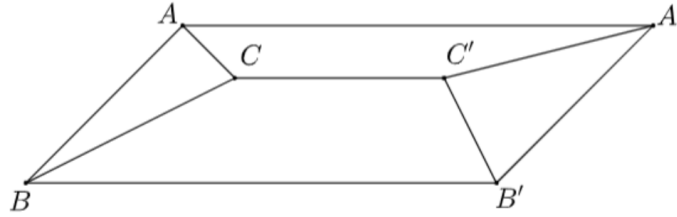


- Câu 20. (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025)** Cho khối trụ có bán kính  $R$  chiều cao  $h$ , hai đường tròn đáy có tâm là  $O$  và  $O'$ . Một khối nón có đỉnh trùng với  $O'$  và đáy có tâm  $(O; 2R)$ . Gọi  $V_1$  là thể tích phần khối nón nằm bên ngoài khối trụ,  $V_2$  là thể tích phần khối trụ nằm bên ngoài khối nón.

Tính  $\frac{V_1}{V_2}$ ?

- Câu 21. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2025)** Gia đình bác An muốn làm mái tôn cho sân thượng là hình chữ nhật  $ABB'A'$  với kích thước chiều dài  $AA' = 10\text{ m}$  và chiều rộng  $AB = 6\text{ m}$ . Bác dự định

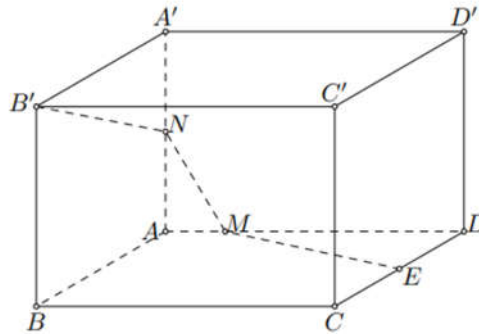
làm mái tôn (kín) có thanh ngang  $CC' = 6m$  nằm chính giữa mái, song song và cách mặt sàn sân thượng  $2m$  (tham khảo hình vẽ). Biết rằng chi phí làm mái tôn trọn gói cho  $1m^2$  là  $250\,000$  VNĐ. Tính số tiền (triệu đồng) bác An phải chi trả (làm tròn đến hàng phần mười).



**Lưu ý:** Khoảng cách giữa thanh ngang và mặt sàn là độ dài đoạn thẳng nối một điểm thuộc thanh ngang đến hình chiếu của điểm đó trên mặt sàn.

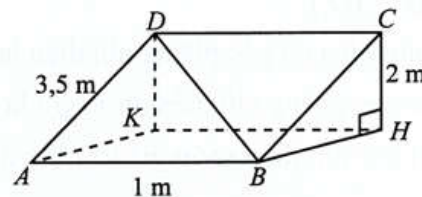
**Câu 22. (THPT Sào Nam - Quảng Nam 2025)** Công ty sữa cần làm các lon đựng sữa hình trụ có thể tích  $800\text{ cm}^3$  (lon sữa có nắp và bỏ qua việc gấp mí). Để chi phí vật liệu (thiếc) làm hộp sữa nhỏ nhất, cần thiết kế hộp sữa có bán kính bao nhiêu  $cm$ ? (chính xác đến hàng phần trăm)

**Câu 23. (THPT Trục Ninh - Nam Định 2025)** Một mô hình trang trí có dạng là hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ , cạnh bằng  $10m$  (như hình vẽ). Người ta cần nối một đường dây điện đi từ điểm  $E$  (là trung điểm của  $CD$ ) đi qua điểm  $M$  thuộc cạnh  $AD$ , đi tiếp qua điểm  $N$  thuộc cạnh  $AA'$  rồi tới điểm  $B'$ . Biết độ dài đoạn dây điện bằng  $25m$ . Tính độ dài đoạn  $MN$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



**Câu 24. (Sở Ninh Bình 2025)** Kim tự tháp kính Louvre là một kim tự tháp được xây bằng kính và kim loại nằm ở giữa sân Napoléon của bảo tàng Louvre, Paris, Pháp. Kim tự tháp kính Louvre có dạng hình chóp tứ giác đều cao  $20,6m$ , góc giữa cạnh bên và mặt đáy xấp xỉ  $39^\circ 46' 22''$ . Thể tích của kim tự tháp đó bằng bao nhiêu mét khối? (làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng đơn vị).

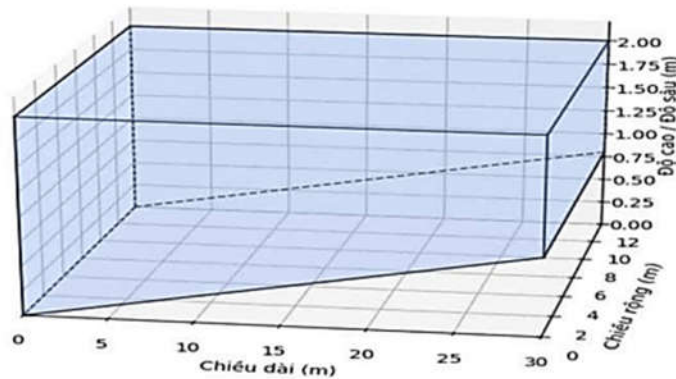
**Câu 25. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh 2025)** Một tấm ván hình chữ nhật  $ABCD$  được dùng làm mặt phẳng nghiêng để kéo một vật lên khỏi hố sâu  $2m$ . Cho biết  $AB = 1m$ ,  $AD = 3,5m$ . Tính góc (theo đơn vị độ) giữa đường thẳng  $BD$  và đáy hố. (Làm tròn đến hàng phần mười)



**Câu 26. (Sở Bắc Ninh 2025)** Một hộp quà có dạng khối hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình vuông,  $BD = 2dm$ , số đo của góc nhị diện  $[A', BD, A]$  bằng  $30^\circ$ . Nếu các mặt của vỏ hộp quà đó có độ dày bằng nhau và bằng  $0,6cm$  thì phần viền bên trong của hộp quà đó có thể tích bằng bao nhiêu  $cm^3$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



- Câu 27. (Sở Nghệ An 2025)** Một bể bơi với mặt nước khi đầy có dạng hình chữ nhật với chiều rộng  $14m$  và chiều dài  $30m$ . Các thành bể xung quanh thẳng đứng và đáy là một mặt phẳng nghiêng. Chiều sâu tại một đầu bể là  $1,2m$  và tăng dần đều đến  $2,0m$  ở đầu kia của bể (xem hình vẽ). Ban đầu bể không chứa nước. Người ta sử dụng một máy bơm công suất lớn để bơm nước vào bể với tốc độ không đổi là  $42m^3 / \text{giờ}$ . Hỏi sau bao nhiêu giờ thì máy bơm bơm đầy bể nước?

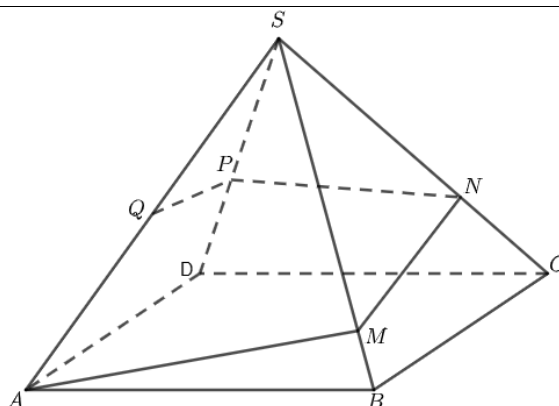


- Câu 28. (Sở Thái Bình 2025)** Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích  $330 \text{ ml}$ . Tìm bán kính của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimet và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).
- Câu 29. (Liên trường THPT Ninh Bình 2025)** Độ dốc của mái nhà (mặt sân, con đường thẳng,...) là tang của góc tạo bởi mái nhà (mặt sân, con đường thẳng,...) đó với mặt phẳng nằm ngang. Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều, biết rằng diện tích để lát tất cả các mặt của kim tự tháp (gồm cả mặt đáy) bằng  $80500 \text{ (m}^2\text{)}$  và độ dốc của mặt bên kim tự tháp bằng  $\frac{49}{45}$ . Chiều cao của kim tự tháp là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng đơn vị) ?

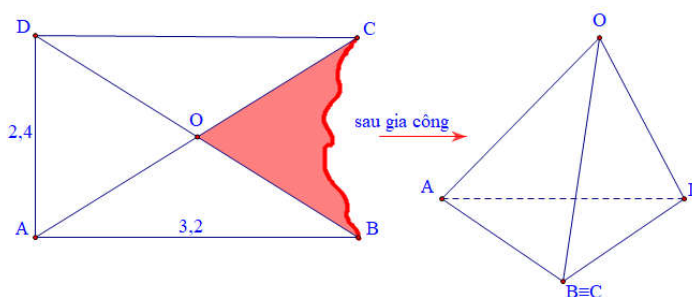


- Câu 30. (Sở Bắc Ninh 2025)** Đèn trang trí ở công viên có dạng hình chóp tứ giác đều. Cạnh bên có chiều dài  $4m$ , góc ở đỉnh của mặt bên bằng  $15^\circ$ . Ban tổ chức muốn trang trí đèn Led một vòng quanh hình chóp từ vị trí  $A$  đến vị trí  $Q$  là trung điểm của  $SA$  (tham khảo hình vẽ). Biết chi phí để lắp  $1m$  đèn Led có giá  $200\,000$  đồng. Hỏi chi phí thấp nhất để lắp đèn Led bằng bao nhiêu nghìn đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).





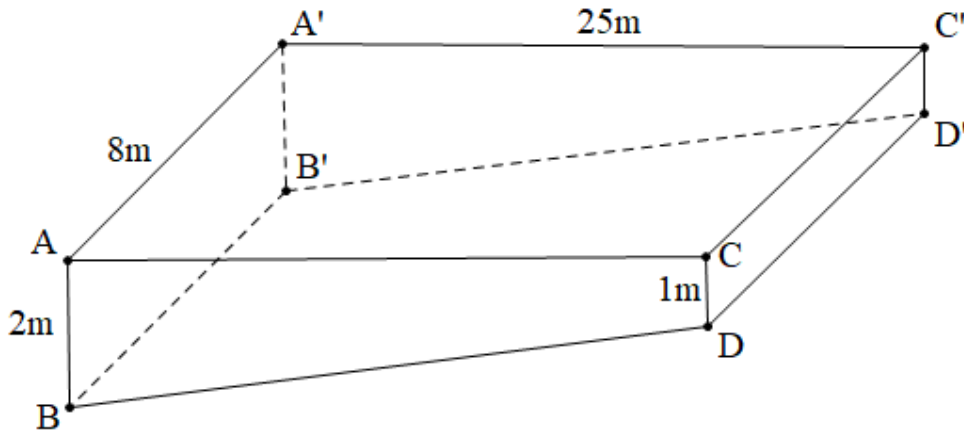
- Câu 31. (Sở Thanh Hóa 2025)** Trên công trường xây dựng, một công nhân muốn tạo ra một dụng cụ để đựng vật liệu lỏng từ một tấm thép hình chữ nhật  $ABCD$  tâm  $O$  có  $AB = 3,2m$ ,  $AD = 2,4m$ . Do tấm thép bị hỏng một phần (tham khảo hình vẽ) nên người đó cắt bỏ tam giác  $OBC$  và hàn mép  $OB, OC$  với nhau để thu được một hình tứ diện  $OABD$  (không có mặt  $ABD$ ). Dụng cụ này sẽ được vùi đất xung quanh sao cho đỉnh  $O$  quay xuống và mặt  $ABD$  hướng lên trên, khi đựng đầy vật liệu lỏng thì phần không gian trong lòng dụng cụ hoàn toàn bị lấp đầy. Tính thể tích của vật liệu lỏng được đựng đầy trong dụng cụ. (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục của đơn vị  $m^3$  và xem độ dày của tấm thép không đáng kể)



## ĐÁP ÁN THAM KHẢO

### Thực tế

- Câu 1. (Sở Thái Nguyên 2025)** Mặt bể bơi của một dự án chung cư cao cấp có dạng một hình chữ nhật với chiều dài  $25m$  và chiều rộng  $8m$ . Bể bơi sâu  $1m$  ở bên đầu nông và sâu  $2m$  bên đầu sâu. Biết hai đầu nông, sâu thuộc hai bên theo chiều dài của bể bơi (tham khảo hình vẽ minh họa). Ban đầu bể không có nước, nước bắt đầu được bơm vào bể lúc 7 giờ sáng với tốc độ  $1m^3$  mỗi phút. Vào lúc 8 giờ 4 phút sáng thì mực nước dâng lên với tốc độ  $\frac{1}{a} m / \text{phút}$ . Giá trị của  $a$  bằng bao nhiêu?



### Lời giải

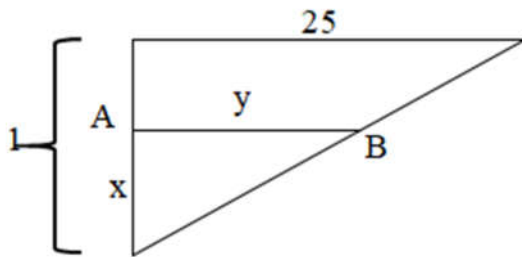
**Đáp án:** 160.

Bể bơi gồm 2 phần:

+) Phần 1: Khối hộp chữ nhật có 3 cạnh là 8; 25; 1  $\Rightarrow V_1 = 200 m^3$

+) Phần 2: Khối lăng trụ tam giác có kích thước là 1; 25; 8  $\Rightarrow V_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 25 \cdot 8 = 100 m^3$

Tại thời điểm 8 giờ 4 phút sáng, giả sử mực nước cao  $x(m)$  và rộng  $y(m)$



Ta có:  $\frac{x}{1} = \frac{y}{25} \Rightarrow y = 25x$

Thể tích nước là  $V = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot 8 = 64 \Leftrightarrow 4x \cdot 25x = 64 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$

Khi đó  $y = 25x = 20$

Diện tích mặt nước là:  $S = y \cdot 8 = 160$

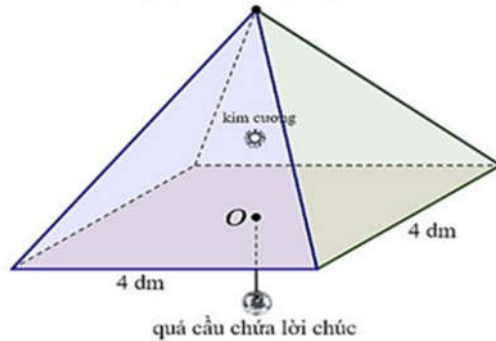
Do tốc độ nước dâng lên tỉ lệ nghịch với diện tích mặt nước nên ta có

$\frac{1}{a} \cdot S = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{S} = \frac{1}{160} \Rightarrow a = 160.$

**Câu 2. (THPT Lê Thánh Tông - Nguyễn Khuyến 2025)** Vào ngày lễ tình nhân, Ronaldo đã tặng cho cô bạn gái Georgina một viên kim cương vô cùng giá trị. Viên kim cương nằm trong một gói quà độc đáo có dạng hình chóp tứ giác đều với cạnh đáy bằng 4dm, vị trí đặt kim cương là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp đó.



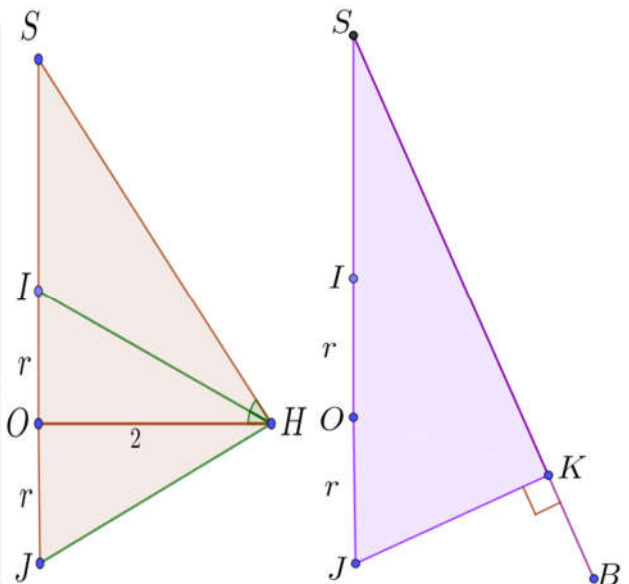
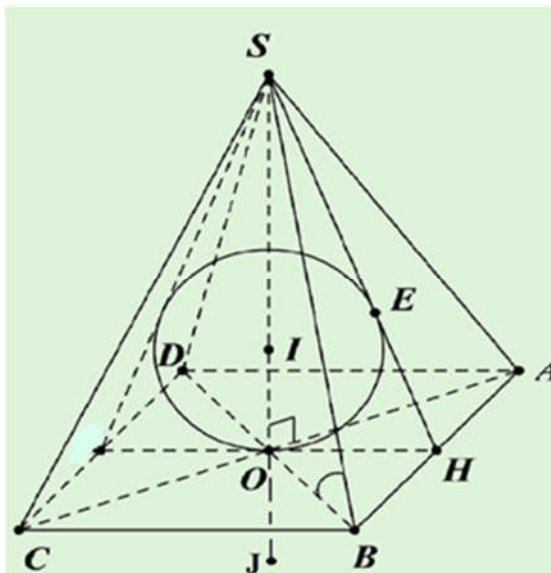
Hộp quà hình chóp tứ giác đều



Từ vị trí tâm  $O$  của đáy hình chóp, có một sợi dây dùng để treo một quả cầu nhỏ, bên trong quả cầu đó chứa những lời chúc có cánh của huyền thoại bóng đá dành cho người tình. Gói quà được treo cân bằng trong căn phòng sao cho đỉnh hình chóp ở vị trí cao nhất và đáy hình chóp song song với mặt đất; khi đó viên kim cương và quả cầu đối xứng nhau qua  $O$ ; đồng thời tâm quả cầu cách đều tất cả các cạnh hình chóp. Hỏi gói quà hình chóp đều đó có thể tích bao nhiêu dm khối (làm tròn đến hàng đơn vị)?

## Lời giải

**Đáp án: 9.**



Gói quà hình chóp tứ giác đều được mô tả như hình vẽ trên với  $SO \perp (ABCD)$ , giả sử  $SO = h$ .

Gọi  $I$  là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp, bán kính mặt cầu bằng  $r$ ,  $H$  là trung điểm của  $AB$ .

Do  $ABCD$  là hình vuông, theo đề ta có:  $AB = 4, OH = HB = 2, OI = OJ = r$ .

Ta có:  $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp OH \Rightarrow SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{h^2 + 4}$ .

Lại có:  $SH \perp AB \Rightarrow SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \sqrt{h^2 + 4 + 4} = \sqrt{h^2 + 8}$ .

Do  $IE = IO = r$  nên  $HI$  là tia phân giác của  $\widehat{SHO}$ , suy ra:  $\frac{IS}{IO} = \frac{HS}{HO} \Rightarrow \frac{h-r}{r} = \frac{\sqrt{h^2+4}}{2}$ .

Từ đó ta có phương trình (1):  $(rh)^2 + 8rh = 4h^2$ .

Ta có:  $\begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp OH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOH)$ , mà  $JH \subset (SOH) \Rightarrow AB \perp JH$ .

Lại có:  $OH \perp IJ$  tại  $O$  là trung điểm của  $IJ \Rightarrow HJ = HI = \sqrt{4+r^2}$ .

Khi đó:  $d(J, AB) = JH = \sqrt{4+r^2}$ .

Dựng  $JK \perp SB$ .

Theo đề ta có:  $d(J, AB) = d(J, SB) \Rightarrow d(J, SB) = JK = \sqrt{4+r^2}$ .

Ta gọi  $BH, BK$  là 2 tiếp tuyến của mặt cầu tâm  $J$ , bán kính  $JK, JH$ . Khi đó  $BK = BH = 2$ .

Ta có:  $SK = SB - BK = \sqrt{h^2+8} - 2$ .

Xét tam giác  $SKJ$  vuông tại  $J$  ta có:

$$SJ^2 = JK^2 + SK^2 \Leftrightarrow (r+h)^2 = r^2 + 4 + (\sqrt{h^2+8} - 2)^2 \Leftrightarrow 8 - 2\sqrt{h^2+8} = rh \Rightarrow h^2 = \frac{(8-rh)^2}{4} - 8.$$

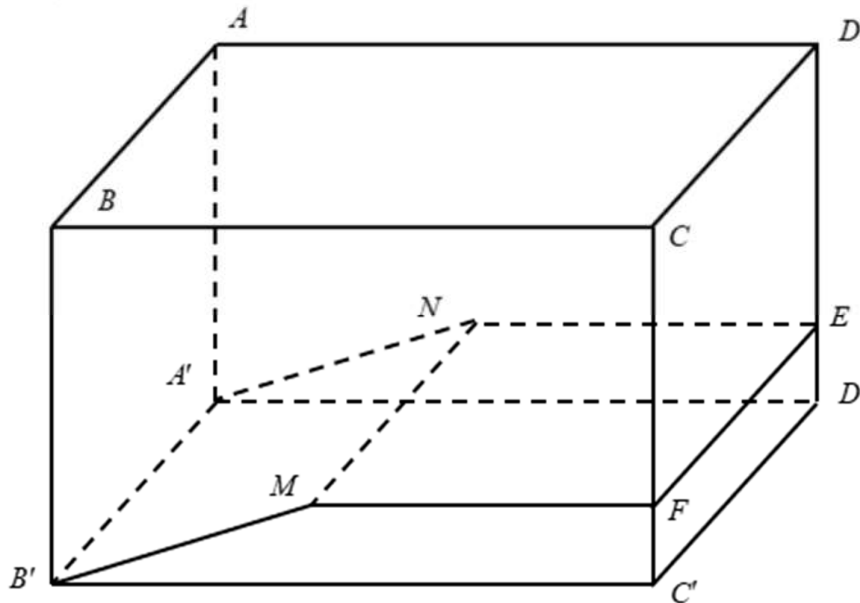
Đặt  $t = rh$ , từ phương trình (1) ta có:

$$t^2 + 8t = 4 \cdot \left( \frac{(8-t)^2}{4} - 8 \right) \Rightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{(8-t)^2}{4} - 8} = \frac{2\sqrt{7}}{3}.$$

Khi đó thể tích khối chóp:  $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{32\sqrt{7}}{9} \approx 9$ .

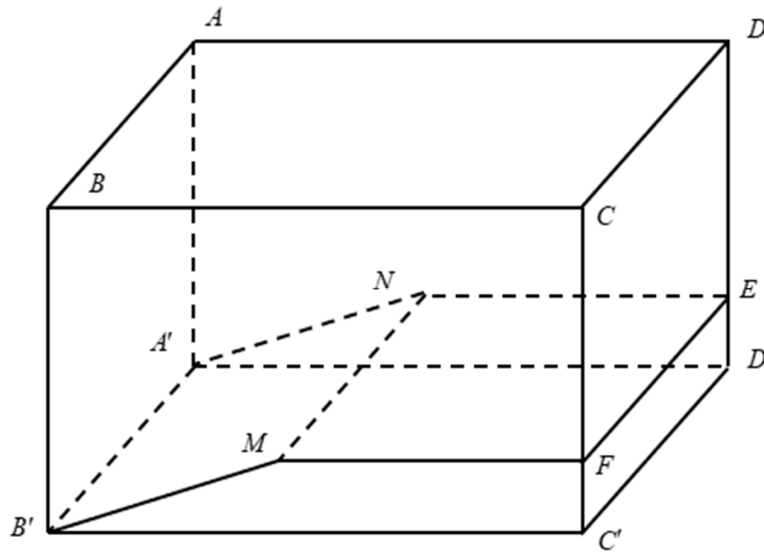
Vậy gói quà hình chóp đều đó có thể tích gần bằng 9 dm khối.

**Câu 3. (Sở Yên Bái 2025)** Một bể bơi ban đầu có dạng hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$ . Sau đó người ta làm lại mặt đáy như hình vẽ. Biết rằng  $A'B'MN$  và  $MNEF$  là các hình chữ nhật,  $(MNEF) \parallel (A'B'C'D')$ ,  $AB = 10\text{ m}$ ,  $AD = 30\text{ m}$ ,  $AA' = 20\text{ m}$ ,  $MF = DE = 17\text{ m}$ . Tính tỉ số thể tích của bể sau khi làm lại mặt đáy với thể tích của bể lúc ban đầu (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

Đáp án: 0,88.



Ta có thể tích bể bơi ban đầu là  $V = AB \cdot AD \cdot AA' = 10 \cdot 30 \cdot 20 = 6000 \text{ m}^3$ .

Ta có phần đáy bể làm lại có dạng khối lăng trụ đứng  $A'NED'.B'MFC'$  có đáy là hình thang vuông.

Chiều cao bằng  $AB = 10 \text{ m}$ ,  $FC' = ED' = DD' - DE = 20 - 17 = 3 \text{ m}$

Diện tích đáy là hình thang vuông  $S_{B'MFC'} = (MF + B'C') \cdot FC' \cdot \frac{1}{2}$   
 $= (17 + 30) \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 70,5 \text{ m}^2$

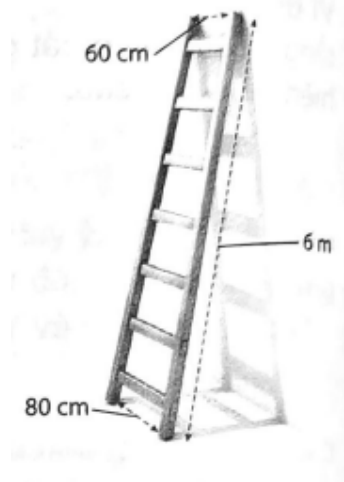
Thể tích khối lăng trụ đứng  $A'NED'.B'MFC'$  bằng

$$V_1 = S_{B'MFC'} \cdot A'B' = 70,5 \cdot 10 = 705 \text{ m}^3$$

Thể tích bể sau khi làm lại bằng  $V' = 6000 - 705 = 5295 \text{ m}^3$

$$\text{Vậy } \frac{V'}{V} = \frac{5295}{6000} \approx 0,88.$$

**Câu 4. (THPT Đô Lương 1 - Nghệ An 2025)** Một chiếc thang có dạng hình thang cân có chiều dài thanh bên 6 m. Khoảng cách hai chân thang là 80 cm và hai ngọn thang là 60 cm. Thang được dựa vào bờ tường như hình bên. Tính góc giữa đường thẳng chân tường và thanh bên của hình thang. (Đơn vị độ, làm tròn đến hàng đơn vị)

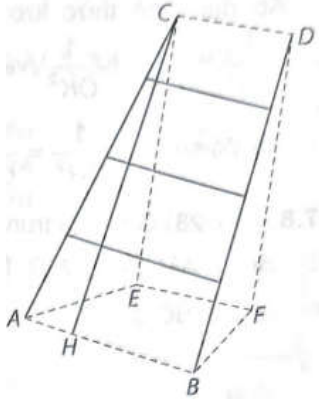


**Lời giải**

**Đáp án: 89**

Giả sử người quan sát không nhìn thấy vật khi và chỉ khi người quan sát không nhìn thấy điểm  $N$ , hay tấm bìa cứng che khuất điểm  $N$ . Khi đó, đoạn thẳng  $MN$  cắt tấm bìa cứng tại điểm  $I$  thuộc mặt phẳng  $Oxy$ .





Gọi  $A, B$  là hai điểm tại hai vị trí chân thang và  $C, D$  là hai điểm tại hai vị trí ngọn thang,  $EF$  là đường chân tường.

Ta có  $EF \parallel AB$  nên  $(EF, AC) = (AB, AC) = \widehat{BAC}$ .

Kẻ  $CH \perp AB$ , khi đó  $AH = \frac{AB - CD}{2} = 10(\text{cm}) = 0,1(\text{m})$ .

Trong tam giác vuông  $ACH$  vuông tại  $H$  có  $\cos \widehat{CAH} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{60} \Rightarrow \widehat{CAH} \approx 89^\circ$ .

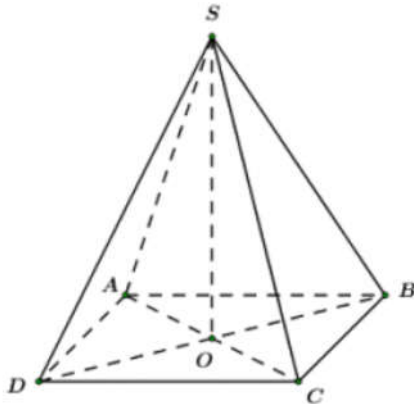
Vậy góc tạo giữa đường thẳng chân tường và thanh bên của thang bằng khoảng  $89^\circ$ .

**Câu 5. (Sở Đà Nẵng 2025)** Một chiếc lều hình chóp có đáy là hình vuông, mỗi cạnh dài  $200\text{cm}$ . Đỉnh lều nằm thẳng đứng phía trên tâm của hình vuông và chiều cao của chiếc lều là  $206\text{cm}$ . Người ta dùng 4 cọc bằng nhau nối từ 4 góc của đáy đến đỉnh lều để dựng lều. Chiều dài tối thiểu của mỗi cây cọc là bao nhiêu centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của  $\text{cm}$ )?

**Lời giải**

**Đáp số:**  $250\text{cm}$ .

Ta thấy chiếc lều có hình dạng là hình chóp tứ giác đều (như hình vẽ).



$$OC = \frac{AB \cdot \sqrt{2}}{2} = 100\sqrt{2}.$$

Tam giác  $SOC$  vuông ở  $O$  có:  $SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{(206)^2 + (100\sqrt{2})^2} \approx 250\text{cm}$ .

**Câu 6. (THPT Hương Hóa - Quảng Trị 2025)** Số đo góc nhị diện hợp bởi nửa mặt phẳng chứa màn hình và nửa mặt phẳng chứa bàn phím của

laptop gọi là độ mở của laptop. Nghiên cứu tư thế ngồi sử dụng laptop để đảm bảo sức khỏe và hiệu quả công việc các chuyên gia khuyến cáo tư thế ngồi như hình vẽ 1. Khi đó laptop để trên giá đỡ có độ mở màn hình như hình vẽ 2. Kích thước các cạnh đo được  $AB = AC = 23\text{cm}$ ;  $BC = 39\text{cm}$ . Tính độ mở của laptop (đơn vị: độ, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Hình vẽ 1



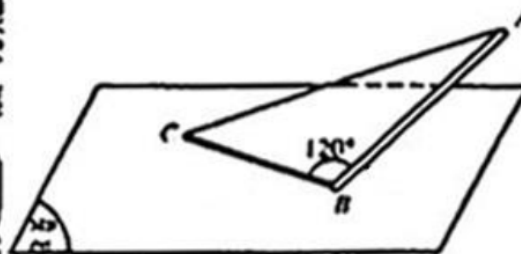
Hình vẽ 2

**Lời giải****Trả lời: 116**Áp dụng định lý cô-sin cho tam giác  $ABC$  tại đỉnh  $A$ :

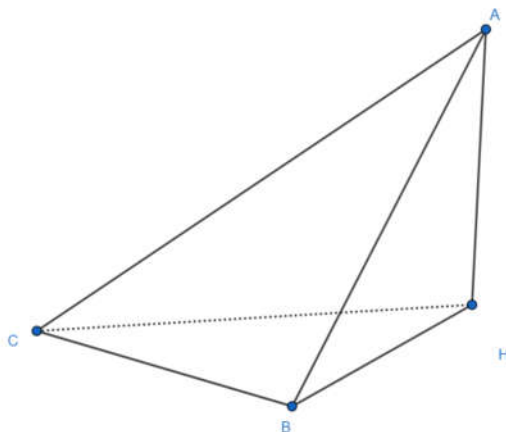
$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{23^2 + 23^2 - 39^2}{2 \cdot 23 \cdot 23} = \frac{529 + 529 - 1521}{2 \cdot 529} = \frac{-463}{1058} \approx -0,43755.$$

Suy ra  $\widehat{BAC} = \arccos(-0,43755) \approx 116^\circ$ .Vậy độ mở của laptop (góc nhị diện) là  $116^\circ$ .

**Câu 7. (Sở Bình Thuận 2025)** Bánh tráng sau khi tráng, người ta sẽ đặt chúng trên tấm liếp tre rồi phơi nắng. Trên mặt đất phẳng, người ta dựng tấm liếp tre ( xem như đoạn  $AB$  ) có chiều dài bằng  $3m$  và tạo với mặt đất một góc  $60^\circ$ . Tại một thời điểm dưới ánh sáng mặt trời, bóng  $BC$  của tấm liếp tre ( đoạn thẳng  $BC$  ) trên mặt đất dài  $3,6m$  và tạo với tấm liếp một góc bằng  $120^\circ$  ( tức là  $\widehat{ABC} = 120^\circ$  ) ( hình vẽ bên dưới).



Góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên bằng bao nhiêu độ? (làm tròn tới hàng đơn vị).

**Lời giải****Đáp số: 27**Gọi hình chiếu của điểm  $A$  lên mặt đất là  $H$ .

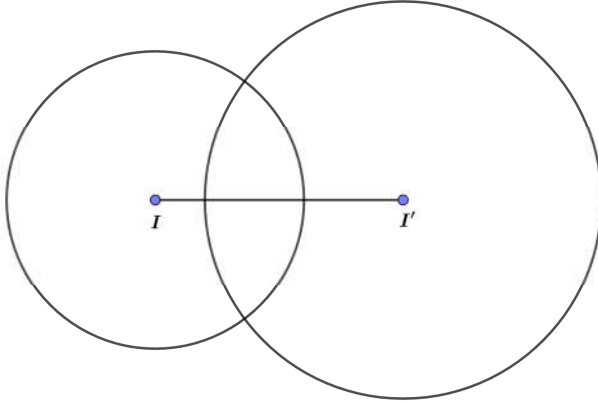
Ta thấy rằng góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm trong đề bài chính là góc  $\widehat{HCA}$ .

Từ đầu bài ta có  $AB = 3$ ;  $BC = 3,6$ ;  $\widehat{ABC} = 120^\circ$ ;  $\widehat{ABH} = 60^\circ$ .

$$\text{Tính được } AH = AB \cdot \sin \widehat{ABH} = \frac{3\sqrt{3}}{2}; \quad AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC}} = \frac{3\sqrt{91}}{5}.$$

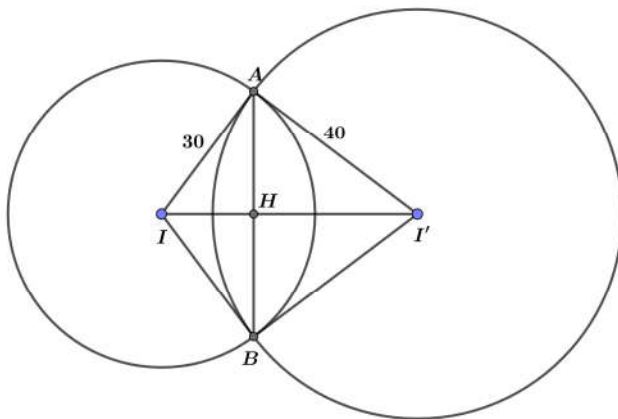
$$\text{Do tam giác } ACH \text{ vuông ở } H \text{ nên ta có } \sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{91}}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{91}} \Rightarrow \widehat{ACH} \approx 27^\circ$$

**Câu 8. (Sở Lào Cai 2025)** Người ta làm một sân khấu có hình dạng hai hình tròn giao nhau như hình vẽ. Bán kính hai hình tròn lần lượt là 30 m và 40 m. Khoảng cách giữa tâm hai hình tròn là 50 m. Tính diện tích phần giao nhau của hai hình tròn theo  $m^2$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



**Lời giải**

**Đáp án: 664**



Tam giác  $AI'I'$  có  $AI = 30$ ;  $AI' = 40$ ;  $II' = 50$  nên nó vuông tại  $A$ .

$$\text{Ta có: } \cos \widehat{AI'I} = \frac{AI'}{II'} = \frac{4}{5} \Rightarrow \widehat{AI'B} = 2 \cdot \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

Diện tích hình viên phân tạo bởi dây cung  $AB$  của đường tròn  $(I'; 40)$  bằng diện tích hình quạt  $AI'B$  trừ đi diện tích tam giác  $AI'B$  và bằng:

$$S_1 = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360} - S_{\triangle AI'B} = \frac{\pi \cdot 40^2 \cdot 2 \arccos\left(\frac{4}{5}\right)}{360} - S_{\triangle AI'B}$$

Tương tự ta có thể tính diện tích viên phân tạo bởi cung  $AB$  của đường tròn  $(I; 30)$  bằng diện tích hình quạt  $AIB$  trừ đi diện tích tam giác  $AIB$  và bằng:

$$S_2 = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360} - S_{\triangle AIB} = \frac{\pi \cdot 30^2 \cdot 2 \arccos\left(\frac{3}{5}\right)}{360} - S_{\triangle AIB}$$

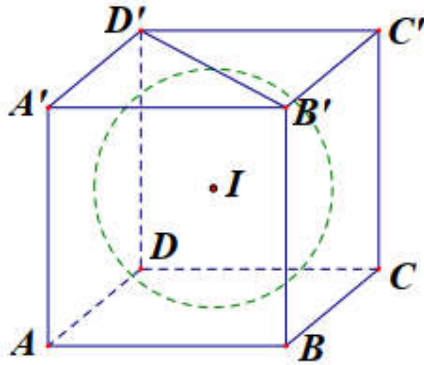
Như vậy diện tích phần cần tính là tổng diện tích của 2 hình viên phân:

$$\begin{aligned}
 S &= S_1 + S_2 = \frac{\pi \cdot 40^2 \cdot 2 \arccos\left(\frac{4}{5}\right)}{360} + \frac{\pi \cdot 30^2 \cdot 2 \arccos\left(\frac{3}{5}\right)}{360} - S_{AIBI'} \\
 &= \frac{\pi \cdot 40^2 \cdot 2 \arccos\left(\frac{4}{5}\right)}{360} + \frac{\pi \cdot 30^2 \cdot 2 \arccos\left(\frac{3}{5}\right)}{360} - 2 \cdot S_{AI'I} \\
 &= \frac{\pi \cdot 40^2 \cdot 2 \arccos\left(\frac{4}{5}\right)}{360} + \frac{\pi \cdot 30^2 \cdot 2 \arccos\left(\frac{3}{5}\right)}{360} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 \approx 664(m^2)
 \end{aligned}$$

**Câu 9. (Sở Quảng Ninh 2025)** Cho một hộp quả hình lập phương có cạnh bằng 10 cm. Trong hộp có một quả cầu pha lê lớn đặc được đặt vừa khít vào hộp sao cho quả cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hộp. Ở 8 góc của hình lập phương, có 8 quả cầu pha lê nhỏ cùng tiếp xúc với các mặt hộp và tiếp xúc với quả cầu lớn. Đồ epoxy resin (một loại keo tổng hợp trong suốt dùng trong thủ công mỹ nghệ) vào đây hộp để trang trí. Tính thể tích phần keo cần đổ, theo đơn vị lít (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**Lời giải**

Đáp án: 0,4



Gọi hộp quả hình lập phương đã cho là  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  và  $I$  là tâm của quả cầu pha lê lớn như hình minh họa.

Bán kính của quả cầu pha lê lớn:  $R = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$ .

Gọi  $r \text{ cm}$  là bán kính của mỗi quả cầu pha lê nhỏ.

Ta xét quả cầu pha lê nhỏ gần đỉnh  $A$  nhất, và gọi tâm quả cầu đó là  $K$ .

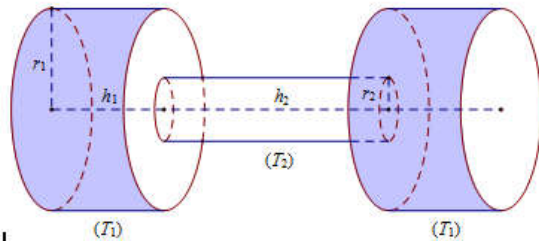
Nhận xét:  $I, K, A$  thẳng hàng.

Ta có:  $IK = R + r = 5 + r$ ;  $IA = \frac{1}{2} AC' = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ ;  $KA = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sqrt{3} = r\sqrt{3}$ .

Khi đó:  $IK + KA = IA \Leftrightarrow (5 + r) + r\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \Leftrightarrow r = \frac{5\sqrt{3} - 5}{1 + \sqrt{3}} = 10 - 5\sqrt{3} \text{ cm}$ .

Vậy thể tích phần keo cần đổ là:  $V = 10^3 - \left( \frac{4}{3} \pi R^3 - 8 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \right) \approx 396 \text{ cm}^3 \approx 0,4 \text{ lít}$ .

**Câu 10. (Sở Vũng Tàu 2025)** Một chiếc tạ tay có hình dạng gồm 3 khối trụ, trong đó hai khối trụ ở hai đầu bằng nhau và khối trụ làm tay cầm ở giữa. Gọi khối trụ làm đầu tạ là  $(T_1)$  và khối trụ làm tay cầm là  $(T_2)$  lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là  $r_1, h_1, r_2, h_2$  thỏa mãn  $r_1 = 4r_2, h_1 = \frac{1}{2} h_2$  (tham khảo hình vẽ bên).



Biết rằng thể tích của khối trụ tay cầm  $(T_2)$  bằng  $30\text{cm}^3$  và chiếc tạ làm bằng inox có khối lượng riêng là  $D = 7,7\text{g/cm}^3$ . Hỏi khối lượng của chiếc tạ tay bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

### Lời giải

Đáp số: 3,93.

$$\text{Thể tích khối trụ } T_2 \text{ là } V_2 = \pi r_2^2 h_2 = 30\text{cm}^3 \Rightarrow h_2 = \frac{30}{\pi r_2^2}$$

$$\text{Ta có } h_1 = \frac{1}{2} h_2 \Rightarrow h_1 = \frac{15}{\pi r_2^2}$$

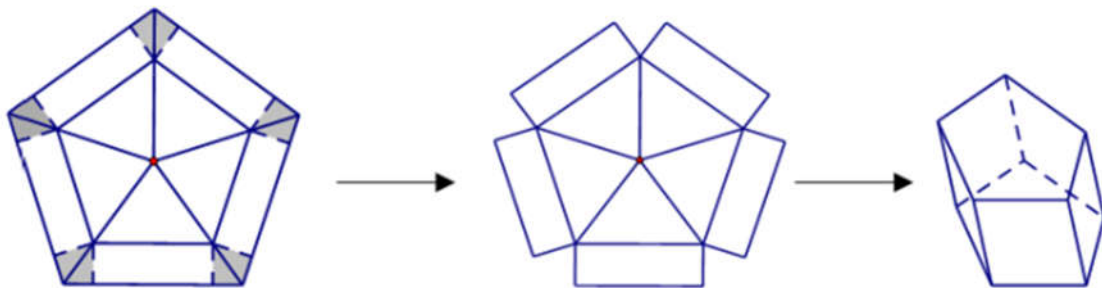
$$\text{Thể tích khối trụ } T_1 \text{ là } V_1 = \pi r_1^2 h_1$$

$$\text{Mà } r_1 = 4r_2 \text{ và } h_1 = \frac{15}{\pi r_2^2} \text{ nên } V_1 = \pi \cdot 16r_2^2 \cdot \frac{15}{\pi r_2^2} = 240\text{cm}^3$$

$$\text{Tổng thể tích tạ tay là } V = 2V_1 + V_2 = 2 \cdot 240 + 30 = 510\text{cm}^3$$

$$\text{Khối lượng tạ tay là } m = V \cdot D = 510 \cdot 7,7 = 3927\text{g} = 3,927\text{kg} \approx 3,93\text{kg}.$$

- Câu 11.** (THPT Mai Trúc Loan - Hà Tĩnh 2025) Cho một tấm tôn hình một ngũ giác đều có cạnh bằng  $6\text{dm}$ . Người ta thực hiện các bước sau:
- Bước 1: Cắt ở mỗi đỉnh của ngũ giác đều đó hai tam giác vuông bằng nhau.
- Bước 2: Cắt theo nét đứt đoạn để thu được hình hợp bởi một ngũ giác đều và năm hình chữ nhật.
- Bước 3: Gấp các hình chữ nhật để tạo thành khối lăng trụ ngũ giác đều (tham khảo hình vẽ).

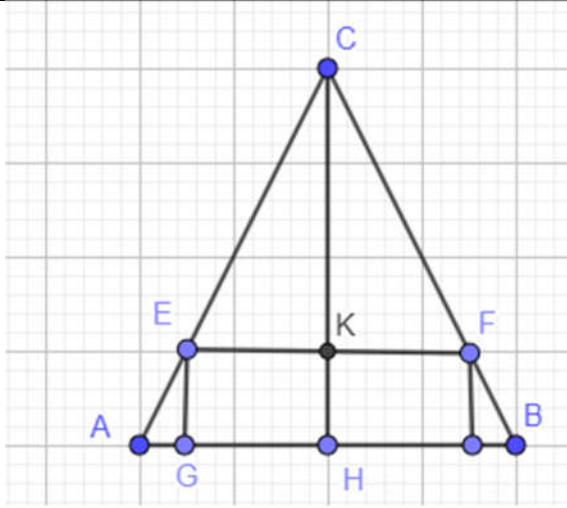


Thể tích của khối lăng trụ lớn nhất bằng bao nhiêu đề-xi-mét khối? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

### Lời giải

**Đáp án: 37,9**





Ngũ giác đều được chia thành năm tam giác cân bằng nhau. Ta đặt một tam giác là  $\triangle ABC$  cân tại  $C$  (như hình vẽ).

Xét  $\triangle ABC$  cân tại  $C$  có:  $\widehat{ACB} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \Rightarrow \widehat{CAB} = 54^\circ$ . Kẻ đường cao  $CH$  của  $\triangle ABC$ . Khi

đó  $AB = 6$ ,  $AH = BH = 3$ .

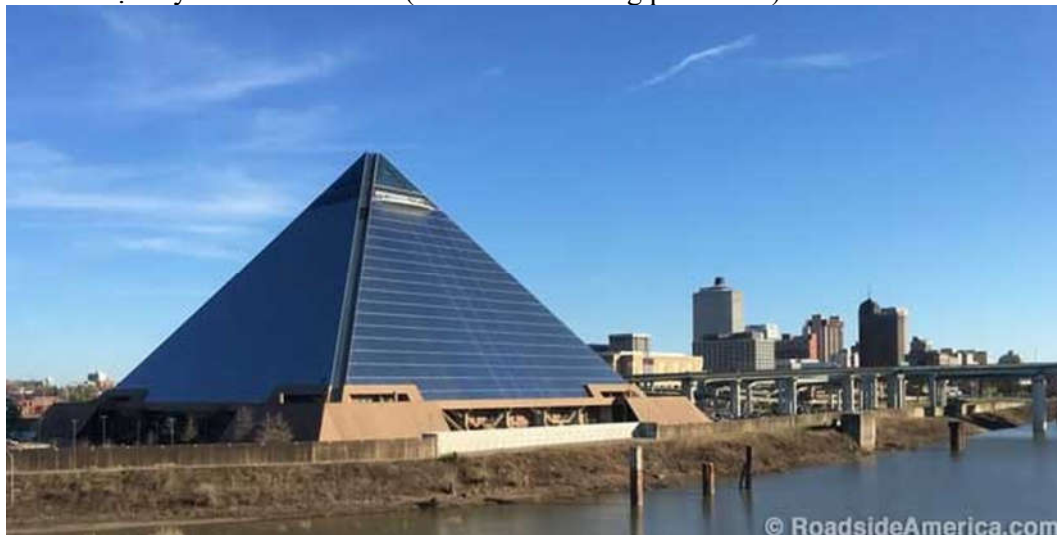
Đặt  $AG = x$  ( $0 < x < 3$ ). Khi đó  $HK = EG = x \tan 54^\circ$ ,  $EF = 6 - 2x$  và

$$CK = CH - HK = 3 \cdot \tan 54^\circ - x \tan 54^\circ = (3 - x) \tan 54^\circ.$$

Diện tích đáy của lăng trụ:  $S = 5S_{\triangle AEF} = 5 \cdot \frac{1}{2} (6 - 2x) \cdot (3 - x) \tan 54^\circ = 5(x - 3)^2 \cdot \tan 54^\circ$ .

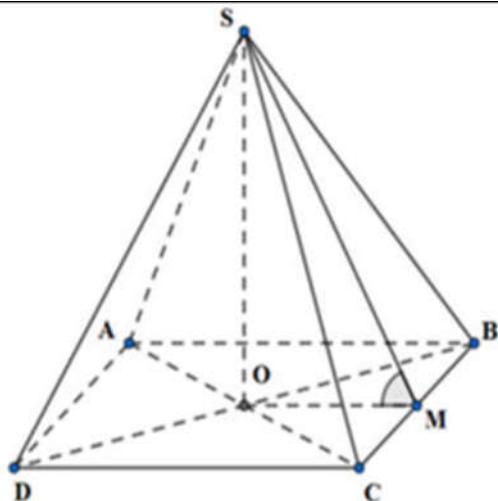
Thể tích của khối lăng trụ:  $V = S \cdot h = 5x(x - 3)^2 \cdot \tan^2 54^\circ$  ( $0 < x < 3$ ) đạt giá trị lớn nhất bằng  $20 \tan^2 54^\circ \approx 37,9$  tại  $x = 1$ .

**Câu 12.** (THPT Đào Duy Từ - Thanh Hóa 2025) Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao  $98m$  và cạnh đáy  $180m$ . Gọi góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy là  $\alpha$ . Tính  $\tan \alpha$ . (Làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

Đáp án: 1,09.



Kẻ  $SM \perp BC$

Mà  $BC \perp SO$  nên  $BC \perp (SOM)$ . Suy ra  $BC \perp OM$ .

Do đó góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy là  $\widehat{SMO}$ .

Ta có:  $SO = 98$ ;  $OM = \frac{1}{2} \cdot 180 = 90$ .

Suy ra:  $\tan \widehat{SOM} = \frac{SO}{OM} = 1,09$ .

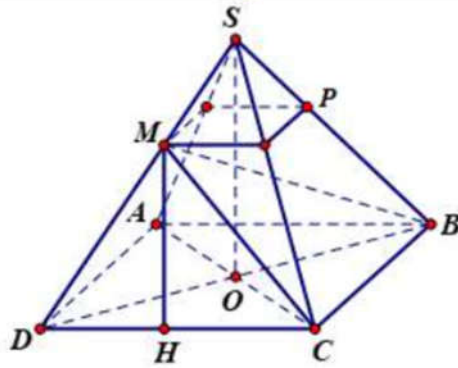
**Câu 13.** (THPT Lý Thường Kiệt - Hà Nội 2025) Một khay đá gồm 6 ngăn nhỏ có dạng là các hình chóp cụt với miệng đáy là hình vuông.



Ta đo được độ dài cạnh đáy nhỏ, cạnh đáy lớn lần lượt bằng  $1\text{ cm}$  và  $3\text{ cm}$  và chiều cao mặt bên bằng  $\sqrt{2}\text{ cm}$ . Tính  $a+b$  biết cosin góc giữa đường chéo của viên đá với cạnh đáy của viên đá có dạng  $\frac{a}{b}$  ( $a, b$  là hai số nguyên tố cùng nhau).

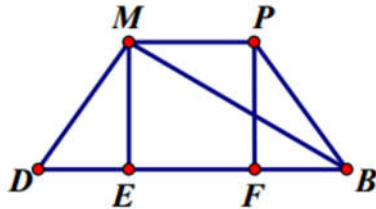
**Lời giải**

**Đáp án:** 5.



Mỗi ngăn đá là một hình chóp cụt có hai đáy là hình vuông, các cạnh bên bằng nhau. Các cạnh bên đồng quy tại  $S$ . Góc giữa các đường chéo với các cạnh đáy bằng nhau nên ta xem đó là góc giữa  $MB$  và  $BC$ . Kẻ  $MH \perp CD$ ,  $H \in CD$ .

Ta có:  $MC = \sqrt{MH^2 + HC^2} = \sqrt{6} \text{ cm}$ ,  $MD = \sqrt{3} \text{ cm}$ ,  $BD = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ .



Gọi  $E$ ,  $F$  lần lượt là hình chiếu của  $M$ ,  $P$  trên  $BD$ . Nên  $ME \perp BD$ ,  $FP \perp BD$

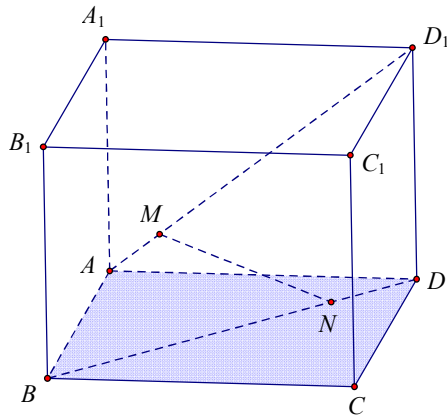
Suy ra:  $\Rightarrow DE = EF = FB = \sqrt{2} \text{ cm}$ .

Khi đó  $ME = \sqrt{MD^2 - DE^2} = 1 \text{ cm} \Rightarrow MB = \sqrt{ME^2 + EB^2} = 3 \text{ cm}$ .

Trong  $\triangle MBC$  có  $\cos \widehat{MBC} = \frac{MB^2 + BC^2 - MC^2}{2 \cdot MB \cdot MC} = \frac{2}{3}$ .

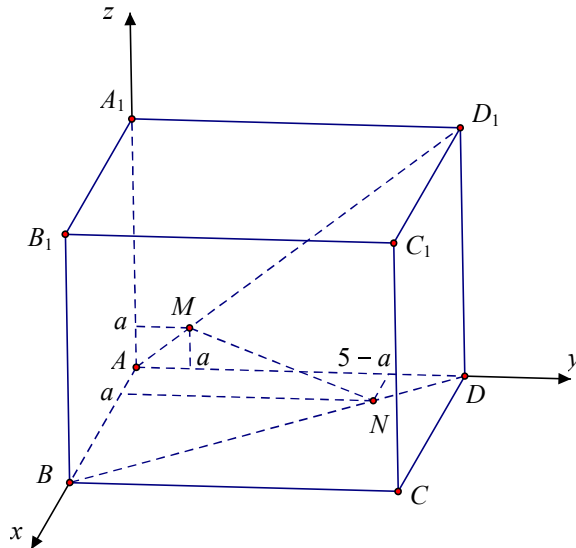
Vậy  $a + b = 2 + 3 = 5$ .

**Câu 14. (Sở Ninh Bình 2025)** Một kỹ sư thiết kế mô hình trang trí cho một sân khấu nổi có dạng hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  với độ dài các cạnh bằng 5 m. Để tạo ra nét độc đáo cho sân khấu, người kỹ sư muốn thiết kế một dàn đèn ánh sáng nổi từ một điểm  $M$  trên đoạn thẳng  $AD_1$  xuống một điểm  $N$  trên đoạn thẳng  $BD$  thỏa mãn  $AM = DN$ . Dàn đèn ánh sáng có chiều dài ngắn nhất là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



**Lời giải**

**Đáp án:** 2,89.



Độ dài của đoạn thẳng  $MN$  chính là chiều dài của dàn đèn.

Đặt  $AM = DN = a\sqrt{2}$  (với  $0 < a < 5$ ). Gắn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  sao cho gốc  $O$  trùng với đỉnh  $A$ , các đỉnh  $B, D, A_1$  lần lượt thuộc các tia  $Ox, Oy, Oz$  như hình vẽ.

Ta có  $M = (0; a; a)$  và  $N = (a; 5-a; 0)$ .

$$MN = \sqrt{(0-a)^2 + [a-(5-a)]^2 + (a-0)^2} = \sqrt{6a^2 - 20a + 25} = \sqrt{6\left(a - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{25}{3}} \geq \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $a = \frac{5}{3}$ .

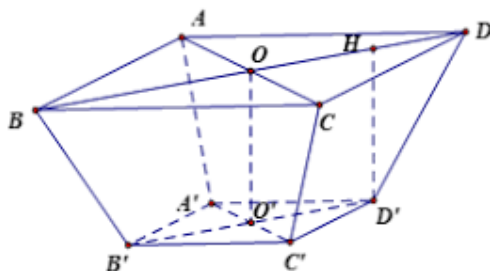
Vậy, độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng  $MN$  cũng chính là độ dài ngắn nhất của dàn đèn là  $\frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2,89$  (m).

**Câu 15. (THPT Triệu Sơn 3 - Thanh Hóa 2025)** Một sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt đều như hình vẽ dưới. Đáy và miệng sọt là các hình vuông có cạnh tương ứng bằng 80 cm và 60 cm. Cạnh bên của sọt dài 50 cm. Tính thể tích của sọt theo đơn vị mét khối, lấy kết quả đến hàng phần trăm.



**Lời giải**

**Đáp án:** 0,24.



Đặt tên các điểm như hình vẽ, khi đó ta có  $AB = 80, A'B' = 60, AA' = DD' = 50$

Diện tích mặt lớn  $S_1 = 80^2$

Diện tích mặt nhỏ  $S_2 = 60^2$

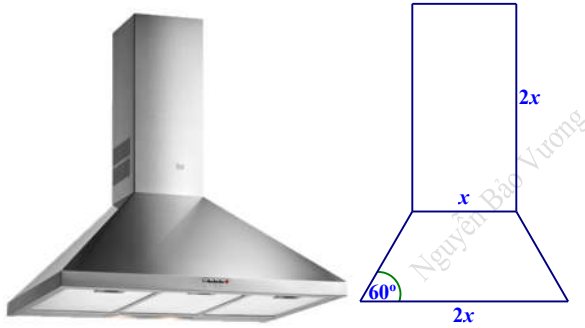
$$BD = 80\sqrt{2}, B'D' = 60\sqrt{2} \Rightarrow DH = \frac{80\sqrt{2} - 60\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

$$\text{Chiều cao } h = D'H = \sqrt{DD'^2 - D'H^2} = \sqrt{50^2 - (10\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{23}$$

Thể tích khối chóp đều là:

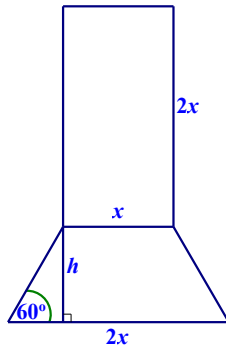
$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2) = \frac{1}{3} \cdot 10\sqrt{23}(80^2 + 80 \cdot 60 + 60^2) \approx 236594 \text{ cm}^3 \approx 0,24 \text{ m}^3$$

**Câu 16. (Cụm trường THPT Hải Dương 2025)** Một ống khói có cấu trúc gồm một khối chóp cắt tứ giác đều có thể tích  $V_1$  và một khối hộp chữ nhật có thể tích  $V_2$  ghép lại với nhau như hình vẽ bên dưới. Cho biết bản vẽ hình chiếu của ống khói với phương chiếu trùng với phương của một cạnh đáy khối chóp cắt, hãy tính tỉ số thể tích  $\frac{V_1}{V_2}$ , kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.



**Lời giải**

**Đáp án:** 1,01.



$$h = \frac{x}{2} \tan 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

$$V_1 = \frac{1}{3}h(x^2 + \sqrt{x^2 \cdot (2x)^2} + (2x)^2) = \frac{7\sqrt{3}}{6}x^3.$$

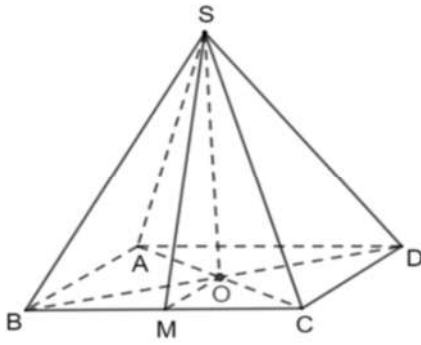
$$V_2 = x \cdot x \cdot 2x = 2x^3.$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7\sqrt{3}}{12} \approx 1,01.$$

**Câu 17. (THPT Kinh Môn - Hải Dương 2025)** Độ dốc của mái nhà là tang của góc tạo bởi mái nhà đó với mặt phẳng nằm ngang. Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều. Biết rằng diện tích để lát tất cả các mặt của kim tự tháp bằng  $80300 \text{ m}^2$  (gồm



mặt bên và đáy) và độ dốc mặt bên kim tự tháp bằng  $\frac{9}{5}$ . Tính chiều cao của kim tự tháp. (Làm tròn đến hàng đơn vị)



**Lời giải**

**Đáp án:** 146.

Đặt  $AB = BC = CD = AD = a$ ,  $SO = h$

Ta có :  $SO \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta SOM$  vuông tại  $O$

$$\tan \widehat{SMO} = \frac{9}{5} = \frac{SO}{MO} \Rightarrow SO = \frac{9}{5} \cdot \frac{a}{2} = \frac{9}{10}a, \text{ ta có } SO^2 + MO^2 = SM^2 \Rightarrow SM = \frac{\sqrt{106}}{10}a$$

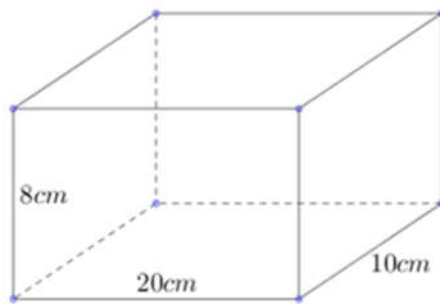
$$S_{\Delta SBC} = S_{\Delta SCD} = S_{\Delta SAD} = S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}SM \cdot BC = \frac{\sqrt{106}}{20}a^2$$

$$\text{Tổng diện tích các mặt là } 4 \cdot \frac{\sqrt{106}}{20}a^2 + a^2 = 80300 \Rightarrow a \approx 162 \Rightarrow SO = \frac{9}{10}a \approx 146.$$

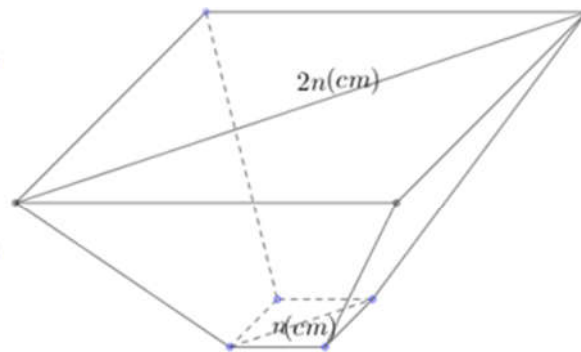
**Câu 18. (Cụm trường THPT Bắc Ninh 2025)** Một chiếc khay đựng đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước: chiều dài  $20\text{ cm}$ , chiều rộng  $10\text{ cm}$ , chiều cao  $8\text{ cm}$  (hình a). Để san bớt nước cho đỡ đầy, người ta đổ nước từ chiếc khay thứ nhất đổ sang chiếc khay thứ hai có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với đáy khay là hình vuông nhỏ có đường chéo dài  $n(\text{ cm})$ , miệng khay là hình vuông

lớn có đường chéo dài  $2n(\text{ cm})$  (hình b). Sau khi đổ, mực nước ở khay thứ hai cao bằng  $\frac{2}{5}$  chiều

cao của khay đó và lượng nước trong khay thứ nhất giảm đi  $\frac{1}{4}$  so với ban đầu. Thể tích của chiếc khay thứ hai theo đơn vị centimet khối có kết quả chính xác đến hàng đơn vị là  $a(\text{ cm}^3)$ . Tổng các chữ số của  $a$  bằng bao nhiêu?



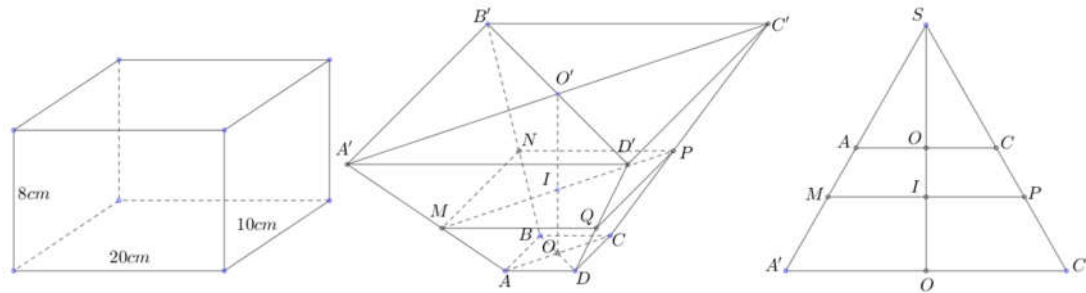
Hình a



Hình b

**Lời giải**

**Đáp án:** 13.



+) Thể tích nước trong khay thứ nhất bằng thể tích của khối hộp chữ nhật với các kích thước: chiều dài  $20\text{cm}$ , chiều rộng  $10\text{cm}$ , chiều cao  $8\text{cm}$

Suy ra thể tích nước là:  $V_1 = 20.10.8 = 1600 \text{ (cm}^3\text{)}$ .

+) Lượng nước trong khay thứ nhất được đổ sang khay thứ hai là  $\frac{1}{4}V_1 = 400 \text{ (cm}^3\text{)}$  (1)

+) Gọi chiều cao của khay nước thứ hai là  $h$  thì chiều cao của mực nước trong khay thứ hai là  $\frac{2}{5}h$ .

Đặt  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$  lần lượt là đáy nhỏ và đáy lớn của khay thứ hai và  $MNPQ$  là mép nước trong khay thứ hai.

Ta có  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2}n^2$  và  $S_{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}(A'C')^2 = 2n^2$

Áp dụng công thức tính thể tích khối chóp cắt, ta tính được thể tích của khay nước thứ hai là

$$V_2 = \frac{1}{3}h \left( \frac{1}{2}n^2 + 2n^2 + \sqrt{\frac{1}{2}n^2 \cdot 2n^2} \right) = \frac{7}{6}h.n^2 \text{ (cm}^3\text{)} \quad (2).$$

+) Gọi  $AA' \cap CC' = S$ , ta có  $\frac{MP}{A'C'} = \frac{SI}{SO} = \frac{7}{10} \Rightarrow MP = \frac{7n}{5}$

$$\text{Suy ra } S_{MNPQ} = \frac{1}{2}MP^2 = \frac{49}{50}n^2$$

Áp dụng công thức tính thể tích khối chóp cắt, ta tính được thể tích của lượng nước trong khay

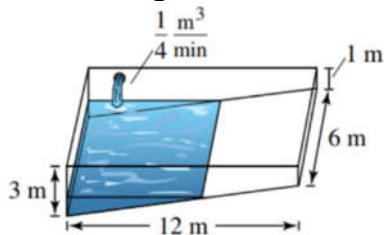
$$\text{nước thứ hai là } V_3 = \frac{1}{3} \left( \frac{2h}{5} \right) \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{49}{50}n^2 + \sqrt{\frac{1}{2}n^2 \cdot \frac{49}{50}n^2} \right) = \frac{109}{375}h.n^2 \text{ (cm}^3\text{)} \quad (3).$$

+) Từ (1) và (3) suy ra  $\frac{109}{375}h.n^2 = 400 \Rightarrow \frac{7}{6}hn^2 = \frac{400.875}{218} \approx 1606 \text{ (cm}^3\text{)}$

Suy ra  $V_2 \approx 1606 \text{ (cm}^3\text{)} \Rightarrow a = 1606$ .

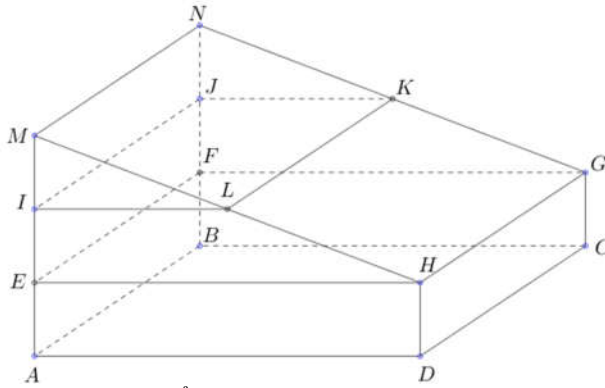
Vậy tổng các chữ số của  $a$  bằng 13.

**Câu 19. (Sở Hà Tĩnh 2025)** Một hồ bơi được chế tạo từ một khối hộp chữ nhật có chiều dài 12 mét, rộng 6 mét, sâu 1 mét ở đầu nông và sâu 3 mét ở đầu sâu (như hình vẽ). Nước được bơm vào hồ bơi với tốc độ 0,25 mét khối mỗi phút. Biết rằng trong bể có 1 mét nước ở đầu sâu. Để lượng nước đạt 75% dung tích bể bơi thì cần bơm trong thời gian bao lâu? (đơn vị tính bằng phút).



**Lời giải**

**Đáp án:** 360



+) Mô hình hoá bể bơi như hình vẽ, với mặt trên của bể là  $ABCD$  và mặt đáy bể là  $MNGH$   
Ta có  $AD = BC = 12(m)$ ,  $AB = CD = 6(m)$ ,  $AM = 3(m)$  và  $DH = 1(m)$

Diện tích của hình thang  $ADHM$  là  $S_1 = \frac{1}{2}(DH + AM) \cdot AD = 24(m^2)$

+) Thể tích bể bơi bằng thể tích khối lăng trụ đứng có đáy là  $ADHM$  và chiều cao  $AB = 6(m)$   
nên thể tích bể bơi là:  $V_1 = S_1 \cdot AB = 24 \cdot 6 = 144(m^3)$ .

Suy ra 75% dung tích bể bơi là  $V = \frac{3}{4} \cdot 144 = 108(m^3)$ .

+) Gọi  $IJKL$  là bề mặt mực nước ban đầu thì  $MI = NJ = 1(m)$  và  $IL = \frac{1}{2}EH = 6(m)$  suy ra diện

tích của tam giác  $MIL$  là  $S_2 = \frac{1}{2}MI \cdot IL = 3(m^2)$

Suy ra thể tích phần nước trong bể bơi lúc ban đầu bằng thể tích của khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác  $MIL$  và chiều cao  $AB = 6(m)$  nên thể tích bể bơi là:  $V_2 = S_2 \cdot AB = 18(m^3)$ .

+) Vì tốc độ bơm nước vào bể là 0,25 mét khối mỗi phút và cần bơm để lượng nước đạt 75% dung tích bể bơi khi lượng nước trong bể đã có  $18(m^3)$  nên thời gian cần để bơm là:

$$t = \frac{108 - 18}{0,25} = 360 \text{ (phút)}.$$

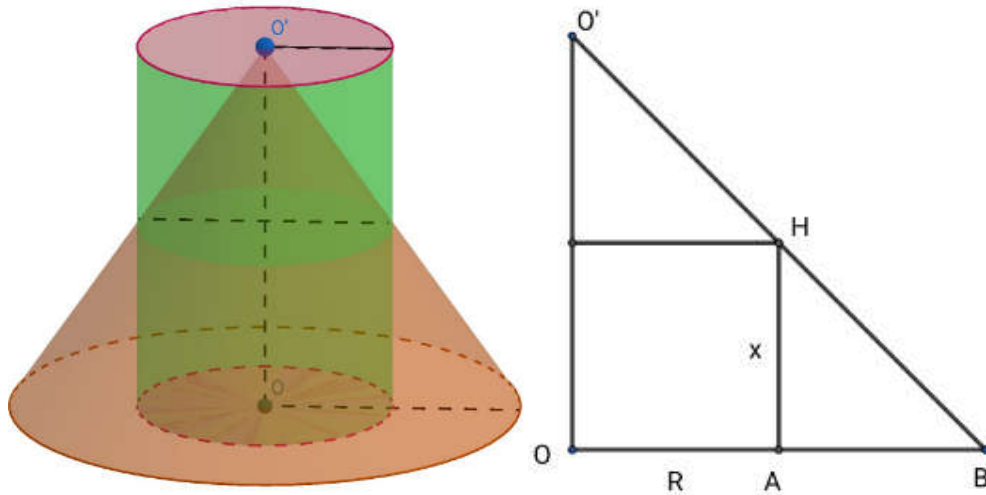
Vậy thời gian bơm nước vào bể bơi là 360 phút.

**Câu 20. (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025)** Cho khối trụ có bán kính  $R$  chiều cao  $h$ , hai đường tròn đáy có tâm là  $O$  và  $O'$ . Một khối nón có đỉnh trùng với  $O'$  và đáy có tâm  $(O; 2R)$ . Gọi  $V_1$  là thể tích phần khối nón nằm bên ngoài khối trụ,  $V_2$  là thể tích phần khối trụ nằm bên ngoài khối nón.

Tính  $\frac{V_1}{V_2}$ ?

**Lời giải**

**Đáp án: 2.**



Đặt  $AH = x$ ,  $0 < x < h$ .

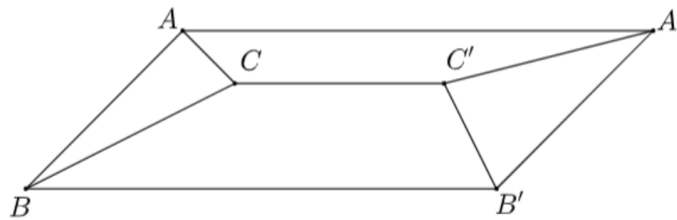
Ta có  $\frac{AH}{OO'} = \frac{AB}{OB} \Leftrightarrow \frac{x}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = 2x$ .

Thể tích phần khối nón nằm bên ngoài khối trụ:  $V_1 = \frac{1}{3}\pi(2R)^2 2x - \frac{1}{3}\pi R^2 x - \pi R^2 x = \frac{4}{3}\pi R^2 x$ .

Thể tích phần khối trụ nằm bên ngoài khối nón:  $V_2 = \pi R^2 x - \frac{1}{3}\pi R^2 x = \frac{2}{3}\pi R^2 x$ .

Khi đó  $\frac{V_1}{V_2} = 2$ .

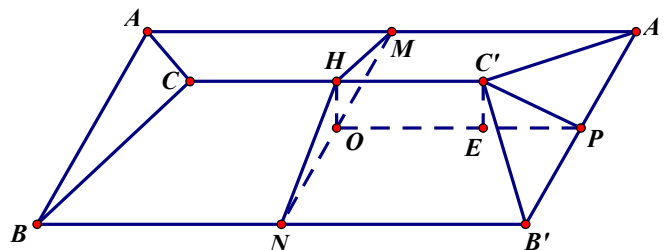
**Câu 21. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2025)** Gia đình bác An muốn làm mái tôn cho sân thượng là hình chữ nhật  $ABB'A'$  với kích thước chiều dài  $AA' = 10m$  và chiều rộng  $AB = 6m$ . Bác dự định làm mái tôn (kín) có thanh ngang  $CC' = 6m$  nằm chính giữa mái, song song và cách mặt sàn sân thượng  $2m$  (tham khảo hình vẽ). Biết rằng chi phí làm mái tôn trọn gói cho  $1m^2$  là 250 000 vnd. Tính số tiền (triệu đồng) bác An phải chi trả (làm tròn đến hàng phần mười).



**Lưu ý:** Khoảng cách giữa thanh ngang và mặt sàn là độ dài đoạn thẳng nối một điểm thuộc thanh ngang đến hình chiếu của điểm đó trên mặt sàn.

**Lời giải**

**Đáp án:** 18,7.



Gọi  $O$  là tâm của hình chữ nhật  $ABB'A'$ .

Gọi  $M, N, P, H$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $A'B'$  và  $CC'$ .

Suy ra  $OH \perp (ABB'A')$  và  $OH = 2m$ .

Gọi  $E$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $C'$  lên  $(ABB'A')$ .

Suy ra điểm  $E \in OP$ ,  $C'E \parallel OH$ ,  $C'E = OH = 2m$  và  $OHC'E$  là hình chữ nhật.

$$OP = \frac{1}{2}AA' = 5m \quad HC' = \frac{1}{2}CC' = 3m$$

Ta có  $EP = OP - OE = OP - HC' = 2m$

Tam giác  $C'EP$  vuông cân tại  $E$  nên  $C'P = EP\sqrt{2} = 2\sqrt{2}m$

$$MN = AB = 6m. \text{ Suy ra } OM = \frac{1}{2}MN = 3m$$

Xét tam giác vuông  $MOH$ , có  $MH = \sqrt{OH^2 + OM^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}m$

Ta có: hai hình thang cân  $ACC'A'$  và  $BCC'B'$  bằng nhau.

Hai tam giác cân  $ABC$  và  $A'B'C'$  bằng nhau.

$$S_{ACC'A'} = \frac{1}{2}(AA' + CC') \cdot MH = \frac{1}{2}(10 + 6)\sqrt{13} = 8\sqrt{13}m^2$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}A'B' \cdot C'P = \frac{1}{2}6 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}m^2$$

$$\text{Tổng diện tích mái tôn của sân thượng là: } S = 2S_{ACC'A'} + 2S_{A'B'C'} = (16\sqrt{13} + 12\sqrt{2})m^2$$

Chi phí làm mái tôn là:  $S \cdot 0,25 = 4\sqrt{13} + 3\sqrt{2} \approx 18,7$  triệu đồng.

**Câu 22. (THPT Sào Nam - Quảng Nam 2025)** Công ty sữa cần làm các lon đựng sữa hình trụ có thể tích  $800 \text{ cm}^3$  (lon sữa có nắp và bỏ qua việc gấp mí). Để chi phí vật liệu (thiếc) làm hộp sữa nhỏ nhất, cần thiết kế hộp sữa có bán kính bao nhiêu  $\text{cm}$ ? (**chính xác đến hàng phần trăm**)

**Lời giải**

**Đáp án:** 5,03.

Gọi  $R$  ( $R > 0$ ) là bán kính của hình trụ;  $h$  là chiều cao của hình trụ.

$$\text{Thể tích của lon sữa là: } V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2}.$$

Diện tích toàn phần của lon sữa là:  $S_p = 2\pi R^2 + 2\pi Rl$ , vì  $l = h = \frac{V}{\pi R^2}$  nên:

$$S_p = 2\pi R^2 + 2\pi Rl = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + 2\frac{V}{R}.$$

Chi phí vật liệu làm hộp sữa nhỏ nhất khi  $S_p$  nhỏ nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

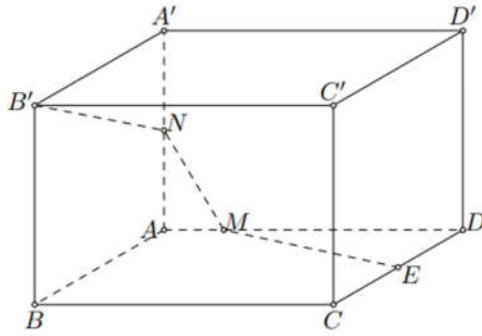
$$S_p = 2\pi R^2 + 2\frac{V}{R} = 2\pi R^2 + \frac{V}{R} + \frac{V}{R} \geq 3\sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{V}{R} \cdot \frac{V}{R}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2} = 3\sqrt[3]{2\pi \cdot 800^2}$$

$S_p$  nhỏ nhất bằng  $3\sqrt[3]{2\pi \cdot 800^2}$  khi và chỉ khi

$$\frac{V}{R} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow R^3 = \frac{V}{2\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{800}{2\pi}} \approx 5,03(\text{cm}).$$

**Câu 23. (THPT Trục Ninh - Nam Định 2025)** Một mô hình trang trí có dạng là hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ , cạnh bằng 10m (như hình vẽ). Người ta cần nối một đường dây điện đi từ điểm  $E$  (là trung điểm của  $CD$ ) đi qua điểm  $M$  thuộc cạnh  $AD$ , đi tiếp qua điểm  $N$  thuộc cạnh  $AA'$  rồi tới điểm  $B'$ . Biết độ dài đoạn dây điện bằng 25m. Tính độ dài đoạn  $MN$  (**làm tròn kết quả đến hàng phần trăm**)

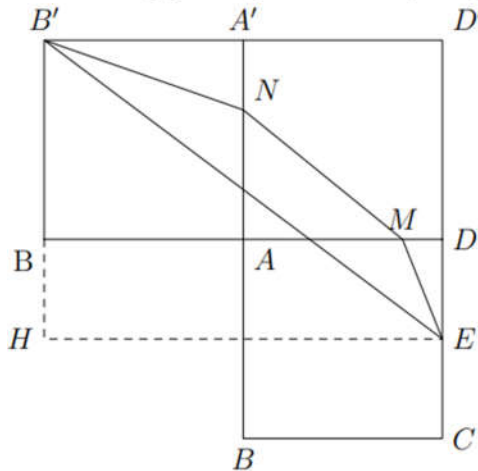




**Lời giải**

**Đáp án:** 4,17.

Trái hình lập phương ra trên mặt phẳng ta được hình vẽ



Ta có  $A'B' = A'D' = 10$  và  $DE = 5$ .

Ta thấy  $25 = B'E^2 = B'D'^2 + D'E^2$

Suy ra  $B', N, M, E$  thẳng hàng

Xét tam giác  $B'D'E$ , có

$$+) \tan \widehat{D'B'E} = \frac{15}{20} = \frac{A'N}{10} \Rightarrow A'N = 7,5 \text{ và } AN = 2,5 = \frac{5}{2}.$$

$$+) \tan \widehat{B'ED'} = \frac{20}{15} = \frac{DM}{5} \Rightarrow DM = \frac{20}{3} \text{ và } AM = \frac{10}{3}.$$

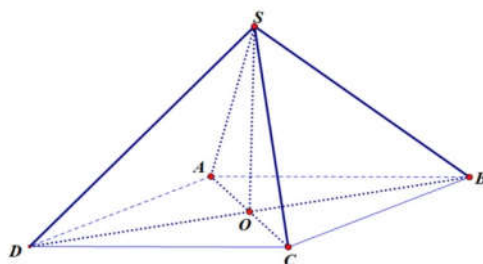
$$\text{Vậy } MN = \sqrt{AN^2 + AM^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = 4,17 \text{ (m)}$$

**Câu 24. (Sở Ninh Bình 2025)** Kim tự tháp kính Louvre là một kim tự tháp được xây bằng kính và kim loại nằm ở giữa sân Napoléon của bảo tàng Louvre, Paris, Pháp. Kim tự tháp kính Louvre có dạng hình chóp tứ giác đều cao  $20,6 \text{ m}$ , góc giữa cạnh bên và mặt đáy xấp xỉ  $39^\circ 46' 22''$ . Thể tích của kim tự tháp đó bằng bao nhiêu mét khối? (làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng đơn vị).

**Lời giải**

**Đáp án:** 7002

Mô hình kim tự tháp như hình vẽ:



Do kim tự tháp có dạng hình chóp tứ giác đều nên ta có:

$SO \perp (ABCD)$  và  $SO = 20,6$ ,  $\widehat{SBO} = \alpha = 39^\circ 46' 22''$

Tam giác  $SOB$  vuông tại  $O$  có:  $\tan \widehat{SBO} = \tan \alpha = \frac{SO}{BO} \Rightarrow BO = \frac{SO}{\tan \alpha}$

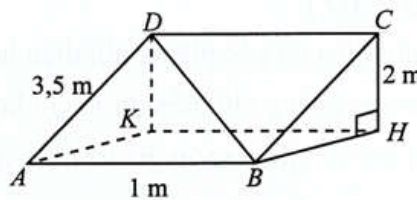
Hình vuông  $ABCD$  có tam giác  $BOC$  vuông cân tại  $O$  nên:  $BC = BO \cdot \sqrt{2} = \frac{SO \cdot \sqrt{2}}{\tan \alpha}$

$$S_{ABCD} = BC^2 = \frac{2SO^2}{\tan^2 \alpha} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{2SO^3}{3 \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot (20,6)^3}{3 \tan^2 (39^\circ 46' 22'')} \approx 7002$$

Thể tích của kim tự tháp đó bằng  $7002 (m^3)$

**Câu 25. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh 2025)** Một tấm ván hình chữ nhật  $ABCD$  được dùng làm mặt phẳng nghiêng để kéo một vật lên khỏi hố sâu  $2m$ . Cho biết  $AB = 1m$ ,  $AD = 3,5m$ . Tính góc (theo đơn vị độ) giữa đường thẳng  $BD$  và đáy hố. (Làm tròn đến hàng phần mười)

Trả lời: 33,3



**Lời giải**

Ta có:  $DK = CH = 2$ ,  $AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \frac{\sqrt{33}}{2}$ ,  $BK = \sqrt{AK^2 + AB^2} = \frac{\sqrt{37}}{2}$

$$\tan \widehat{DBK} = \frac{DK}{KB} = \frac{2}{\frac{\sqrt{37}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{37}}$$

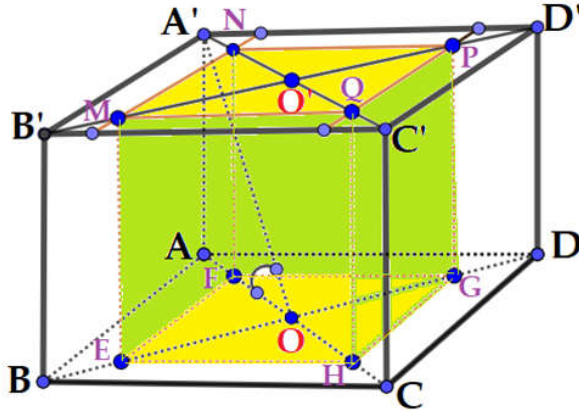
$$\widehat{DBK} \approx 33,3^\circ$$

**Câu 26. (Sở Bắc Ninh 2025)** Một hộp quà có dạng khối hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình vuông,  $BD = 2dm$ , số đo của góc nhị diện  $[A', BD, A]$  bằng  $30^\circ$ . Nếu các mặt của vỏ hộp quà đó có độ dày bằng nhau và bằng  $0,6cm$  thì phần viền bên trong của hộp quà đó có thể tích bằng bao nhiêu  $cm^3$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



**Lời giải**

Trả lời: 766.



Ta có:  $BD = 2 \text{ dm} = 20 \text{ cm} \Rightarrow AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$ .

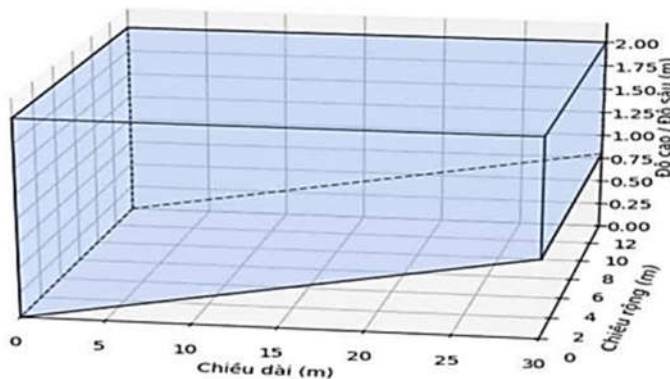
Góc nhị diện  $[A', BD, A]$  bằng  $30^\circ \Rightarrow \widehat{AOA'} = 30^\circ \Rightarrow AA' = AO \cdot \tan 30^\circ = \frac{10}{\sqrt{3}}$ .

Gọi  $MNPQ.EFGH$  là khối hộp chữ nhật ruột của hộp quà có đáy là hình vuông, cạnh  $EF = AB - 2 \cdot 0,6 = 10\sqrt{2} - \frac{6}{5}$  và chiều cao  $h = AA' - 2 \cdot 0,6 = \frac{10}{\sqrt{3}} - 1,2$ .

Phần viên bên trong của hộp quà đó có thể tích bằng:

$$V_{MNPQ.EFGH} = \left( \frac{10}{\sqrt{3}} - 1,2 \right) \cdot \left( 10\sqrt{2} - \frac{6}{5} \right)^2 \approx 766 \text{ cm}^3.$$

**Câu 27. (Sở Nghệ An 2025)** Một bể bơi với mặt nước khi đầy có dạng hình chữ nhật với chiều rộng  $14 \text{ m}$  và chiều dài  $30 \text{ m}$ . Các thành bể xung quanh thẳng đứng và đáy là một mặt phẳng nghiêng. Chiều sâu tại một đầu bể là  $1,2 \text{ m}$  và tăng dần đều đến  $2,0 \text{ m}$  ở đầu kia của bể (xem hình vẽ). Ban đầu bể không chứa nước. Người ta sử dụng một máy bơm công suất lớn để bơm nước vào bể với tốc độ không đổi là  $42 \text{ m}^3 / \text{giờ}$ . Hỏi sau bao nhiêu giờ thì máy bơm bơm đầy bể nước?



Trả lời:

Lời giải

**Đáp số:** 16

Thể tích nước cần bơm đầy bể là thể tích khối lăng trụ đứng có đáy là hình thang vuông nên

$$V = \frac{(1,2 + 2) \cdot 30}{2} \cdot 14 = 672 \text{ m}^3.$$

Thời gian máy bơm bơm đầy bể nước là:  $\frac{672}{42} = 16 \text{ giờ}$ .

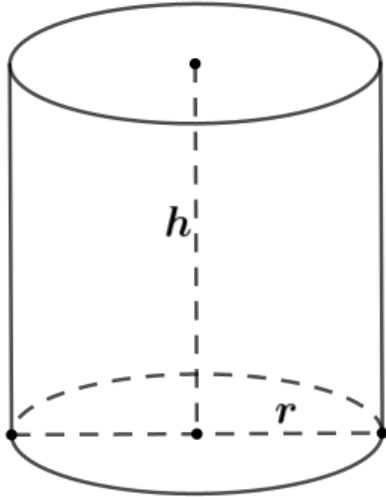
**Câu 28. (Sở Thái Bình 2025)** Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 330 ml. Tìm bán kính của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimet và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

**Lời giải**

**Đáp số: 3,74**

Đổi  $330 \text{ ml} = 330 \text{ cm}^3$ .

Gọi  $r$  ( $r > 0$ ) là bán kính của hộp.



Thể tích của hộp  $V = \pi r^2 h = 330 \Rightarrow h = \frac{330}{\pi r^2}$ .

Diện tích toàn phần của hộp

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{330}{\pi r^2} \\ &= 2\pi r^2 + 2 \cdot \frac{330}{r} \\ &= 2\pi r^2 + \frac{330}{r} + \frac{330}{r} \\ &\geq 3\sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{330}{r} \cdot \frac{330}{r}} = 3\sqrt[3]{2\pi (330)^2} \approx 364,36 (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

Chi phí nhỏ nhất khi diện tích toàn phần của hộp là nhỏ nhất, điều này xảy ra khi

$$2\pi r^2 = \frac{330}{r} \Leftrightarrow r^3 = \frac{330}{2\pi} \Leftrightarrow r \approx 3,74 (\text{cm}).$$

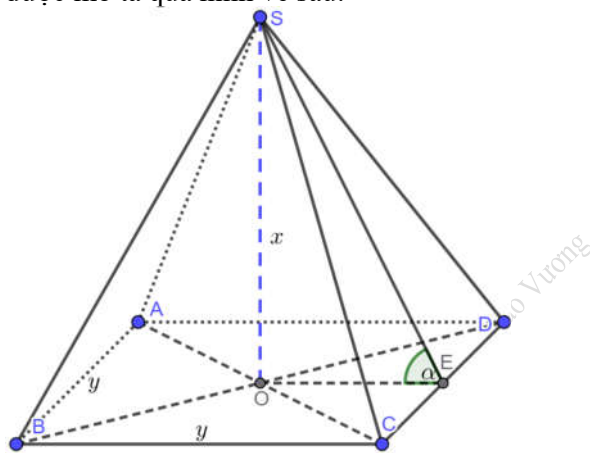
**Câu 29. (Liên trường THPT Ninh Bình 2025)** Độ dốc của mái nhà (mặt sân, con đường thẳng,...) là tang của góc tạo bởi mái nhà (mặt sân, con đường thẳng,...) đó với mặt phẳng nằm ngang. Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều, biết rằng diện tích bề mặt tất cả các mặt của kim tự tháp (gồm cả mặt đáy) bằng 80500 ( $\text{m}^2$ ) và độ dốc của mặt bên kim tự tháp bằng  $\frac{49}{45}$ . Chiều cao của kim tự tháp là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng đơn vị) ?



Lời giải

**Đáp số: 98.**

Gọi  $x, y(m)$  lần lượt là độ dài đường cao và cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều. Giả thiết bài toán được mô tả qua hình vẽ sau:



Gọi  $E$  là trung điểm  $CD$ . Suy ra  $\begin{cases} SE \perp CD \\ OE = \frac{1}{2}BC = \frac{y}{2} \end{cases}$

Xét  $\triangle SOE$  vuông tại  $O$ , ta có:  $SE = \sqrt{SO^2 + OE^2} = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$

Theo đề bài ta có hệ:

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{x}{\frac{y}{2}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{49}{90} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} S_{tp} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot SE \cdot CD + y^2 = 2y \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}} + y^2 = \sqrt{4x^2 y^2 + y^4} + y^2 = 80500 \end{cases} \quad (2)$$

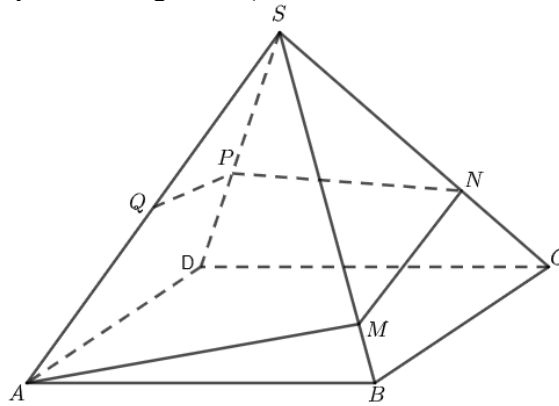
Từ (1), ta có:  $y = \frac{90x}{49}$ . Thay vào (2), ta có:

$$\sqrt{4x^2 \cdot \frac{90^2 x^2}{49^2} + \frac{90^4 x^4}{49^4}} + \frac{90^2}{49^2} x^2 = 80500 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left( \sqrt{4 \cdot \frac{90^2}{49^2} + \frac{90^4}{49^4}} + \frac{90^2}{49^2} \right) = 80500$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{80500}{\sqrt{4 \cdot \frac{90^2}{49^2} + \frac{90^4}{49^4}} + \frac{90^2}{49^2}}} \approx 98 (m)$$

**Câu 30. (Sở Bắc Ninh 2025)** Đèn trang trí ở công viên có dạng hình chóp tứ giác đều. Cạnh bên có chiều dài  $4m$ , góc ở đỉnh của mặt bên bằng  $15^\circ$ . Ban tổ chức muốn trang trí đèn Led một vòng quanh hình chóp từ vị trí  $A$  đến vị trí  $Q$  là trung điểm của  $SA$  (tham khảo hình vẽ). Biết chi phí để lắp

1m đèn Led có giá 200 000 đồng. Hỏi chi phí thấp nhất để lắp đèn Led bằng bao nhiêu nghìn đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

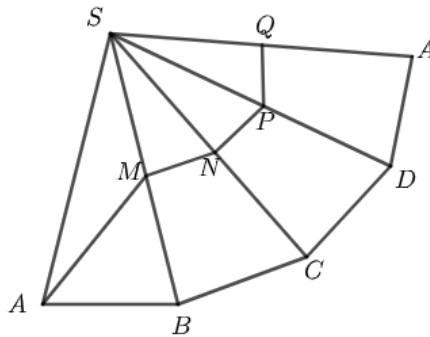


**Lời giải**

**Đáp án:** 693.

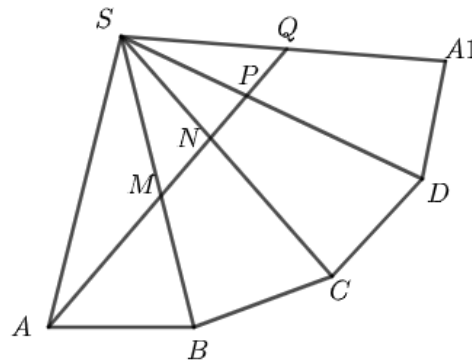
Gọi  $l$  là độ dài sợi dây đèn Led.

“Mở” hình chóp dọc theo cạnh  $SA$  rồi trải ra mặt phẳng ta được hình như sau:



Ta có:  $l = AM + MN + NP + PQ$

Khi đó, độ dài đèn Led ngắn nhất khi  $A, M, N, P, Q$  cùng nằm trên một đường thẳng.



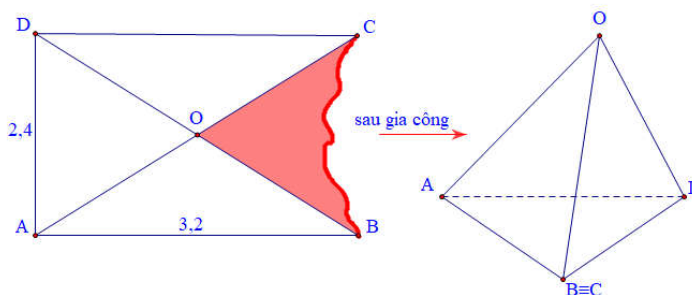
Xét  $\triangle SAQ$  ta có:  $SA = 4, SQ = 2, \hat{S} = 60^\circ$

$$\Rightarrow l_{\min} = AQ = \sqrt{4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ} = 2\sqrt{3}.$$

Vậy chi phí thấp nhất để lắp đèn Led là  $2\sqrt{3} \cdot 200\,000 \approx 692\,820,32$ .

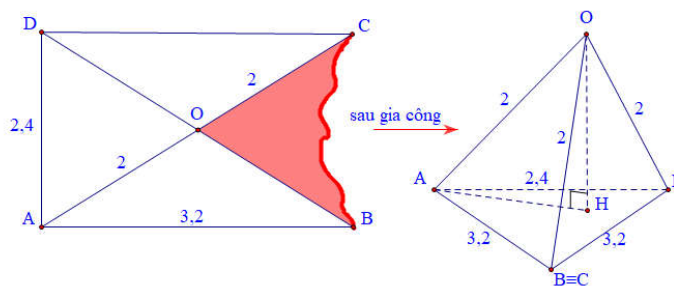
**Câu 31. (Sở Thanh Hóa 2025)** Trên công trường xây dựng, một công nhân muốn tạo ra một dụng cụ để dựng vật liệu lỏng từ một tấm thép hình chữ nhật  $ABCD$  tâm  $O$  có  $AB = 3,2m, AD = 2,4m$ . Do tấm thép bị hỏng một phần (tham khảo hình vẽ) nên người đó cắt bỏ tam giác  $OBC$  và hàn mép  $OB, OC$  với nhau để thu được một hình tứ diện  $OABD$  (không có mặt  $ABD$ ). Dụng cụ này sẽ được vùi đất xung quanh sao cho đỉnh  $O$  quay xuống và mặt  $ABD$  hướng lên trên, khi dựng đầy vật liệu lỏng thì phần không gian trong lòng dụng cụ hoàn toàn bị lấp đầy. Tính thể tích của vật liệu lỏng được dựng đầy trong dụng cụ. (Kết quả làm tròn đến hàng phân chục của đơn vị  $m^3$  và xem độ dày của tấm thép không đáng kể)



**Lời giải****Trả lời: 1,2**

Ta có  $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = 4$  từ đó, hình chóp  $O.ABD$  có  $OA = 2; OB = 2; OD = 2; AB = 3,2; BD = 3,2; AD = 2,4$

Vì hình chóp  $O.ABD$  có  $OA = OB = OD$  nên hình chiếu vuông góc của  $O$  lên  $(ABD)$  trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABD$



Ta có  $S_{ABD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{12\sqrt{55}}{25}$  trong đó  $p = 4,4; a = 3,2; b = 3,2; c = 2,4$  và

$$AH = \frac{abc}{4S_{ABD}}$$

$$\text{Vậy thể tích: } V = \frac{1}{3} OH \cdot S_{ABD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{OA^2 - AH^2} \cdot S_{ABD} \approx 1,2$$