

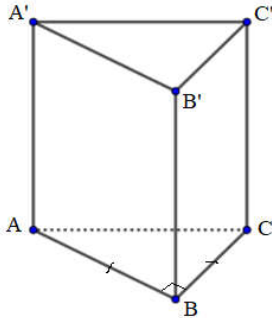
## CHỦ ĐỀ 6. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

### • PHẦN 3. TRẢ LỜI NGẮN

**CÂU HỎI** (vì là ngân hàng được tách ra từ các trường, cho nên có trùng lặp câu hỏi thì do các trường tham khảo nhau)

#### Khoảng cách

- Câu 1.** (Sở Thái Nguyên 2025) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang vuông tại  $A$  và  $D$ ,  $AB = AD = 1\text{cm}$ ,  $CD = 2\text{cm}$ . Tam giác  $SBD$  cân tại  $S$  và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Biết thể tích khối chóp  $S.ABCD$  bằng  $\sqrt{2}\text{cm}^3$ . Khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  bằng bao nhiêu centimet? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 2.** (Sở Quảng Bình 2025) Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng  $2\sqrt{2}$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SD$ .
- Câu 3.** (Cụm trường THPT Hải Dương 2025) Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ , cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng 3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SD$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?
- Câu 4.** (Chuyên KHTN Hà Nội 2025) Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh bằng  $2\sqrt{3}$ , cạnh bên  $AA' = 3$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của  $BC, B'C'$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AM$  và  $CN$ .
- Câu 5.** (THPT Triệu Sơn 1 - Thanh Hóa 2025) Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$  và  $AB = 4$ . Khoảng cách từ  $C$  đến mặt phẳng  $(ABB'A')$  bằng bao nhiêu?



- Câu 6.** (THPT Anh Sơn 3 - Nghệ An 2025) Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh bằng  $6\sqrt{3}\text{ (cm)}$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $BC$  bằng bao nhiêu centimet?
- Câu 7.** (Sở Quảng Nam 2025) Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông tại  $B$ ,  $AB = 2$ ,  $SA \perp (ABC)$  và  $SA = 5$ . Tính khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- Câu 8.** (Sở Long An 2025) Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ ,  $AB \perp BC$ ,  $SA = AB = 3$ ,  $BC = 4$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$  bằng bao nhiêu.
- Câu 9.** (Liên Trường Nghệ An 2025) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật;  $AB = 1$ ,  $\widehat{ACD} = 60^\circ$ ,  $SA \perp (ABCD)$  và số đo của góc nhị diện  $[S, CD, B]$  bằng  $60^\circ$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SC$  và  $BD$ .
- Câu 10.** (THPT DTNT - Nghệ An 2025) Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh bằng 1. Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ , hình chiếu của  $S$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  là trung điểm của  $CI$ , góc

giữa  $SA$  và mặt đáy bằng  $45^\circ$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $SBC$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $CG$  bằng  $\sqrt{\frac{m}{n}}$  với  $(m, n \in \mathbb{Z})$ , phân số  $\frac{m}{n}$  là phân số tối giản. Tính  $m+n$ ?

**Câu 11. (Đề thi vào ĐHSPhN 2025)** Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi và  $AA' = 6, AB = AC = 3$

a) Tính khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(BCC'B')$ .

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $BD$  và  $A'C$ .

**Câu 12. (Sở Vũng Tàu 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng 3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SD$ . (Kết quả làm tròn hai chữ số thập phân).

**Câu 13. (Đề Tham Khảo 2025)** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = 5, BC = 6, CA = 7$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $BC$  bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**Câu 14. (THPT Văn Giang - Hưng Yên 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = a, AD = 2a$ . Hình chiếu vuông góc của  $S$  trên mặt phẳng đáy là trung điểm  $H$  của  $AD$ , góc giữa  $SB$  mặt phẳng đáy  $(ABCD)$  là  $45^\circ$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SD$  và  $BH$  theo  $a$  được kết quả là  $ma$ . Khi đó giá trị  $\frac{3}{5}m^2$  bằng bao nhiêu?

**Câu 15. (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025)** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $\sqrt{2}$ . Cạnh  $BA' = \sqrt{6}$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $A'B$  và  $B'C$  là (làm tròn đến hàng phần trăm).

**Câu 16. (THPT Nguyễn Đăng Đạo - Bắc Ninh 2025)** Cho hình chóp đều  $S.ABC$  có cạnh đáy bằng 1. Góc giữa đường thẳng  $SA$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $BC$  (kết quả viết dưới dạng số thập phân).

**Câu 17. (THPT Gia Bình - Bắc Ninh 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh bằng 1,  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Mặt bên  $SAB$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $CD$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $BM$  và  $SN$  bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Câu 18. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2025)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 2,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ ; Góc giữa đường thẳng  $SB$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Tính khoảng cách từ điểm  $B$  đến mặt phẳng  $(SCM)$ , kết quả làm tròn đến phần trăm.

**Câu 19. (Sở Ninh Bình 2025)** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi tâm  $O$ ,  $SO$  vuông góc với mặt đáy. Biết cạnh hình thoi bằng 2024, góc  $BAD$  bằng  $120^\circ$ , khoảng cách từ điểm  $C$  đến mặt phẳng  $(SBD)$  bằng bao nhiêu?

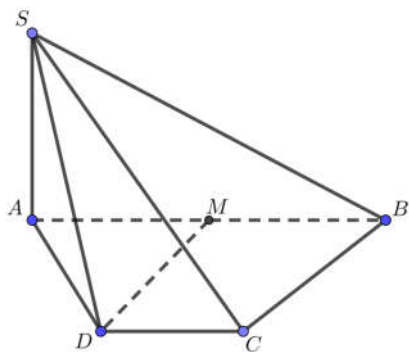
**Câu 20. (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025)** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ ,  $AB = 5, CC' = 10$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $BC'$  bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Câu 21. (THPT Thuận Thành 1&2 - Bắc Ninh 2025)** Trong không gian, cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là điểm thay đổi trên  $SO$ . Khi biểu thức  $P = MS^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$  đạt giá trị nhỏ nhất thì tỉ số  $\frac{SM}{SO}$  bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

**Câu 22. (THPT Hùng Vương - Bình Thuận 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông tâm  $O$ , cạnh  $1cm$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy, góc  $\widehat{SBD} = 60^\circ$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SO$  bằng bao nhiêu  $cm$ ? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

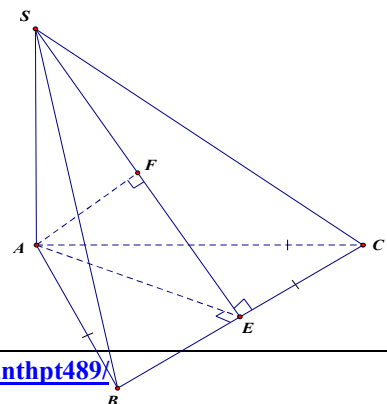
**Câu 23. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa 2025)** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB \perp (ACD)$ , tam giác  $ACD$  vuông tại  $A$  và  $AC = 2, AD = 3$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ .

- Câu 24. (Sở Vĩnh Phúc 2025)** Cho khối chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có thể tích bằng  $\frac{16}{3}$  với  $AB=2$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SCD$ , trên các cạnh  $AB, SD$  lần lượt lấy các điểm  $E, F$  sao cho  $EF$  song song với  $BG$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $DG$  và  $EF$  bằng  $\frac{m}{n}$  với  $m, n$  nguyên dương và  $\frac{m}{n}$  là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức  $2m-n$ .
- Câu 25. (Sở Thanh Hóa 2025)** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB=10, AD=20$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $BD$  bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- Câu 26. (Cụm trường THPT Hải Dương 2025)** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng 1 mét. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$  bằng bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?
- Câu 27. (THPT Trần Phú - Vĩnh Phúc 2025)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật như hình với  $AB=2\sqrt{2}$  và  $BC=2$ . Cạnh  $SA$  vuông góc với mặt đáy và góc giữa cạnh bên  $SC$  với đáy là  $60^\circ$ . Tính khoảng cách từ điểm  $C$  đến  $(SBD)$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
- Câu 28. (Sở Vĩnh Phúc 2025)** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có mặt đáy  $ABCD$  là hình vuông, cạnh bên  $AA'=8$ . Gọi  $M, O$  lần lượt là trung điểm của  $A'B'$  và  $A'C'$ . Biết thể tích tứ diện  $AMOB'$  bằng 18, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AM$  và  $CO$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
- Câu 29. (Cụm trường Hưng Yên 2025)** Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $2a$ , cạnh bên bằng  $3a$ . Khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  bằng  $a\sqrt{\frac{b}{c}}$ , với phân số  $\frac{b}{c}$  tối giản,  $b > 0, c > 0$ . Tính  $T=3c+2b$ .
- Câu 30. (Cụm trường Hải Dương 2025)** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B, AB=4, AC=5, AA'=6$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CB'$  bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
- Câu 31. (Sở Thừa Thiên Huế 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông có cạnh bằng  $4\sqrt{2}$  các cạnh bên bằng nhau và cùng bằng  $2\sqrt{6}$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AD$  và  $SC$ .
- Câu 32. Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh bằng 3,  $SA \perp (ABCD)$ , số đo của góc nhị diện  $[S, BC, A]$  bằng  $30^\circ$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SC$  và  $BD$  bằng  $\frac{3\sqrt{14}}{n}$ . Giá trị của  $n$  bằng bao nhiêu?
- Câu 33. (Cụm trường Nguyễn Hiền - Lê Hồng Phong - Quảng Nam 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với  $AB=2a, AD=DC=CB=a$  và  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy  $SA=3a$  (tham khảo hình vẽ).



Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SB$  và  $DM$  bằng  $\frac{xa}{y}$  (với  $\frac{x}{y}$  tối giản). Tính  $3x+2y$ ?

- Câu 34. (THPT Nông Công 3 - Thanh Hóa 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật tâm  $O$ ,  $AB = 2$ ,  $BC = 2\sqrt{3}$ . Tam giác  $OAS$  cân tại  $S$ , mặt phẳng  $(SAD)$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ , góc giữa  $SD$  và  $(ABCD)$  bằng  $60^\circ$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SB$  và  $AC$ ?
- Câu 35. (THPT Hà Trung - Thanh Hóa 2025)** Cho tứ diện  $ABCD$  có độ dài các cạnh  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ ,  $AD = 6$  và các góc  $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$ ,  $\widehat{CAD} = 90^\circ$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ . (kết quả làm tròn đến phần trăm)
- Câu 36. (THPT Phúc Thọ - Hà Nội 2025)** Cho chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $M$  là trung điểm của  $BC$ , hình chiếu vuông góc của  $S$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trung điểm của  $AM$ . Cho biết  $AB = 2$ ,  $AC = 2\sqrt{3}$  và mặt phẳng  $(SAB)$  tạo với mặt phẳng  $(ABC)$  một góc  $60^\circ$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $BC$ .
- Câu 37. (Sở Bình Phước 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh bằng 1,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $SA = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
- Câu 38. (Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai 2025)** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = 6$ ,  $AD = 9$ . Lấy  $M$  là trung điểm của  $CD$ ,  $N$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $NB = 2NC$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $MN$  bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)
- Câu 39. (Sở Hậu Giang 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh 1,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = \sqrt{2}$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $SC$  và  $BD$  (làm tròn đến hàng phần mười).
- Câu 40. (Sở Lai Châu 2025)** Cho khối chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ ,  $AB = BC = 1$ ,  $AD = 2$ . Hình chiếu vuông góc của  $S$  lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm  $H$  của  $AD$  và  $SH = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . Tính khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- Câu 41. (THPT Nguyễn Quốc Trinh - Hà Nội 2025)** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có  $AC = 1$ ,  $BC = 2$ ,  $\widehat{ACB} = 120^\circ$ . Tính khoảng cách từ điểm  $C$  đến mặt phẳng  $(ABB'A')$ ? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).
- Câu 42. (Cụm chuyên môn Đak Lak 2025)** Cho lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = 2$ ,  $AA' = 3$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $CC'$  bằng bao nhiêu? (Làm tròn đến hàng phần trăm)
- Câu 43. (Sở Hải Phòng 2025)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$   $ma$ ;  $m \in \mathbb{R}$ . Khi đó giá trị của  $m$  là (làm tròn đến hàng phần trăm), biết  $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$
- Câu 44. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh  $2\sqrt{5}$ , tâm  $O$  và  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ , mặt bên  $SAB$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi  $H$  là trung điểm cạnh  $AB$ . Tính bình phương khoảng cách từ  $H$  đến mặt phẳng  $(SAC)$ .
- Câu 45. (Cụm THPT Hoàn Kiếm - Hai Bà Trưng - Hà Nội 2025)** Cho hình lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = 1$ ,  $AD = 2$ , tam giác  $A'AB$  cân tại  $A'$  và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Khoảng cách từ



$D$  đến  $(A'BC)$  bằng  $\frac{2}{5}$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $A'B$  và  $AC$  (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

**Câu 46. (Sở Gia Lai 2025)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông cân tại  $B$ ,  $2SA = AC = 2\sqrt{6}$  và  $SA$  vuông góc với đáy. Khoảng cách từ  $A$  đến  $(SBC)$  bằng bao nhiêu?

**Câu 47. (THPT Khoa Học Giáo Dục - Hà Nội 2025)** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$  và có độ dài các cạnh  $AB = \sqrt{3}$ ,  $BC = 2$ ,  $AA' = \sqrt{2}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AM$  và  $B'C$  (Nếu kết quả là số thập phân thì làm tròn đến hàng phần trăm).

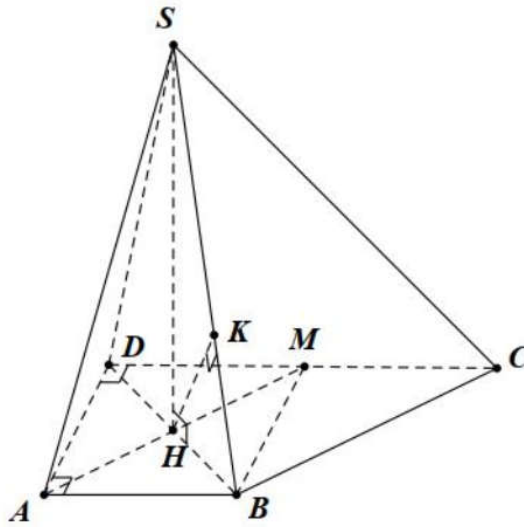
## ĐÁP ÁN THAM KHẢO

### Khoảng cách

**Câu 1. (Sở Thái Nguyên 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang vuông tại  $A$  và  $D$ ,  $AB = AD = 1\text{cm}$ ,  $CD = 2\text{cm}$ . Tam giác  $SBD$  cân tại  $S$  và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Biết thể tích khối chóp  $S.ABCD$  bằng  $\sqrt{2}\text{cm}^3$ . Khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  bằng bao nhiêu centimet? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

### Lời giải

**Đáp án:** 0,69.



Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Dễ dàng thấy  $ABMD$  là hình vuông.  
Mà  $H$  là trung điểm của  $BD$ , nên  $H$  cũng là trung điểm của  $AM$  và  $BD \perp AM$ .  
Vì  $MC = MD = MB = 1$  nên  $\triangle BDC$  vuông tại  $B \Rightarrow BD \perp BC$ .  
Vậy  $AM \parallel BC \Rightarrow AM \parallel (SBC)$ .

Do đó,  $d(A, (SBC)) = d(H, (SBC))$ .

Dựng  $HK \perp SB$  (1). ( $K \in SB$ )

$SH \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SH \perp BC \\ DB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBD) \Rightarrow BC \perp HK$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra:  $HK \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = d(H, (SBC)) = HK$

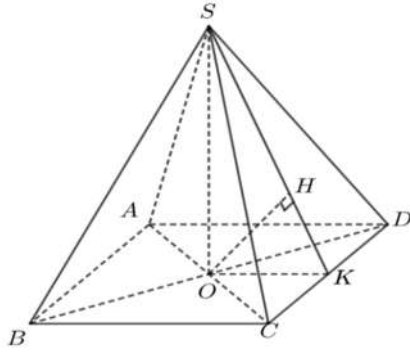
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+2) \cdot 1}{2} \cdot SH \Leftrightarrow SH = 2\sqrt{2}.$$



$$\text{Xét } \triangle SHB: \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{1}{8} + \frac{2}{1} = \frac{17}{8} \Rightarrow HK = \frac{2\sqrt{34}}{17} \approx 0.69.$$

**Câu 2. (Sở Quảng Bình 2025)** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng  $2\sqrt{2}$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SD$ .

**Lời giải**



**Đáp án:** 0,9.

Vì  $S.ABCD$  là hình chóp tứ giác đều, nên  $ABCD$  là hình vuông

Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Kẻ  $OK \perp CD$ , nên  $K$  là trung điểm của  $CD$  lại có  $SO \perp CD \Rightarrow CD \perp (SOK)$

Kẻ  $OH \perp SK \Rightarrow CD \perp OH \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O; (SCD)) = OH$

Ta có  $AB \parallel CD \Rightarrow d(AB; SD) = d(AB; (SCD)) = d(A; (SCD)) = 2d(O; (SCD))$

Xét tam giác vuông  $SOK$  có

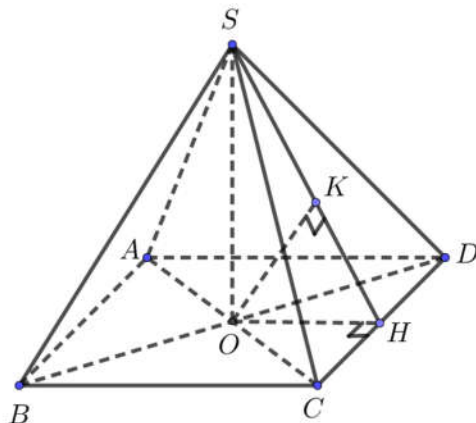
$$AC = 2\sqrt{2} \Rightarrow OC = \sqrt{2}, SC = 2\sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{6}; OK = \frac{1}{2}AD = 1$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SOK \text{ có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OK^2} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{42}}{7} \approx 0,9.$$

**Câu 3. (Cụm trường THPT Hải Dương 2025)** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ , cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng 3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SD$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

**Lời giải**

**Đáp án:** 1,87.



$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \not\subset (SCD) \Rightarrow AB \parallel (SCD) \\ CD \subset (SCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)).$$

Mặt khác  $\frac{d(A, (SCD))}{d(O, (SCD))} = \frac{AC}{OC} = 2$ .

Nên  $d(AB, SD) = 2d(O, (SCD))$ .

Kẻ  $OH \perp CD$  và  $OK \perp SH$ .

$$\begin{cases} CD \perp OH \\ CD \perp SO (SO \perp (ABCD), CD \subset (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOH).$$

Mà  $OK \subset (SOH)$  nên  $CD \perp OK$ .

$$\begin{cases} OK \perp SH \\ OK \perp CD \end{cases} \Rightarrow OK \perp (SCD).$$

Suy ra  $d(O, (SCD)) = OK$ .

Ta có  $OH = \frac{1}{2}AD = 1$ .

$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Xét  $\triangle SOA$  vuông tại  $O$  có  $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{7}$ .

Xét  $\triangle SOH$  vuông tại  $O$  có  $OK$  là đường cao nên

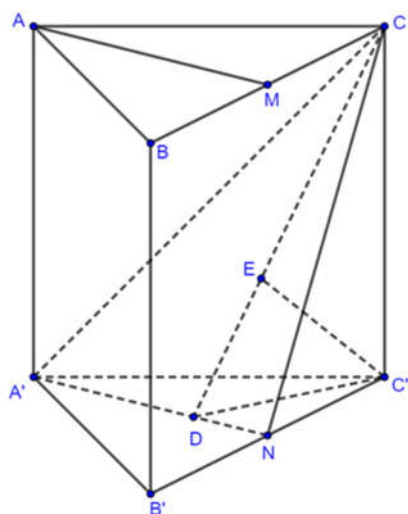
$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OH^2} \Rightarrow OK = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Do đó  $d(AB, SD) = 2OK \approx 1,87$ .

**Câu 4. (Chuyên KHTN Hà Nội 2025)** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh bằng  $2\sqrt{3}$ , cạnh bên  $AA' = 3$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của  $BC, B'C'$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AM$  và  $CN$ .

**Lời giải**

**Đáp án:** 1,5.



Ta có  $\begin{cases} AM \parallel A'N \\ A'N \subset (A'NC) \end{cases} \Rightarrow AM \parallel (A'NC)$

$$\Rightarrow d(AM; CN) = d(AM; (A'NC)) = d(A; (A'NC)) = d(C'; (A'NC)).$$

Trong mặt phẳng  $(A'B'C')$ , kẻ  $C'D \perp A'N$ .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A'N \perp C'D \\ A'N \perp CC' \\ C'D, CC' \subset (CC'D) \Rightarrow A'N \perp (CC'D) \\ C'D \cap CC' = \{C'\} \end{cases}$$

Trong mặt phẳng  $(CC'D)$  kẻ  $C'E \perp CD, E \in CD \Rightarrow A'N \perp C'E$ .

$$\begin{cases} C'E \perp CD \\ C'E \perp A'N \\ CD, A'N \subset (A'NC) \Rightarrow C'E \perp (A'NC) \Rightarrow d(C'; (A'NC)) = C'E \\ CD \cap A'N = \{D\} \end{cases}$$

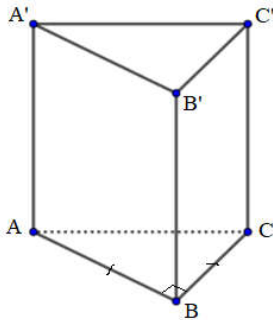
$$\text{Mặt khác, } S_{\Delta A'B'C'} = 2S_{\Delta A'NC'} = \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \text{ và } A'N = \frac{(2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{2} = 3.$$

$$\text{Mà } S_{\Delta A'NC'} = \frac{1}{2} \cdot C'D \cdot A'N \Rightarrow C'D = \frac{2S_{\Delta A'NC'}}{A'N} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } CC'D \text{ có } C'E = \frac{CC' \cdot C'D}{\sqrt{CC'^2 + C'D^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AM$  và  $CN$  là 1,5.

**Câu 5. (THPT Triệu Sơn 1 - Thanh Hóa 2025)** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$  và  $AB = 4$ . Khoảng cách từ  $C$  đến mặt phẳng  $(ABB'A')$  bằng bao nhiêu?



**Lời giải**

**Đáp số:** 4.

Ta có:  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B \Rightarrow CB \perp AB$ .

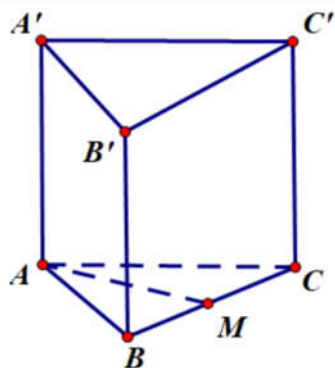
$ABC.A'B'C'$  là lăng trụ đứng  $BB' \perp (ABC) \Rightarrow BB' \perp CB$ .

Do vậy:  $CB \perp (ABB'A')$  tại  $B$ . Suy ra  $d(C, (ABB'A')) = CB = AB = 4$

**Câu 6. (THPT Anh Sơn 3 - Nghệ An 2025)** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh bằng  $6\sqrt{3}$  (cm). Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $BC$  bằng bao nhiêu centimet?

**Lời giải**





**Đáp án: 9.**

Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ .

Ta có  $AM \perp BC$  (vì  $ABC$  là tam giác đều)

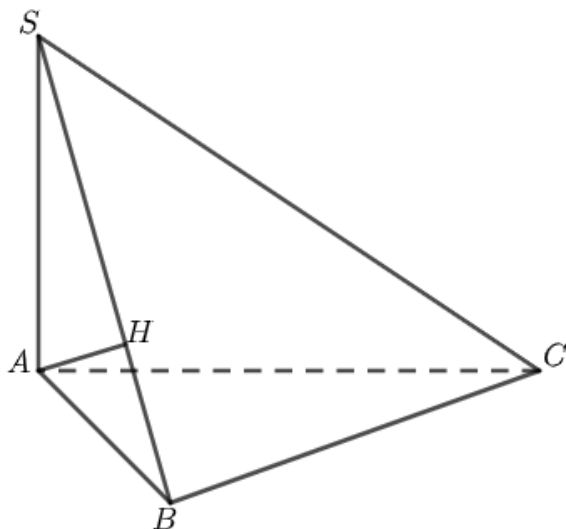
Vì  $AA' \perp (ABC)$  nên  $AA' \perp AM$ .

Do đó  $d(AA', BC) = AM$ .

Vì  $AM$  là đường cao tam giác đều  $ABC$  nên  $AM = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 9 \text{ (cm)}$

**Câu 7. (Sở Quảng Nam 2025)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông tại  $B$ ,  $AB = 2$ ,  $SA \perp (ABC)$  và  $SA = 5$ . Tính khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Lời giải**



**Đáp án: 1,86.**

Kẻ  $AH \perp SB$  (1) (với  $H \in SB$ )

Ta có:  $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

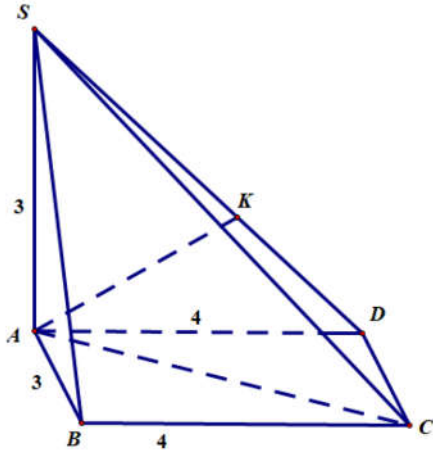
mà  $AH \subset (SAB)$  nên  $BC \perp AH$  (2).

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow AH \perp (SBC).$

Vậy  $d(A, (SBC)) = AH = \frac{AS \cdot AB}{\sqrt{AS^2 + AB^2}} = \frac{10\sqrt{29}}{29}.$

**Câu 8. (Sở Long An 2025)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ ,  $AB \perp BC$ ,  $SA = AB = 3$ ,  $BC = 4$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$  bằng bao nhiêu.

Đáp án: 2,4.



Trong mặt phẳng  $(ABC)$ , dựng điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật.

Dựng  $AK \perp SD$ .

Dễ thấy  $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$ .

Nên  $AK \perp (SCD)$ .

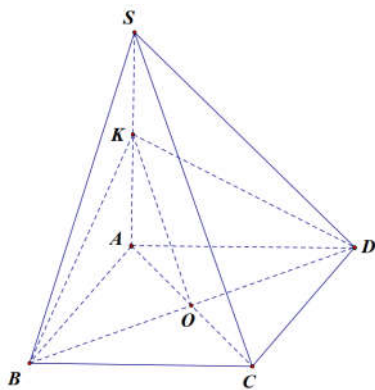
Ta có  $\left. \begin{array}{l} CD \parallel AB \\ CD \subset (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(AB, CD) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AK$ .

Xét tam giác vuông  $SAD \Rightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AK = \frac{12}{5}$ .

**Câu 9. (Liên Trường Nghệ An 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật;  $AB = 1$ ,  $\widehat{ACD} = 60^\circ$ ,  $SA \perp (ABCD)$  và số đo của góc nhị diện  $[S, CD, B]$  bằng  $60^\circ$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SC$  và  $BD$ .

Lời giải

Đáp án: 0,75



+  $AD = CD \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ .

Ta có:  $\left\{ \begin{array}{l} CD \perp AD, AD \subset (ABCD) \\ CD \perp SD, SD \subset (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow [S, CD, B] = \widehat{SDA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AD \tan 60^\circ = 3$ .

Gọi  $K$  là trung điểm cạnh  $SA$

$\Rightarrow SC \parallel OK \Rightarrow SC \parallel (BDK) \Rightarrow d(SC, BD) = d(C, (BDK)) = d(A, (BDK))$ .

+ Tứ diện  $ABDK$  có  $AB, AD, AK$  đôi một vuông góc,

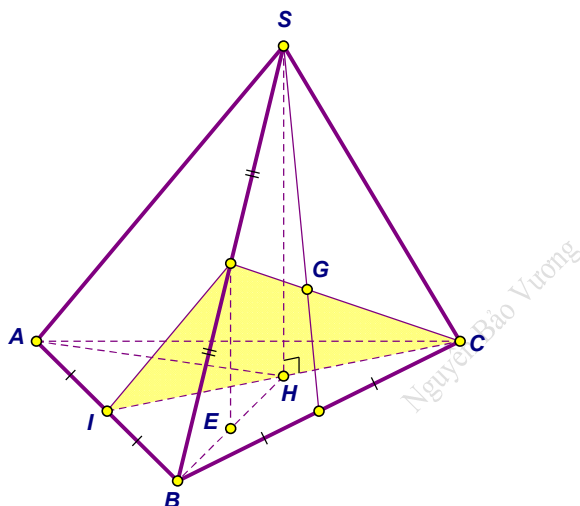
$$AH \perp (BDK) \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AK^2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9} \Rightarrow AH = 0,75.$$

$$\text{Vậy } d(SC, BD) = d(A, (BDK)) = 0,75.$$

**Câu 10. (THPT DTNT - Nghệ An 2025)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh bằng 1. Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ , hình chiếu của  $S$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  là trung điểm của  $CI$ , góc giữa  $SA$  và mặt đáy bằng  $45^\circ$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $SBC$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $CG$  bằng  $\sqrt{\frac{m}{n}}$  với  $(m, n \in \mathbb{Z})$ , phân số  $\frac{m}{n}$  là phân số tối giản. Tính  $m+n$ ?

**Lời giải**

**Trả lời:** 51



Gọi giao điểm của  $CG$  với  $SB$  là  $M$ . Suy ra  $M$  là trung điểm của  $SB$ .

Gọi  $E$  là chân đường vuông góc hạ từ  $M$  xuống mặt phẳng  $(ABC)$ .

Ta có  $AS \parallel IM \Rightarrow AS \parallel (IMC)$ .

$$\text{Suy ra } d(SA, CG) = d(SA, (IMC)) = d(S, (IMC)) = d(B, (IMC)).$$

$$\text{Theo bài ra ta có } CI = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ suy ra } IH = \frac{\sqrt{3}}{4}. \text{ Suy ra } AH = \sqrt{AI^2 + IH^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Do góc  $(SA, (ABC)) = 45^\circ$  suy ra tam giác  $\triangle SHA$  vuông cân tại  $H$ .

$$\text{Suy ra } SH = AH = \frac{\sqrt{7}}{4}. \text{ Suy ra } SA = AH\sqrt{2} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

$$\text{Xét tam giác } \triangle SBC: \text{ dễ thấy } SB = SA = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

$$SC = SI = \sqrt{SH^2 + IH^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}. \text{ Suy ra } CM = \sqrt{\frac{2SC^2 + 2BC^2 - SB^2}{4}} = \frac{\sqrt{38}}{8}.$$

$$\text{Xét tam giác } \triangle IMC: IM = \frac{SA}{2} = \frac{\sqrt{14}}{8}, CM = \frac{\sqrt{38}}{8}, CI = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Suy ra } S_{\triangle IMC} = \frac{\sqrt{33}}{32}.$$

Thể tích khối chóp  $MIBC$  là:

$$V_{MIBC} = \frac{1}{3} ME \cdot S_{\triangle MIBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{SH}{2} \cdot \frac{1}{2} IC \cdot IB = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{192}.$$

$$\text{Suy ra } d(S, (MIC)) = d(B, (MIC)) = \frac{3V_{MIBC}}{S_{\triangle MIC}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{21}}{192}}{\frac{\sqrt{33}}{32}} = \frac{\sqrt{77}}{22} = \sqrt{\frac{7}{44}}. \text{ Vậy } m+n=51.$$

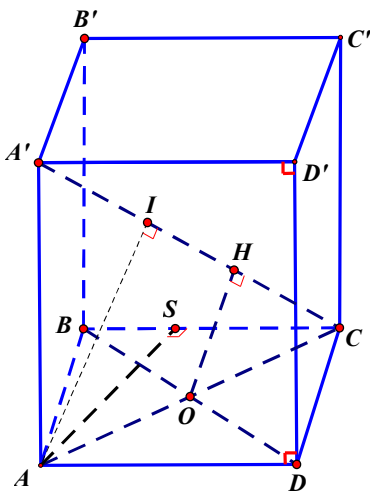
**Câu 11. (Đề thi vào ĐHSPhN 2025)** Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi và  $AA' = 6, AB = AC = 3$

a) Tính khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(BCC'B')$ .

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $BD$  và  $A'C$ .

**Lời giải**

**Đáp số:** a)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  b)  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ .



a) Kẻ  $AS \perp BC$ , khi đó  $\begin{cases} AS \perp BC \\ AS \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AS \perp (BCC'B')$ , nên khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(BCC'B')$  là đoạn  $AS$ .

Ta có:  $ABCD$  là hình thoi và  $AB = AC = 3$  nên tam giác  $ABC$  đều có  $AS$  là đường cao.

$$\text{Suy ra } AS = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

b) Kẻ  $OH \perp A'C$  khi đó  $BD \perp (AA'C'C)$ , nên  $BD \perp OH$ . Vậy  $OH$  là đoạn vuông góc chung của  $BD$  và  $A'C$ .

$$\text{Kẻ } AI \perp A'C, \text{ khi đó } OH = \frac{1}{2} AI.$$

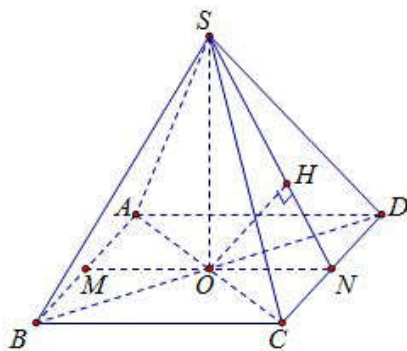
Xét  $\triangle AA'C$  vuông tại  $A$  có  $AI$  là đường cao

$$\text{Ta có } AI = \frac{AA' \cdot AC}{\sqrt{AA'^2 + AC^2}} = \frac{6 \cdot 3}{\sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \Rightarrow OH = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

**Câu 12. (Sở Vũng Tàu 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng 3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SD$ . (Kết quả làm tròn hai chữ số thập phân).

## Lời giải

Đáp án: 1,87



Gọi  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, CD$ ;  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên  $SN$ .

Vì  $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$

Ta có  $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp ON \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SON) \Rightarrow CD \perp OH$

Khi đó  $\begin{cases} CD \perp OH \\ OH \perp SN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O, (SCD)) = OH.$

Có  $ON = \frac{1}{2}AD = 1, OC = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}.$

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{9 - 2} = \sqrt{7}$$

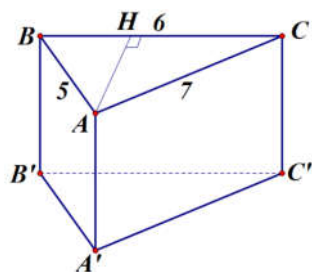
Tam giác  $SON$  vuông tại  $O$  nên  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{7} = \frac{8}{7} \Rightarrow OH = \sqrt{\frac{7}{8}}$

Vậy  $d(AB, SD) = 2OH = 2\sqrt{\frac{7}{8}} \approx 1,87.$

**Câu 13. (Đề Tham Khảo 2025)** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = 5, BC = 6, CA = 7$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $BC$  bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

## Lời giải

Đáp án: 4,9.



Kẻ đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$ , vì  $AH$  là đường vuông góc chung của  $BC$  và  $AA'$  nên  $AH$  là khoảng cách giữa  $BC$  và  $AA'$

ta có  $\frac{1}{2}AH \cdot BC = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S_{\triangle ABC}$

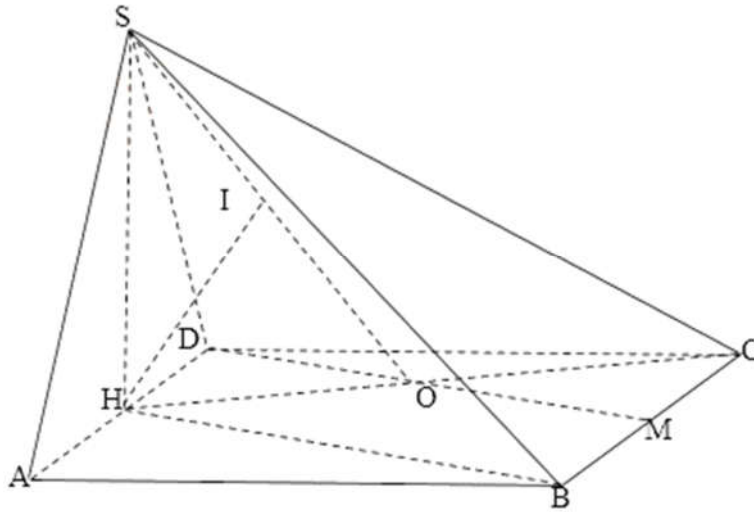
Suy ra  $AH = 2\sqrt{6} \approx 4,898979$  làm tròn hàng phần mười là  $AH \approx 4,9$

**Câu 14. (THPT Văn Giang - Hưng Yên 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = a, AD = 2a$ . Hình chiếu vuông góc của  $S$  trên mặt phẳng đáy là trung điểm  $H$  của

$AD$ , góc giữa  $SB$  mặt phẳng đáy ( $ABCD$ ) là  $45^\circ$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SD$  và  $BH$  theo  $a$  được kết quả là  $ma$ . Khi đó giá trị  $\frac{3}{5}m^2$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Đáp số:** 0,24



Hình chiếu vuông góc của  $S$  trên mặt phẳng đáy là trung điểm  $H$  của  $AD$ , góc giữa  $SB$  mặt phẳng đáy ( $ABCD$ ) là

$$\Rightarrow \widehat{(SB, (ABCD))} = \widehat{SBH} = 45^\circ$$

Có tạo  $AB = a, AH = a \Rightarrow SH = HB = \sqrt{2}a$

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC \Rightarrow HDCM$  là hình vuông tâm  $O \Rightarrow HC \perp DM, DM \parallel HB$

$$\Rightarrow HB \parallel (SDM)$$

$$\text{Có } \begin{cases} HC \perp DM \\ SH \perp DM \end{cases} \Rightarrow DM \perp (SHC)$$

$$\text{Kẻ } HI \perp SO \Rightarrow HI \perp (SDM) \Rightarrow d(HB, SD) = d(HB, (SMD)) = d(H, (SMD)) = HI$$

$$HO = \frac{1}{2}HC = \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow HI = \frac{SH \cdot HO}{\sqrt{SH^2 + HO^2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{2 + \frac{2}{4}}} = \frac{\sqrt{10}}{5}a$$

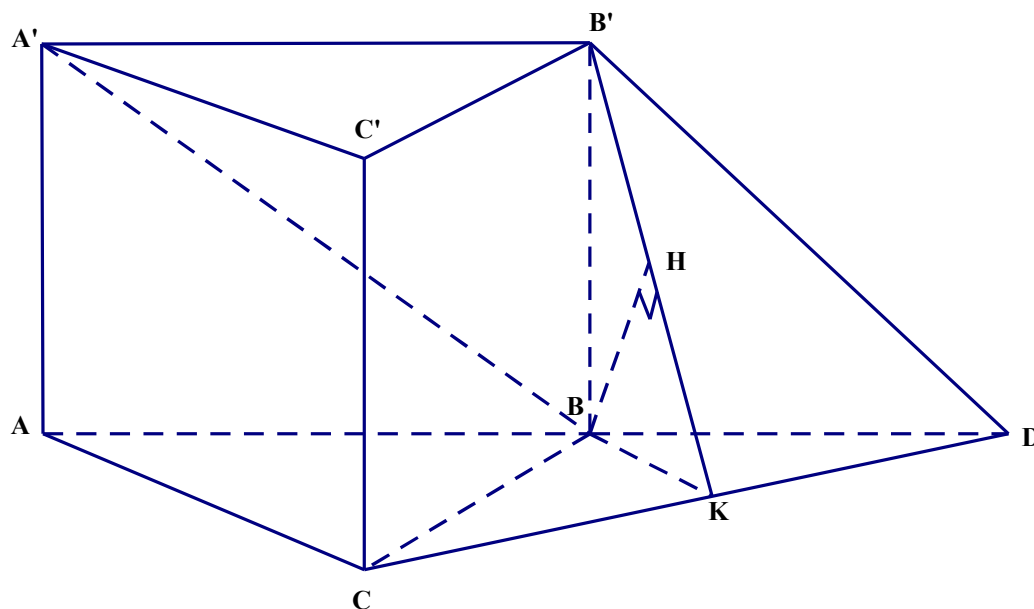
$$\Rightarrow d(HB, SD) = \frac{\sqrt{10}}{5}a \Rightarrow m = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \frac{3}{5}m^2 = 0,24$$

**Câu 15. (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025)** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $\sqrt{2}$ . Cạnh  $BA' = \sqrt{6}$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $A'B$  và  $B'C$  là (làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

**Đáp án:** 0,67.





Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $B$ . Khi đó dễ thấy  $A'B // B'D$ .

Dựng  $BK \perp CD$ , dựng  $BH \perp B'K$ .

Khi đó  $d(A'B, B'C) = d(A'B, (B'CD)) = BH$ .

Tam giác  $ACD$  vuông tại  $C$  vì  $BA = BC = BD$  (có  $B$  là trung điểm của  $AD$ ) nên  $K$  là trung điểm  $CD$  nên  $BK = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Mặt khác  $BB' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{6 - 2} = 2$ .

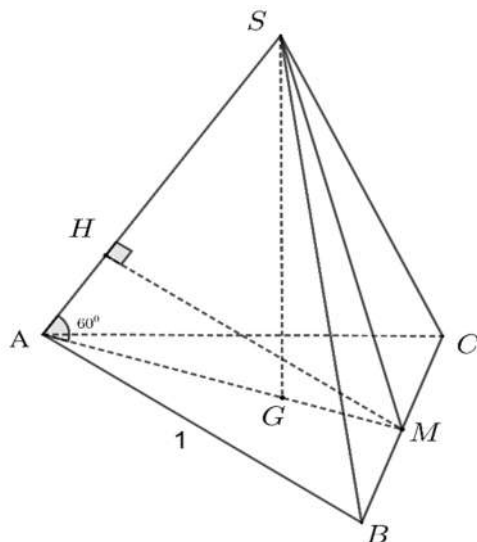
Khi đó  $d(A'B, B'C) = d(A'B, (B'CD)) = d(B, (B'CD)) = BH$

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BK^2} + \frac{1}{BB'^2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow BH = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \approx 0,67.$$

**Câu 16.** (THPT Nguyễn Đăng Đạo - Bắc Ninh 2025) Cho hình chóp đều  $S.ABC$  có cạnh đáy bằng 1. Góc giữa đường thẳng  $SA$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $BC$  (kết quả viết dưới dạng số thập phân).

**Lời giải**

**Đáp án:** 0,75.



Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ ,  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

Do  $S.ABC$  là hình chóp đều nên  $SG \perp (ABC)$ , do đó góc giữa đường thẳng  $SA$  và mặt phẳng  $(ABC)$  là  $\widehat{SAG}$ .

Kẻ  $MH \perp SA$  tại  $H$ .

Ta có  $AM \perp BC, SG \perp BC$  nên  $(SAM) \perp BC \Rightarrow MH \perp BC$ .

Do đó  $MH$  là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng  $SA$  và  $BC$ .

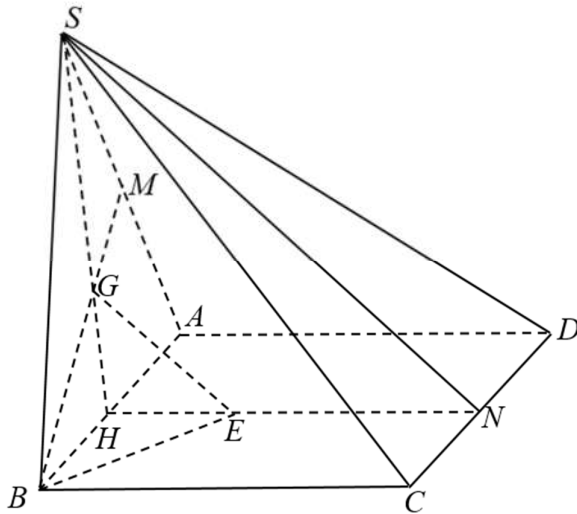
Xét tam giác  $AMH$  vuông tại  $H$ , có  $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\widehat{SAM} = 60^\circ$  nên  $MH = AM \cdot \sin 60^\circ = \frac{3}{4} = 0,75$ .

Vậy  $d(SA, BC) = MH = 0,75$ .

**Câu 17. (THPT Gia Bình - Bắc Ninh 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh bằng 1,  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Mặt bên  $SAB$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $CD$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $BM$  và  $SN$  bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

**Đáp án:** 0,33.



Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$ ,  $G$  là giao điểm của  $SH$  và  $BM$ .

Do  $(SAB) \perp (ABCD)$  nên  $SH \perp (ABCD)$ .

Trong mặt phẳng  $(SHN)$ , kẻ đường thẳng đi qua  $G$  và song song với  $SN$ , cắt  $HN$  tại  $E$ .

Ta có  $SN \parallel (BGE)$  nên  $d(BM; SN) = d(SN; (BGE)) = d(S; (BGE))$ .

Do  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SAB$  nên

$$\frac{d(S; (BGE))}{d(H; (BGE))} = \frac{SG}{HG} = 2 \Rightarrow d(S; (BGE)) = 2d(H; (BGE)).$$

$$\text{Ta có } HE = \frac{1}{3}HN = \frac{1}{3} \text{ nên } S_{\triangle BHE} = \frac{1}{2}BH \cdot HE \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{24}.$$

$$\text{Thể tích của tứ diện } GBHE \text{ là } V_{GBHE} = \frac{1}{3}GH \cdot S_{\triangle BHE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{24} = \frac{1}{144}.$$

$$\text{Mặt khác } V_{GBHE} = \frac{1}{3}d(H; (BGE)) \cdot S_{\triangle BGE}.$$

$$\text{Ta có } BE^2 = BH^2 + HE^2 - 2BH \cdot HE \cdot \cos 120^\circ = \frac{19}{36}, \quad BG = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$GE = \frac{1}{3}SN = \frac{1}{3}\sqrt{SH^2 + HN^2} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{4} + 1} = \frac{\sqrt{7}}{6}$$

Vì  $BE^2 = BG^2 + GE^2$  nên tam giác  $BGE$  vuông tại  $G$ ,  $S_{\triangle BGE} = \frac{1}{2} BG \cdot GE = \frac{\sqrt{21}}{36}$ .

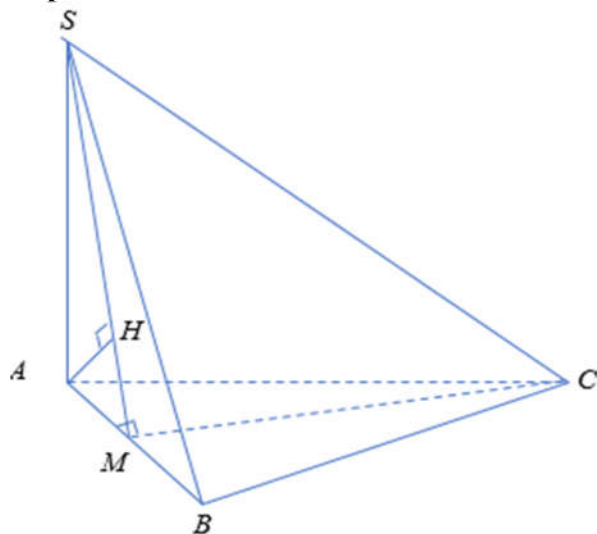
$$\text{Do đó } d(H; (BGE)) = \frac{3V_{GBHE}}{S_{\triangle BGE}} = \frac{3}{4\sqrt{21}}.$$

$$\text{Vậy } d(BM; SN) = 2 \cdot \frac{3}{4\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{14} \approx 0,33.$$

**Câu 18. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2025)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 2,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ ; Góc giữa đường thẳng  $SB$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Tính khoảng cách từ điểm  $B$  đến mặt phẳng  $(SCM)$ , kết quả làm tròn đến phần trăm.

**Lời giải**

**Đáp án:** 0,96.



Vì  $AB$  là hình chiếu của  $SB$  trên mặt phẳng  $(ABC)$ , nên góc giữa đường thẳng  $SB$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng góc  $\widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}$

Do  $M = AB \cap (SCM)$ ,  $M$  là trung điểm của  $AB \Rightarrow d(A, (SCM)) = d(B, (SCM))$

$$\text{Vì } \begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB),$$

Mặt khác  $CM \subset (SCM) \Rightarrow (SCM) \perp (SAB)$ , và  $(SCM) \cap (SAB) = SM$ , nên kẻ  $AH \perp SM$  tại  $H \Rightarrow AH \perp (SMB) \Rightarrow AH = d(A, (SMC)) = d(B, (SMC))$ .

$$\text{Xét tam giác } SAM \text{ vuông tại } A, \text{ ta có}$$

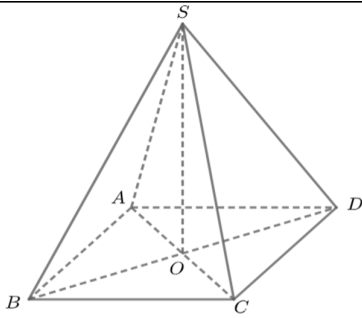
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{1}{1^2} = \frac{13}{12} \Rightarrow AH^2 = \frac{12}{13} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{12}{13}} \approx 0,96.$$

Vậy khoảng cách từ điểm  $B$  đến mặt phẳng  $(BCM)$  bằng 0,96

**Câu 19. (Sở Ninh Bình 2025)** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi tâm  $O$ ,  $SO$  vuông góc với mặt đáy. Biết cạnh hình thoi bằng 2024, góc  $BAD$  bằng  $120^\circ$ , khoảng cách từ điểm  $C$  đến mặt phẳng  $(SBD)$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Đáp án:** 1012.

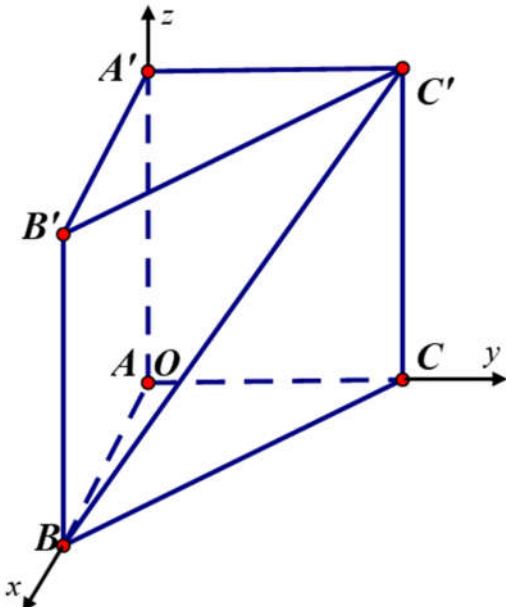


Ta có  $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ$ , mà đáy  $ABCD$  là hình thoi  $\Rightarrow \triangle ABC$  đều nên  $AC = AB = 1024$ .

$$\text{Có } \begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow d(C; (SBD)) = OC = \frac{AC}{2} = 1012.$$

**Câu 20. (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025)** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ ,  $AB = 5$ ,  $CC' = 10$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $BC'$  bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Lời giải**



**Đáp án:** 4,47.

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với  $A$  trùng với gốc tọa độ  $O$ , cạnh  $AB$  nằm trên trục  $Ox$ , cạnh  $AC$  nằm trên trục  $Oy$  và cạnh  $AA'$  nằm trên trục  $Oz$ .

Khi đó  $A \equiv O(0;0;0)$ ,  $B(5;0;0)$ ,  $C(0;5;0)$ ,  $A'(0;0;10)$ .

Vì  $ACC'A'$  là hình bình hành nên  $C'(0;5;10)$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AC} = (0;5;0); \overrightarrow{BC'} = (-5;5;10); [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC'}] = (50;0;25) \Rightarrow \left| [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC'}] \right| = 25\sqrt{5}.$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{AB} = (5;0;0) \text{ nên } [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC'}] \cdot \overrightarrow{AB} = 250.$$

$$\text{Do đó } d(AC, BC') = \frac{\left| [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC'}] \cdot \overrightarrow{AB} \right|}{\left| [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC'}] \right|} = \frac{250}{25\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \approx 4,47.$$

**Câu 21. (THPT Thuận Thành 1&2 - Bắc Ninh 2025)** Trong không gian, cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là điểm thay đổi trên  $SO$ . Khi biểu thức

$P = MS^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$  đạt giá trị nhỏ nhất thì tỉ số  $\frac{SM}{SO}$  bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

**Lời giải**

**Đáp án:** 0,8.

Xét  $\triangle MAC$ ,  $\triangle MBD$  với đường trung tuyến là  $MO$ .

Theo công thức đường trung tuyến, ta có

$$MO^2 = \frac{MA^2 + MC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}; MO^2 = \frac{MB^2 + MD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}$$

$$\text{Suy ra } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MO^2 + \frac{AC^2 + BD^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= MS^2 + 4MO^2 + \frac{AC^2 + BD^2}{2} = (SO - MO)^2 + 4MO^2 + \frac{AC^2 + BD^2}{2} \\ &= 5MO^2 - 2SO \cdot MO + SO^2 + \frac{AC^2 + BD^2}{2} \end{aligned}$$

Do  $SO, AC, BD$  không đổi nên ta có thể xem  $P$  là hàm số bậc 2 của  $MO$ .

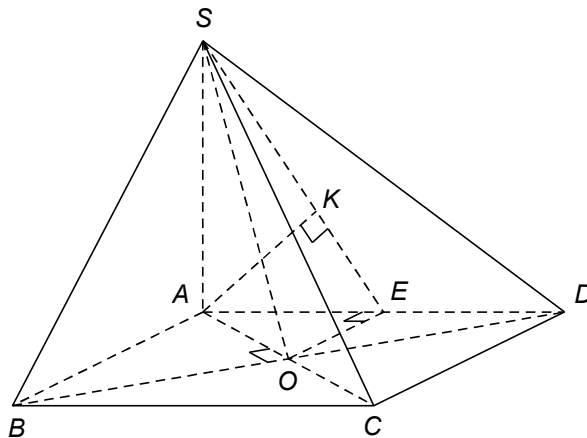
Áp dụng tính chất của hàm số bậc 2, ta có  $P$  đạt giá trị nhỏ nhất tại  $MO = \frac{SO}{5}$

$$\Rightarrow SO = 5MO \Leftrightarrow SM = 4MO \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

**Câu 22. (THPT Hùng Vương - Bình Thuận 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông tâm  $O$ , cạnh  $1cm$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy, góc  $\widehat{SBD} = 60^\circ$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SO$  bằng bao nhiêu  $cm$ ? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

**Đáp án:** 0,45.



Ta có  $\triangle SAB = \triangle SAD$ , suy ra  $SB = SD$ .

Lại có  $\widehat{SBD} = 60^\circ$ , suy ra  $\triangle SBD$  đều do đó:  $SB = SD = BD = \sqrt{2}(cm)$ .

Tam giác vuông  $SAB$ , có  $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 1(cm)$ .

Gọi  $E$  là trung điểm  $AD$ , suy ra  $OE \parallel AB \Rightarrow AB \parallel (SOE)$ .

Do đó  $d(AB, SO) = d(AB, (SOE)) = d(A, (SOE))$ .

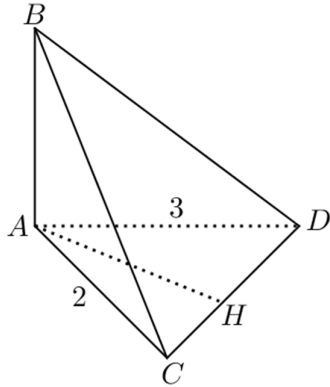
Kẻ  $AK \perp SE$ , mà  $AK \perp OE$  nên  $AK \perp (SOE)$ .

$$\text{Khi đó } d(A, (SOE)) = AK = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,45(cm).$$

**Câu 23.** (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa 2025) Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB \perp (ACD)$ , tam giác  $ACD$  vuông tại  $A$  và  $AC = 2$ ,  $AD = 3$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ .

**Lời giải**

**Đáp án:** 1,66



Kẻ  $AH \perp CD$  tại  $H$  (1)

Ta có  $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp AH$  tại  $A$  (2)

Từ (1) và (2) ta có  $d(AB, CD) = AH$ .

Mặt khác ta có  $\triangle ACD$  vuông tại  $A$  và có  $AH$  là chiều cao nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36} \Rightarrow AH = \frac{6\sqrt{13}}{13} \Rightarrow d(AB, CD) = \frac{6\sqrt{13}}{13} \approx 1,66.$$

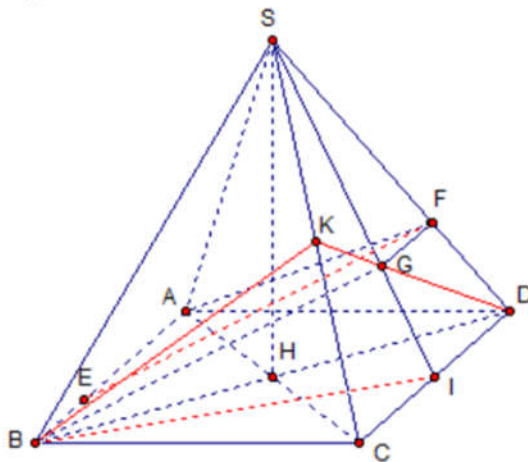
**Câu 24.** (Sở Vĩnh Phúc 2025) Cho khối chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có thể tích bằng  $\frac{16}{3}$  với  $AB = 2$ . Gọi

$G$  là trọng tâm của tam giác  $SCD$ , trên các cạnh  $AB$ ,  $SD$  lần lượt lấy các điểm  $E$ ,  $F$  sao cho  $EF$  song song với  $BG$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $DG$  và  $EF$  bằng  $\frac{m}{n}$  với  $m, n$

nguyên dương và  $\frac{m}{n}$  là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức  $2m - n$ .

**Lời giải**

**Đáp án:** -1.



Hai đường thẳng  $BG$  và  $EF$  song song nên chúng đồng phẳng,  $E \in AB$  vậy  $EF \subset (ABG)$ .

Điền  $F = SD \cap (ABG)$ .



Vì  $\begin{cases} AB // CD \\ AB \subset (SAB) \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) \text{ là đường thẳng qua } G \text{ và song song với } CD \text{ cắt } SD \text{ tại } F. \\ CD \subset (SCD) \end{cases}$

$F$ .

Gọi  $K$  là trung điểm của  $SC$ ,  $KB = KD$  suy ra tam giác  $KBD$  cân tại  $K$ .

$$SH = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{16}{4} = 4, SC = SD = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{4^2 + \sqrt{2}^2} = 3\sqrt{2}.$$

$$HK = \sqrt{\frac{HS^2 + HC^2}{2} - \frac{SC^2}{4}} = \sqrt{\frac{4^2 + \sqrt{2}^2}{2} - \frac{(3\sqrt{2})^2}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$S_{\Delta KBD} = \frac{1}{2} BD \cdot HK = \frac{1}{2} 2\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3; S_{\Delta BGD} = \frac{2}{3} S_{\Delta DGD} = 2.$$

$$\text{Mặt khác ta lại có: } V_{S.BDI} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{V_{S.BGD}}{V_{S.BID}} = \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.BGD} = \frac{2}{3} V_{S.BID} = \frac{8}{9}.$$

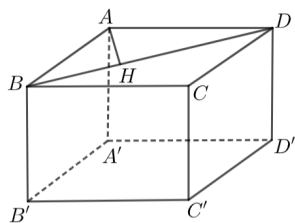
$$d(EF, DG) = d(EF, (BDG)) = d(F, (BDG)) = \frac{1}{3} d(S, (BDG)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3V_{S.BDG}}{S_{\Delta BDG}} = \frac{4}{9}.$$

Vậy  $2m - n = -1$ .

**Câu 25. (Sở Thanh Hóa 2025)** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = 10, AD = 20$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $BD$  bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

**Đáp án:** 8,94.



Kẻ  $AH \perp BD$ , khi đó tam giác  $ABD$  vuông tại  $A$

Ta có  $AA' \perp ABCD \Rightarrow AA' \perp AH$ , lại có  $AH \perp BD$

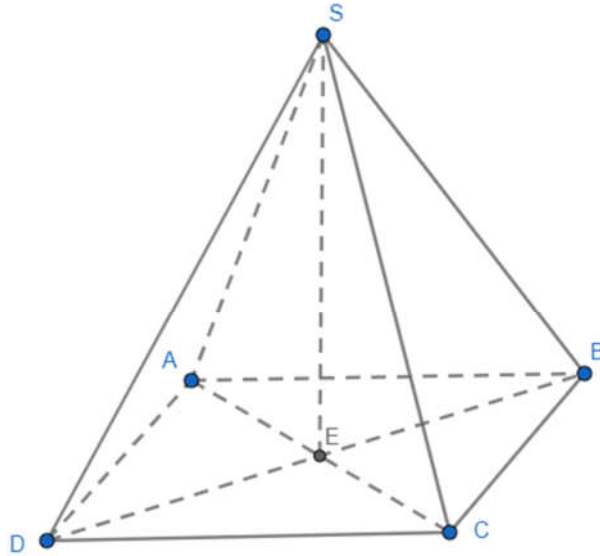
$$\Rightarrow d(AA'; BD) = AH$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = 4\sqrt{5} \approx 8,94.$$

**Câu 26. (Cụm trường THPT Hải Dương 2025)** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng 1 mét. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$  bằng bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

**Lời giải**

**Đáp án:** 0,82.



Gọi  $E$  là tâm hình vuông thì  $SE \perp (ABCD) \Rightarrow SE = \sqrt{SA^2 - EA^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SE = \frac{\sqrt{2}}{6} \Rightarrow V_{S.ADC} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

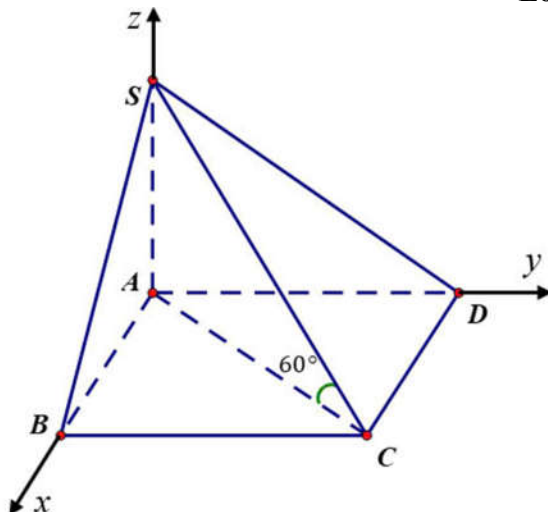
Tam giác  $SCD$  đều cạnh bằng 1 nên  $S_{\Delta SCD} = \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

Lại có  $AB \parallel (SCD)$

$$\Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = \frac{3 \cdot V_{S.ACD}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,82.$$

**Câu 27. (THPT Trần Phú - Vĩnh Phúc 2025)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật như hình với  $AB = 2\sqrt{2}$  và  $BC = 2$ . Cạnh  $SA$  vuông góc với mặt đáy và góc giữa cạnh bên  $SC$  với đáy là  $60^\circ$ . Tính khoảng cách từ điểm  $C$  đến  $(SBD)$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải**



**Đáp án:** 1.58.

Vì  $SA \perp (ABCD)$  nên  $AC$  là hình chiếu  $SC$  lên mặt phẳng  $(ABCD)$ . Do đó

$$\left(\widehat{SC, (ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC, AC}\right) = \widehat{SCA} = 60^\circ. \text{ Khi đó } SA = AC \cdot \tan 60^\circ = 6$$

Trên hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với gốc tọa độ  $O \equiv A$ , cạnh  $AB$  nằm trên trục  $Ox$ , cạnh  $AD$  nằm trên trục  $Oy$  và cạnh  $AS$  nằm trên trục  $Oz$ .

Vì  $\overrightarrow{AB}$  và  $\vec{i}$  cùng hướng và  $AB = 2\sqrt{2}$  nên  $B(2\sqrt{2}; 0; 0)$ ,  $\overrightarrow{AD}$  và  $\vec{j}$  cùng hướng và  $AD = 2$

nên  $D(0; 2; 0)$ . Do đó  $C(2\sqrt{2}; 2; 0)$  và  $\overrightarrow{AS}$  và  $\vec{k}$  cùng hướng và  $AS = 6$  nên  $S(0; 0; 6)$ .

Khi đó  $\overrightarrow{SB} = (2\sqrt{2}; 0; -6)$ ,  $\overrightarrow{SD} = (0; 2; -6)$  và  $\vec{n} = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD}] = (12; 12\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$ .

Phương trình  $(SBD)$  đi qua  $S$  và có VTPT là  $\vec{n} = (12; 12\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$  có phương trình là

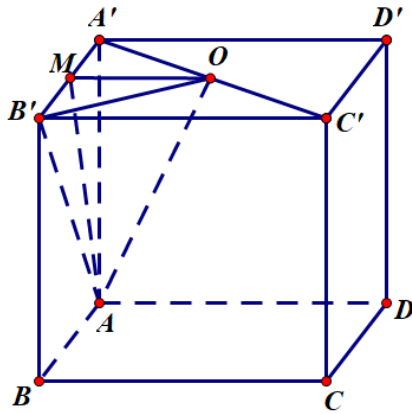
$$(SBD): 3x + 3\sqrt{2}y + \sqrt{2}z - 6\sqrt{2} = 0.$$

$$\text{Do đó } d(C, (SBD)) = \frac{|6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot 0 - 6\sqrt{2}|}{\sqrt{9 + 18 + 2}} = \frac{6\sqrt{58}}{29} \approx 1.58$$

**Câu 28. (Sở Vĩnh Phúc 2025)** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có mặt đáy  $ABCD$  là hình vuông, cạnh bên  $AA' = 8$ . Gọi  $M, O$  lần lượt là trung điểm của  $A'B'$  và  $A'C'$ . Biết thể tích tứ diện  $AMOB'$  bằng 18, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AM$  và  $CO$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

**Đáp án: 3,22.**



Gọi  $x$  là độ dài của cạnh đáy.

Ta có:

$$V_{AMOB'} = \frac{1}{3} \cdot AA' \cdot \frac{1}{2} MO \cdot MB' = \frac{x^2}{3}. \text{ Suy ra } \frac{x^2}{3} = 18 \Rightarrow x = \sqrt{54}.$$

Chọn hệ trục  $Oxyz$  sao cho gốc tọa độ là  $A$ , điểm  $B$  thuộc tia  $Ox$ ;  $D$  thuộc tia  $Oy$ ;  $A'$  thuộc tia  $Oz$ .

$$\text{Khi đó ta có } A(0; 0; 0); M\left(\frac{\sqrt{54}}{2}; 0; 8\right); O\left(\frac{\sqrt{54}}{2}; \frac{\sqrt{54}}{2}; 8\right); C(\sqrt{54}; \sqrt{54}; 0).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\left(\frac{\sqrt{54}}{2}; 0; 8\right); \overrightarrow{OC}\left(\frac{\sqrt{54}}{2}; \frac{\sqrt{54}}{2}; -8\right); \overrightarrow{AC}(\sqrt{54}; \sqrt{54}; 0)$$

$$\text{Ta có } [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OC}] = \left(-4\sqrt{54}; 8\sqrt{54}; \frac{54}{4}\right);$$

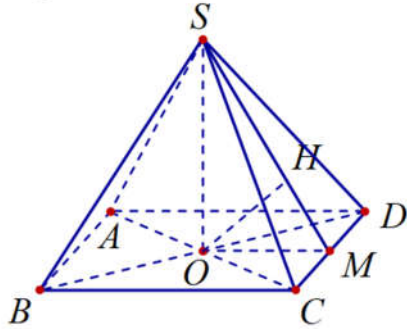
$$\Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OC}] \cdot \overrightarrow{AC} = 216.$$

$$\text{Vậy } d = \frac{[\overline{AM}, \overline{OC}][\overline{AC}]}{[\overline{AM}, \overline{OC}]} \approx 3,22.$$

**Câu 29. (Cụm trường Hưng Yên 2025)** Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $2a$ , cạnh bên bằng  $3a$ . Khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  bằng  $a\sqrt{\frac{b}{c}}$ , với phân số  $\frac{b}{c}$  tối giản,  $b > 0, c > 0$ . Tính  $T = 3c + 2b$ .

**Lời giải**

**Đáp án:** 20.



Gọi  $O$  là tâm của đáy,  $M$  là trung điểm của  $CD$ ,  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên  $SM$ . Khi đó  $d(O, (SCD)) = OH$ .

$$d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD)) = 2OH.$$

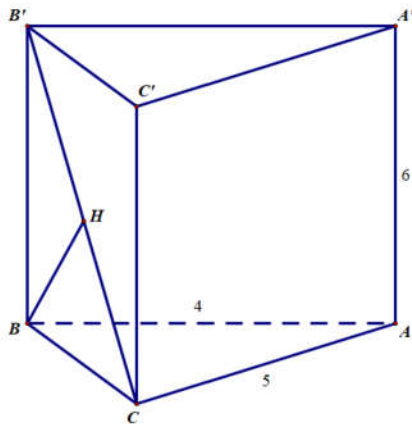
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SD^2 - OD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{9a^2 - 2a^2} = \frac{8}{7a^2} \Rightarrow OH = a\sqrt{\frac{7}{8}} \Rightarrow \begin{cases} b=7 \\ c=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(A, (SCD)) = a\sqrt{\frac{7}{2}} \Rightarrow T = 20.$$

**Câu 30. (Cụm trường Hải Dương 2025)** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $AB = 4$ ,  $AC = 5$ ,  $AA' = 6$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CB'$  bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**Lời giải**

**Đáp án:** 2,7



Dựng  $BH \perp CB'$ .

$$\text{Vì } \left. \begin{matrix} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB \perp (BCC'B') \Rightarrow AB \perp BH.$$

Suy ra  $BH$  là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau  $AB$  và  $CB'$  hay  $d(AB, CB') = BH$ .

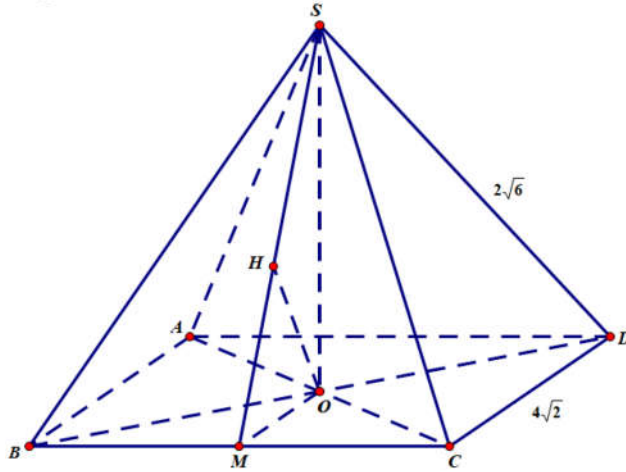
$$\text{Để thấy } BB' = 6, BC = 3 \Rightarrow \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BB'^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(AB, CB') = \frac{6\sqrt{5}}{5} \approx 2,7.$$

**Câu 31. (Sở Thừa Thiên Huế 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông có cạnh bằng  $4\sqrt{2}$  các cạnh bên bằng nhau và cùng bằng  $2\sqrt{6}$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AD$  và  $SC$ .

**Lời giải**

**Đáp án: 4.**



Gọi  $O = AC \cap BD$ , chóp  $S.ABCD$  là chóp tứ giác đều nên  $SO \perp (ABCD)$ .

$$\left. \begin{array}{l} AD \parallel BC \\ BC \subset (SBC) \end{array} \right\} \Rightarrow AD \parallel (SBC).$$

$$\text{Vậy } d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC)).$$

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ , dựng  $OH \perp SM$ .

Để thấy  $OH \perp BC$  (vì  $BC \perp (SOM)$ ).

Ta có  $SM = \sqrt{SC^2 - MC^2} = 4$ ,  $OM = 2\sqrt{2}$ ,  $SO = 2\sqrt{2}$  vậy tam giác  $SOM$  vuông cân đỉnh

$$O \Rightarrow OH = \frac{1}{2}SM = 2.$$

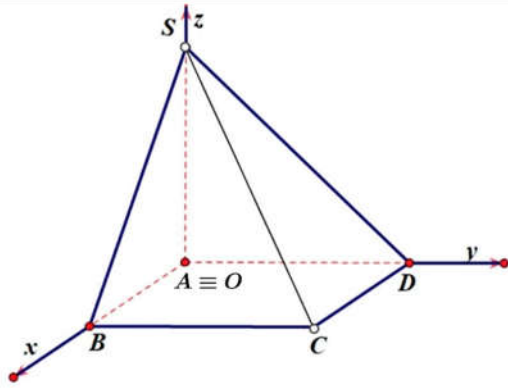
$$\text{Vậy } d(AD, SC) = 4.$$

**Câu 32. Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh bằng 3,  $SA \perp (ABCD)$ , số đo của góc nhị diện  $[S, BC, A]$  bằng  $30^\circ$ . Khoảng cách giữa hai đường

thẳng  $SC$  và  $BD$  bằng  $\frac{3\sqrt{14}}{n}$ . Giá trị của  $n$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Đáp án: 14.**



Ta có  $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ ;  $ABCD$  là hình vuông  $\Rightarrow AB \perp BC$ . Suy ra  $SB \perp BC$ .

Từ đó ta có  $\widehat{SBA}$  là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện  $[S, BC, A]$ . Theo bài ra thì  $\widehat{SBA} = 30^\circ$ .

Xét tam giác  $SAB$  vuông tại  $A$  ta có:  $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = 3 \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{3}$ .

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  sao cho  $A \equiv O(0;0;0)$ ;  $B(3;0;0)$ ;  $D(0;3;0)$ ;  $S(0;0;\sqrt{3})$ ;  $C(3;3;0)$ .

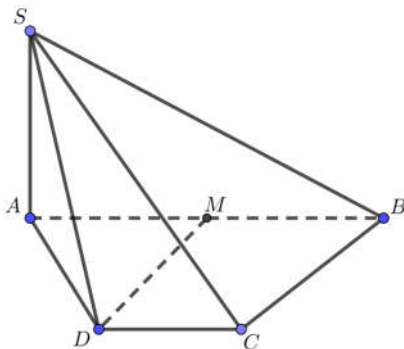
Khi đó  $\overrightarrow{BD} = (-3;3;0)$ ;  $\overrightarrow{SC} = (3;3;-\sqrt{3})$ ;  $\overrightarrow{SD} = (0;3;-\sqrt{3})$ .

Suy ra  $[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}] = (-3\sqrt{3}; -3\sqrt{3}; -18)$ .

Ta có  $d(BD, SC) = \frac{|\overrightarrow{SD} \cdot [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}]|}{\|[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}]\|} = \frac{|-9\sqrt{3} + 18\sqrt{3}|}{\sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2 + 18^2}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$ .

Do  $d(BD, SC) = \frac{3\sqrt{14}}{n} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$  nên  $n = 14$ .

**Câu 33.** (Cụm trường Nguyễn Hiền - Lê Hồng Phong - Quảng Nam 2025) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với  $AB = 2a$ ,  $AD = DC = CB = a$  và  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy  $SA = 3a$  (tham khảo hình vẽ).



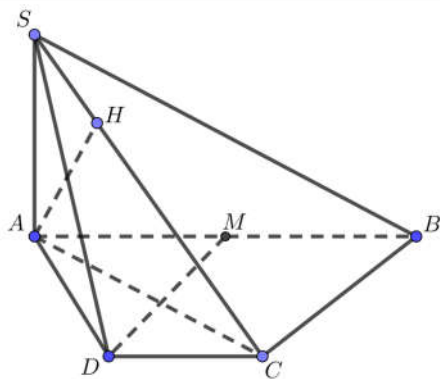
Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SB$  và  $DM$  bằng  $\frac{xa}{y}$  (với  $\frac{x}{y}$  tối giản). Tính  $3x + 2y$ ?

**Lời giải**

**Đáp án:** 17.

Ta có  $DM \parallel BC$  nên suy ra  $DM \parallel (SBC)$





Suy ra  $d(DM, SB) = d(DM, (SBC)) = d(M, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC))$ .

Xét tam giác  $\triangle ACB$ , có  $AM = MB = MC = \frac{1}{2}AB$  nên suy ra  $\triangle ACB$  vuông tại  $C$ .

Do đó

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp BC \\ AC \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAC)$$

Lại có  $BC \subset (SBC)$  nên suy ra  $(SBC) \perp (SAC)$  theo giao tuyến  $SC$ .

$$\text{Kẻ } AH \perp SC \Rightarrow AH = d(A, (SBC)) = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{3a}{2}.$$

$$\Rightarrow d(DM, SB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a}{4}.$$

Vậy  $x = 3, y = 4$

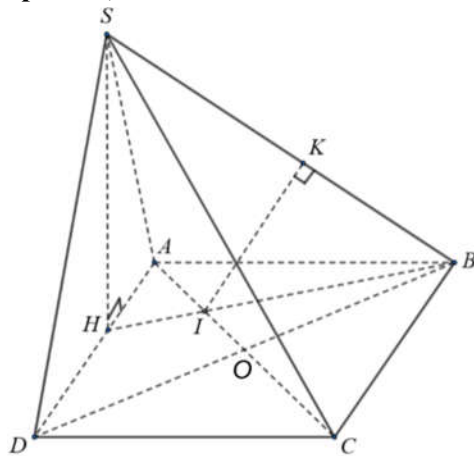
$$\Rightarrow x = 3, y = 4$$

$$\Rightarrow 3x + 2y = 9 + 8 = 17.$$

**Câu 34. (THPT Nông Công 3 - Thanh Hóa 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật tâm  $O$ ,  $AB = 2$ ,  $BC = 2\sqrt{3}$ . Tam giác  $OAS$  cân tại  $S$ , mặt phẳng  $(SAD)$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ , góc giữa  $SD$  và  $(ABCD)$  bằng  $60^\circ$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SB$  và  $AC$ ?

**Lời giải**

**Đáp án:** 1,5.



$$\text{Kẻ } SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo,  $I$  là trung điểm của  $AO$

$$AB = 2; BC = 2\sqrt{3} \Rightarrow AC = 4 \Rightarrow AO = BO = 2$$

$$\Rightarrow \triangle ABO \text{ là tam giác đều} \Rightarrow BI \perp AO \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} SI \perp AO \\ SH \perp AO \end{cases} \Rightarrow (SHI) \perp AO \Rightarrow AO \perp HI \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow H, I, B$  thẳng hàng  $\Rightarrow AO \perp HB$

Lại có  $AO \perp SH \Rightarrow (SHB)$  là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng  $AO$

$\Rightarrow (SHB) \perp AC$ , từ  $I$ , kẻ  $IK \perp SB \Rightarrow IK$  là đoạn vuông góc chung của  $AC$  và  $SB$

Ta có  $BI = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$ ,  $\widehat{SDH} = 60^\circ$ ,  $\widehat{ABH} = 30^\circ$  (do tam giác  $AOB$  đều)

$$\tan 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \cdot \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow DH = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{SH}{DH} \Rightarrow SH = DH \cdot \tan 60^\circ = 4, \quad BH = \sqrt{AH^2 + AB^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}; \quad SB = \sqrt{SH^2 + BH^2} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

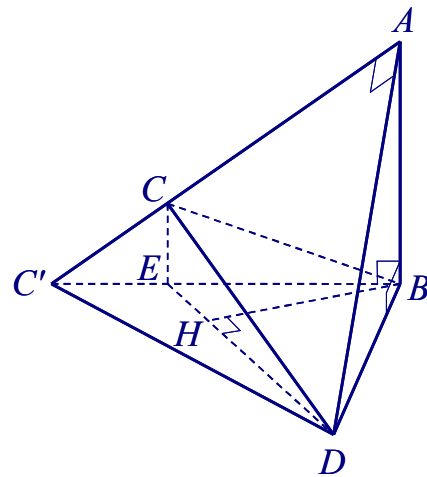
Xét  $\triangle BKI \sim \triangle BHS$ , ta có

$$\frac{BI}{BS} = \frac{KI}{SH} \Rightarrow KI = \frac{BI \cdot SH}{BS} = \frac{3}{2}.$$

**Câu 35. (THPT Hà Trung - Thanh Hóa 2025)** Cho tứ diện  $ABCD$  có độ dài các cạnh  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ ,  $AD = 6$  và các góc  $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$ ,  $\widehat{CAD} = 90^\circ$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ . (kết quả làm tròn đến phần trăm)

**Lời giải**

**Đáp số 2,38**



Xét tam giác  $ABD$  có  $AB = 3$ ,  $AD = 6 = 2AB$ ,  $\widehat{BAD} = 60^\circ$  nên  $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ = AB^2 + AD^2 - 2AB^2 = AD^2 - AB^2 = 27$

Suy ra tam giác  $ABD$  vuông tại  $B$ .

Gọi  $C'$  là điểm thỏa mãn  $\overline{AC'} = \frac{3}{2} \overline{AC}$ . Khi đó  $AC' = AD = 6 = 2AB$ .

Vì  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  nên tam giác  $ABC'$  cũng vuông tại  $B$ . Suy ra  $AB \perp (BDC')$ .

Gọi  $E$  thỏa mãn  $\overline{BE} = \frac{2}{3} \overline{BC'}$ , suy ra  $CE \parallel AB \Rightarrow AB \parallel (CDE)$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $B$  trên  $DE$ . Suy ra  $BH \perp (CDE)$ .

Do đó  $d(AB, CD) = d(AB, (CDE)) = d(B, (CDE)) = BH$ .

Ta có  $BD = BC' = AB \cdot \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$ , tam giác  $ADC'$  vuông cân tại  $A$  nên  $DC' = 6\sqrt{2}$ .

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{DBC'} = \frac{BD^2 + BC'^2 - DC'^2}{2BD \cdot BC'} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sin \widehat{DBC'} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

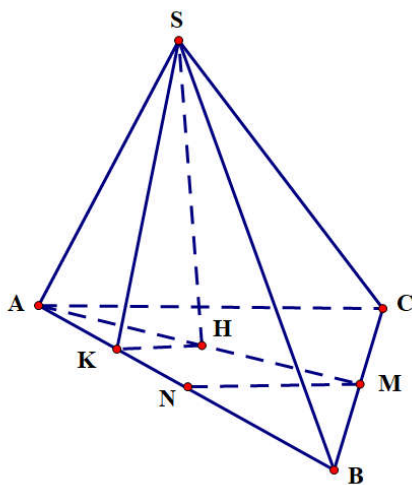
Ta có  $BE = \frac{2}{3}BC' = 2\sqrt{3}$ , suy ra  $DE = \sqrt{BD^2 + BE^2 - 2BD \cdot BE \cdot \cos \widehat{DBC'}} = \sqrt{51}$ .

$$S_{BDE} = \frac{1}{2}BD \cdot BE \cdot \sin \widehat{DBC'} = \frac{1}{2}3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 6\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } BH = \frac{2S_{BDE}}{DE} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{51}} = \frac{4\sqrt{102}}{17}. \text{ Hay } d(AB, CD) = \frac{4\sqrt{102}}{17} \approx 2,38$$

**Câu 36. (THPT Phúc Thọ - Hà Nội 2025)** Cho chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $M$  là trung điểm của  $BC$ , hình chiếu vuông góc của  $S$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trung điểm của  $AM$ . Cho biết  $AB = 2$ ,  $AC = 2\sqrt{3}$  và mặt phẳng  $(SAB)$  tạo với mặt phẳng  $(ABC)$  một góc  $60^\circ$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $BC$ .

**Lời giải**



Gọi  $H$  là trung điểm của  $AM$  và  $N, K$  lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ  $M, H$  xuống cạnh  $AB$

$$\text{Ta có: } SH \perp (ABC), MN = \frac{AC}{2} = \sqrt{3} \text{ và } HK = \frac{MN}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} SH \perp AB \\ HK \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHK)$$

$$\text{và } (SHK) \cap (SAB) = SK; (SHK) \cap (ABC) = HK$$

do đó góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC), (SAB)$  là  $\widehat{SKH} = 60^\circ$

$$SH = KH \cdot \tan \widehat{SKH} = \frac{3}{2}$$

Qua  $A$  kẻ đường thẳng  $a$  song song  $BC$ . Gọi mặt phẳng  $(P)$  chứa đường thẳng  $a$  và  $SA$

$$\text{Ta có } d(SA, BC) = d(BC, (P)) = d(M, (P))$$

$$2d(H, a) = d(M, a) = d(A, BC) = \sqrt{3} \Rightarrow d(H, a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

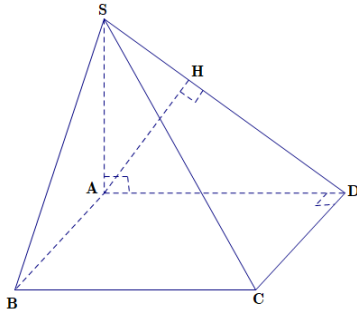
$$d(M, (P)) = 2d(H, (P)) = 2 \frac{(d(H, a)) \cdot SH}{\sqrt{(d(H, a))^2 + SH^2}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } d(SA, BC) = \frac{3}{2} = 1,5$$

**Câu 37. (Sở Bình Phước 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh bằng 1,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $SA = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**Lời giải**

**Đáp án: 0,5**



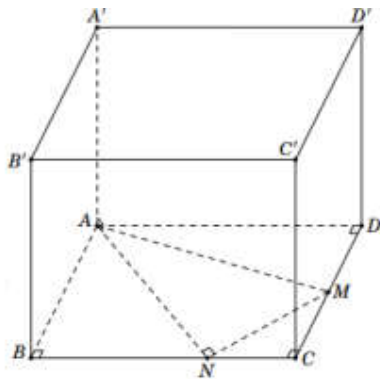
Trong  $(SAD)$ , gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  đến đường thẳng  $SD$ . Khi đó  $AH \perp SD$  (1).

Mặt khác  $DC \perp (SAD) \Rightarrow DC \perp AH$  (2).

Từ (1), (2)  $\Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + SD^2}} = 0,5$ .

**Câu 38. (Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai 2025)** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = 6, AD = 9$ . Lấy  $M$  là trung điểm của  $CD, N$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $NB = 2NC$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $MN$  bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

**Cách giải:**



Ta có

$$BN = 6, CN = 3, CM = DM = 3;$$

$$AN = 6\sqrt{2}, MN = 3\sqrt{2}, AM = 3\sqrt{10};$$

Do  $AM^2 = 90 = AN^2 + MN^2$  nên tam giác  $AMN$  vuông tại  $N$ .

Vì  $AN \perp AA'$  và  $AN \perp MN$  nên  $AN$  là đoạn vuông góc chung của  $AA'$  và  $MN$ .

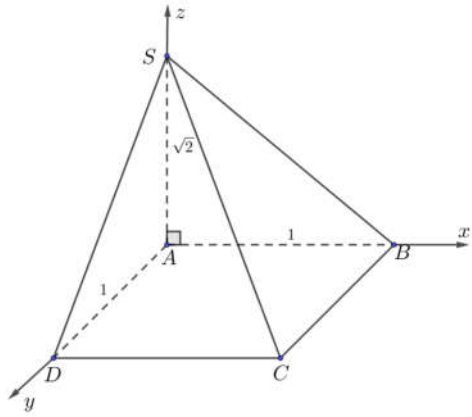
$$\text{Suy ra } d(AA', MN) = AN = 6\sqrt{2} \approx 8,49$$

**Câu 39. (Sở Hậu Giang 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh 1,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = \sqrt{2}$ .

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $SC$  và  $BD$  (làm tròn đến hàng phần mười).

**Lời giải**

**Đáp án: 0,5**



Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với  $O$  trùng  $A$ , các tia  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt trùng với các tia  $AB, AD, AS$ .

Ta xác định được tọa độ các điểm như sau:  $S(0;0;\sqrt{2}), B(1;0;0), C(1;1;0); D(0;1;0)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SC} = (1;1;-\sqrt{2}), \overrightarrow{BD} = (-1;1;0)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BD}] = (1;1;\sqrt{2})$$

$(P)$  là mặt phẳng chứa đường thẳng  $SC$  và song song với đường thẳng  $BD$  nên  $\vec{n}_p = (1;1;\sqrt{2})$

$(P)$  đi qua  $S(0;0;\sqrt{2})$  và nhận  $\vec{n}_p = (1;1;\sqrt{2})$  là VTPT có phương trình là

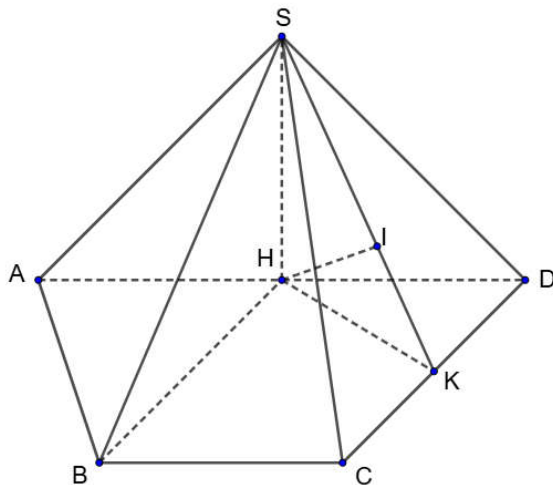
$$1(x-0) + 1(y-0) + \sqrt{2}(z-\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$$

$$d(BD, SC) = d(BD, (P)) = d(B, (P)) = \frac{|1-2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2}} = 0,5$$

**Câu 40. (Sở Lai Châu 2025)** Cho khối chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ ,  $AB = BC = 1$ ,  $AD = 2$ . Hình chiếu vuông góc của  $S$  lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm  $H$  của  $AD$  và  $SH = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . Tính khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

**Đáp án: 0,61**



Ta có:  $BC \parallel HD$  và  $BC = HD = 1$  nên  $BCDH$  là hình bình hành, suy ra

$$BH \parallel CD \Rightarrow BH \parallel (SCD) \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(H, (SCD)).$$

Kẻ  $HK \perp CD$  và  $HI \perp SK$ . Từ đó suy ra  $CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp HI$ .

Suy ra  $HI \perp (SCD)$  hay  $d(H, (SCD)) = HI$ .

Nhận thấy  $AB = HC = HD = 1$  và  $CH \perp HD$ , nên  $\Delta HCD$  vuông cân tại  $H$ , suy ra  $HK = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\Rightarrow HI = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 0,61.$$

**Câu 41.** (THPT Nguyễn Quốc Trinh - Hà Nội 2025) Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có  $AC = 1, BC = 2, \widehat{ACB} = 120^\circ$ . Tính khoảng cách từ điểm  $C$  đến mặt phẳng  $(ABB'A')$ ? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

**Lời giải**

**Đáp số:** 0,7.

Dựng  $CH \perp AB$  trong  $(ABC)$ .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp AA' (AA' \perp (ABC), CH \subset (ABC)) \\ AB \cap AA' = A \text{ trong } (ABB'A') \end{cases}$$

$\Rightarrow CH \perp (ABB'A')$  tại  $H$

$$\Rightarrow d(C, (ABB'A')) = CH$$

$$\text{Ta có: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ta có: } AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \widehat{ACB} = 7$$

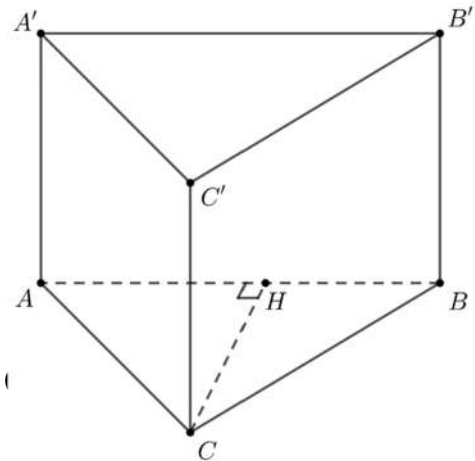
$$\Leftrightarrow AB^2 = 7.$$

$$\text{Suy ra } AB = \sqrt{7}.$$

$$\text{Ta có: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot AB$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot \sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow CH = \frac{\sqrt{21}}{7} \approx 0,7.$$



**Câu 42.** (Cụm chuyên môn Đak Lak 2025) Cho lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = 2, AA' = 3$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $CC'$  bằng bao nhiêu? (Làm tròn đến hàng phần trăm)

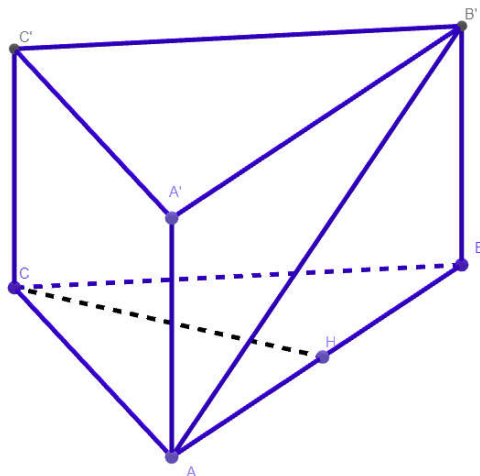
**Lời giải**

**Đáp số:** 1,73

Kẻ  $CH$  vuông góc với  $AB$  tại  $H$ . Mà  $CH$  vuông góc với  $BB'$  suy ra  $CH$  vuông góc với

$$(AA'BB') \Rightarrow CH = d(C, AA'BB') = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$





Vì  $CC' \parallel (AA'BB') \Rightarrow d(CC'; AB') = d(C; (AA'BB')) = CH = \sqrt{3} \approx 1,73$ .

- Câu 43. (Sở Hải Phòng 2025)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$   $m.a$ ;  $m \in \mathbb{R}$ . Khi đó giá trị của  $m$  là (làm tròn đến hàng phần trăm), biết  $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

#### Lời giải

Gọi  $E$  trung điểm  $BC$  thì  $BC \perp AE$  (vì  $ABC$  đều).

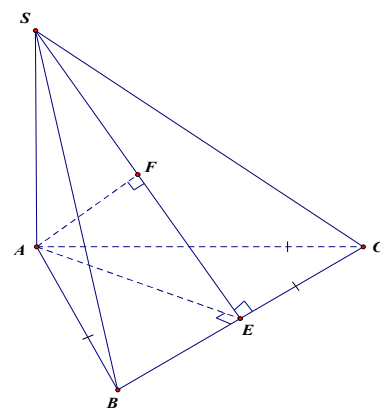
$$\text{Có } \begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AE \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAE),$$

mà  $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAE)$  hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến  $SE$ , trong  $mp(SAE)$  dựng  $AF \perp SE$  tại  $F$ . Suy ra  $AF \perp (SBC)$ . Vậy  $d(A, (SBC)) = AF$ .

Trong tam giác vuông  $SAE$  có

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{2}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

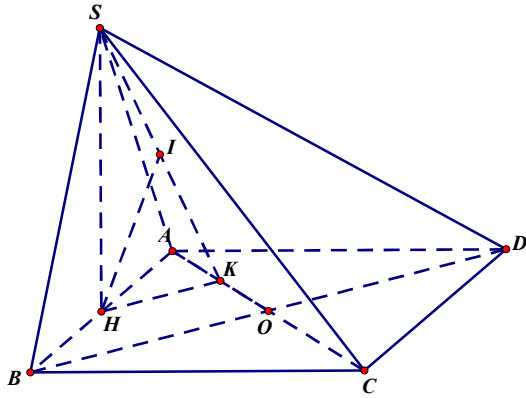
$$\text{Kết luận } d(A, (SBC)) = AF = \frac{a\sqrt{2}}{2} \approx 0,71a.$$



- Câu 44. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa 2025)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh  $2\sqrt{5}$ , tâm  $O$  và  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ , mặt bên  $SAB$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi  $H$  là trung điểm cạnh  $AB$ . Tính bình phương khoảng cách từ  $H$  đến mặt phẳng  $(SAC)$ .

#### Lời giải

**Đáp án: 3**



Hạ  $HK \perp AC$  ( $K$  là trung điểm của  $AO$ ) và hạ  $HI \perp SK$  thì  $HI$  là khoảng cách từ  $H$  đến mặt phẳng  $(SAC)$ .

Tính  $HI$ .

Ta có :  $BD = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{15}$  nên  $BO = \sqrt{15}$ . Vậy  $HK = \frac{1}{2}BO = \frac{\sqrt{15}}{2}$ .

$SH$  là chiều cao trong tam giác đều  $SAB$  nên  $SH = \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{15}$ .

Nên  $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$ . Vậy  $HI^2 = 3$ .

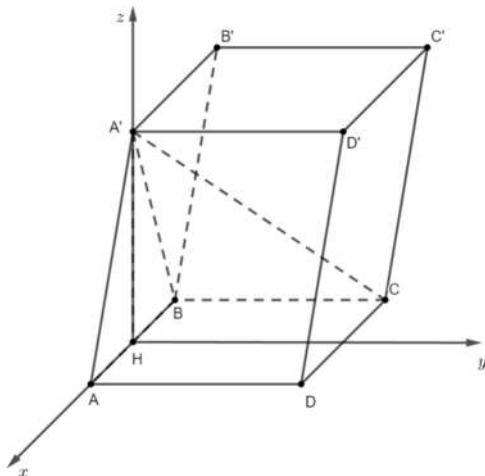
**Câu 45. (Cụm THPT Hoàn Kiếm - Hai Bà Trưng - Hà Nội 2025)** Cho hình lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = 1$ ,  $AD = 2$ , tam giác  $A'AB$  cân tại  $A'$  và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Khoảng cách từ  $D$  đến  $(A'BC)$  bằng  $\frac{2}{5}$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $A'B$  và  $AC$  (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

**Đáp án: 0,39**

Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$ .

Do tam giác  $A'AB$  cân tại  $A'$  và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên  $A'H \perp (ABCD)$ .



Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ.

Ta có  $H(0;0;0)$ ,  $D\left(\frac{1}{2}; 2; 0\right)$ ,  $B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ ,  $C\left(-\frac{1}{2}; 2; 0\right)$

Đặt  $A'H = c$  ( $c > 0$ ).

Do đó  $A'(0;0;c)$ .

Khi đó  $\overrightarrow{A'B} = \left(-\frac{1}{2}; 0; -c\right)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (0; 2; 0)$ .

Suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(A'BC)$  là  $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{BC}] = (2c; 0; -1)$ .

Phương trình mặt phẳng  $(A'BC)$  là  $2c\left(x + \frac{1}{2}\right) - z = 0 \Leftrightarrow 2cx - z + c = 0$ .

Do khoảng cách từ  $D$  đến  $(A'BC)$  là  $\frac{2}{5}$  nên ta có

$$\frac{\left|2c \cdot \frac{1}{2} + c\right|}{\sqrt{4c^2 + 1}} = \frac{2}{5} \Rightarrow 25 \cdot 4c^2 = 4(4c^2 + 1) \Leftrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

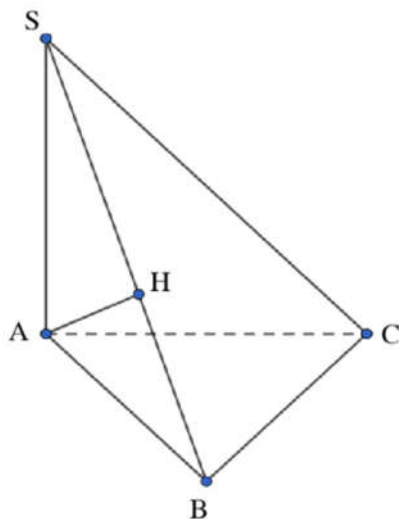
Vậy  $A' \left(0; 0; \frac{1}{\sqrt{21}}\right)$ .

Ta có  $\overrightarrow{A'B} = \left(-\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{\sqrt{21}}\right)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (-1; 2; 0)$ ;  $\overrightarrow{BC} = (0; 2; 0)$ .

$$\text{Khi đó } d(A'B, AC) = \frac{\left|[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{BC}\right|}{\left|[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{AC}]\right|} = \frac{\sqrt{26}}{13} = 0,39.$$

**Câu 46. (Sở Gia Lai 2025)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông cân tại  $B$ ,  $2SA = AC = 2\sqrt{6}$  và  $SA$  vuông góc với đáy. Khoảng cách từ  $A$  đến  $(SBC)$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**



**Đáp số: 2.**

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \\ AB, SA \subset (SAB), AB \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

Trong  $(SAB)$  kẻ  $AH \perp SB$  (1)

Mà  $BC \perp (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$  (2)

Có  $BC, SB \subset (SBC), BC \cap SB = B$  (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra  $AH \perp (SBC)$ .

Khi đó  $d(A, (SBC)) = AH$

Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $B$  nên  $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}$

Tam giác  $SAB$  vuông tại  $A$  có  $AH$  là đường cao nên

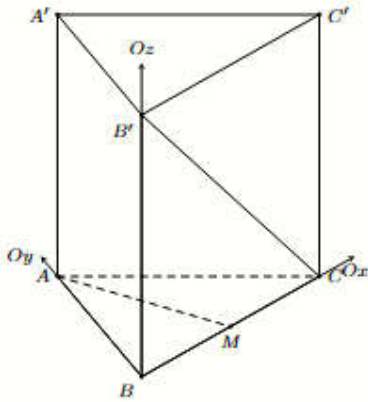
$$AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{3})^2}} = 2$$

Vậy  $d(A, (SBC)) = AH = 2$ .

**Câu 47. (THPT Khoa Học Giáo Dục - Hà Nội 2025)** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$  và có độ dài các cạnh  $AB = \sqrt{3}$ ,  $BC = 2$ ,  $AA' = \sqrt{2}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AM$  và  $B'C$  (Nếu kết quả là số thập phân thì làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

**Đáp án: 0,56**



Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc tọa độ tại  $B(0,0,0)$ .

Trục  $Ox$  chứa cạnh  $BC$ ; Trục  $Oy$  chứa cạnh  $BA$ ; Trục  $Oz$  chứa cạnh  $BB'$ .

Tọa độ các điểm:  $B(0;0;0)$ ;  $C(2;0;0)$ ;  $M(1;0;0)$ ;  $A(0;\sqrt{3};0)$ ;  $B'(0;0;\sqrt{2})$ .

Ta có:  $\overrightarrow{AM} = (1; -\sqrt{3}; 0)$ ;  $\overrightarrow{B'C} = (2; 0; -\sqrt{2})$

Mặt phẳng  $(P)$  chứa  $B'C$  song song  $AM$  qua  $C$  nhận  $\vec{n} = [\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{AM}] = (\sqrt{6}; \sqrt{2}; 2\sqrt{3})$

$(P): \sqrt{6}x + \sqrt{2}y + 2\sqrt{3}z - 2\sqrt{6} = 0$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AM$  và  $B'C$ :

$$d(AM, B'C) = d(M, (P)) = \frac{|-\sqrt{6}|}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} \approx 0,5577 \approx 0,56.$$