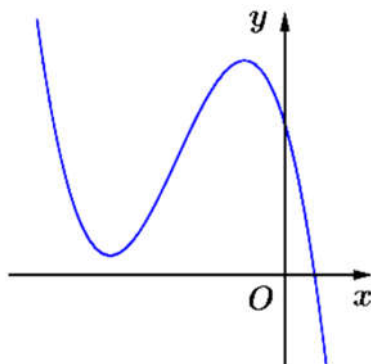


**CHỦ ĐỀ 9. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM GIẢI TOÁN ĐỒ THỊ HÀM SỐ**
**• PHẦN 3. TRẢ LỜI NGẮN**

**CÂU HỎI** (vì là ngân hàng được tách ra từ các trường, cho nên có trùng lặp câu hỏi thì do các trường tham khảo nhau)

**ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

- Câu 1.** (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số  $y = x^3 + 9x^2 - 12$  có đồ thị là đường cong  $(C)$ . Điểm  $M(a; b)$  là điểm cực đại của đồ thị  $(C)$ . Giá trị của  $a - b$  bằng bao nhiêu?
- Câu 2.** (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số  $y = \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-1}}$ . Gọi  $a$  là số đường tiệm cận đứng và  $b$  là số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho. Giá trị  $20a + 10b^2$  bằng bao nhiêu?
- Câu 3.** (THPT Văn Giang - Hưng Yên 2025) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-2024; 2024]$  để hàm số  $y = \frac{\sin x + m}{\sin x - 1}$  nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$
- Câu 4.** (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số  $f(x) = x(x-3)^2$ . Tính số nghiệm thực của phương trình  $\underbrace{f(f \cdots f(x))}_{8 \text{ lần } f} = 0$
- Câu 5.** (THPT Diễn Châu 5 - Nghệ An 2025) Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số  $a, b, c, d$ ?

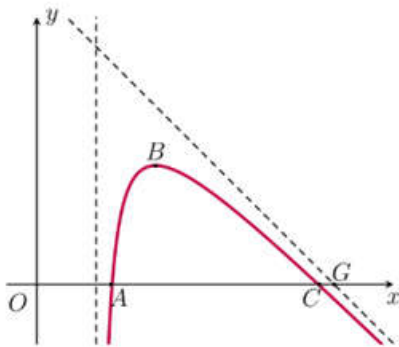


- Câu 6.** (THPT Triệu Sơn 3 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $d$  là khoảng cách giữa hai điểm cực trị của  $(C)$  và  $d_1$  là khoảng cách từ điểm cực đại của  $(C)$  đến gốc tọa độ. Giá trị của  $d^2 + d_1^2$  bằng bao nhiêu?
- Câu 7.** (THPT Triệu Sơn 4 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.

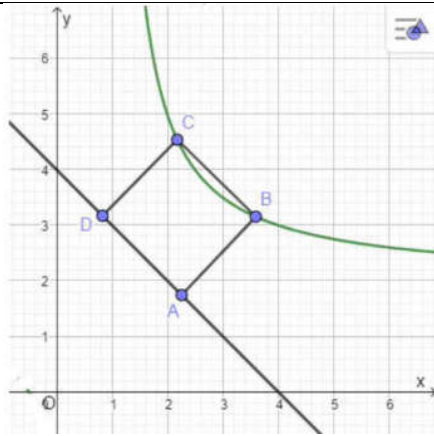
$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		$3$	$-\infty$
		$-1$		

Đặt  $g(x) = f\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$ . Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = g(x)$ .

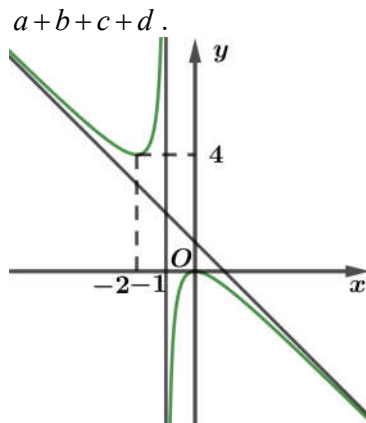
- Câu 8.** (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An 2025) Hàm số  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$  có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu lần lượt là  $a$  và  $b$ . Tính  $3a + 2b$ .
- Câu 9.** (THPT Lê Xoay - Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{2x^2 + 26x + 18}{x + 13}$  có điểm cực tiểu  $x = x_1$  và điểm cực đại  $x = x_2$ . Tính  $P = -2x_1 + x_2$ .
- Câu 10.** (Cụm trường THPT Bắc Ninh 2025) Trong hệ trục tọa độ  $(Oxy)$  cho đồ thị hàm số  $(C): y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$  mô tả chuyển động của hai tàu đánh cá  $A$  và  $B$  (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng  $km$ ). Biết quỹ đạo chuyển động của hai tàu luôn thuộc về hai nhánh khác nhau của đồ thị  $(C)$ . Tính khoảng cách ngắn nhất (đơn vị  $km$ ) giữa hai tàu đánh cá  $A$  và  $B$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
- Câu 11.** (Sở Hà Tĩnh 2025) Một máy bay trình diễn có đường bay gần với hệ trục  $Oxy$  được mô phỏng như hình vẽ, trục  $Ox$  gắn với mặt đất.



- Đường bay có dạng là một phần của đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất  $y = f(x)$  có đường tiệm cận đứng là  $x = 2$ . Điểm  $G$  là giao điểm của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và trục  $Ox$  được gọi là điểm giới hạn. Biết máy bay bay từ vị trí  $A$  cách tọa độ  $O$  một khoảng  $2,5$  đơn vị và máy bay khi ở vị trí cao nhất cách điểm xuất phát  $1,5$  đơn vị theo phương song song với trục  $Ox$  và cách mặt đất  $4,5$  đơn vị. Vị trí máy bay tiếp đất cách điểm giới hạn một khoảng bằng bao nhiêu?
- Câu 12.** (Chuyên Hạ Long 2025) Tính giá trị cực tiểu của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ .
- Câu 13.** (Chuyên Hạ Long 2025) Trong một công viên có một hồ nước và một đường đi lát gạch hoa. Thiết lập hệ trục  $Oxy$  như hình vẽ dưới, kiến trúc sư thấy rằng bờ hồ có thể coi như một nhánh của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$  và đường đi khi đó ứng với đường thẳng  $(d): y = -x + 4$ . Để đảm bảo ánh sáng, kiến trúc sư muốn đặt 2 cột đèn trên bờ hồ và 2 cột đèn trên đường đi sao cho 4 cột đèn này tạo thành một hình vuông. Tính khoảng cách giữa hai cột đèn trên bờ hồ (làm tròn đến hàng phần trăm).



**Câu 14. (Chuyên Thái Bình 2025)** Cho hàm số  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tính

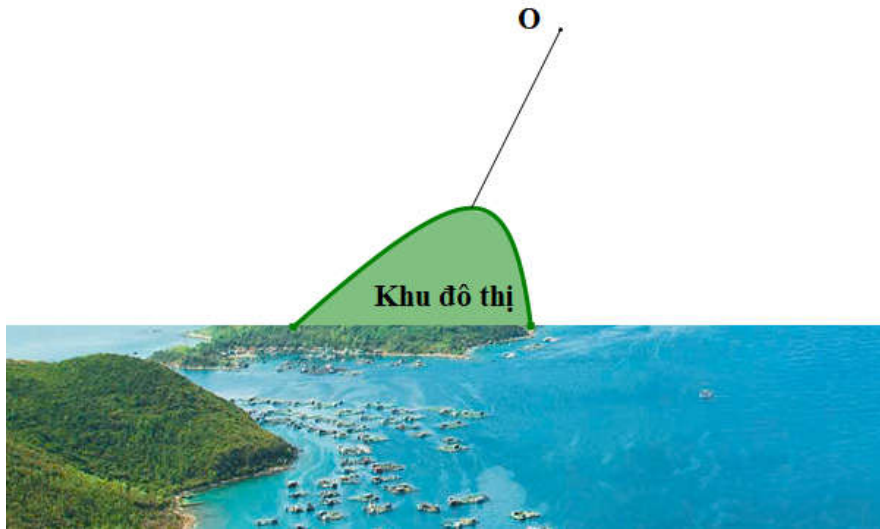


**Câu 15. (Chuyên Thái Bình 2025)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(2x) - x$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$1$	$-1$	$+\infty$

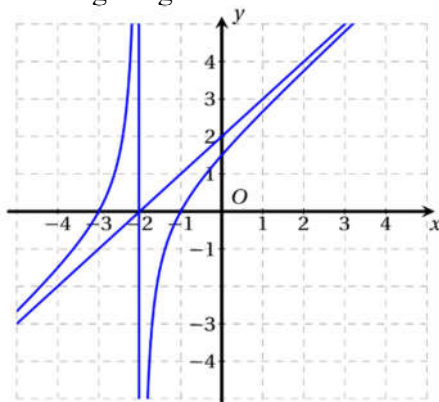
**Câu 16. (Chuyên Vinh 2025)** Ở một vịnh biển, ngoài xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây một khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ  $Oxy$  với đơn vị đo tương ứng 1km có hòn đảo ở  $O$  thì đường bao của phần

đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ . Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



**Câu 17. (Cụm trường Hải Dương 2025)** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$  có đồ thị là  $(C)$ . Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị  $(C)$ . Trên đồ thị  $(C)$  có một điểm  $M(a; b)$  với  $a > 1$  sao cho khoảng cách  $IM$  là nhỏ nhất. Tìm  $a$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

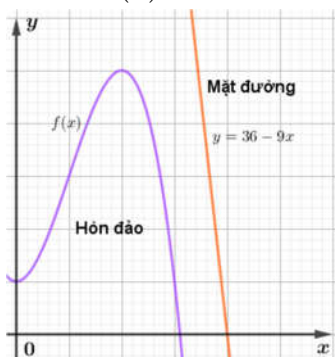
**Câu 18. (THPT Sào Nam - Quảng Nam 2025)** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{x + c}$  với  $a \neq 0$ , có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới



Giá trị  $S = a + b + c$  là bao nhiêu?

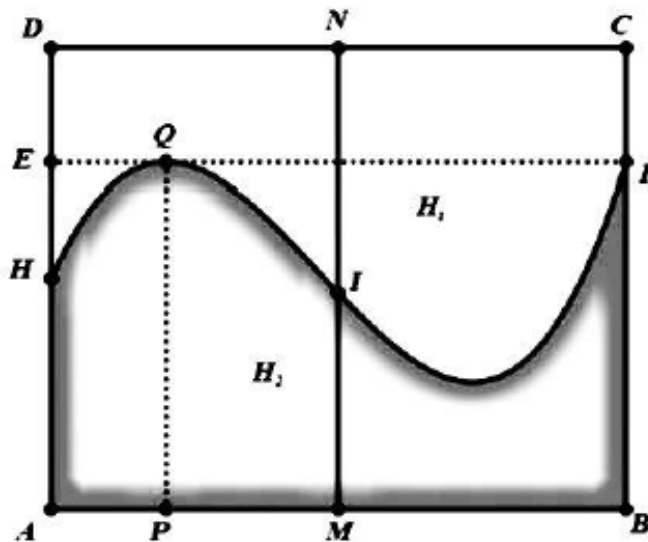
**Câu 19. (THPT Trục Ninh - Nam Định 2025)** Biết đồ thị hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 1$  có hai cực trị  $A$  và  $B$ . Phương trình đường thẳng  $AB$  là  $y = ax + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Tính tổng  $a + b$ .

**Câu 20. (THPT Trục Ninh - Nam Định 2025)** Một hòn đảo nằm trong một hồ nước. Biết rằng đường cong tạo nên hòn đảo được mô hình hóa vào hệ trục tọa độ  $Oxy$  là một phần của đồ thị hàm số bậc ba  $f(x)$ .

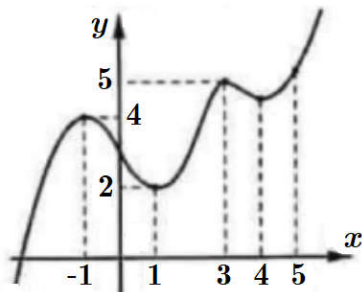


Vị trí điểm cực đại là  $(2;5)$  với đơn vị của hệ trục là  $100m$  và vị trí điểm cực tiểu là  $(0;1)$ . Mặt đường chạy trên một đường thẳng có phương trình  $y = 36 - 9x$ . Người ta muốn làm một cây cầu có dạng một đoạn thẳng nối từ hòn đảo ra mặt đường. Độ dài ngắn nhất của cây cầu bằng bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng phần chục)

- Câu 21. (Sở Ninh Bình 2025)** Khuôn viên của một công viên có dạng hình chữ nhật  $ABCD$  với  $AB = 100m$ ;  $AD = 80m$ . Người ta muốn chia công viên thành hai khu, một khu dành cho trẻ em, một khu dành cho người lớn. Để tạo thiết kế độc đáo và lạ mắt, người ta dùng một đường cong chia khuôn viên thành hai phần  $H_1$  (không tô màu) dành cho trẻ em và  $H_2$  (tô màu) dành cho người lớn như hình vẽ bên với  $AH = 40m$ ;  $AE = 60m$ ;  $AP = 20m$  và  $EF \parallel AB$ ;  $PQ \parallel AD$ . Biết rằng khi xét trong một hệ tọa độ  $Oxy$ , đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số bậc ba. Phần chính giữa công viên người ta muốn mắc dây đèn trang trí dọc đoạn thẳng  $MN$  như hình. Biết giá tiền mỗi mét dây trang trí của phần dành cho trẻ em là 140 nghìn đồng và phần dành cho người lớn là 180 nghìn đồng. Tổng số tiền mắc dây đèn trang trí trên đoạn  $MN$  là bao nhiêu triệu đồng.



- Câu 22. (THPT Nông Công 3 - Thanh Hóa 2025)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $h(x) = 3f(\log_2 x - 1) + x^3 - 9x^2 + 15x + 1$  trên đoạn  $[1; 4]$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = M + m$ .

- Câu 23. (Sở Hà Nội 2025)** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2}{x+1}$  có hai điểm cực trị  $A$  và  $B$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

- Câu 24. (Sở Yên Bái 2025)** Gọi  $M(a; b)$  là điểm thuộc đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+2}$  và có khoảng cách từ  $M$  đến đường thẳng  $d: y = 3x + 6$  nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức  $T = 6a^2 + 7b^2$ .

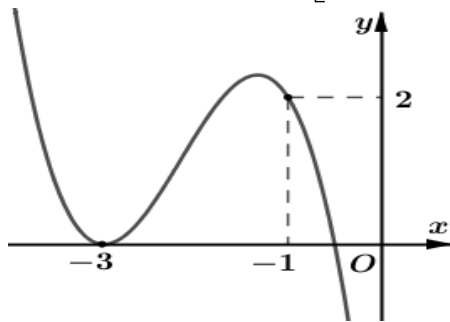
**Câu 25. (Sở Đà Nẵng 2025)** Một giáo viên theo dõi sự tiến bộ của học sinh qua thang đo điểm, được mô hình hoá bằng hàm số  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  với  $a, b, c$  là các hệ số. Trong đó,  $x (0 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N})$  là số tháng kể từ đầu năm học và  $f(x)$  là điểm trong tháng thứ  $x$ . Qua theo dõi, giáo viên ghi nhận tháng đầu tiên học sinh đạt 19 điểm, sau đó giảm trong tháng thứ hai và đến tháng thứ ba học sinh đạt mức điểm thấp nhất trong năm học, là 3 điểm. Kể từ tháng thứ ba trở đi, điểm của học sinh tăng lên. Tính điểm của học sinh đó ở tháng thứ sáu.

**Câu 26. (Sở Quảng Nam 2025)** Biết đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$  có điểm cực tiểu là  $M(x_0; y_0)$ , tính  $T = x_0 + y_0$ .

**Câu 27. (THPT Ngô Sĩ Liên - Bắc Giang 2025)** Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa bởi hàm bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách  $OM = 2\text{km}$ ; độ rộng của núi  $MN = 3,5\text{km}$ . Độ sâu của hồ nước là 450m. Chiều cao của ngọn núi là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị).

**Câu 28. (THPT Hoàng Hóa 2-Thanh Hóa 2025)** Cho hàm bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên.

Hỏi đồ thị hàm số  $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$  có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



**Câu 29. (THPT Tư Nghĩa 1 - Quảng Ngãi 2025)** Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3x + \frac{4}{x^2}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ . (Quy tròn đến hàng phần trăm)

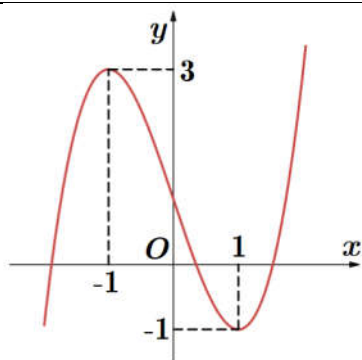
**Câu 30. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh 2025)** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{3\sin x + 2}{\sin x + 1}$  trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Khi đó giá trị của  $M^2 + m^2 = \frac{b}{c}$ , tính  $T = b - c$

Trả lời: 37

**Câu 31. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025)** Hàm số  $y = x^3 + ax^2 + bx + 2$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$ . Tính tổng  $b + 2a$ .

**Câu 32. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025)** Cho các hàm số  $f(x) = x^2 - 4x + m$ , với  $m$  là tham số và  $g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2(x^2 + 3)^3$ . Tìm số giá trị nguyên của  $m \in [3; 10]$  để hàm số  $g(f(x))$  đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$ .

**Câu 33. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên dưới.



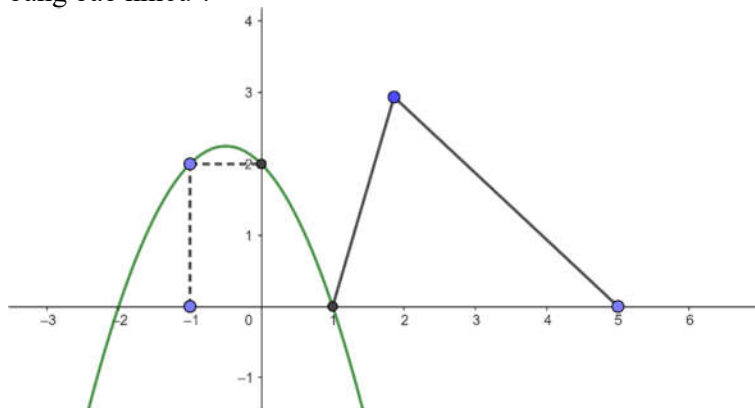
Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để phương trình  $25^{f(x)} + 125m = m \cdot 5^{f(x)} + 5^{f(x)+3}$  có đúng 5 nghiệm thực phân biệt?

**Câu 34. (Cụm Chuyên Môn Đắk Lak 2025)** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x$ , có giá trị cực đại và cực tiểu lần lượt là  $y_1$  và  $y_2$ . Khi đó giá trị của biểu thức  $2y_1 - y_2$  bằng bao nhiêu?

**Câu 35. (THPT Hà Trung - Thanh Hóa 2025)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc  $(-2025; 2025)$  để hàm số  $y = \frac{m \log_2 x - 2}{\log_2 x - m - 1}$  nghịch biến trên  $(4; +\infty)$ .

**Câu 36. (Sở Bắc Ninh 2025)** Cho hàm số  $f(x) = \frac{\sqrt{ax^2 + 1} - bx - 2}{-x^3 + 3x - 2}$  (với  $a, b$  là các hằng số). Biết rằng  $f(x)$  liên tục tại điểm  $x = 1$ . Giá trị của  $f(1)$  bằng bao nhiêu?

**Câu 37. (THPT Phúc Thọ - Hà Nội 2025)** Cho hàm số  $f(x)$ . Đồ thị hàm số  $f'(x)$  trên  $[-2; 5]$  như hình vẽ (Phần cong là phần của Parabol  $y = ax^2 + bx + c$ ). Biết  $f(-2) = 0$ , giá trị của  $f(1) + f(3)$  bằng bao nhiêu?

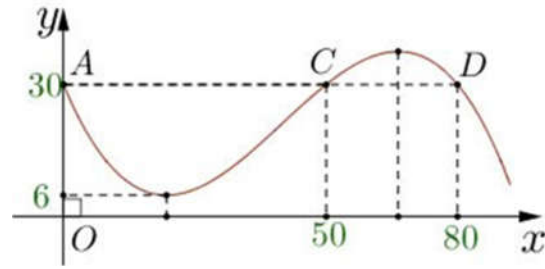


**Câu 38. (THPT Lê Quý Đôn - Hà Nội 2025)** Một phần đường chạy của tàu lượn siêu tốc (hình 1) khi gắn hệ trục tọa độ Oxy được mô phỏng ở hình 2, đơn vị trên mỗi trục là mét. Biết đường chạy của nó là một phần đồ thị hàm bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $0 \leq x < 90$ ); tàu lượn siêu tốc xuất phát từ điểm A, đi qua các điểm C, D đồng thời đạt độ cao nhỏ nhất so với mặt đất là  $6m$ . Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là bao nhiêu mét so với mặt đất? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



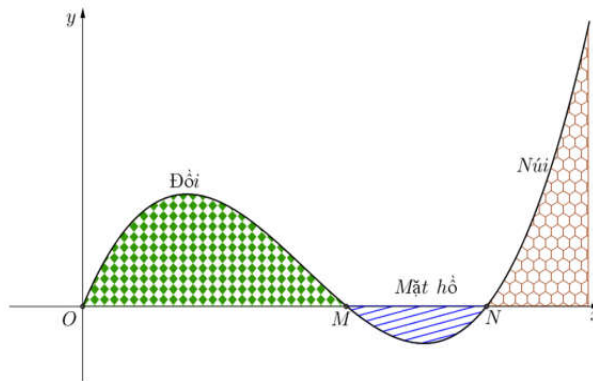


Hình 1



Hình 2

- Câu 39.** (THPT Nguyễn Quốc Trinh - Hà Nội 2025) Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $d_1$  là khoảng cách giữa hai điểm cực trị của  $(C)$  và  $d_2$  là khoảng cách từ điểm cực tiểu của  $(C)$  đến gốc tọa độ. Giá trị của  $d_1^2 + 2d_2^2$  bằng bao nhiêu?
- Câu 40.** (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x + 1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $A, B$  là hai điểm cực trị của đồ thị  $(C)$ . Tính bình phương của độ dài đoạn thẳng  $AB$ .
- Câu 41.** (THPT Cầm trường Hải Dương 2025) Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa là một phần hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là kilômét). Biết khoảng cách hai bên chân đồi  $OM = 2(km)$ , độ rộng của hồ nước  $MN = 1(km)$  và ngọn đồi cao  $528(m)$ . Độ sâu nhất của hồ nước là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)



## ĐÁP ÁN THAM KHẢO

### ĐỒ THỊ HÀM SỐ

- Câu 1.** (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số  $y = x^3 + 9x^2 - 12$  có đồ thị là đường cong  $(C)$ . Điểm  $M(a; b)$  là điểm cực đại của đồ thị  $(C)$ . Giá trị của  $a - b$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Đáp án:**  $-102$ .

$$y = x^3 + 9x^2 - 12$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}$$

$$y' = 3x^2 + 18x.$$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 18x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

Đồ thị  $(C)$  có hai điểm cực trị là:  $(0; -12)$  và  $(-6; 96)$ .



Bảng biến thiên:

$x$	$-\infty$	$-6$	$0$	$+\infty$		
$y'$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$						

Suy ra điểm cực đại của đồ thị ( $C$ ) là:  $M(-6; 96)$ .Vậy giá trị  $a - b = -6 - 96 = -102$ 

**Câu 2. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025)** Cho hàm số  $y = \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-1}}$ . Gọi  $a$  là số đường tiệm cận đứng và  $b$  là số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho. Giá trị  $20a + 10b^2$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải****Đáp án:** 60

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty$  nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là  $x = -1$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 3$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = -3$  nên đồ thị hàm số có 2 tiệm

cận ngang là  $y = 3$  và  $y = -3$ .Vậy  $a = 1$  và  $b = 2$ , suy ra  $20a + 10b^2 = 60$ .

**Câu 3. (THPT Văn Giang - Hưng Yên 2025)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-2024; 2024]$  để hàm số  $y = \frac{\sin x + m}{\sin x - 1}$  nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

**Lời giải****Đáp án:** 2023.

Ta có  $y' = \cos x \cdot \frac{-1-m}{(\sin x - 1)^2}$

Hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Leftrightarrow y' < 0 \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

$\Leftrightarrow \cos x \cdot \frac{-1-m}{(\sin x - 1)^2} < 0$  (\*)

Ta thấy  $\forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$  thì  $\begin{cases} \cos x < 0 \\ (\sin x - 1)^2 > 0 \end{cases}$

Do đó (\*)  $\Leftrightarrow -1 - m > 0 \Leftrightarrow m < -1$

Mà  $m$  thuộc đoạn  $[-2024; 2024]$  nên  $m \in [-2024; -1]$ . Có 2023 giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn bài toán.

**Câu 4. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2025)** Cho hàm số  $f(x) = x(x-3)^2$ . Tính số nghiệm thực của phương trình  $\underbrace{f(f \cdots f(x))}_{8 \text{ lần } f} = 0$

**Lời giải****Đáp án:** 3281.

Ta có  $f(x) = x(x-3)^2 = x^3 - 6x^2 + 9x$ .

Suy ra  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

$x$	$-\infty$	0	1	3	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	4	0	4	$+\infty$

Ta có

$f(x) = 0$  có 2 nghiệm.

$f(x) = 3$  có 3 nghiệm.

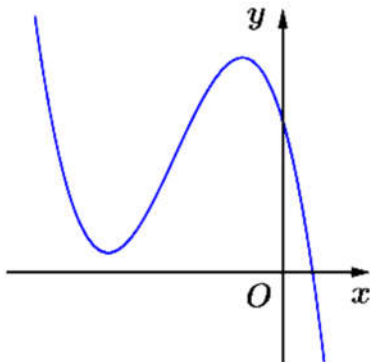
$$\Rightarrow f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 3 \end{cases} \text{ có } 2 + 3^1 \text{ nghiệm.}$$

$$f(f(f(x))) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(f(x)) = 0 \\ f(f(x)) = 3 \end{cases} \text{ có } 2 + 3^1 + 3^2 \text{ nghiệm.}$$

...

$$f(f(\dots f(x))) = 0 \text{ có } 2 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^7 = 3281 \text{ nghiệm.}$$

**Câu 5. (THPT Diễn Châu 5 - Nghệ An 2025)** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số  $a, b, c, d$ ?



**Lời giải**

**Đáp án 1.**

Ta có:  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào đồ thị ta thấy  $a < 0$

$$\text{Hàm số có 2 cực trị âm nên } \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\frac{2b}{3a} < 0 \\ \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Đồ thị cắt trục  $Oy$  tại điểm  $(0; d)$  nên  $d > 0$

Vậy có đúng 1 số dương trong các số  $a, b, c, d$ .

**Câu 6. (THPT Triệu Sơn 3 - Thanh Hóa 2025)** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $d$  là khoảng cách giữa hai điểm cực trị của  $(C)$  và  $d_1$  là khoảng cách từ điểm cực đại của  $(C)$  đến gốc tọa độ. Giá trị của  $d^2 + d_1^2$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Đáp án: 25.**

$$\text{Ta có } y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$y$			$-1$	$+\infty$	$3$	$+\infty$

Suy ra hai điểm cực trị của  $(C)$  là  $A(0; 3)$  và  $B(-2; -1)$  nên  $d = AB = 2\sqrt{5} \Rightarrow d^2 = 20$ .

Điểm cực đại là  $B(-2; -1) \Rightarrow d_1^2 = OB^2 = (-2)^2 + (-1)^2 = 5$ . Vậy  $d^2 + d_1^2 = 25$ .

**Câu 7. (THPT Triệu Sơn 4 - Thanh Hóa 2025)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$-1$	$3$	$-\infty$

Đặt  $g(x) = f\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$ . Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = g(x)$ .

**Lời giải**

**Đáp án: 6.**

$$\text{Đặt } g'(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) f'\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) = 0 \\ f'\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ \frac{x^2 + 1}{x} = a \ (a < -2) \\ \frac{x^2 + 1}{x} = b \ (-2 < b < 2) \\ \frac{x^2 + 1}{x} = c \ (c > 2) \end{cases}$$

$$\text{Xét hàm số } h(x) = \frac{x^2 + 1}{x}, h'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}, h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Bảng biến thiên của hàm số } h(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	$0$	$-$	$+$
$h(x)$		$y=c \ (c>2)$			
			$+\infty$	$x_3$	$x_4$
				$2$	
		$y=b \ (-2<b<2)$			
		$x_1$	$-2$	$x_2$	
				$y=a \ (a<-2)$	
	$-\infty$		$-\infty$		

Dựa vào bảng biến thiên trên ta thấy phương trình  $h(x)=a, h(x)=c$ , mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác  $\pm 1$ , mà  $a \neq c \Rightarrow f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=0$  có 4 nghiệm đơn phân biệt  $x_1, x_2, x_3, x_4$  khác  $\pm 1$  và phương trình  $h(x)=b$  vô nghiệm.

Do đó phương trình  $g'(x)=0$  có 6 nghiệm đơn phân biệt lần lượt theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là  $x_1, -1, x_2, x_3, 1, x_4$ .

Vậy hàm số  $g(x)=f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$  có 6 cực trị.

**Câu 8. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An 2025)** Hàm số  $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$  có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu lần lượt là  $a$  và  $b$ . Tính  $3a+2b$ .

**Lời giải**

**Đáp án: 3.**

TXĐ:  $D=\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Ta có:  $y=\frac{x^2-x+1}{x-1} \Rightarrow y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ .

Suy ra  $y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$ .

Bảng biến thiên của hàm số

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
$y'$		$+$	$0$	$-$	$+$
$y$		$-1$	$+\infty$	$3$	$+\infty$

Vậy giá trị cực đại của hàm số là  $a=-1$  và giá trị cực tiểu của hàm số là  $b=3$   
 $\Rightarrow 3a+2b=-3+6=3$ .

**Câu 9. (THPT Lê Xoay - Vĩnh Phúc 2025)** Cho hàm số  $y=f(x)=\frac{2x^2+26x+18}{x+13}$  có điểm cực tiểu  $x=x_1$  và điểm cực đại  $x=x_2$ . Tính  $P=-2x_1+x_2$ .

**Lời giải**

**Đáp án: 4.**

Ta có:

$$y' = f'(x) = \frac{(4x+26)(x+13) - (2x^2 + 26x + 18)}{(x+13)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 52x + 320}{(x+13)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 52x + 320 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -16 \\ x = -10 \end{cases}$$

Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = x_1 = -10$  và đạt cực đại tại  $x = x_2 = -16$ .

Khi đó  $P = -2x_1 + x_2 = -2(-10) - 16 = 4$ .

**Câu 10. (Cụm trường THPT Bắc Ninh 2025)** Trong hệ trục tọa độ  $(Oxy)$  cho đồ thị hàm số

$(C): y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$  mô tả chuyển động của hai tàu đánh cá  $A$  và  $B$  (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng  $km$ ). Biết quỹ đạo chuyển động của hai tàu luôn thuộc về hai nhánh khác nhau của đồ thị  $(C)$ . Tính khoảng cách ngắn nhất (đơn vị  $km$ ) giữa hai tàu đánh cá  $A$  và  $B$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

**Đáp án:** 4,39.

Ta có  $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = x + \frac{1}{x + 1}$ , ( $x \neq -1$ )

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng  $x = -1$ , gồm hai nhánh nằm về hai phía của đường thẳng  $x = -1$ .

Gọi  $A$  là điểm thuộc nhánh trái của đồ thị hàm số, khi đó  $x_A < -1$ .

Đặt  $a = -1 - x_A > 0 \Rightarrow x_A = -1 - a$

$$\Rightarrow y_A = -1 - a + \frac{1}{-1 - a + 1} = -1 - a - \frac{1}{a} \Rightarrow A\left(-1 - a; -1 - a - \frac{1}{a}\right)$$

Gọi  $B$  là điểm thuộc nhánh phải của đồ thị hàm số, khi đó  $x_B > -1$ .

Đặt  $b = x_B + 1 > 0 \Rightarrow x_B = b - 1$

$$\Rightarrow y_B = b - 1 + \frac{1}{b - 1 + 1} = b - 1 + \frac{1}{b} \Rightarrow B\left(b - 1; b - 1 + \frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow AB^2 = (b + a)^2 + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)^2 = (b + a)^2 + (b + a)^2 \cdot \left(\frac{1}{ab}\right)^2 = (a + b)^2 \left(2 + \frac{2}{ab} + \frac{1}{a^2 b^2}\right)$$

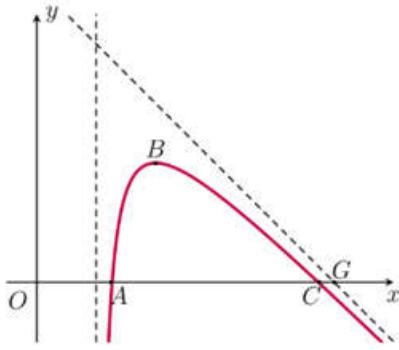
$$\text{Với } a > 0, b > 0 \text{ ta có } \begin{cases} (a + b)^2 \geq 4ab \\ 2 + \frac{1}{a^2 b^2} \geq 2\sqrt{\frac{2}{a^2 b^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{ab} \end{cases}$$

$$\text{Nên } AB^2 \geq 4ab \cdot \left(\frac{2}{ab} + \frac{2\sqrt{2}}{ab}\right) = 8 + 8\sqrt{2} \Rightarrow AB \geq \sqrt{8 + 8\sqrt{2}} \approx 4,39.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2 = \frac{1}{a^2 b^2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất (đơn vị  $km$ ) giữa hai tàu đánh cá  $A$  và  $B$  là 4,39 (km).

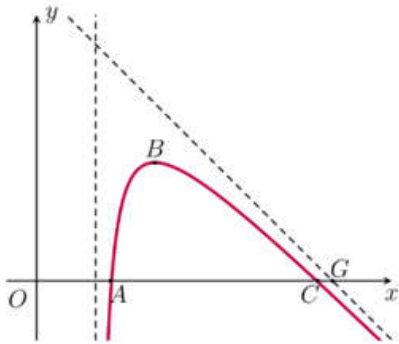
**Câu 11. (Sở Hà Tĩnh 2025)** Một máy bay trình diễn có đường bay gần với hệ trục  $Oxy$  được mô phỏng như hình vẽ, trục  $Ox$  gần với mặt đất.



Đường bay có dạng là một phần của đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất  $y = f(x)$  có đường tiệm cận đứng là  $x = 2$ . Điểm  $G$  là giao điểm của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và trục  $Ox$  được gọi là điểm giới hạn. Biết máy bay bay từ vị trí  $A$  cách tọa độ  $O$  một khoảng 2,5 đơn vị và máy bay khi ở vị trí cao nhất cách điểm xuất phát 1,5 đơn vị theo phương song song với trục  $Ox$  và cách mặt đất 4,5 đơn vị. Vị trí máy bay tiếp đất cách điểm giới hạn một khoảng bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Đáp án:** 0,5.



Vì tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  (hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất) là  $x = 2$ .

Hàm số có dạng  $y = f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$  ( $a < 0$ ).

Đồ thị hàm số qua điểm  $A\left(\frac{5}{2}; 0\right)$  và nhận  $B\left(4; \frac{9}{2}\right)$  làm điểm cực trị, suy ra:

$$\begin{cases} f\left(\frac{5}{2}\right) = 0 \\ f(4) = \frac{9}{2} \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}a + b + 2c = 0 \\ 4a + b + \frac{1}{2}c = \frac{9}{2} \\ a - \frac{1}{4}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{21}{2} \\ c = -4 \end{cases} \text{ Khi đó: } f(x) = -x + \frac{21}{2} - \frac{4}{x-2}.$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên:  $y = -x + \frac{21}{2}$ . Tọa độ điểm  $G\left(\frac{21}{2}; 0\right)$ .

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  với trục  $Ox$  là

$$-x + \frac{21}{2} - \frac{4}{x-2} = 0 \Rightarrow -x^2 + \frac{25}{2}x - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = 10 \end{cases} \Rightarrow C(10; 0).$$

$$CG = \frac{21}{2} - 10 = \frac{1}{2}.$$

**Câu 12. (Chuyên Hạ Long 2025)** Tính giá trị cực tiểu của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ .

**Lời giải**

**Đáp án:**  $-3$ .

Ta có: Tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R}$ .

$$y' = 3x^2 - 6x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu đạo hàm như sau

$x$	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$y'$		+	0	-	0	+	

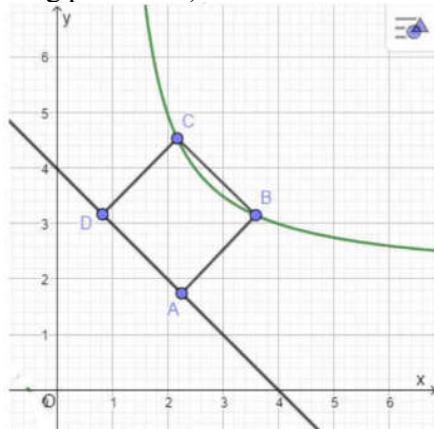
Ta thấy đạo hàm  $y'$  đổi dấu từ âm sang dương khi qua  $x = 2$  nên hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 2$ .

Khi đó giá trị cực tiểu là  $y(2) = -3$ .

**Câu 13. (Chuyên Hạ Long 2025)** Trong một công viên có một hồ nước và một đường đi lát gạch hoa. Thiết lập hệ trục  $Oxy$  như hình vẽ dưới, kiến trúc sư thấy rằng bờ hồ có thể coi như một nhánh

của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  và đường đi khi đó ứng với đường thẳng  $(d): y = -x + 4$ . Để đảm

bảo ánh sáng, kiến trúc sư muốn đặt 2 cột đèn trên bờ hồ và 2 cột đèn trên đường đi sao cho 4 cột đèn này tạo thành một hình vuông. Tính khoảng cách giữa hai cột đèn trên bờ hồ (làm tròn đến hàng phần trăm).



**Lời giải**

**Đáp án:** 1,92.

Gọi  $(d_1): y = -x + m$  (với  $m > 4$ ) song song với  $(d): y = -x + 4$  và cắt  $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$  tại hai điểm phân biệt  $B, C$  ( $x_B, x_C > 1$ )

Phương trình hoành độ giao điểm của  $(d_1)$  và  $(C): \frac{2x+1}{x-1} = -x + m \Leftrightarrow x^2 + (1-m)x + m + 1 = 0$ .

$$\Delta = m^2 - 6m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow m > 3 + 2\sqrt{3} \text{ (vì } m > 4 \text{)} \quad (1)$$

$$\text{Khi đó ta có: } \begin{cases} x_C + x_B = m - 1 \\ x_C \cdot x_B = m + 1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (-x_B + m + x_C - m)^2} = \sqrt{2(x_B - x_C)^2}$$

$$\Rightarrow CB^2 = 2(x_B - x_C)^2 = 2(x_B + x_C)^2 - 8x_B \cdot x_C = 2m^2 - 12m - 6$$



Mặt khác chọn  $I(0;4) \in (d)$ , ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng  $(d);(d_1)$  bằng

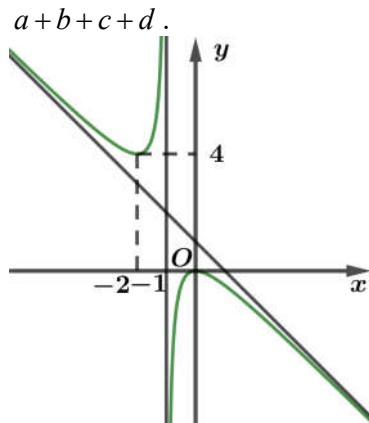
$$AB = d(I; (d_1)) = \frac{|4-m|}{\sqrt{2}} = \frac{m-4}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Để } ABCD \text{ là hình vuông thì } AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow \frac{(m-4)^2}{2} = 2m^2 - 12m - 6 \Leftrightarrow m = \frac{8 \pm 2\sqrt{37}}{3}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện (1) suy ra } m = \frac{8+2\sqrt{37}}{3}$$

$$\text{Vậy khoảng cách giữa hai cột đèn bên bờ hồ bằng } \frac{\frac{8+2\sqrt{37}}{3} - 4}{\sqrt{2}} \approx 1,92.$$

**Câu 14. (Chuyên Thái Bình 2025)** Cho hàm số  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tính



**Lời giải**

**Đáp án:** 0.

Dựa vào đồ thị ta có tiệm cận đứng  $x = -1$  suy ra  $d = 1$ .

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ  $O(0;0)$  suy ra  $c = 0$ .

Hàm số có dạng  $y = \frac{ax^2 + bx}{x + 1}$  có đồ thị đi qua điểm  $(-2;4)$  suy ra  $4a - 2b = -4$  (1)

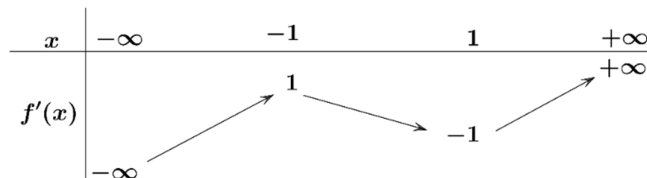
$$y' = \frac{(2ax + b)(x + 1) - (ax^2 + bx)}{(x + 1)^2} = \frac{ax^2 + 2ax + b}{(x + 1)^2} \text{ đồ thị hàm số có điểm cực đại } O(0;0)$$

Suy ra phương trình  $y' = 0$  có nghiệm  $x = 0$  suy ra  $b = 0$  (2)

Thay (2) vào (1) ta được  $a = -1$ . Hàm số  $y = \frac{-x^2}{x + 1}$ .

Do đó  $a + b + c + d = -1 + 0 + 0 + 1 = 0$ .

**Câu 15. (Chuyên Thái Bình 2025)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(2x) - x$ .



**Lời giải**

**Đáp án:** 3.

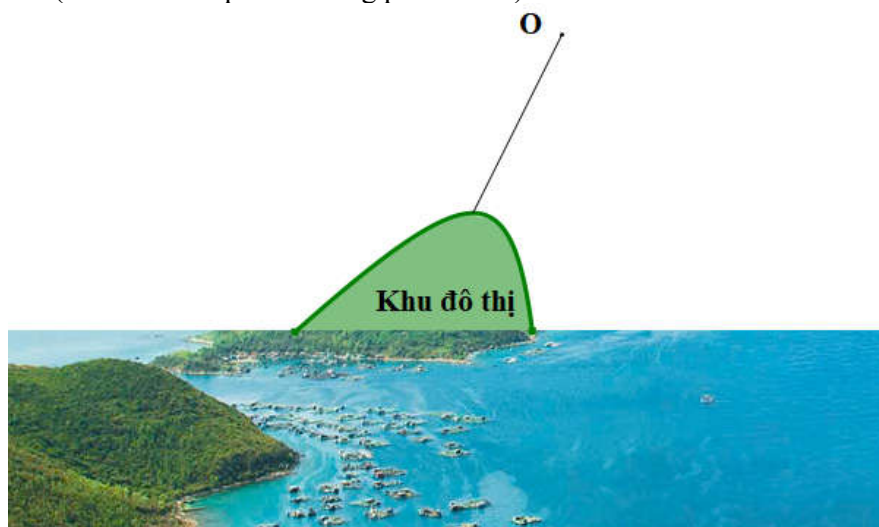
$$\text{Ta có } g'(x) = 2f'(2x) - 1 = 0 \Rightarrow f'(2x) = \frac{1}{2}$$

Đặt  $2x = t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{2}$ , quan sát bảng biến thiên ta thấy

$$f'(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = a & (a < -1) \\ t = b & (-1 < b < 1) \\ t = c & (c > 1) \end{cases}$$

Suy ra phương trình  $g'(x) = 0$  có ba nghiệm phân biệt  $\Rightarrow$  Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(2x) - x$  là 3.

- Câu 16. (Chuyên Vinh 2025)** Ở một vịnh biển, ngoài xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây một khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ  $Oxy$  với đơn vị đo tương ứng 1km có hòn đảo ở  $O$  thì đường bao của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ . Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải

**Đáp án:** 2,2.

Độ dài ngắn nhất của tuyến cáp treo nối với đường bao của khu đô thị chính là khoảng cách từ  $O$  tới điểm cực đại của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ .

Xét hàm số  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$  với  $x \neq 0$ .

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$	$2$	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có điểm cực đại là  $A(-1; -2)$ .

$$\text{Khi đó } OA = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \approx 2,2.$$

Vậy độ dài của tuyến cáp treo xấp xỉ 2,2 km.

**Câu 17. (Cụm trường Hải Dương 2025)** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$  có đồ thị là  $(C)$ . Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị  $(C)$ . Trên đồ thị  $(C)$  có một điểm  $M(a; b)$  với  $a > 1$  sao cho khoảng cách  $IM$  là nhỏ nhất. Tìm  $a$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

**Đáp án:** 1,84.

Đồ thị  $(C)$  có đường tiệm cận đứng  $x = 1$  và tiệm cận xiên  $y = x - 1$  nên  $I(1; 0)$ .

**Cách 1:** Ta có  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1} \Rightarrow M\left(a; a - 1 + \frac{1}{a - 1}\right)$

$$\begin{aligned} IM^2 &= (a - 1)^2 + \left(a - 1 + \frac{1}{a - 1}\right)^2 = 2(a - 1)^2 + \frac{1}{(a - 1)^2} + 2 \\ &= \left[\sqrt{2}(a - 1)\right]^2 - 2\left[\sqrt{2}(a - 1)\right] \cdot \frac{1}{a - 1} + \left(\frac{1}{a - 1}\right)^2 + 2 + 2\left[\sqrt{2}(a - 1)\right] \cdot \frac{1}{a - 1} \\ &= \left[\sqrt{2}(a - 1) - \frac{1}{a - 1}\right]^2 + 2 + 2\sqrt{2} \geq 2 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$IM$  ngắn nhất khi và chỉ khi  $IM^2$  nhỏ nhất hay  $IM^2 = 2 + 2\sqrt{2}$ .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

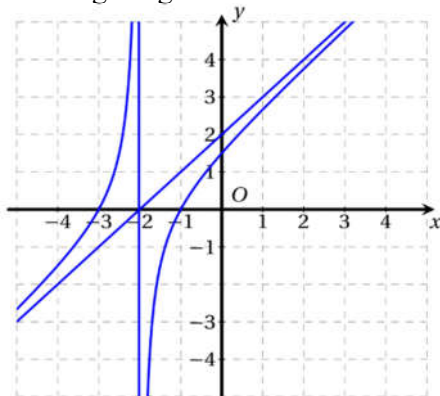
$$\begin{aligned} \sqrt{2}(a - 1) - \frac{1}{a - 1} &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}(a - 1) = \frac{1}{a - 1} \Leftrightarrow (a - 1)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a - 1 = \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ \Leftrightarrow a &= 1 \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow a = 1 + \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \approx 1,84 \quad (\text{vì } a > 1) \end{aligned}$$

**Cách 2:**  $IM$  ngắn nhất khi và chỉ khi đường tròn  $(I; IM)$  tiếp xúc với  $(C)$  hay  $IM$  vuông góc với tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $M$ .

Ta có  $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ycbt} &\Leftrightarrow \frac{y_M - y_I}{x_M - x_I} \cdot f'(x_M) = -1 \Leftrightarrow \frac{a^2 - 2a + 2}{(a - 1)^2} \cdot \frac{a^2 - 2a}{(a - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow \frac{(a^2 - 2a + 1 + 1)(a^2 - 2a + 1 - 1)}{(a - 1)^4} = -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(a - 1)^4 - 1}{(a - 1)^4} = -1 \Leftrightarrow 2(a - 1)^4 = 1 \Leftrightarrow a = 1 + \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \approx 1,84. \end{aligned}$$

**Câu 18. (THPT Sào Nam - Quảng Nam 2025)** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{x + c}$  với  $a \neq 0$ , có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới



Giá trị  $S = a + b + c$  là bao nhiêu?

**Lời giải**

**Đáp án: 7.**Dựa vào hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng  $x = -2$  và tiệm cận xiên  $y = x + 2$ .Từ  $x = -2$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $\Rightarrow c = 2$ .

$$\text{Ta có } y = \frac{ax^2 + bx + 3}{x + 2} = ax + b - 2a + \frac{4a - 2b + 3}{x + 2}$$

$$\text{Từ } y = x + 2 \text{ là tiệm cận xiên là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số } \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\text{Hàm số có đồ thị như hình vẽ là } y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 2}.$$

$$\text{Vậy } a = 1, b = 4, c = 2 \Rightarrow S = a + b + c = 7.$$

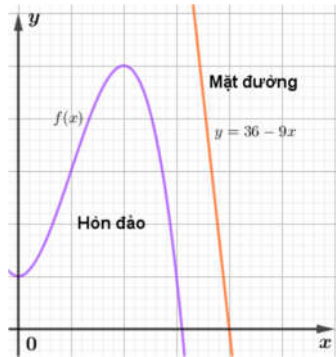
**Câu 19. (THPT Trực Ninh - Nam Định 2025)** Biết đồ thị hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 1$  có hai cực trị  $A$  và  $B$ . Phương trình đường thẳng  $AB$  là  $y = ax + b (a, b \in \mathbb{R})$ . Tính tổng  $a + b$ .

**Lời giải****Đáp án: -6.**

$$y' = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}. \text{ Suy ra các điểm cực trị của đồ thị hàm số là } A(1; -6) \text{ và}$$

$B(-3; 26)$ . Đường thẳng  $AB$  đi qua  $A$  nhận véc tơ  $\overrightarrow{AB} = (-4; 32)$  làm véc tơ chỉ phương, suy ra  $\vec{n} = (8; 1)$  là một véc tơ pháp tuyến của đường thẳng  $AB$  nên phương trình đường thẳng  $AB$  có dạng:  $8(x - 1) + 1(y + 6) = 0 \Leftrightarrow y = -8x + 2 \Rightarrow a = -8; b = 2 \Rightarrow a + b = -6$ .

**Câu 20. (THPT Trực Ninh - Nam Định 2025)** Một hòn đảo nằm trong một hồ nước. Biết rằng đường cong tạo nên hòn đảo được mô hình hóa vào hệ trục tọa độ  $Oxy$  là một phần của đồ thị hàm số bậc ba  $f(x)$ .



Vị trí điểm cực đại là  $(2; 5)$  với đơn vị của hệ trục là  $100m$  và vị trí điểm cực tiểu là  $(0; 1)$ . Mặt đường chạy trên một đường thẳng có phương trình  $y = 36 - 9x$ . Người ta muốn làm một cây cầu có dạng một đoạn thẳng nối từ hòn đảo ra mặt đường. Độ dài ngắn nhất của cây cầu bằng bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng phần chục)

**Lời giải****Đáp án: 88,3.**

$$\text{Gọi hàm số bậc ba } y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

$$\text{Vì đồ thị hàm số đi qua điểm } (0; 1) \Rightarrow d = 1.$$

$$\text{Vì đồ thị hàm số đi qua điểm } A(2; 5) \Rightarrow 8a + 4b + 2c + 1 = 5.$$

$$\text{Vì hàm số có hai điểm cực trị } x = 0; x = 2 \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1 \text{ và } f'(x) = -3x^2 + 6x.$$

Gọi  $M(x_0; y_0)$ ,  $x_0 > 0$ , là điểm nằm trên hòn đảo và nối với mặt đường và  $d$  là tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với mặt đường. Suy ra  $M$  là tiếp điểm của  $d$  với  $y = f(x)$ .

Đường thẳng  $y = 36 - 9x$  có hệ số góc  $k = -9$

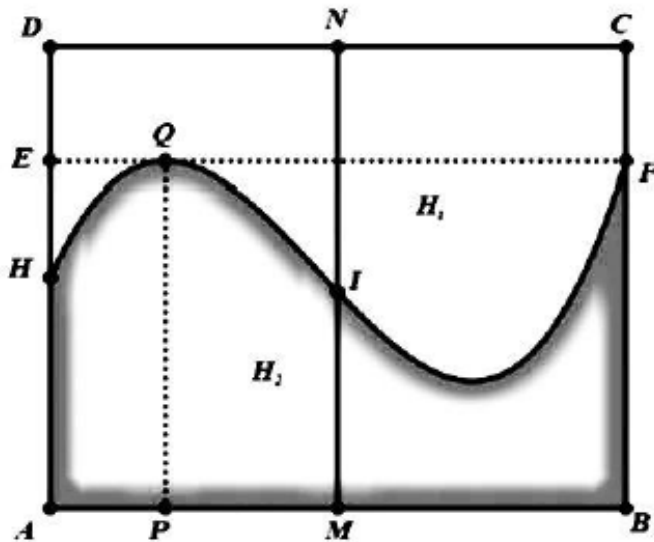
$$\Rightarrow f'(x_0) = -9 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 6x_0 = -9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow M(3; 1).$$

Độ dài cây cầu ngắn nhất bằng khoảng cách từ điểm  $M$  đến đường thẳng  $9x + y - 36 = 0$ .

$$h = \frac{|9 \cdot 3 + 1 - 36|}{\sqrt{9^2 + 1^2}} \approx 0,883.$$

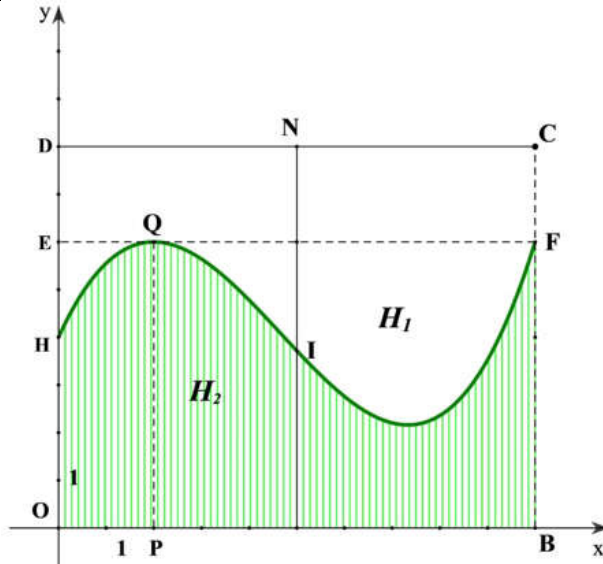
Vì đơn vị của hệ trục là  $100m$  nên độ dài ngắn nhất của cây cầu là  $88,3m$ .

**Câu 21. (Sở Ninh Bình 2025)** Khuôn viên của một công viên có dạng hình chữ nhật  $ABCD$  với  $AB = 100m$ ;  $AD = 80m$ . Người ta muốn chia công viên thành hai khu, một khu dành cho trẻ em, một khu dành cho người lớn. Để tạo thiết kế độc đáo và lạ mắt, người ta dùng một đường cong chia khuôn viên thành hai phần  $H_1$  (không tô màu) dành cho trẻ em và  $H_2$  (tô màu) dành cho người lớn như hình vẽ bên với  $AH = 40m$ ;  $AE = 60m$ ;  $AP = 20m$  và  $EF \parallel AB$ ;  $PQ \parallel AD$ . Biết rằng khi xét trong một hệ tọa độ  $Oxy$ , đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số bậc ba. Phần chính giữa công viên người ta muốn mắc dây đèn trang trí dọc đoạn thẳng  $MN$  như hình. Biết giá tiền mỗi mét dây trang trí của phần dành cho trẻ em là 140 nghìn đồng và phần dành cho người lớn là 180 nghìn đồng. Tổng số tiền mắc dây đèn trang trí trên đoạn  $MN$  là bao nhiêu triệu đồng.



Lời giải

Đáp án: 13,9.



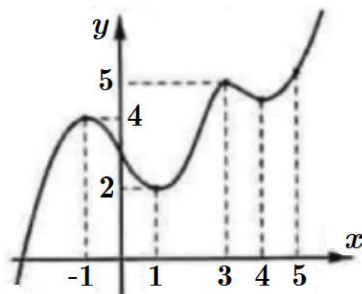
Xét trục tọa độ  $Oxy$ , với gốc tọa độ là điểm  $A$ . Tia  $Ox$  trùng với tia  $AB$ , tia  $Oy$  trùng với tia  $AD$  thì đường cong ranh giới giữa hai khu vực là đồ thị hàm số bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Theo giả thiết đồ thị hàm số này đi qua các điểm  $H(0; 40)$ ;  $Q(20; 60)$ ;  $F(100; 60)$  và có điểm cực trị là  $Q(20; 60)$  nên ta có hệ

$$\begin{cases} d = 40 \\ 60 = 8000a + 400b + 20c + d \\ 60 = 1000000a + 10000b + 100c + d \\ 3.10000a + 2.100b + c = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được  $a = \frac{1}{10000}$ ;  $b = \frac{-11}{500}$ ;  $c = \frac{7}{5}$ ;  $d = 40$ .

Do  $M$  là trung điểm của  $AB$  nên tọa độ điểm  $I$  là  $(50; 67,5)$ . Do đó chiều dài đoạn dây thuộc phần dành cho người lớn là  $67,5$  m, chiều dài đoạn dây thuộc phần dành cho trẻ em là  $12,5$  m. Tổng số tiền mắc dây đèn là  $67,5 \cdot 0,18 + 12,5 \cdot 0,14 = 13,9$  (triệu đồng).

**Câu 22.** (THPT Nông Công 3 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $h(x) = 3f(\log_2 x - 1) + x^3 - 9x^2 + 15x + 1$  trên đoạn  $[1; 4]$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = M + m$ .

**Lời giải**

**Đáp án:** 7.

Ta có  $h'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x \ln 2} \cdot f'(\log_2 x - 1) + 3x^2 - 18x + 15$ .

Với  $x \in [1; 4] \Rightarrow -1 < \log_2 x - 1 < 1 \Rightarrow f'(\log_2 x - 1) < 0 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{x \ln 2} \cdot f'(\log_2 x - 1) < 0$ .

Và  $3x^2 - 18x + 15 \leq 0, \forall x \in [1; 4] \Rightarrow h'(x) < 0, \forall x \in [1; 4]$ .

Suy ra hàm số nghịch biến trên  $[1; 4] \Rightarrow \min_{[1;4]} h(x) = h(4) = -13; \max_{[1;4]} h(x) = h(1) = 20 \Rightarrow T = 7$ .

**Câu 23. (Sở Hà Nội 2025)** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2}{x+1}$  có hai điểm cực trị  $A$  và  $B$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

**Lời giải**

**Đáp án:** 4,5.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}; y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -2 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$$

Theo tính chất hàm hữu tỉ bậc hai trên bất nhất, ta có hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là  $A(0; 0); B(-2; -4)$

Do đó, khoảng cách giữa hai điểm cực trị là:  $AB = 2\sqrt{5} \approx 4,5$

**Câu 24. (Sở Yên Bái 2025)** Gọi  $M(a; b)$  là điểm thuộc đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+2}$  và có khoảng cách từ  $M$  đến đường thẳng  $d: y = 3x + 6$  nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức  $T = 6a^2 + 7b^2$ .

**Lời giải**

**Đáp số:** 13.

Gọi  $M\left(a; \frac{2a+1}{a+2}\right)$  là điểm thuộc đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+2}$  ( $C$ ), khoảng cách từ  $M$  đến  $d$  nhỏ nhất khi  $M$  là tiếp điểm của tiếp tuyến của ( $C$ ) sao cho tiếp tuyến song song với đường thẳng  $d: y = 3x + 6$

Ta có:  $y'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$ .

Do đó:  $y'(a) = \frac{3}{(a+2)^2} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -3 \end{cases}$

$$\Rightarrow M_1 = (-1; -1), M_2 = (-3; 5) \Rightarrow \begin{cases} d(M_1; d) = \frac{4}{\sqrt{10}} \\ d(M_2; d) = \frac{8}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Vậy  $\min d(M; d) = \frac{4}{\sqrt{10}}$  khi  $M(-1; -1) \Rightarrow a = b = -1 \Rightarrow T = 6a^2 + 7b^2 = 13$ .

**Câu 25. (Sở Đà Nẵng 2025)** Một giáo viên theo dõi sự tiến bộ của học sinh qua thang đo điểm, được mô hình hoá bằng hàm số  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  với  $a, b, c$  là các hệ số. Trong đó,  $x (0 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N})$  là số tháng kể từ đầu năm học và  $f(x)$  là điểm trong tháng thứ  $x$ . Qua theo dõi, giáo viên ghi nhận tháng đầu tiên học sinh đạt 19 điểm, sau đó giảm trong tháng thứ hai và đến tháng thứ ba học sinh đạt mức điểm thấp nhất trong năm học, là 3 điểm. Kể từ tháng thứ ba trở đi, điểm của học sinh tăng lên. Tính điểm của học sinh đó ở tháng thứ sáu.

**Lời giải**

**Đáp số:** 84.

Ta có:  $f(1) = 19 \Rightarrow a + b + c = 18$

Tháng thứ 3 học sinh đạt mức điểm thấp nhất là 3 điểm nên  $f(3) = 3 \Leftrightarrow 9a + 3b + c = -24$

Ta có:  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ . Vì tháng 3 là học sinh đạt điểm thấp nhất nên  $x = 3$  là điểm cực trị của hàm số  $f(x) \Rightarrow f'(3) = 0$ .



$$\Leftrightarrow 6a + b = -27$$

Ta có hệ phương trình 
$$\begin{cases} a + b + c = 18 \\ 9a + 3b + c = -24 \\ 6a + b = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -9 \\ c = 30 \end{cases}$$

Do đó  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 30 \Rightarrow f(6) = 84$ .

**Câu 26. (Sở Quảng Nam 2025)** Biết đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$  có điểm cực tiểu là  $M(x_0; y_0)$ , tính  $T = x_0 + y_0$ .

**Lời giải**

Đáp án: 5.

Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Ta có  $y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$

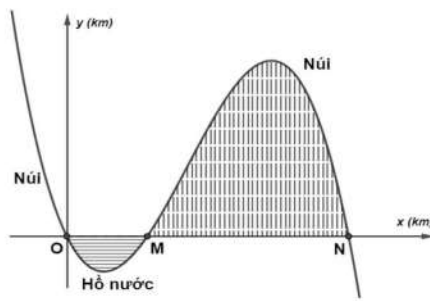
$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$3$	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-2$	$-\infty$	$+\infty$	$2$	$+\infty$

Do đó điểm cực tiểu là  $M(3; 2) \Rightarrow T = x_0 + y_0 = 3 + 2 = 5$ .

**Câu 27. (THPT Ngô Sĩ Liên - Bắc Giang 2025)** Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa bởi hàm bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách  $OM = 2km$ ; độ rộng của núi  $MN = 3,5km$ . Độ sâu của hồ nước là 450m. Chiều cao của ngọn núi là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị).

**Lời giải**

**Đáp số: 1191**



Hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có dạng  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , ( $a \neq 0$ )

Ta có:  $ON = OM + MN = 2 + 3,5 = 5,5(km)$

Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại các điểm:  $O(0;0)$ ,  $M(2;0)$  và  $N(5,5;0)$

Khi đó, phương trình  $f(x) = 0$  có ba nghiệm phân biệt là  $x = 0; x = 2; x = 5,5$ .

$\Rightarrow f(x) = k.x(x-2)(x-5,5) = k(x^3 - 7,5x^2 + 11x)$  với đồ thị hàm số  $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty$  nên  $k < 0$

Ta có:  $f'(x) = k(3x^2 - 15x + 11)$

Xét  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow k(3x^2 - 15x + 11) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 15x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{93}}{6}$ .

Độ sâu của hồ nước là  $450m = 0,45km$  nên ta có giá trị cực tiểu của đồ thị hàm số trên là  $y_{CT} = -0,45$ .

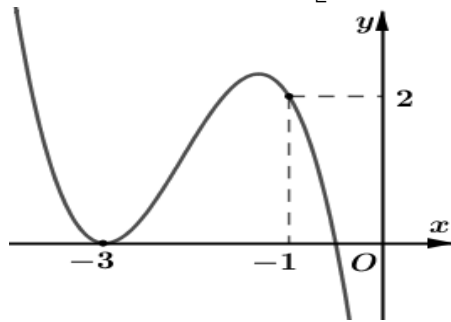
$$\text{Suy ra, } f\left(\frac{15-\sqrt{93}}{6}\right) = -0,45 \Leftrightarrow k \cdot \frac{-135+31\sqrt{93}}{36} = -0,45 \Leftrightarrow k = \frac{-16,2}{-135+31\sqrt{93}}.$$

$$\text{Chiều cao của ngọn núi tương ứng với } y_{CD} = f\left(\frac{15+\sqrt{93}}{6}\right) \approx 1,19106(km) \approx 1191(m).$$

Vậy ngọn núi cao khoảng 1191m.

**Câu 28. (THPT Hoàng Hóa 2-Thanh Hóa 2025)** Cho hàm bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên.

Hỏi đồ thị hàm số  $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$  có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



**Lời giải**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 + x \geq 0 \\ x \neq 0 \\ f^2(x) - 2f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \\ x \neq 0 \\ f^2(x) - 2f(x) \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Xét } f^2(x) - 2f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases};$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = x_1 \in (-1; 0) \end{cases}$$

$$f(x) = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = x_2 \in (-\infty; -3), \text{ hàm số } y = f(x) \text{ có hệ số } a < 0 \\ x = x_3 \in (-3; -1) \\ x = -1 \end{cases}$$

Ta viết lại hàm số

$$\begin{aligned} y &= \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]} = \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x^2 + x}}{x \cdot a \cdot (x+3)^2 (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x \cdot a (x+3)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} \end{aligned}$$

Nghiệm  $x = x_1$  không thỏa mãn điều kiện xác định, suy ra đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận  $x = 0; x = x_2; x = x_3; x = -3$ .

**Câu 29. (THPT Tư Nghĩa 1 - Quảng Ngãi 2025)** Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3x + \frac{4}{x^2}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ . (Quy tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Đáp án: 6,24.**

$$\text{Ta có } y = 3x + \frac{4}{x^2} = \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{4}{x^2} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{4}{x^2}} \Rightarrow y \geq 3\sqrt[3]{9}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \frac{3x}{2} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là  $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9} \approx 6,24$  khi  $x = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ .

**Câu 30. (THPT Quốc Võ 1 - Bắc Ninh 2025)** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{3\sin x + 2}{\sin x + 1}$  trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Khi đó giá trị của  $M^2 + m^2 = \frac{b}{c}$ , tính  $T = b - c$

**Trả lời: 37**

**Lời giải**

Đặt  $t = \sin x$ ,  $t \in [0; 1]$ .

Xét hàm  $f(t) = \frac{3t+2}{t+1}$  trên đoạn  $[0; 1]$  có  $f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} > 0, t \in [0; 1]$ .

Suy ra hàm số đồng biến trên  $[0; 1]$

$$\Rightarrow M = \max_{[0;1]} f(t) = f(1) = \frac{5}{2} \text{ và } m = \min_{[0;1]} f(t) = f(0) = 2.$$

$$\text{Khi đó, } M^2 + m^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2^2 = \frac{41}{4} \Rightarrow b - c = 37.$$

**Câu 31. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025)** Hàm số  $y = x^3 + ax^2 + bx + 2$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$ . Tính tổng  $b + 2a$ .

**Lời giải**

**Trả lời: -3**

Ta có  $y' = 3x^2 + 2ax + b$ .

Vì hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 1$  nên  $y'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2a + b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = -3$ .

**Câu 32. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025)** Cho các hàm số  $f(x) = x^2 - 4x + m$ , với  $m$  là tham số và  $g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2(x^2 + 3)^3$ . Tìm số giá trị nguyên của  $m \in [3; 10]$  để hàm số  $g(f(x))$  đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$ .

**Lời giải**

**Trả lời: 8**

Ta có  $g'(x) = 2x(x^2 + 2)(x^2 + 3)^2(6x^4 + 22x^2 + 18)$  và  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Đặt  $y = g(f(x))$ .

$$\text{Khi đó } y' = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \text{ và } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + m = 0 \\ 2x - 4 = 0 \end{cases}$$


$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + m = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ta xét các trường hợp sau:

**Trường hợp 1:**  $m > 4$ .

Khi đó phương trình  $x^2 - 4x + m = 0$  có  $\Delta' = 4 - m < 0$  nên phương trình vô nghiệm.

Bảng biến thiên:


$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$y'$	-	0	+
$y$			

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số  $y$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$  nên hàm số đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$  hay  $m > 4$  thỏa yêu cầu.

**Trường hợp 2:**  $m = 4$ .

Khi đó phương trình  $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$  (nghiệm kép).

Bảng biến thiên:

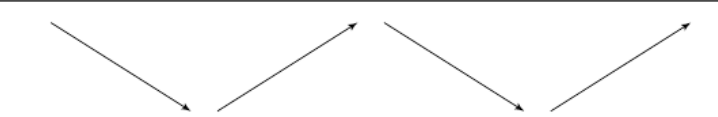
$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$y'$	-	0	+
$y$			

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số  $y$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$  nên hàm số đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$  hay  $m = 4$  thỏa yêu cầu.

**Trường hợp 3:**  $m = 3$ .

Khi đó phương trình  $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$ .

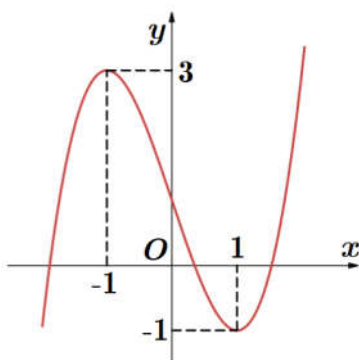
Bảng biến thiên:

$x$	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$			
$y'$		-	0	+	0	-	0	+
$y$								

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số  $y$  đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$  hay  $m = 3$  thỏa yêu cầu.

So với điều kiện  $m \in \mathbb{Z}$  và  $m \in [3; 10]$  ta được  $m \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$  hay có 8 giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 33.** (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên dưới.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để phương trình  $25^{f(x)} + 125m = m \cdot 5^{f(x)} + 5^{f(x)+3}$  có đúng 5 nghiệm thực phân biệt?

**Lời giải****Trả lời: 124**

$$25^{f(x)} + 125m = m \cdot 5^{f(x)} + 5^{f(x)+3} \Leftrightarrow 5^{f(x)} \cdot 5^{f(x)} - 125 \cdot 5^{f(x)} + 125m - m \cdot 5^{f(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5^{f(x)}(5^{f(x)} - 125) - m(5^{f(x)} - 125) = 0 \Leftrightarrow (5^{f(x)} - m)(5^{f(x)} - 125) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^{f(x)} - m = 0 \\ 5^{f(x)} - 125 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{f(x)} = m \\ 5^{f(x)} = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \log_5 m \\ f(x) = 3 \end{cases} \text{ với } m > 0.$$

Do phương trình  $f(x) = 3$  có hai nghiệm nên để phương trình  $25^{f(x)} + 125m = m \cdot 5^{f(x)} + 5^{f(x)+3}$  có đúng 5 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi  $-1 < \log_5 m < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < m < 125$ .

Vậy có tất cả 124 giá trị  $m$  thỏa yêu cầu.

**Câu 34. (Cụm Chuyên Môn Đăk Lak 2025)** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x$ , có giá trị cực đại và cực tiểu lần lượt là  $y_1$  và  $y_2$ . Khi đó giá trị của biểu thức  $2y_1 - y_2$  bằng bao nhiêu?

**Phương pháp:**

Tìm cực trị của hàm bậc ba.

**Cách giải:**

Ta có:

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & \Rightarrow y = -2 = y_2 \\ x = -1 & \Rightarrow y = 2 = y_1 \end{cases} \text{ (do hàm bậc ba).}$$

Vậy  $2y_1 - y_2 = 6$ .

**Câu 35. (THPT Hà Trung - Thanh Hóa 2025)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc  $(-2025; 2025)$  để hàm số  $y = \frac{m \log_2 x - 2}{\log_2 x - m - 1}$  nghịch biến trên  $(4; +\infty)$ .

**Lời giải****Đáp số: 2022**

Đặt  $t = \log_2 x$ .

Ta có  $x \in (4; +\infty) \Leftrightarrow t \in (2; +\infty)$ .

Hàm số được viết lại  $y = \frac{mt - 2}{t - m - 1}$  (1).

Vì  $t = \log_2 x$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$  nên yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow$  (1) nghịch biến trên  $(2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m(m+1) + 2 < 0 \\ m+1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2.$$

Kết hợp điều kiện  $m$  thuộc  $(-2025; 2025)$  nên có 2022 giá trị  $m$  thỏa mãn

**Câu 36. (Sở Bắc Ninh 2025)** Cho hàm số  $f(x) = \frac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{-x^3+3x-2}$  (với  $a, b$  là các hằng số). Biết rằng  $f(x)$  liên tục tại điểm  $x=1$ . Giá trị của  $f(1)$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Trả lời: 1**

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{ax^2+1}-(bx+2)}{-x^3+3x-2} = \frac{ax^2+1-(bx+2)^2}{-(x-1)^2(x+2)(\sqrt{ax^2+1}+bx+2)} \\ &= \frac{(a-b^2)x^2-4bx-3}{-(x-1)^2(x+2)(\sqrt{ax^2+1}+bx+2)} = \frac{-3\left[\frac{b^2-a}{3}x^2+\frac{4b}{3}x+1\right]}{-(x-1)^2(x+2)(\sqrt{ax^2+1}+bx+2)}. \end{aligned}$$

Hàm số  $f(x)$  liên tục tại điểm  $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  (hữu hạn), suy ra

$$\frac{b^2-a}{3}x^2+\frac{4b}{3}x+1=(x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^2-a}{3}=1 \\ \frac{4b}{3}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{4} \\ b=-\frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x+2)\left(\sqrt{-\frac{3}{4}x^2+1}-\frac{3}{2}x+2\right)} = 1.$$

Giá trị của  $f(1)=1$ .

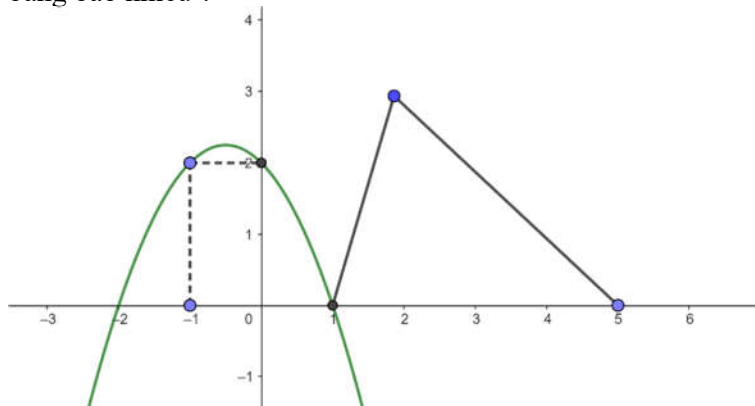
**Cách 2:** Đặt  $g(x) = \sqrt{ax^2+1}-bx-2 \Rightarrow g'(x) = \frac{ax}{\sqrt{ax^2+1}}-b$ .

Hàm số  $f(x)$  liên tục tại điểm  $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  (hữu hạn).

Do  $x=1$  là nghiệm kép của mẫu nên  $\begin{cases} g(x)=0 \\ g'(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a+1}-b-2=0 \\ \frac{a}{\sqrt{a+1}}-b=0 \end{cases}$ . Giải được

$$a=-\frac{3}{4}, b=-\frac{3}{2}.$$

**Câu 37. (THPT Phúc Thọ - Hà Nội 2025)** Cho hàm số  $f(x)$ . Đồ thị hàm số  $f'(x)$  trên  $[-2;5]$  như hình vẽ (Phần cong là phần của Parabol  $y=ax^2+bx+c$ ). Biết  $f(-2)=0$ , giá trị của  $f(1)+f(3)$  bằng bao nhiêu?



**Lời giải**

Xét trên  $[-2;1]$  ta có :  $f'(x) = ax^2 + bx + c$ . Do đồ thị hàm số  $f'(x)$  đi qua các điểm  $(-2;0), (-1;2), (1;0)$  nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ a - b + c = 2 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Suy ra  $f'(x) = -x^2 - x + 2$  trên  $[-2;1]$

Khi đó  $f(x) = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + C$ . Do  $f(-2) = 0$  nên  $\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{10}{3}$

Vậy  $f(x) = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{10}{3}$  trên  $[-2;1]$  suy ra  $f(1) = -\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2.1 + \frac{10}{3} = \frac{9}{2}$ .

Tương tự :

Xét trên  $[1;2]$  ta có :  $f'(x) = px + q$ . Do đồ thị hàm số  $f'(x)$  đi qua các điểm  $(2;3), (1;0)$  nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2p + q = 3 \\ p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 3 \\ q = -3 \end{cases}$$

Suy ra  $f'(x) = 3x - 3$  trên  $[1;2]$

Khi đó  $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 3x + C_1$ . Do  $f(1) = \frac{9}{2}$  nên  $\frac{3}{2} - 3 + C_1 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow C_1 = 6$

Vậy  $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 3x + 6$  trên  $[1;2]$ . suy ra  $f(2) = \frac{3.2^2}{2} - 3.2 + 6 = 6$

Xét trên  $[2;5]$  ta có :  $f'(x) = mx + n$ . Do đồ thị hàm số  $f'(x)$  đi qua các điểm  $(2;3), (5;0)$  nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2m + n = 3 \\ 5m + n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 5 \end{cases}$$

Suy ra  $f'(x) = -x + 5$  trên  $[2;5]$

Khi đó  $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x + C_2$ . Do  $f(2) = 6$  nên  $-\frac{4}{2} + 10 + C_2 = 6 \Leftrightarrow C_2 = 0$

Vậy  $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x$  trên  $[2;5]$ .  $f(3) = -\frac{3^2}{2} + 5.3 = -\frac{9}{2} + 15$

Kết luận :  $f(1) + f(3) = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 15 = 15$

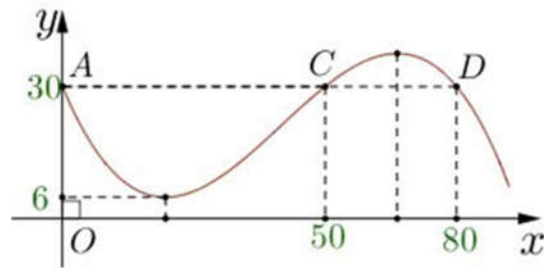
**Câu 38. (THPT Lê Quý Đôn - Hà Nội 2025)** Một phần đường chạy của tàu lượn siêu tốc ( hình 1) khi gắn hệ trục toạ độ Oxy được mô phỏng ở hình 2, đơn vị trên mỗi trục là mét. Biết đường chạy của nó là một phần đồ thị hàm bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $0 \leq x < 90$ ); tàu lượn siêu tốc xuất phát từ điểm A, đi qua các điểm C, D đồng thời đạt độ cao nhỏ nhất so với mặt đất là  $6m$ . Độ cao lớn



nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là bao nhiêu mét so với mặt đất? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Hình 1



Hình 2

Lời giải

**Đáp án:** 39,9

Dựa vào hình 2 ta thấy đồ thị hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a < 0$ ) và đường thẳng  $y = 30$  cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ  $x = 0$ ;  $x = 50$ ;  $x = 80$ .

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = 30 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d - 30 = 0 \quad \text{có} \quad 3 \quad \text{nghiệm} \quad \text{phân} \quad \text{biệt}$$

$$x = 0; x = 50; x = 80.$$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d - 30 = ax(x - 50)(x - 80) = a(x^3 - 130x^2 + 4000x)$$

$$\text{Suy ra } f(x) = a(x^3 - 130x^2 + 4000x) + 30 \Rightarrow f'(x) = a(3x^2 - 260x + 4000)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \text{ (TM)} \\ x = \frac{200}{3} \text{ (TM)} \end{cases}$$

$$\text{Theo bài ra độ cao nhỏ nhất bằng 6 hay } f(20) = 6 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{1500}$$

$$\text{Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là } f\left(\frac{200}{3}\right) = \frac{3230}{81} \approx 39,9.$$

**Câu 39.** (THPT Nguyễn Quốc Trinh - Hà Nội 2025) Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $d_1$  là khoảng cách giữa hai điểm cực trị của  $(C)$  và  $d_2$  là khoảng cách từ điểm cực tiểu của  $(C)$  đến gốc tọa độ. Giá trị của  $d_1^2 + 2d_2^2$  bằng bao nhiêu?

Lời giải

**Đáp án: 38**

$$\text{Hàm số } y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

$$\text{+) Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}, \forall x \neq -1$$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$
$y'$		$+$	$0$	$-$	$+$
$y$		$-\infty$	$-1$	$+\infty$	$3$

Đồ thị hàm số có điểm cực đại là  $M(-2; -1)$ , điểm cực tiểu là  $N(0; 3)$

+) Có  $d_1 = MN = 2\sqrt{5}$ ;  $d_2 = ON = 3$

Vậy  $d_1^2 + 2d_2^2 = 20 + 2 \cdot 3^2 = 38$ .

**Câu 40. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa 2025)** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x + 1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $A, B$  là hai điểm cực trị của đồ thị  $(C)$ . Tính bình phương của độ dài đoạn thẳng  $AB$ .

**Lời giải.**

**Đáp án:** 20

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

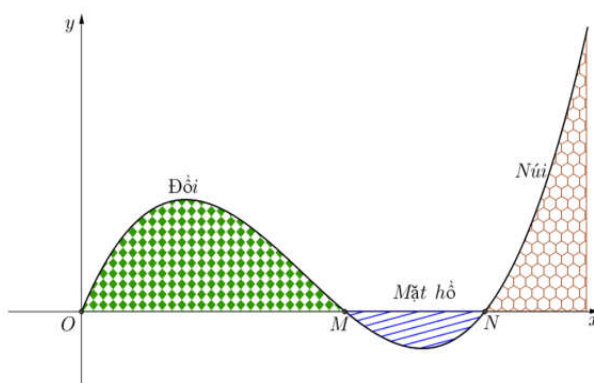
$$y' = \frac{(2x - 2)(x + 1) - (x^2 - 2x - 2)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Hai điểm cực trị của đồ thị  $(C)$  là  $A(-2; -6), B(0; -2)$

$$\overline{AB} = (2; 4) \Rightarrow AB^2 = 20.$$

**Câu 41. (THPT Cụm trường Hải Dương 2025)** Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa là một phần hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là kilômét). Biết khoảng cách hai bên chân đồi  $OM = 2(km)$ , độ rộng của hồ nước  $MN = 1(km)$  và ngọn đồi cao  $528(m)$ . Độ sâu nhất của hồ nước là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)



**Lời giải**

**Đáp án:** 158.

$$\text{Đồi } 528(m) = 0,528(km)$$

Ta có:  $ON = OM + MN = 3km \Rightarrow M(2; 0), N(3; 0)$ .

Từ đồ thị hàm số suy ra:

$$f(x) = kx(x - 2)(x - 3) = k(x^3 - 5x^2 + 6x) \Rightarrow f'(x) = k(3x^2 - 10x + 6)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{7}}{3} \\ x = \frac{5-\sqrt{7}}{3} \end{cases}.$$

Gọi  $h (h > 0)$  là độ sâu của hồ khi đó  $\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}; 0,528\right)$  là đỉnh đồi,  $\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}; -h\right)$  là đáy hồ

$$\text{Ta có: } k \left[ \left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)^2 + 6\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right) \right] = 0,528 \Leftrightarrow k \approx 0,25.$$

$$f(x) = 0,25(x^3 - 5x^2 + 6x) \Rightarrow -h = \left[ \left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)^2 + 6\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right) \right] \Leftrightarrow h \approx 0,15778(km)$$

$$\Rightarrow h \approx 158(m).$$

Nguyễn Bảo Vương