HSA
MEGA EDU

Tổng hợp
CÔNG THỨC TOÁN 11 - 12

DÀNH CHO KỲ THI THPTQG & ĐGNL ĐHQG HÀ NỘI

| Tài liệu lưu hành nội bộ |

Đại Số Lớp 12

Chương Khảo Sát Hàm Số

Đạo Hàm	Hàm Hợp
$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$	$\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}.u'$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}.u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$
$\left(\sin x\right)'=\cos x$	$\left(\sin u\right)'=u'\cos u$
$\left(\cos x\right)'=-\sin x$	$\left(\cos u\right)'=-u'\sin u$
$\left(\tan x\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\tan u\right)'=\dfrac{u}{\cos^2 u}$
$\left(\cot x\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\cot u\right)'=-\dfrac{u}{\sin^2 u}$

Tính Chất Đạo Hàm

$\left(u\pm v\right)'=u'\pm v'$

$\left(u.v\right)'=u'v+v'u$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$

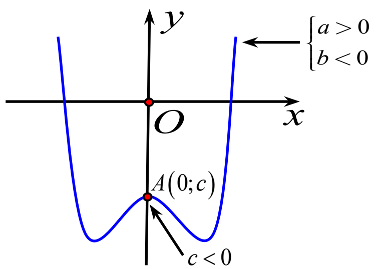
$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$$

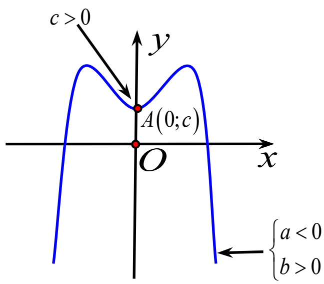
$$\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}\right)'=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ d & e\end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix}a & c\\ d & f\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b & c\\ e & f\end{vmatrix}}{\left(dx^2+ex+f\right)^2}$$

Mở Rộng		***Ý Nghĩa Đạo Hàm***
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'e^u$	*Hệ số góc tiếp tuyến:* $\boxed{k = f'(x_0)}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = u'a^u \ln a$	*Vận tốc tức thời:* $\boxed{v(t) = s'(t)}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$	*Gia tốc tức thời:* $\boxed{a(t) = v'(t)}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$	*Cường độ tức thời:* $\boxed{I(t) = Q'(t)}$

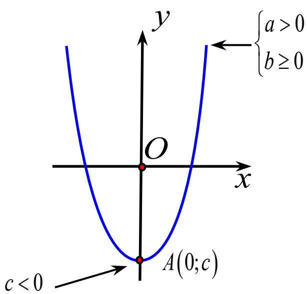
Đồ Thị Hàm Trùng Phương

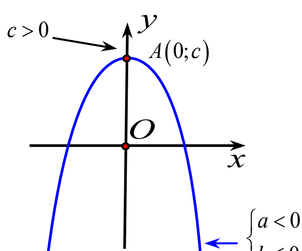
Ba Cực Trị $ab < 0$





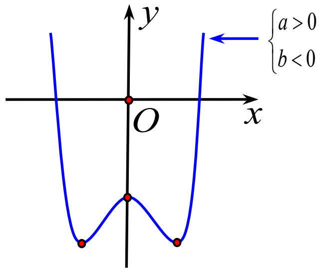
Một Cực Trị $ab \geq 0$



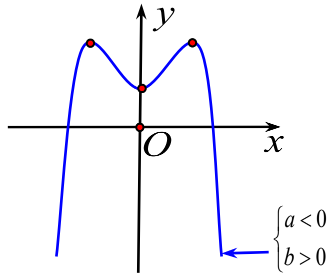


Trường Hợp Đặc Biệt

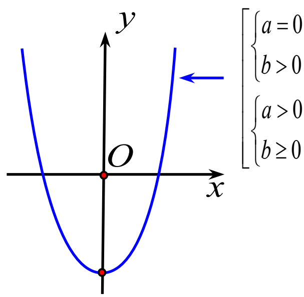
1 Cực Đại – 2 Cực Tiểu



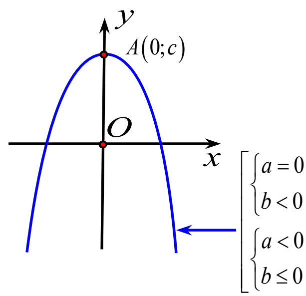
2 Cực Đại – 1 Cực Tiểu



1 Cực Tiểu



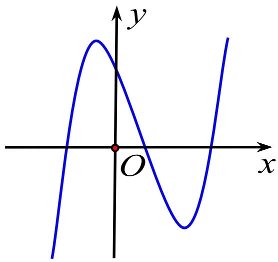
1 Cực Đại

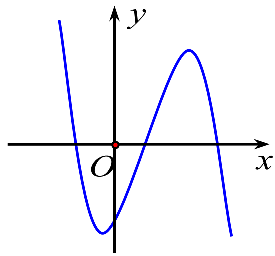


Đồ Thị Hàm Bậc Ba

Hai Cực Trị

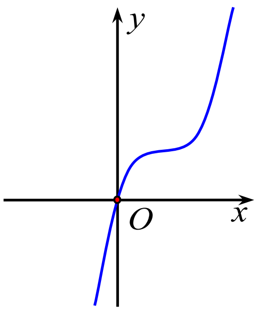
$y'=0$ *có 2 nghiệm phân biệt hay* $\Delta>0$

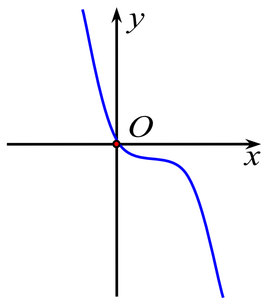


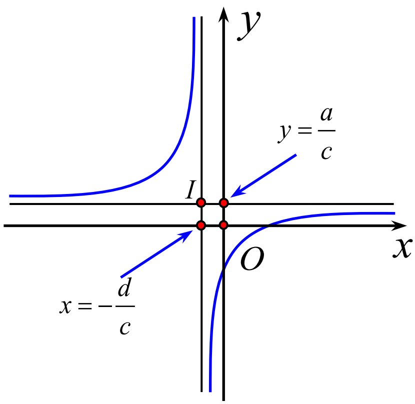
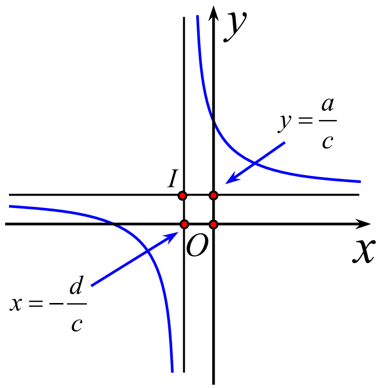


Không có cực trị

$y'=0$ *có nghiệm kép hoặc vô nghiệm hay* $\Delta\le 0$





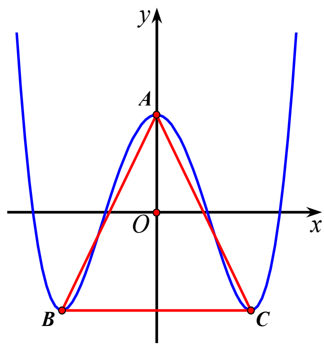
Đồ Thị Hàm Phân Thức	
Hàm số đồng biến $y' > 0 \Leftrightarrow ad - bc > 0$	***Hàm số nghịch biến*** $y' < 0 \Leftrightarrow ad - bc < 0$
	

- Đồ thị hàm số có ***tiệm cận đứng*** là $x = -\frac{d}{c}$; ***tiệm cận ngang*** là $y = \frac{a}{c}$.
- Đồ thị hàm số có ***tâm đối xứng*** $I\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$

Công Thức Giải Nhanh

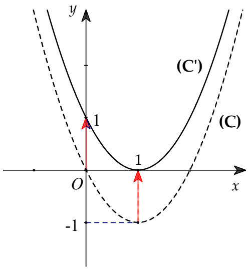
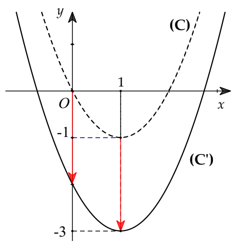
Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị A, B, C $(ab<0)$

Tam giác ABC vuông cân tại A	$b^3 = -8a$
Tam giác ABC đều	$b^3 = -24a$
Tam giác ABC có diện tích $S_{ABC} = S_0$	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$
Tam giác có trọng tâm O	$b^2 = 6ac$
Tam giác có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
Tam giác có độ dài cạnh $BC = m_0$	$a.m_0^2 + 2b = 0$
Tam giác ABC cùng điểm O tạo thành hình thoi	$b^2 = 2ac$
Tam giác ABC có cực trị $B,\ C \in Ox$	$b^2 = 4ac$
Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục Ox	$b^2 = 8ac$
Đồ thị cắt trục Ox tại 4 điểm tạo thành cấp số cộng	$b^2 = \frac{100}{9}ac$

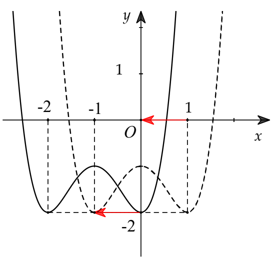
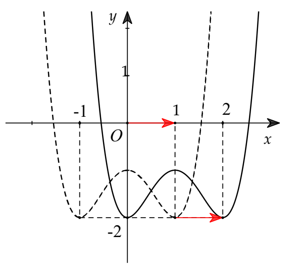


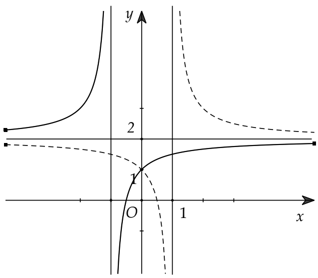
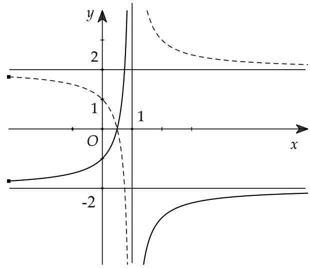
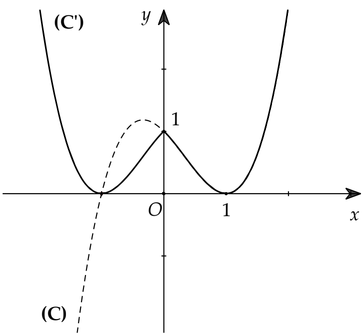
Biến Đổi Đồ Thị Hàm Số

Đồ thị $(C'): y = f(x) + a$

Tịnh tiến lên phía trên a đơn vị nếu $a > 0.$	Tịnh tiến xuống dưới $\lvert a \rvert$ đơn vị nếu $a < 0.$
$(C'): y = f(x) + 1$	$(C'): y = f(x) - 2$
	

Đồ thị $(C'): y = f(x + a)$

Tịnh tiến sang trái a đơn vị nếu $a > 0.$	Tịnh tiến sang phải $\lvert a \rvert$ đơn vị nếu $a < 0$.
$(C'): y = f(x + 1)$	$(C'): y = f(x - 1)$
	

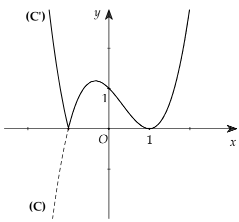
<table>
<tr>
<th>Đồ thị $\left(C'\right): y = f\left(-x\right)$</th>
<th>Đồ thị $\left(C'\right): y = -f\left(x\right)$.</th>
</tr>
<tr>
<td>Lấy đối xứng đồ thị $\left(C\right)$ qua trục Oy.
</td>
<td>Lấy đối xứng đồ thị $\left(C\right)$ qua trục Ox.
</td>
</tr>
<tr>
<th>Đồ thị $\left(C'\right): y = f\left(\left|x\right|\right)$</th>
<th>Đồ thị $\left(C'\right): y = f\left(\left|x\right| + m\right)$</th>
</tr>
<tr>
<td>+ Giữ nguyên phần đồ thị <u>bên phải Oy</u>
+ Bỏ phần đồ thị <u>bên trái Oy</u> của $\left(C\right)$
+ Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.
</td>
<td>Bước 1: Tịnh tiến $\left(C\right): y = f\left(x\right)$ theo vectơ $\vec{v} = \left(m;0\right)$
Ta được đồ thị $\left(C_1\right): y = f\left(x+m\right)$.
+) Với $m > 0$, tịnh tiến $\left(C\right)$ sang trái $\left|m\right|$ đơn vị.
+) Với $m < 0$, tịnh tiến $\left(C\right)$ sang phải $\left|m\right|$ đơn vị.</td>
</tr>
</table>

Đồ thị $(C'): y = |f(x)|$.

+ *Giữ nguyên* phần <u>đồ thị phía trên *Ox*</u>

+ *Bỏ* phần đồ thị <u>phía dưới *Ox*</u> của (C).

+ *Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ* qua *Ox*.

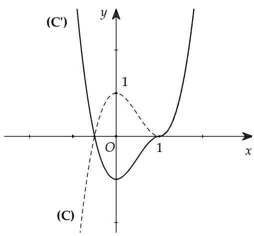


Đồ thị $(C'): y = |u(x)|.v(x)$.

+ *Giữ nguyên* phần <u>đồ thị trên miền</u> $u(x) \ge 0$

+ *Bỏ* phần đồ thị <u>trên miền</u> $u(x) < 0$ của (C).

+ *Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ* qua *Ox*.



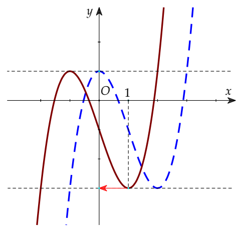
Bước 2: Biến đổi từ $(C_1): y = f(x+m)$ thành đồ thị $(C'): y = f(|x|+m)$ bằng cách:

+ Giữ phần đồ thị (C_1) bên phải trục Oy

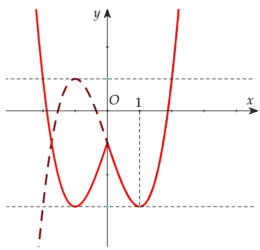
+ Bỏ phần đồ thị (C_1) bên trái Oy.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.

$(C_1): y = f(x+1)$



$(C'): y = f(|x|+1)$



Chương Mũ - Logarit

Lũy Thừa

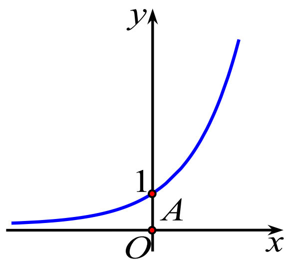
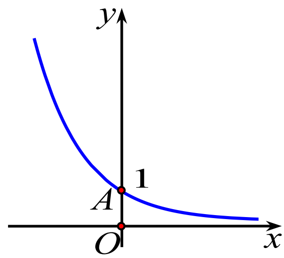
$a^m.a^n=a^{m+n}$	$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\Rightarrow\dfrac{1}{a^n}=a^{-n}$
$\left(a^m\right)^n=a^{m.n}$	$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$
$(a.b)^n=a^n.b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

Logarit

$\boxed{\alpha=log_a b\Leftrightarrow a^\alpha=b}$ $\quad (a,\ b>0,a\neq 1)$.

$log_a 1=0$ $\qquad$ $log_a a=1.$	$log_a a^b=b$ $\qquad$ $a^{log_a b}=b$
$*\ log_a(bc)=log_a b+log_a c$ $*\ log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)=log_a b-log_a c$ $*\ log_a b^\alpha=\alpha\, log_a b$ $*\ log_{a^\alpha} c=\dfrac{1}{\alpha}log_a c$	$*\ log_a b=\dfrac{log_c b}{log_c a}$ $*\ log_c a.log_a b=log_c b$ $*\ log_a b=\dfrac{1}{log_b a}$ $*\ a^{log_b c}=c^{log_b a}$

Đồ Thị Hàm Số Mũ

$a > 1$	$0 < a < 1$
	

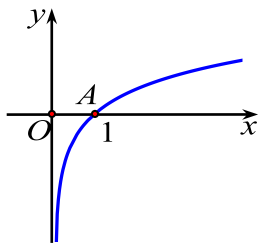
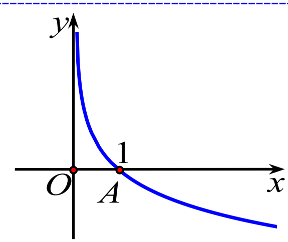
Nhận trục hoành làm đường ***tiệm cận ngang.***

Khi $a > 1$ hàm số luôn ***đồng biến.***

Khi $0 < a < 1$ hàm số luôn ***nghịch biến.***

Đồ thị luôn đi qua điểm $A(0;1)$.

Đồ Thị Hàm Số Logarit

$a > 1$	$0 < a < 1$
	

Nhận trục tung làm đường ***tiệm cận đứng.***

Khi $a > 1$ hàm số ***đồng biến.***

Khi $0 < a < 1$ hàm số ***nghịch biến.***

Đồ thị luôn đi qua điểm $A(1;0)$.

Bài Toán Lãi Suất Ngân Hàng	
Công Thức Giải Nhanh	
Bài Toán Lãi Kép: $\boxed{S_n = A(1+r)^n}$	*A: Số Tiền Gửi; r: Lãi kép;* S_n *là số tiền nhận được*
Bài Toán Tiền Gửi Hàng Tháng: $\boxed{S_n = \frac{A}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)}$	*A: Số Tiền Gửi Hàng Tháng; r: Lãi kép;* S_n *là số tiền nhận được*
Bài Toán Trả Góp: $\boxed{X = \frac{A(1+r)^n.r}{(1+r)^n - 1}}$	*A: Số Tiền Vay; r: Lãi kép; X: Số Tiền Trả Hàng Tháng.*

Chương Nguyên Hàm – Tích Phân	
Nguyên Hàm	***Hàm Hợp***
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
	$\int (ax+b)^\alpha du = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C$
$\int \frac{1}{x^\alpha} dx = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C$	$\int \frac{1}{u} du = ln\|u\| + C$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{u^\alpha}du = -\frac{1}{(\alpha-1)u^{\alpha-1}} + C$$

$$\int \cos u du = \sin u + C$$

$$\int \sin u du = -\cos u + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 u}du = \tan u + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 u}du = -\cot u + C$$

Lý thuyết nguyên hàm:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x)} \quad \boxed{F'(x) = f(x)}$$

Công thức tính tích phân:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)} \quad \boxed{\int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)}$$

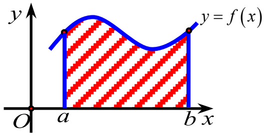
Nguyên hàm, tích phân từng phần:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu} \quad \boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu}$$

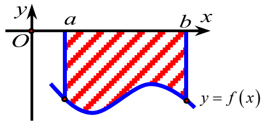
Ứng Dụng Tích Phân

Diện Tích Giới Hạn Đường Cong Với Trục Hoành

$$\boxed{S = \int_a^b \left| f(x) \right| dx}$$



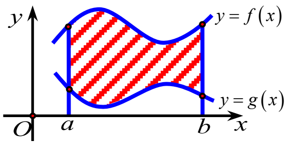
$$S = \int_a^b f(x)dx$$



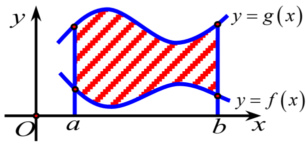
$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Diện Tích Giới Hạn Hai Đường Cong Khép Kín

$$\boxed{S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx}$$



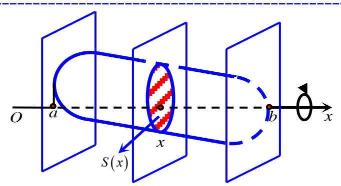
$$S = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$



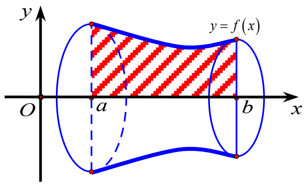
$$S = \int_a^b \left[g(x) - f(x) \right] dx$$

Thể Tích Vật Thể

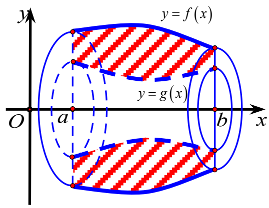
$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$



Thể Tích Khối Tròn Xoay



$$V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$$



$$V=\pi\int_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx$$

Phương Pháp Đổi Biến Số

Mẹo Đổi Biến

Dạng 1: $\boxed{\left[u(x)\right]^{\alpha}\Rightarrow t=u(x)}$

Dạng 2: $\boxed{\sqrt[m]{u(x)}\Rightarrow t=u(x)}$

Dạng 3: $\boxed{f(\ln x).\dfrac{1}{x}\Rightarrow t=\ln x}$

Dạng 4: $\boxed{e^{u(x)}\Rightarrow t=u(x)}$

Dạng 5: $\boxed{f(e^x)\Rightarrow t=e^x}$

Dạng 6:

$\boxed{f(\sin x).\cos x\Rightarrow t=\sin x}$

Dạng 7:

$\boxed{f(\cos x).\sin x\Rightarrow t=\cos x}$

Dạng 8:

$\boxed{f(\tan x).\dfrac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow t=\tan x}$

Dạng 9:

$\boxed{f(\cot x).\dfrac{1}{\sin^2 x}\Rightarrow t=\cot}$

Dạng 10: $\boxed{f\left[u(x)\right]\Rightarrow t=u(x)}$

Mẹo Đặt Phương Pháp Từng Phần

Dạng 1: $\int P(x).e^{f(x)}dx \Rightarrow \begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{f(x)dx} \end{cases}$

Dạng 2: $\int P(x).\left[\begin{array}{l} \sin f(x) \\ \cos f(x) \end{array}\right. dx \Rightarrow \begin{cases} u = P(x) \\ dv = \left[\begin{array}{l} \sin f(x) \\ \cos f(x) \end{array}\right. \end{cases}$

Dạng 3: $\int P(x).f'(x)dx \Rightarrow \begin{cases} u = P(x) \\ dv = f'(x)dx \end{cases}$

Dạng 4: $\int P(x).\ln f(x)dx \Rightarrow \begin{cases} u = \ln f(x) \\ dv = P(x)dx \end{cases}$

Chương Nguyên Hàm – Tích Phân

Các Dạng Đổi Biến Số Nâng Cao

Dấu Hiệu	*Cách Đặt*
$\sqrt{a^2 - x^2}$	**Đặt** $x = \lvert a \rvert \sin t$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ hoặc $x = \lvert a \rvert \cos t$ với $t \in [0; \pi]$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	**Đặt** $x = \frac{\lvert a \rvert}{\sin t}$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \backslash \{0\}$

	hoặc $x=\dfrac{\lvert a\rvert}{\cos t}$ với $t\in[0;\pi]\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	***Đặt*** $x=\lvert a\rvert\tan t$ với $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ hoặc $x=\lvert a\rvert\cot t$ với $t\in(0;\pi)$
$\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$	***Đặt*** $x=\lvert a\rvert\cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	***Đặt*** $x=a+(b-a)\sin^2 t$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	***Đặt*** $x=\lvert a\rvert\tan t$ với $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

Tính Chất Đặc Biệt Của Tích Phân

Nếu $f(x)$ là hàm số **chẵn** và liên tục trên đoạn $[-a;a]$ thì:

$$\boxed{I=\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{-a}^{0}f(x)dx=2\int_{0}^{2}f(x)dx}$$

Nếu Nếu $f(x)$ là hàm số **lẻ** và liên tục trên đoạn $[-a;a]$ thì:

$$\boxed{I=\int_{-a}^{a}f(x)dx=0;\ \int_{-a}^{0}f(x)dx=-\int_{0}^{a}f(x)dx}$$

Nếu $f(x)$ là hàm số **chẵn** và liên tục trên đoạn $[-a;a]$ thì:

$$\boxed{I=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)dx}{m^x+1}=\int_{0}^{a}f(x)dx}$$

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx}$$

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(a+b-x)=f(x)$.

$$\boxed{I=\int_a^b x.f(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx}$$

Nếu hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(a+b-x)=-f(x)$ thì

$$\boxed{I=\int_a^b f(x)dx = 0}$$

Chương Số Phức

❖ ***Khái niệm số phức***

+ Số phức *(dạng đại số)*: $\boxed{z=a+bi;\ (a,b\in\mathbb{R})}$.

Trong đó: a là phần thực, b là phần ảo, i là đơn vị ảo, $i^2=-1$.

+ Tập hợp số phức kí hiệu: $\mathbb{C}$.

+ z là số thực $z=a \Leftrightarrow$ Phần ảo của z bằng 0 $(b=0)$.

+ z là số ảo (hay còn gọi là thuần ảo) $z=bi \Leftrightarrow$ Phần thực bằng 0 $(a=0)$.

❖ ***Phép cộng và phép trừ số phức***

Hai số phức $z_1=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ và $z_2=c+di$ $(c,\ d\in\mathbb{R})$. Khi đó:

$\boxed{z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d)i}$

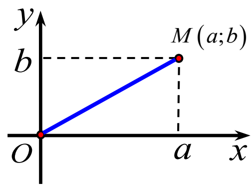
❖ ***Phép nhân số phức***

+ Cho hai số phức $z_1 = a + bi\ (a,\ b \in \mathbb{R})$ và $z_2 = c + di\ (c,\ d \in \mathbb{R})$.

Khi đó: $\boxed{z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i}$.

+ Với mọi số thực k và mọi số phức $z = a + bi\ (a,\ b \in \mathbb{R})$. Ta có:

$\boxed{k.z = k.(a + bi) = ka + kbi.}$



❖ ***Số phức liên hợp***

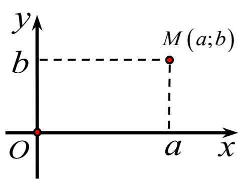
+ Số phức liên hợp của $z = a + bi\ (a,\ b \in \mathbb{R})$ là $\boxed{\overline{z} = a - bi}$. + z là số thực $\Leftrightarrow z = \overline{z}$; z là số ảo $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$.

❖ ***Chia hai số phức***

Số phức nghịch đảo của z khác 0 là số $\boxed{z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z.\overline{z}}}$. Phép chia hai số phức z' và $z \neq 0$ là $\boxed{\frac{z'}{z} = \frac{z'.\overline{z}}{z.\overline{z}}}$.

❖ ***Biểu diễn hình học số phức***

Số phức $z = a + bi\ (a,\ b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ hay bởi $\vec{u} = (a;b)$ trong mặt phẳng phức với hệ tọa độ Oxy .



❖ ***Môđun của số phức***

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là **môđun của số phức** z và kí hiệu là $|z|$.

Vậy $\boxed{|z| = |a+bi| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\overline{z}}}$

và $|\overline{z}| = |z|$

❖ ***Hai số phức bằng nhau.***

Hai số phức $z_1 = a+bi\ (a,\ b \in \mathbb{R})$ và $z_2 = c+di\ (c,\ d \in \mathbb{R})$ bằng nhau
khi phần thực và phần ảo của chúng tương đương bằng nhau.

Khi đó ta viết $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a+bi = c+di \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}}$.

Lưu ý: Với $z_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

❖ ***Giải phương trình số phức.***

Cho phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0, \forall a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Định lý Viet: $\boxed{\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}}$; ***Lưu ý:*** $\boxed{z_1^2 + z_2^2 = (z_1+z_2)^2 - 2z_1z_2}$

Xét hệ số: $\Delta = b^2 - 4ac$ của phương trình.

$+$ Khi $\Delta = 0$ phương trình có một nghiệm thực $z = -\dfrac{b}{2a}$.

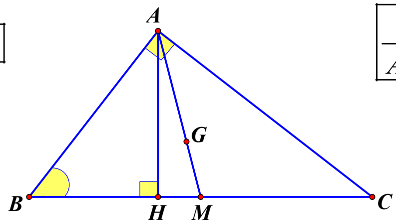
$+$ Khi $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$+$ Khi $\Delta < 0$ phương trình có hai nghiệm phức $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Hình Học Lớp 12

Chương Khối Đa Diện – Thể Tích Khối Đa Diện

ΔABC vuông tại A, $AH \perp BC$



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$AM = \frac{1}{2}BC$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$AH^2 = BH.CH$$

$$AG = \frac{2}{3}AM$$

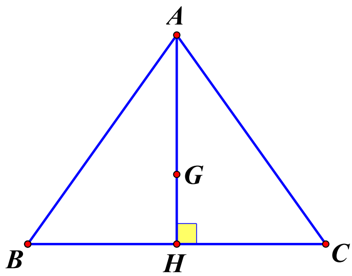
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}AH.BC$$

$$AH = \frac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$$

$$AB^2 = BH.BC$$

$$\sin\alpha = \frac{AC}{BC} \quad \cos\alpha = \frac{AB}{BC} \quad \tan\alpha = \frac{AC}{AB} \quad \cot\alpha = \frac{AB}{AC}$$

ΔABC đều cạnh x

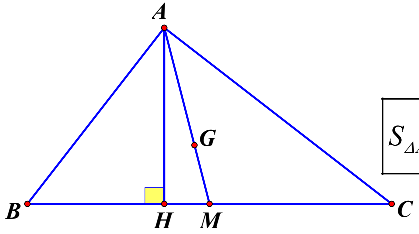


$$S_{\Delta ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

$$AH = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$R = AG = \frac{2}{3}AH = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

Tam giác thường



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{A}$$

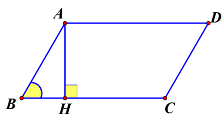
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{A}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB.AC.BC}{4R_{ngoai\ tiep}} = pr_{noi\ tiep} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

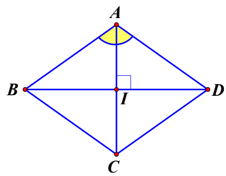
$$R_{ngoai\ tiep} = \frac{a}{2\sin\widehat{A}} = \frac{b}{2\sin\widehat{B}} = \frac{c}{2\sin\widehat{C}}$$

Hình bình hành



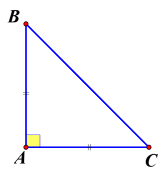
$$S_{ABCD} = AH.BC = AB.BC.\sin\widehat{B}$$

Hình thoi



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = AB^2.\sin\widehat{A}$$

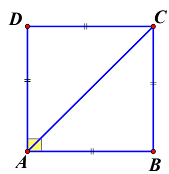
ΔABC vuông cân tại A



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC$$

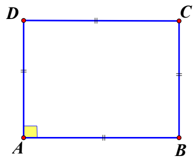
$$BC = AB\sqrt{2}$$

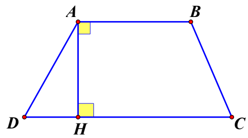
Hình vuông



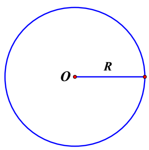
$$S_{ABCD} = AB^2$$

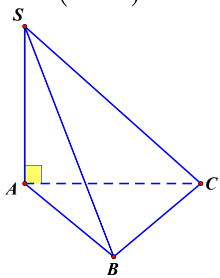
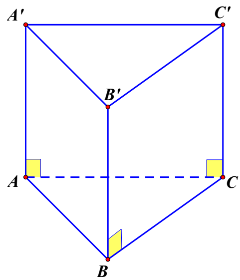
$$AC = BD = AB\sqrt{2}$$

<table>
<tr><th>Hình chữ nhật</th><th>Hình thang</th></tr>
<tr>
<td>

$\boxed{S_{ABCD} = AB.BC}$
$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$</td>
<td>

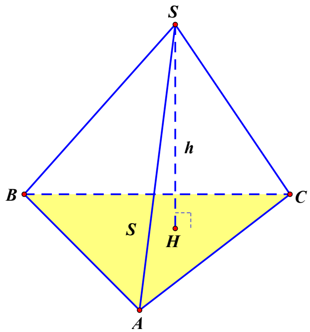
$\boxed{S_{ABCD} = \frac{(AB + DC)AH}{2}}$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Đường tròn</th><th colspan="2">Xác định chiều cao</th></tr>
<tr><th>Chiều Cao Vuông Góc Đáy</th><th>Lăng trụ đứng</th></tr>
<tr>
<td>

$Chu\ vi = 2\pi R$
$S = \pi R^2$</td>
<td>$SA \perp (ABC)$

</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

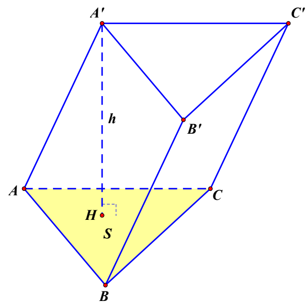
Khối Đa Diện – Thể Tích Khối Đa Diện

Khối Chóp



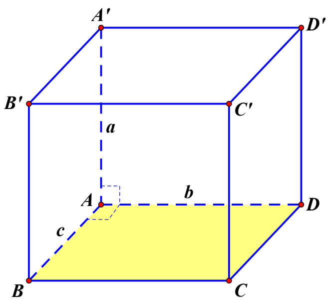
$$\boxed{V = \frac{1}{3}.h.S}$$

Khối Lăng Trụ



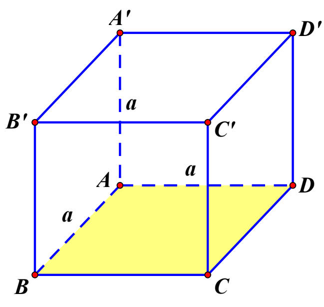
$$\boxed{V = h.S}$$

Khối Hộp Chữ Nhật



$$\boxed{V = a.b.c}$$

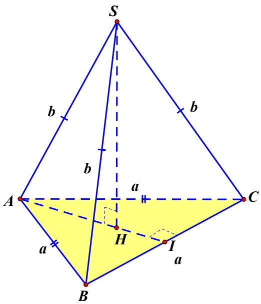
Khối Lập Phương

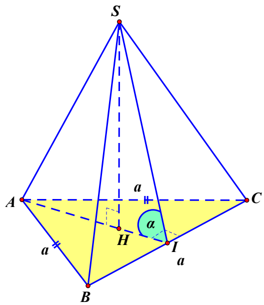


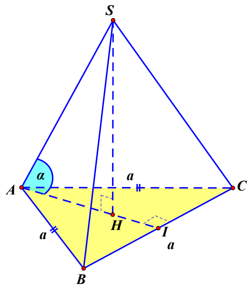
$$\boxed{V = a^3} \quad \boxed{A'C = a\sqrt{3}}$$

Công Thức Giải Nhanh Thể Tích

Hình Chóp Tam Giác Đều $S.ABC$







$$V_{S.ABC}=\frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}$$

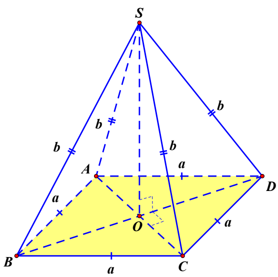
Đặc biệt

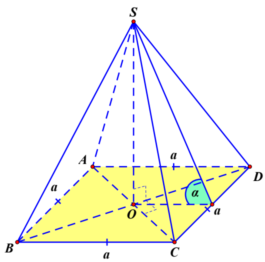
$$b=a\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

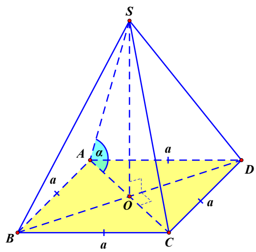
$$V_{S.ABC}=\frac{a^3\tan\alpha}{24}$$

$$V_{S.ABC}=\frac{a^3\tan\alpha}{12}$$

Hình Chóp Tứ Giác Đều $S.ABCD$







$$V_{S.ABCD}=\frac{a^2\sqrt{4b^2-2a^2}}{6}$$

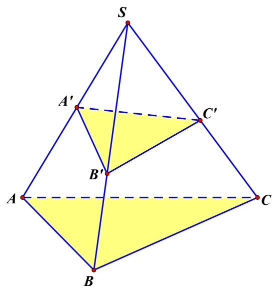
Đặc biệt

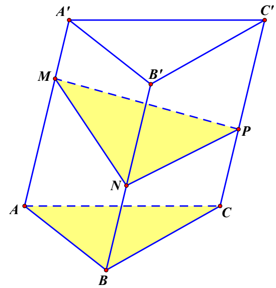
$$b=a\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

$$V_{S.ABCD}=\frac{a^3\tan\alpha}{6}$$

$$V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{2}\tan\alpha}{6}$$

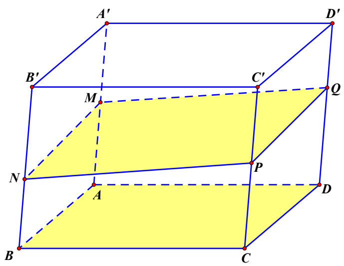
Công Thức Tỉ Số Thể Tích

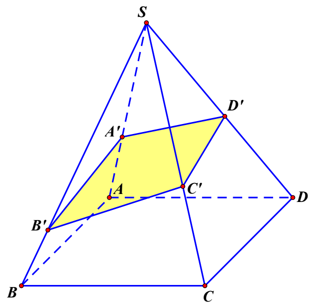




$$\boxed{\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}}$$

$$\boxed{\frac{V_{A'B'C'.MNP}}{V_{A'B'C'.ABC}} = \frac{1}{3}\left(\frac{A'M}{AA'}+\frac{B'N}{BB'}+\frac{C'P}{CC'}\right)}$$





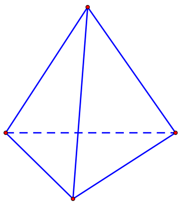
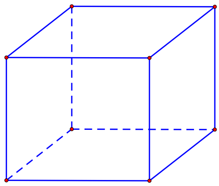
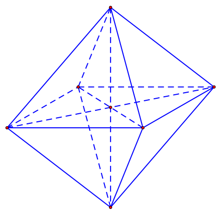
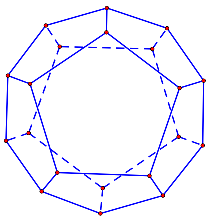
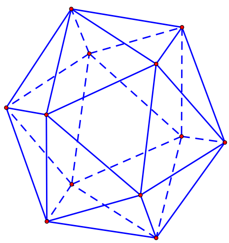
$$\frac{V_{A'B'C'D'.MNPQ}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}} = \frac{1}{2}\left(\frac{A'M}{AA'}+\frac{C'P}{C'C}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{B'N}{BB'}+\frac{D'Q}{D'D}\right)$$

$$\boxed{\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}}$$

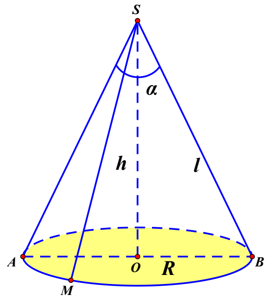
Với

$$\boxed{a=\frac{SA}{SA'};b=\frac{SB}{SB'};c=\frac{SC}{SC'};d=\frac{SD}{SD'}}$$

$$\boxed{a+c=b+d}$$

Khối Đa Diện Đều					
Loại	***Khối đa diện đều***	***Hình***	***Đỉnh***	***Cạnh***	***Mặt***
$\{3;3\}$	Tứ diện đều		4	6	4
$\{4;3\}$	Khối lập phương		8	12	6
$\{3;4\}$	Bát diện đều		6	12	8
$\{5;3\}$	Mười hai mặt đều		20	30	12
$\{3;5\}$	Hai mươi mặt đều		12	30	20

Chương Khối Tròn Xoay



- **Đường sinh**: $\boxed{\ell^2 = R^2 + h^2}$

- **Diện tích đáy (hình tròn):**

$\boxed{S_{đáy} = \pi R^2}$.

- **Diện tích xung quanh**:

$\boxed{S_{xq} = \pi R\ell}$.

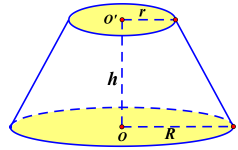
- **Diện tích toàn phần**:

$\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi R\ell + \pi R^2}$.

- **Thể tích của khối nón**:

$\boxed{V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h}$.

Nón Cụt

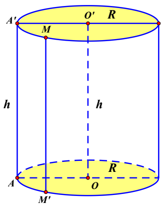
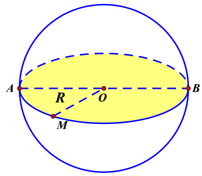


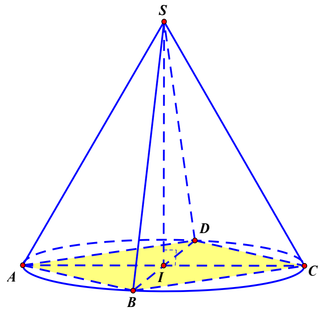
Thể tích khối nón cụt:

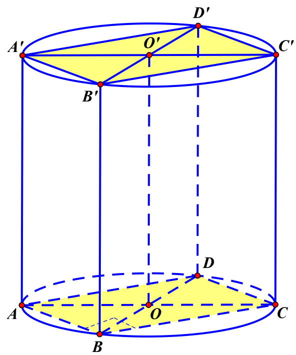
$\boxed{V = \dfrac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right)}$.

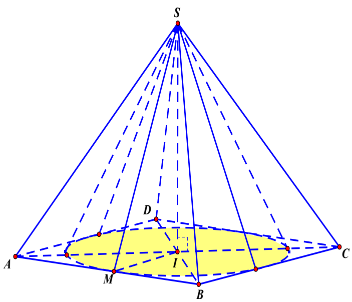
Diện tích xung quanh:

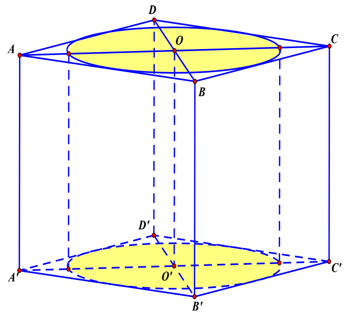
$\boxed{S_{xq} = \pi\ell\left(R + r\right)}$.

 	***Diện tích xung quanh:*** $\boxed{S_{xq} = 2\pi Rh}$ ***Diện tích đáy:*** $\boxed{S_{đáy} = \pi R^2}$ ***Diện tích toàn phần:*** $\boxed{S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2}$ ***Thể tích khối trụ:*** $\boxed{V = \pi R^2 h}$	 	***Diện tích mặt cầu:*** $\boxed{S = 4\pi R^2}$ ***Thể tích khối cầu:*** $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

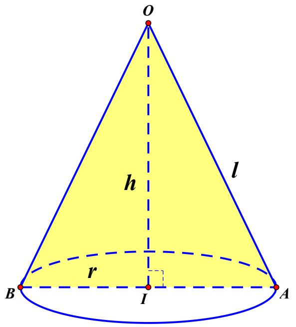
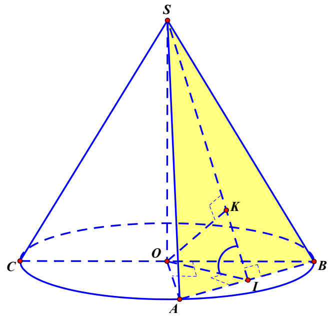
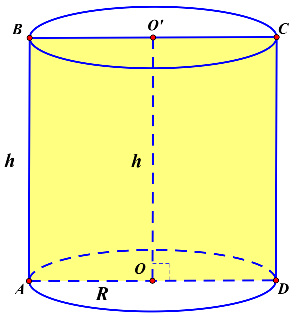
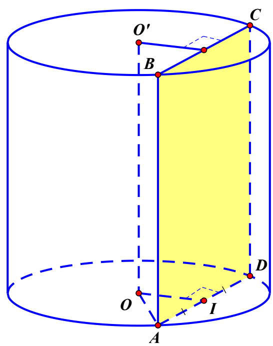
<table>
<tr><th colspan="2">Hình nón, hình trụ ngoại tiếp, nội tiếp.</th></tr>
<tr><th>Hình nón ngoại tiếp</th><th>Hình trụ ngoại tiếp</th></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>$$R=\frac{AC}{2};h=SI;l=SA$$</td><td>$$R=\frac{AC}{2};h=AA';l=A'A$$</td></tr>
<tr><th>Hình nón nội tiếp</th><th>Hình trụ nội tiếp</th></tr>
<tr><td>


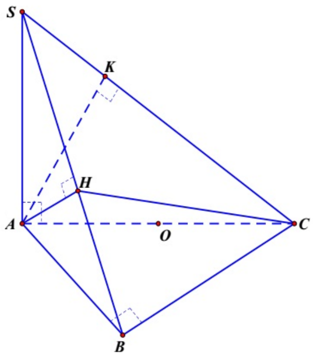
</td><td>


</td></tr>
<tr><td>$$R=IM=\frac{AD}{2};h=SI;l=SM$$</td><td>$$R=\frac{AD}{2};h=AA';l=AA'$$</td></tr>
</table>

Thiết diện cắt bởi mặt phẳng	
Thiết Diện Qua Trục	***Thiết Diện Qua Đỉnh***
	
$\boxed{R = \dfrac{AB}{2}; h = OI; l = OA}$	$\boxed{d\left(O;(P)\right) = OK}$ $\boxed{\widehat{(SAB);(OAB)} = \widehat{SIO}}$
Thiết Diện Qua Trục	***Thiết Diện Song Song Trục***
	
$\boxed{h = AB; R = OA = \dfrac{AD}{2}}$	$\boxed{d\left(O;(P)\right) = OI}$

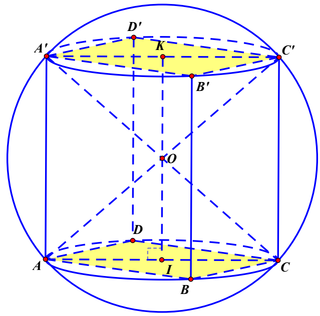
Công Thức Giải Nhanh Mặt Cầu Ngoại Tiếp Khối Chóp

Chung đường kính.



$$\boxed{R = OA = \frac{AC}{2}}$$

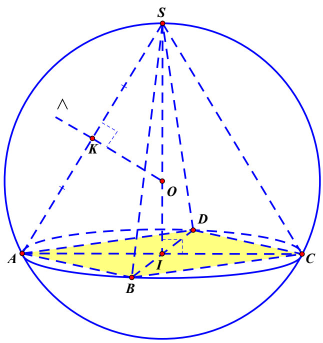
Cạnh bên vuông góc đáy.



$$\boxed{R = \frac{\sqrt{a^2 + (2R_d)^2}}{2}}$$

a : Chiều Cao; R_d : Bán Kính Đáy

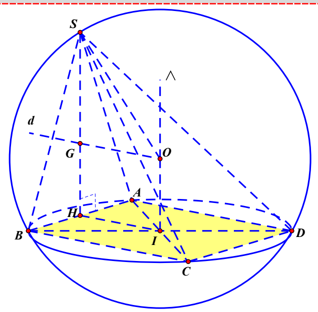
Chiều cao đi qua tâm đáy.



$$\boxed{R = \frac{SA^2}{2SI}}.$$

SA : Cạnh Bên; SI : Chiều Cao

Mặt bên vuông góc đáy.



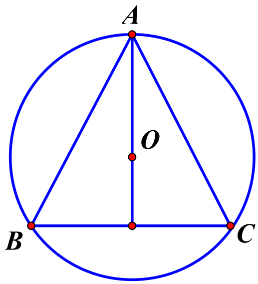
$$\boxed{R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}}}$$

R_1 : Bán Kính Đáy; R_2 : Bán Kính Mặt Bên

AB : Giao tuyến

<table>
<tr><th colspan="2">Tâm đường tròn ngoại tiếp thường gặp.</th></tr>
<tr><th>Tam giác đều</th><th>Tam giác vuông</th></tr>
<tr>
<td>

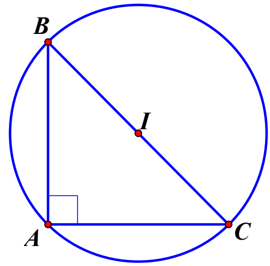
Trọng Tâm



$$R = AO = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

</td>
<td>

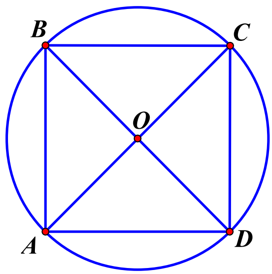
Trung điểm cạnh huyền



$$R = \frac{BC}{2}$$

</td>
</tr>
<tr><th>Hình vuông</th><th>Hình chữ nhật</th></tr>
<tr>
<td>

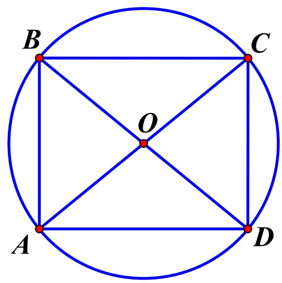
Tâm O



$$R = \frac{AC}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

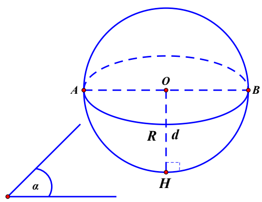
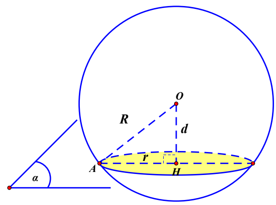
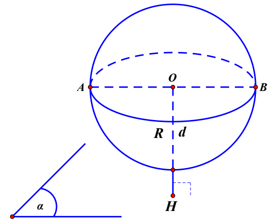
</td>
<td>

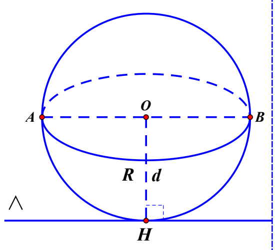
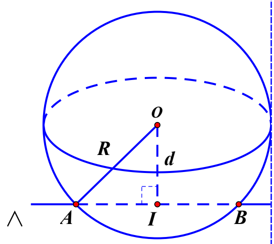
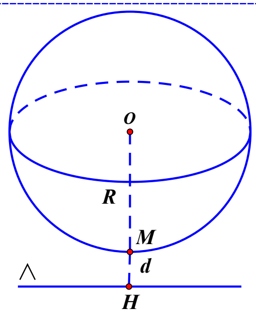
Tâm O



$$R = \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2}$$

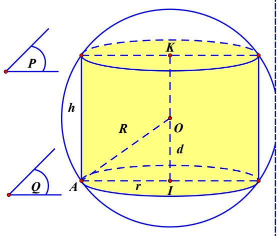
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Vị Trí Tương Đối Giữa Mặt Cầu Và Mặt Phẳng</th></tr>
<tr><td>$d = R$</td><td>$d < R$</td><td>$d > R$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu.</td><td>Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn
$\boxed{R^2 = r^2 + d^2}$</td><td>Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Vị Trí Tương Đối Giữa Đường Thẳng Và Mặt Phẳng</th></tr>
<tr><td>$IH = R$</td><td>$IH < R$</td><td>$IH > R$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Δ tiếp xúc với mặt cầu.</td><td>Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.
$\boxed{R^2 = d^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}$</td><td>$\Delta$ không cắt mặt cầu.</td></tr>
</table>

Mối Liên Hệ Giữa Các Khối

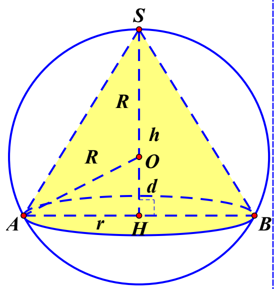
Khối Trụ Nội Tiếp Khối Cầu



$$\boxed{d = \frac{h}{2}}$$

$$\boxed{R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2}$$

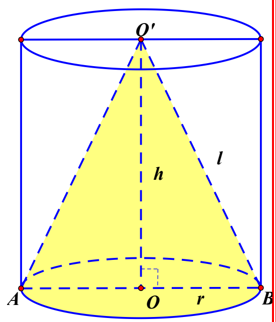
Khối Nón Nội Tiếp Khối Cầu



$$\boxed{d = h - R}$$

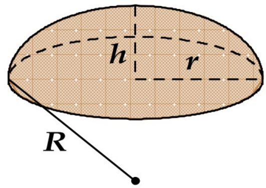
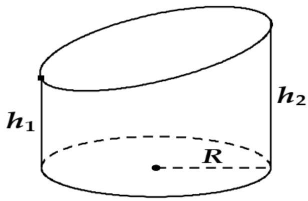
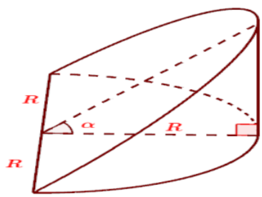
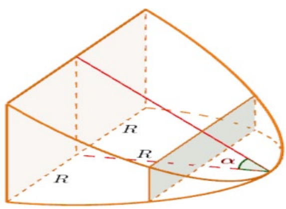
$$\boxed{R^2 = d^2 + r^2}$$

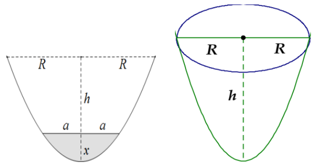
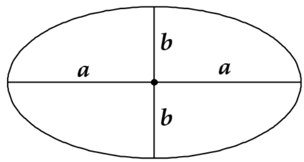
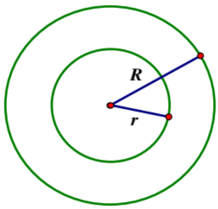
Khối Nón Tiếp Khối Trụ



$$\boxed{h_n = h_t} \quad \boxed{l^2 = h^2 + r^2}$$

Công Thức Giải Nhanh Khối Tròn Xoay

Chỏm Cầu	$\begin{cases} S_{xq} = 2\pi Rh = \pi\left(r^2 + h^2\right) \\ V = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right) \end{cases}$	
Hình Trụ Cụt	$\begin{cases} S_{xq} = \pi R\left(h_1 + h_2\right) \\ V = \pi R^2\left(\dfrac{h_1 + h_2}{2}\right) \end{cases}$	
Hình nêm loại 1	$\boxed{V = \dfrac{2}{3}R^3 \tan\alpha}$	
Hình nêm loại 2	$\boxed{V = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}\right)R^3 \tan\alpha}$	

Paralbol bậc hai – Parabol tròn xoay	$\boxed{\begin{cases} S_{paralbol} = \dfrac{4}{3}R.h \\ V = \dfrac{1}{2}\pi R^2 h = \dfrac{1}{2}V_{tru} \end{cases}}$	
Elip – Thể Tích khối tròn xoay sinh bởi Elip	$\boxed{\begin{cases} S_{elip} = \pi.a.b \\ V_{xoay\ quanh\ 2a} = \dfrac{4}{3}\pi ab^2 \\ V_{xoay\ quanh\ 2b} = \dfrac{4}{3}\pi a^2 b \end{cases}}$	
Diện tích vành khăn	$\boxed{S = \pi\left(R^2 - r^2\right)}$	

Chương Hình Học Tọa Độ Oxyz

❖ ***Tọa độ và tính chất của vectơ***

Vectơ

$\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$

Tính chất:

Cho $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$,

$\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$.

\+ $k\vec{u} = (kx_1; k\,y_1; kz_1)$.

$\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$.

❖ $\vec{u}$ ***cùng phương*** với $\vec{v}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{u} = k\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = kx_2 \\ y_1 = ky_2 \\ z_1 = kz_2 \end{cases}} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

❖ ***Hai vectơ bằng nhau***

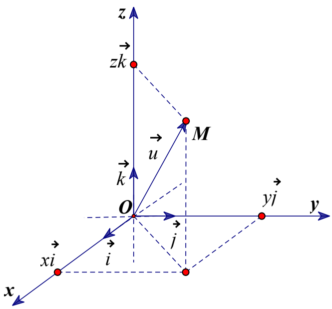
$$\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}}.$$

❖ ***Tích vô hướng*** của 2 vectơ là:

$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v})$.

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2.}$$

$$\boxed{\begin{cases} \vec{i} = (1;0;0) \\ \vec{j} = (0;1;0) \\ \vec{k} = (0;0;1) \end{cases}}$$



Tích có hướng của 2 vectơ:

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)}$$

Ba điểm A, B, C thẳng hàng

$\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \vec{0}.$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng

$\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}].\vec{w} = 0.$

Diện tích tam giác ABC:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right\|}.$$

Suy ra

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2 = 0$

❖ ***Độ dài vectơ:***

$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

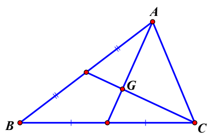
$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Nếu M là trung điểm của AB thì:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

\+ Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$



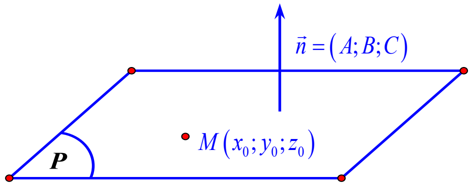
Thể tích tứ diện:

$$\boxed{V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}.$$

Phương Trình Mặt Phẳng

❖ *Lập phương trình mặt phẳng.*

Mặt phẳng (P) *đi qua điểm* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *và nhận vectơ* $\vec{n}=(A;B;C)$ *làm vectơ pháp tuyến có dạng:*



$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) *là:*

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}.$$

Phương trình mặt phẳng đoạn chắn: $\boxed{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1}$

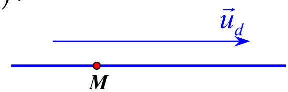
❖ *Phương trình mặt phẳng đặc biệt:*

Mặt phẳng	***Phương trình***	***Điểm Đặc Biệt***
Mặt phẳng (Oxy)	$z=0$	$M\in(Oxy)\Rightarrow M(x_M;y_M;0)$
Mặt phẳng (Oxz)	$y=0$	$M\in(Oyz)\Rightarrow M(0;y_M;z_M)$
Mặt phẳng (Oyz)	$x=0$	$M\in(Oxz)\Rightarrow M(x_M;0;z_M)$

Phương Trình Đường Thẳng

❖ *Phương trình đường thẳng*

Cho đường thẳng Δ *đi qua điểm* $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ *và có một vectơ chỉ phương là* $\vec{u}=\left(a;b;c\right)$.



\+ ***Phương trình tham số*** *của đường thẳng* Δ *là:*

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}}\ t \text{ là tham số}$$

\+ ***Phương trình chính tắc*** *của đường thẳng* Δ *là:*

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}}$$

❖ *Phương trình đường thẳng đặc biệt:*

Trục Ox	Trục Oy	Trục Oz
Phương trình: $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$	Phương trình: $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$	Phương trình: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$

Phương Trình Mặt Cầu

❖ *Phương trình mặt cầu*

Cho mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R.

Khi đó (S) có ***phương trình chính tắc*** là:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$$

Phương tình tổng quát của mặt cầu là:

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0}$$

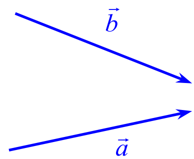
Khi đó, mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $\boxed{R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}}$

\+ ***Diện tích mặt cầu:*** $\boxed{S=4\pi R^2}$.

\+ ***Thể tích khối cầu:*** $\boxed{V=\frac{4}{3}\pi R^3}$.

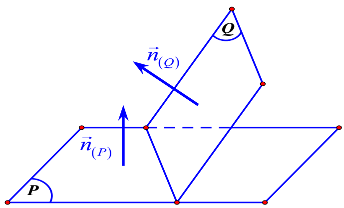
Công Thức Góc

Góc giữa hai vectơ



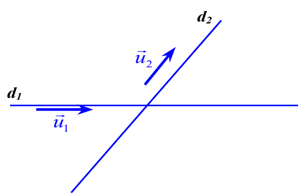
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Góc giữa hai mặt phẳng



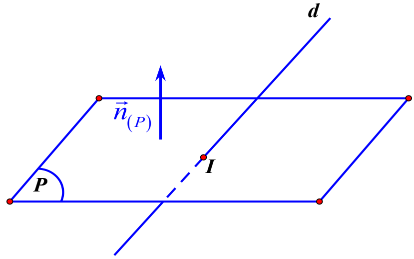
$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(Q)}\right|}{\left|\vec{n}_{(P)}\right|\left|\vec{n}_{(Q)}\right|} = \frac{|A.A' + B.B' + C.C'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

Góc giữa hai đường thẳng



$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1||\vec{u}_2|} = \frac{|x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

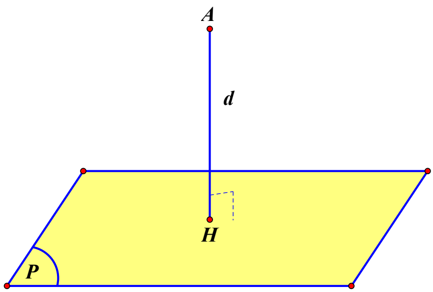
Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng



$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|} = \frac{|x.A + y.B + z.C|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

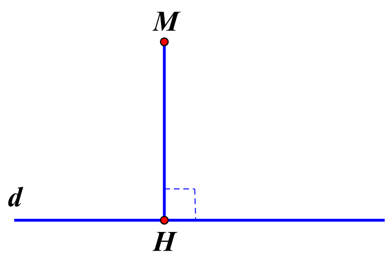
Công Thức Khoảng Cách

Khoảng Cách Từ 1 Điểm Đến Mặt Phẳng



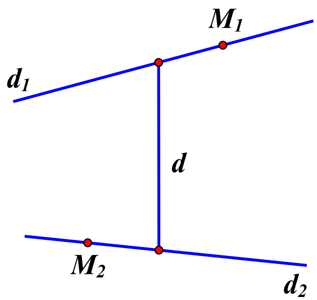
$$d\left(A;(P)\right) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Khoảng Cách Từ 1 Điểm Đến Đường Thẳng



$$d\left(M;d\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MA}, \vec{u}_d\right]\right|}{|\vec{u}_d|}$$

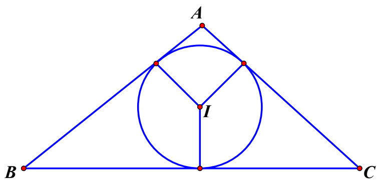
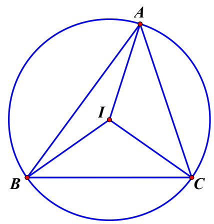
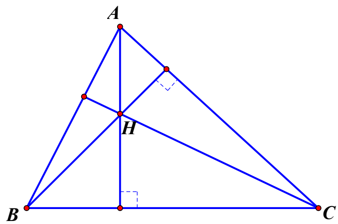
Khoảng Cách Hai Đường Thẳng Chéo Nhau

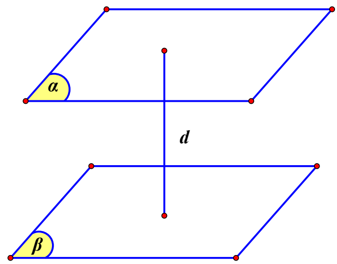
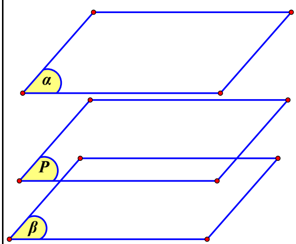


$$d\left(d_1;d_2\right)=\frac{\left|\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]\right|}$$

Chương Hình Học Tọa Độ Oxyz

Công thức giải nhanh

Tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi biết tọa độ 3 điểm A, B, C. $\boxed{\begin{cases} x_I = \dfrac{BC.x_A + CA.x_B + AB.x_C}{BC + CA + AB} \\ y_I = \dfrac{BC.y_A + CA.y_B + AB.y_C}{BC + CA + AB} \\ z_I = \dfrac{BC.z_A + CA.z_B + AB.z_C}{BC + CA + AB} \end{cases}}$	
Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi biết tọa độ 3 điểm A, B, C. $\boxed{\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{IA} = 0 \end{cases}}$	
Xác định tọa độ trực tâm của tam giác. $\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} = 0 \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{HA} = 0 \end{cases}}$	

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song. $\begin{cases}(\alpha): ax+by+cz+d_1=0\\(\beta): ax+by+cz+d_2=0\end{cases}$. $\boxed{d\left[(\alpha);(\beta)\right]=\dfrac{\lvert d_1-d_2\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$	
Mặt phẳng (P) song song và cách đều hai mặt phẳng $\begin{cases}(\alpha): ax+by+cz+d_1=0\\(\beta): ax+by+cz+d_2=0\end{cases}$. $\boxed{(P): ax+by+cz+\dfrac{d_1+d_2}{2}=0}$	

Đại số Lớp 11

Tổ Hợp - Nhị Thức Newton

- ***Hoán vị**:* Cho tập hợp X gồm n phần tử phân biệt $\left(n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*\right)$.

Mỗi cách sắp xếp n phần tử của X theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử.

Số các hoán vị của n phần tử được ký hiệu là P_n : $\boxed{P_n = n!}$

- ***Tổ hợp:*** Cho tập hợp X gồm n phần tử phân biệt và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi cách chọn ra k phần tử của X được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Số các tổ hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là C_n^k:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}}$$

Quy ước: $\boxed{C_n^0 = 1 \ ; \ A_n^0 = 1}$

Tính chất cơ bản: $\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}}$ $\boxed{C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}}$

- ***Chỉnh hợp:*** Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của A ($1 \leq k \leq n$) theo một thứ tự nào đó được gọi là chỉnh hợp chập k của n phần tử của tập A.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử: $\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$

- ***Nhị thức Newton:*** Với mọi n∈N và với mọi cặp số a,b ta có:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k}$$

Tính chất:

- Số các số hạng của khai triển bằng: $n + 1$
- Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n
- Số hạng tổng quát (thứ $k + 1$) có dạng: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

$\left(k = 0; 1; 2; ...; n\right)$

Các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và cuối thì bằng nhau: $C_n^k = C_n^{n-k}$

Cấp Số Nhân – Cấp Số Cộng

❖ ***Cấp số cộng:***

Dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + d \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}*$ gọi là cấp số cộng; d gọi là công sai.

➢ Số hạng thứ *n* được cho bởi công thức: $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d}$.

➢ Ba số hạng u_k, u_{k+1}, u_{k+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng $\boxed{\Rightarrow u_{k+1} = \frac{1}{2}(u_k + u_{k+2})}$.

❖ *Tổng n số hạng đầu tiên S_n được xác định bởi công thức:*

$$\boxed{S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right]}.$$

❖ ***Cấp số nhân:***

Dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n.q \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}^*$ gọi là cấp số nhân; q gọi là công bội.

➢ Số hạng thứ n được cho bởi công thức: $\boxed{u_n = u_1 q^{n-1}}$.

➢ Ba số hạng u_k, u_{k+1}, u_{k+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng $\boxed{\Rightarrow u_{k+1}^2 = u_k.u_{k+2}}$.

❖ Tổng n số hạng đầu tiên S_n được xác định bởi công thức :

$$\boxed{S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}}.$$

Hình Học Lớp 11

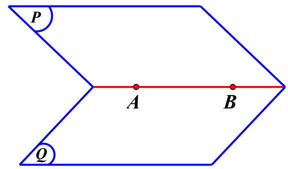
Hình Không Gian - Quan Hệ Song Song

Tìm Giao Tuyến

Phương pháp: Tìm hai điểm chung thuộc cả hai mặt phẳng.

Nối hai điểm chung đó được giao tuyến cần tìm.

Tức là: $\boxed{\begin{cases} A \in (P) \cap (Q) \\ B \in (P) \cap (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = AB}$



Tìm Giao Điểm

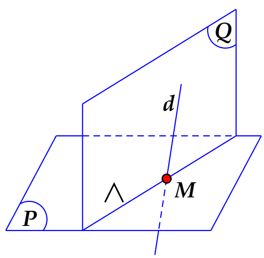
<u>Bước 1</u>. Chọn một mặt phẳng (Q) chứa d *(Mặt phẳng này thường được xác định bởi d và một điểm thuộc* (P)*)*

<u>Bước 2</u>. Tìm giao tuyến $\Delta = (P) \cap (Q)$.

<u>Bước 3</u>. Trong mặt phẳng (Q), gọi $M = d \cap \Delta$.

Khi đó,

$$\begin{cases} M \in d \\ M \in \Delta \subset (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \in d \\ M \in (P) \end{cases} \Rightarrow \boxed{M = d \cap (P)}.$$



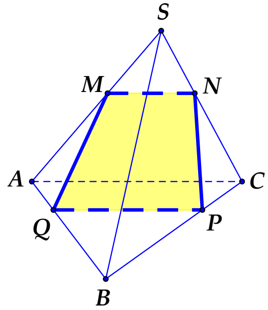
Thiết Diện Của Mặt Phẳng Với Hình Chóp

Phương pháp: Tìm các đoạn giao tuyến của mặt phẳng đó với các mặt của hình chóp.

Bước 1: Tìm ***giao tuyến đầu tiên*** của mặt phẳng (P) với một mặt phẳng (α).

Bước 2: Kéo dài giao tuyến này cắt các cạnh khác của hình chóp, từ đó ta tìm được các giao tuyến tiếp theo.

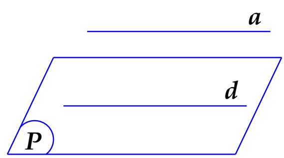
Bước 3: Đa giác giới hạn bởi các đoạn giao tuyến này khép kín thành một thiết diện cần tìm.



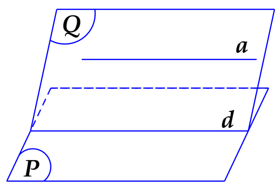
Đường Thẳng Song Song Mặt Phẳng

Định lí 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó trong (P) thì a song song với (P).

Tức là: $\boxed{\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \parallel d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)}$.



Định lí 2: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì sẽ cắt theo một giao tuyến song song với a.

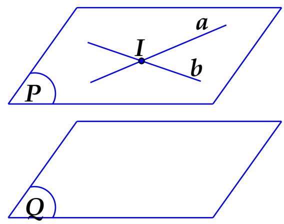


Tức là: $\boxed{\begin{cases} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ (Q) \cap (P) = d \end{cases} \Rightarrow a \parallel d}$.

Hai Mặt Phẳng Song Song

Định lí 1: Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song (Q).

Tức là: $\boxed{\begin{cases} a, b \in (P) \\ a \cap b = \{I\} \\ a \parallel (P), b \parallel (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel (Q)}$.

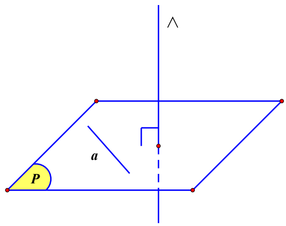


Chương Quan Hệ Vuông Góc

Đường Thẳng Vuông Góc Mặt Phẳng

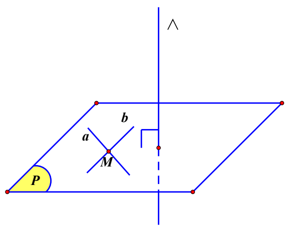
Định nghĩa: Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó. Kí hiệu: $\Delta \perp (P)$.

Tức là: $\boxed{\begin{cases} \Delta \perp (P) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp a}$.



Định lí: Nếu một đường thẳng Δ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b nằm trên một mặt phẳng (P) thì đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P)

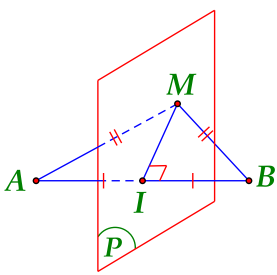
Tức là: $\boxed{\begin{cases} \Delta \perp a;\ \Delta \perp b \\ a,b \subset (P) \\ a \cap b = \{M\} \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (P)}$.



Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng.

Là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đường thẳng chứa đoạn thẳng đó.

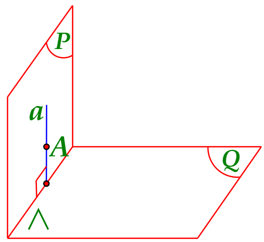
(*Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp các điểm trong không gian cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó*).



Hai Mặt Phẳng Vuông Góc

Định lý: Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

Tức là: $\boxed{\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)}.$

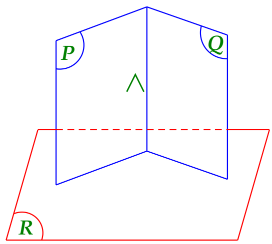


Định lý: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến đều vuông góc với mặt phẳng kia.

Tức là: $\boxed{\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \\ (P) \supset a \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q).}$

Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

Tức là: $\boxed{\begin{cases} (P) \cap (Q) = \Delta \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (R).}$

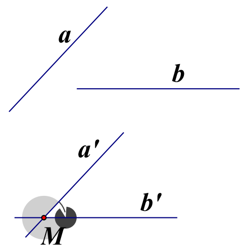


Góc Giữa Hai Đường Thẳng

+ Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b.

Tức là: $\boxed{\begin{cases} a // a' \\ b // b' \end{cases} \Rightarrow \widehat{(a,b)} = \widehat{(a',b')}.}$

Chú ý: $0^0 \le \widehat{(a,b)} \le 90^0$.

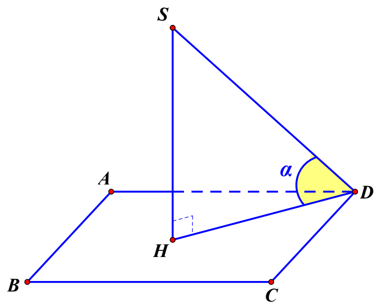


Kiến Thức Về Góc

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng!

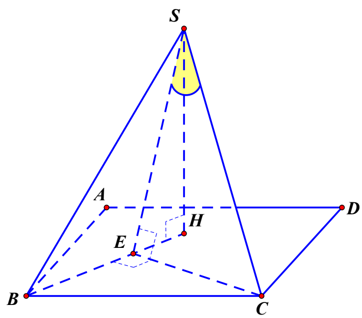
Góc Cạnh Bên Với Mặt Đáy

$$\widehat{\left(SD;\left(ABCD\right)\right)} = \widehat{\left(SD;HD\right)} = \widehat{SDH}$$



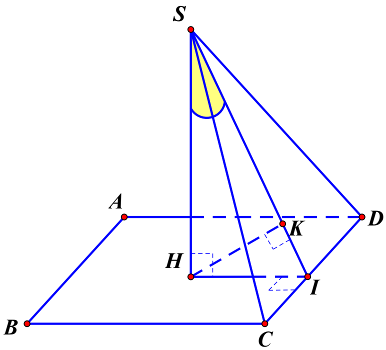
Góc Cạnh Bên Với Mặt Đứng

$$\widehat{\left(CS;\left(SBH\right)\right)} = \widehat{\left(CS;ES\right)} = \widehat{CSE}$$



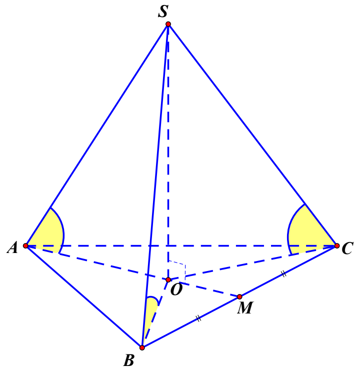
Góc Chiều Cao Với Mặt Bên

$$\left(\widehat{HS;(SCD)}\right)=\left(\widehat{HS;IS}\right)=\widehat{HSI}$$



Các cạnh bên tạo góc bằng nhau

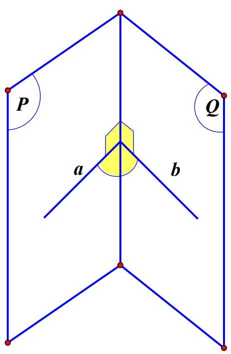
Chiều cao $SO\perp(ABC)$ *với O là tâm* ***ngoại tiếp*** *đáy.*



Góc giữa mặt phẳng với mặt phẳng!

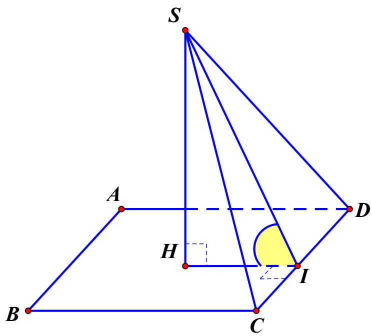
Góc Giữa Hai Mặt Phẳng

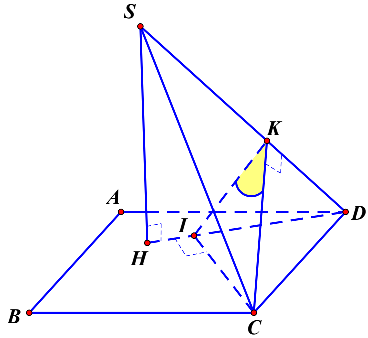
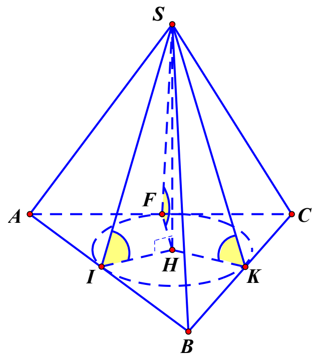
$$\left(\widehat{(P);(Q)}\right)=\left(\widehat{a;b}\right)$$

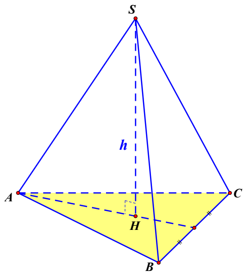
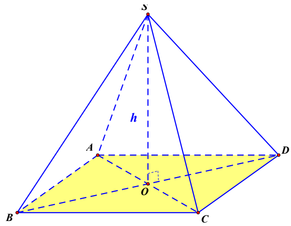
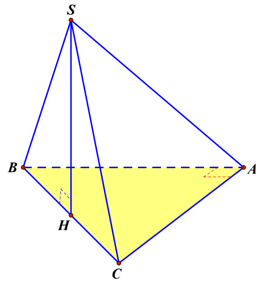


Góc Mặt Bên Với Mặt Đáy

$$\left(\widehat{(SCD);(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SI;HI}\right)=\widehat{SIH}$$



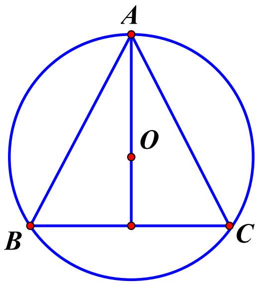
Góc Mặt Bên Với mặt Đứng	Các mặt bên tạo góc bằng nhau
$\left(\widehat{(SCD);(SDH)}\right)=\left(\widehat{CK;IK}\right)=\widehat{CKI}$ 	*Chiều cao:* $SH\perp(ABC)$ *với* *H là tâm **nội tiếp** đáy.* 

<table>
<tr><th colspan="3">Hình Chóp Đều Hoặc Các Cạnh Bên Bằng Nhau</th></tr>
<tr><th>Hình chóp đều $S.ABC$, tứ diện đều</th><th>Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$</th><th>Các cạnh bên bằng nhau</th></tr>
<tr><td>Đáy là tam giác đều.
Chiều cao đi qua trọng tâm tam giác.

</td><td>Đáy là hình vuông.
Chiều cao đi qua tâm O

</td><td>Chiều cao đi qua tâm đáy.

</td></tr>
</table>

Tâm đường tròn ngoại tiếp thường gặp.

Tam giác đều

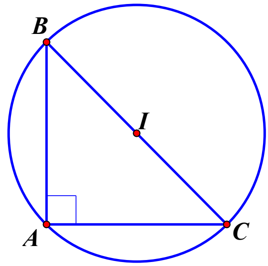
Trọng Tâm



$$R = AO = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

Tam giác vuông

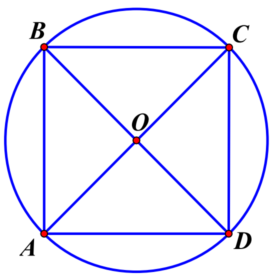
Trung điểm cạnh huyền



$$R = \frac{BC}{2}$$

Hình vuông

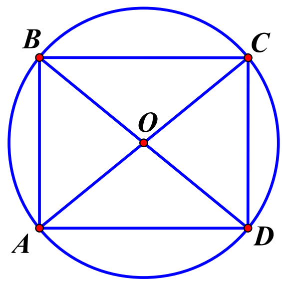
Tâm O



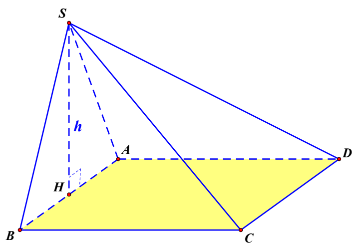
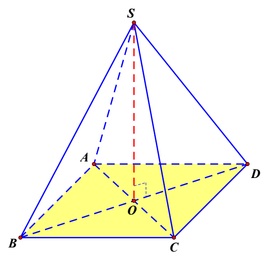
$$R = \frac{AC}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

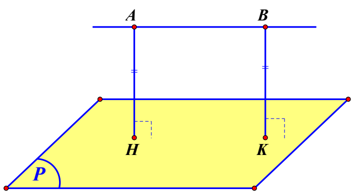
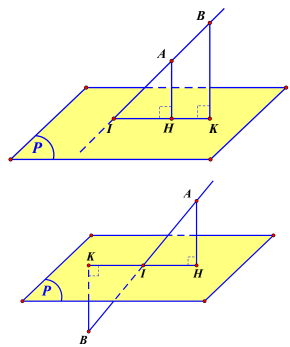
Hình chữ nhật

Tâm O



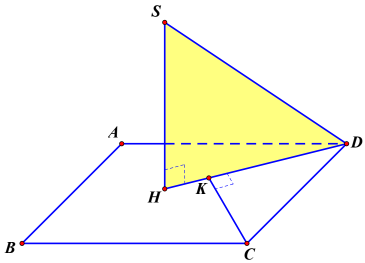
$$R = \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2}$$

Xác Định Chiều Cao	
Mặt Bên Vuông Góc Mặt Đáy	***Hai Mặt Phẳng Cùng Vuông Góc Gia Tuyến***
Chiều cao là chiều cao của mặt bên	***Chiều cao là giao tuyến hai mặt phẳng***
	

Khoảng Cách	
Công Thức Chuyển Khoảng Cách Về Chân Đường Cao	
Đường Thẳng Song Song Mặt Phẳng	***Đường Thẳng Cắt Mặt Phẳng***
$\xrightarrow{AB\ //\ (P)} \boxed{d\left(A,(P)\right)=d\left(B,(P)\right)}$ 	$\xrightarrow{AB\cap(P)=\{I\}} \boxed{\dfrac{d\left(A,(P)\right)}{d\left(B,(P)\right)}=\dfrac{AI}{BI}}$ 

Khoảng Cách Từ Một Điểm Đến Một Mặt Phẳng

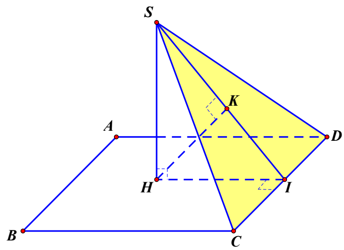
Từ Một Điểm Đến Mặt Đứng



Bước 1: Kẻ $CK \perp HD$

Bước 2: $\boxed{d\left(C,\left(SHD\right)\right) = CK}$

Từ Chân Đường Cao Đến Mặt Bên

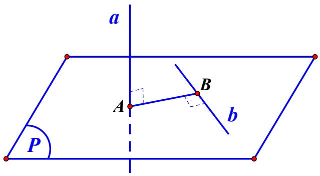
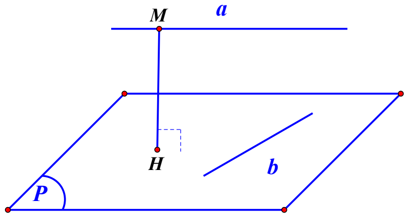


Bước 1: Kẻ $HI \perp CD,\ \left(I \in AB\right)$;

Kẻ $HK \perp SI, \left(K \in SI\right)$

Bước 2:

$$\boxed{d\left(H,\left(SCD\right)\right) = HK = \frac{SH.HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}}}$$

Khoảng Cách Giữa Hai Đường Thẳng Chéo Nhau	
Đường Vuông Góc Chung	***Phương Pháp Kẻ Song Song***
 ***Bước 1:*** Dựng mặt phẳng (P) chứa b và vuông góc với a tại A. ***Bước 2:*** Trong (P) dựng $AB \perp b$ tại B. ***Bước 3:*** Đoạn AB là đoạn vuông góc chung. $\boxed{d(a,b) = AB}$	 ***Bước 1:*** Dựng mặt phẳng (P) chứa b và song song với a. ***Bước 2:*** $\boxed{d(a,b) = d(a,(P)) = d(M;(P)) \quad (M \in a)}$ ***Bước 3:*** Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P).