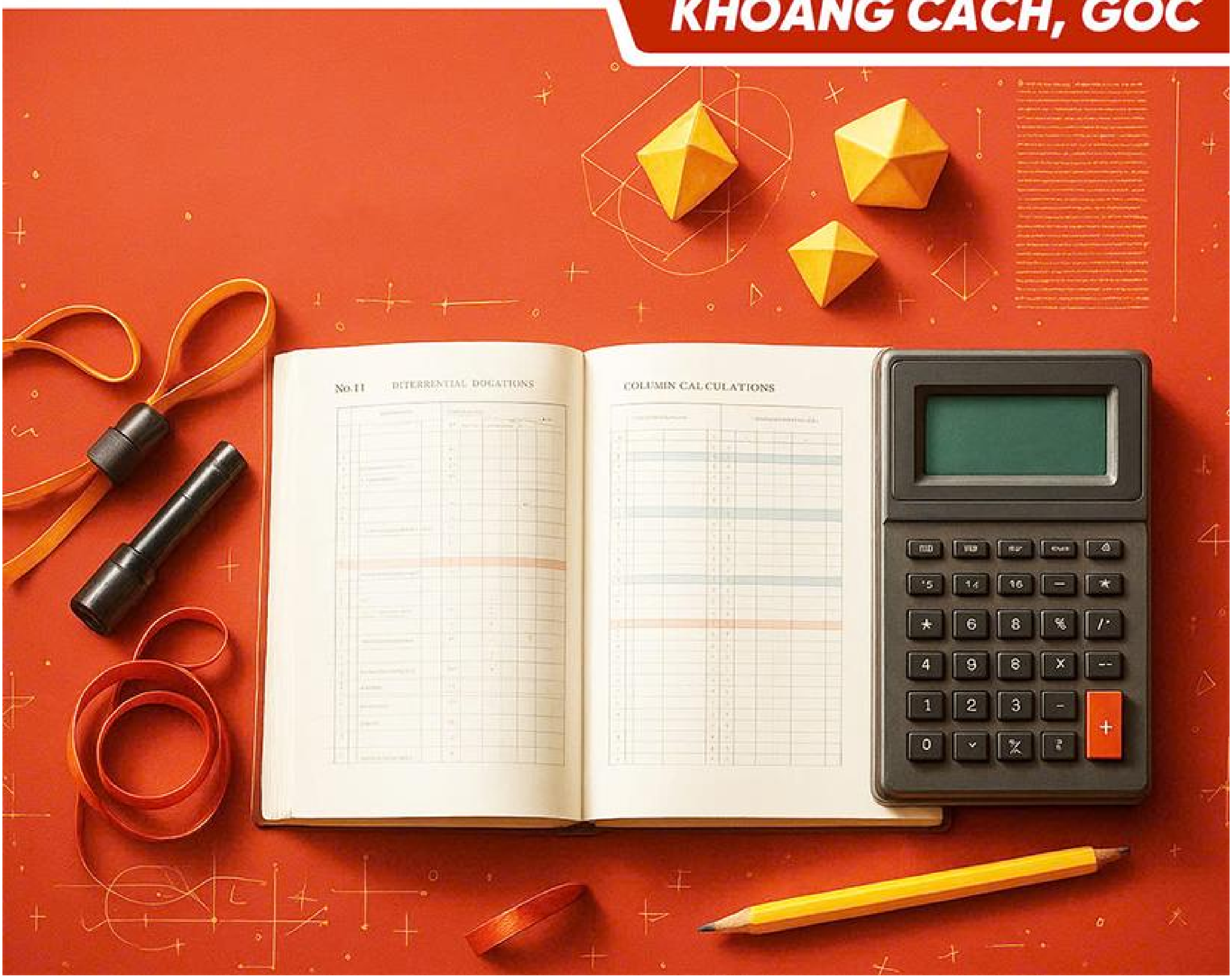
HSA
MEGA EDU

40 CÂU

CHINH PHỤC 8+

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

KHOẢNG CÁCH, GÓC



LỜI NÓI ĐẦU

"Hành trình vạn dặm bắt đầu từ một bước chân."

Câu nói của Lão Tử đã sống mãi cùng thời gian, như một lời nhắc nhở dịu dàng rằng mỗi hành trình lớn lao trong cuộc đời , dù là chinh phục đỉnh cao tri thức, vượt qua những thử thách của tuổi trẻ, hay theo đuổi ước mơ thầm kín – đều khởi nguồn từ những bước đi đầu tiên, dù là chậm rãi, vụng về hay đầy lo lắng.

Các em học sinh thân mến, có lẽ trong mỗi người đều từng có những khoảnh khắc chùn bước. Có khi là nỗi lo sợ về bài kiểm tra sắp tới, là cảm giác mệt mỏi giữa những buổi học dày đặc, hay là sự hoang mang không biết con đường mình đang đi sẽ dẫn đến đâu. Nhưng chính trong những giây phút ấy, nếu các em chọn không dừng lại, chọn nhích thêm một bước dù rất nhỏ, thì các em đã tiến gần hơn tới mục tiêu của mình!

Cuốn sách nhỏ này được viết dành tặng các em – những học sinh đang từng ngày bồi đắp kiến thức, rèn luyện bản thân và nuôi dưỡng hoài bão. Trong hành trình học tập, sẽ có lúc các em cảm thấy mỏi mệt, hoang mang hoặc nghi ngờ chính mình. Nhưng xin hãy nhớ: không ai sinh ra đã mạnh mẽ, không ai bắt đầu mà đã thành công. Quan trọng nhất, là các em dám bước đi.

Cuốn sách này được gửi đến như một món quà, không chỉ chứa đựng tri thức mà còn chất chứa niềm tin. Tin rằng các em có thể. Tin rằng bên trong mỗi người là một khả năng tiềm ẩn chờ được đánh thức. Và tin rằng, không có con đường nào là vô vọng nếu ta bước đi với sự kiên trì và trái tim cháy bỏng ước mơ.

Mỗi trang sách là một nấc thang. Mỗi câu hỏi, mỗi bài học không chỉ giúp các em chuẩn bị tốt hơn cho kỳ thi, mà còn là dịp để rèn luyện tư duy, ý chí và bản lĩnh – những hành trang quý giá cho suốt cuộc đời.

Hãy bắt đầu từ hôm nay. Từng dòng chữ, từng lần cố gắng, từng giọt mồ hôi đều có ý nghĩa. Có thể hiện tại chưa thấy ngay kết quả, nhưng giống như hạt giống âm thầm nảy mầm dưới lớp đất, mọi nỗ lực rồi sẽ kết trái.Và khi các em bước qua hành trình này, ngoảnh lại nhìn, chính các em cũng sẽ phải ngạc nhiên về sự trưởng thành của mình.

Chúc các em giữ vững ngọn lửa học tập, luôn can đảm bước tiếp – vì mỗi bước chân hôm nay là nền móng cho những giấc mơ ngày mai.

Thân gửi,

HSA MEGA EDU – LUYỆN THI ĐGNL ĐHQG HÀ NỘI

ÔN TẬP 40
BỘ CÂU HỎI CHINH PHỤC 8+ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN (PHẦN 1)

PHẦN I: TỰ LUẬN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, trong đó $ABCD$ là một hình thang với đáy AB và CD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và BC, G là trọng tâm của tam giác SAB. Giao tuyến d của hai mặt phẳng (SAB) và (GIJ). Biết d cắt SA tại M và cắt SB tại N. Tứ giác $MNJI$ là hình bình hành thì $AB = k.CD$. Khi đó $k = ?$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD. Gọi M là trung điểm của SB. Gọi F là giao điểm của DM và (SIK). Tính tỉ số $\frac{MF}{MD}$?

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác $B'D'A$ và BDC'. Khi đó: $GG' = kA'C$. Tìm k?

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SA, BC. Giao điểm của mặt phẳng (MND) và SB là I. Tính giá trị gần đúng của $\frac{SI}{SB}$?

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD và G là trung điểm SO. Mặt phẳng (MNG) cắt SC tại điểm H. Biết $HC = k.HS, k \in \mathbb{N}$. Tìm giá trị của k?

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD. Gọi M là trung điểm của SB. Gọi F là giao điểm của DM và (SIK). Tính tỉ số $\frac{MF}{DF}$?

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Gọi I là giao điểm của SA và mặt phẳng (CMN). Tính tỉ số $\frac{SA}{SI}$?

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy $AD = 7$ và $BC = 5$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD và SB. Gọi Q là giao điểm của SC với mặt phẳng (APD), gọi I giao của AP và SM, J là giao của DQ và SN. Tính độ dài đoạn IJ?

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$. Gọi F là giao điểm của AD với mặt phẳng (IJK). Tính tỉ số $\frac{AD}{AF}$?

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với $AD//BC$ và $AD=2BC$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD thỏa mãn $SM=\frac{1}{3}SD$. Gọi N là giao điểm của mặt phẳng (ABM) với cạnh bên SC. Tính tỉ số $\frac{SN}{SC}$?

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AD//BC)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD, G,G' lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và SCD. Có bao nhiêu mặt phẳng song song với GG'?

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Trên các cạnh SB,SD lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $\frac{SM}{SB}=\frac{SN}{SD}=\frac{2}{3}$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm O và song song với mặt phẳng (AMN) cắt SC tại J. Tính tỉ số $\frac{SJ}{SC}$?

PHẦN II: TRẮC NGHIỆM

Câu 13. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi $M;N$ lần lượt là trung điểm của BC và CD. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và SD.

A. $45°$. **B.** $135°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a;BC=2a$ và $SA\perp(ABCD);SA=2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

A. $45°$. **B.** $135°$. **C.** $60°$ **D.** $90°$.

Câu 15. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Góc giữa hai đường thẳng SA và BC là:

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a,\widehat{ABC}=60°$, $SA=a$ và $SA\perp(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SB. Tính góc giữa hai đường thẳng SA và CM.

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Câu 17. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. $AA'=AB=a$. Tính góc giữa đường thẳng AB' và BC.

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Câu 18. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AA'=AB=a$, $AD=2a$. Tính tang của góc giữa đường thẳng AB' và BC'.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** 3.

Câu 19. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi với $AB = BD = AA' = a$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AC' và BC.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 20. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a và $\widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^0$. Góc giữa hai đường thẳng AB và $B'C$ bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Câu 21. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD.

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Câu 22. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và các góc $\widehat{BAD}$, $\widehat{DAA'}$, $\widehat{A'AB}$ đều bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD. Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng MN và $B'C$, giá trị của $\cos\alpha$ bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Câu 24. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, gọi O là tâm đáy và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Gọi I là trung điểm của BC. Tính khoảng cách từ O đến SA.

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 25. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi O là tâm đáy và M là trung điểm CD. Tính khoảng cách từ O tới đường thẳng SM.

A. $\frac{a}{\sqrt{6}}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi H là hình chiếu của A lên BD. Tính khoảng cách d từ điểm A đến đường thẳng SH

A. $d = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $d = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. **C.** $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{57}}{19}$

Câu 27. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $\widehat{BAD}=60°$, cạnh đáy bằng a thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng đáy trùng với giao điểm H của hai đường chéo của hình thoi. Gọi K là điểm trên cạnh AB sao cho $(SHK)\perp(SAB)$. Khoảng cách từ H đến đường thẳng SK bằng:

A. $\frac{a}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** a.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $\widehat{ABC}=60°$, $\widehat{BAC}=90°$, $SB\perp(ABCD)$, $SB=a$, $AB=a$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của B trên SA,SC. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (BHK) theo a.

A. $\frac{a}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{4a}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Câu 30. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $AA'=2a$. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 31. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 32. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, gọi M là trung điểm của AB, tam giác $A'CM$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối lăng trụ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(ABB'A')$.

A. $\frac{2a\sqrt{57}}{5}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{39}}{3}$.

Câu 33. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, điểm E thuộc đoạn BC sao cho $BC=3EC$. Biết hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm H của AB, cạnh bên $AA'=2a$ và tạo với đáy một góc $60°$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(A'HE)$ là

A. $\frac{4a}{5}$. **B.** $\frac{3a}{4}$. **C.** $\frac{3a}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{39}}{3}$.

Câu 34. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD. Khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ theo a bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 3. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,CD. Biết $AB=CD$ $=AN=BN=CM=DM=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 37. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D, $AD=2a$. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại D lấy điểm S với $SD=a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DC và SA

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Câu 38. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Câu 39. Cho lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAC}=60^\circ$. Biết $AA'=A'B=A'D$ và cạnh bên AA' hợp với mặt phẳng đáy góc 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và BD.

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{8}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=3a$, $AD=a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC.

A. $\frac{a\sqrt{13}}{6}$. **B.** $a\sqrt{13}$. **C.** $\frac{a\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\frac{6a\sqrt{13}}{13}$.

----------------------------HẾT----------------------------

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, trong đó $ABCD$ là một hình thang với đáy AB và CD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và BC, G là trọng tâm của tam giác SAB. Giao tuyến d của hai mặt phẳng (SAB) và (GIJ). Biết d cắt SA tại M và cắt SB tại N. Tứ giác $MNJI$ là hình bình hành thì $AB = kCD$. Khi đó $k = ?$

Trả lời: 3

Lời giải

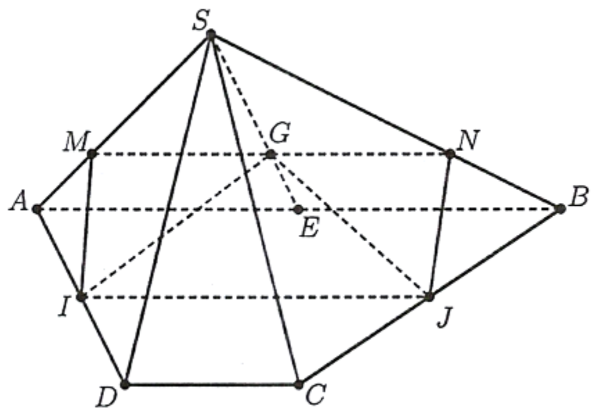
-Tìm giao tuyến d của (SAB) và (GIJ):

Dễ thấy $G \in (SAB) \cap (GIJ) \Rightarrow G \in d$ với $d = (SAB) \cap (GIJ)$.

IJ là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $IJ // AB$.

Ta có: $\begin{cases} d = (SAB) \cap (GIJ) \\ AB // IJ \\ AB \subset (SAB), IJ \subset (GIJ) \end{cases} \Rightarrow d // AB // IJ$

Vậy giao tuyến d của hai mặt phẳng (SAB) và (GIJ) là đường thẳng d qua G và song song với đường thẳng AB.



- Tìm điều kiện của AB và CD để $MNJI$ là hình bình hành: Gọi E là trung điểm AB.

Ta có:

$MN // IJ; MNJI$ là hình bình hành khi và chỉ khi $MN = IJ$. (1)

Vì $MG // AE \Rightarrow \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SG}{SE} = \dfrac{2}{3}$ (G là trọng tâm của tam giác SAB).

Vì $MN // AB \Rightarrow \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow MN = \dfrac{2}{3}AB$. (2)

Vì IJ là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $IJ = \dfrac{AB+CD}{2}$. (3)

Từ (1), (2), (3), ta có:

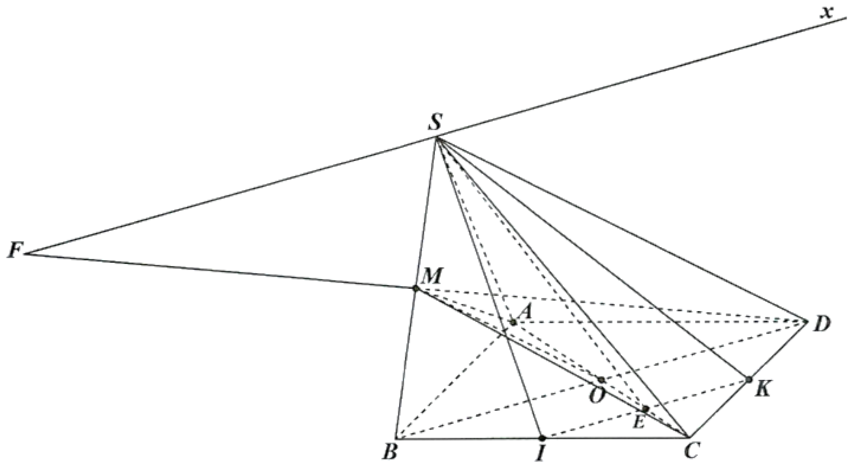
$\dfrac{2}{3}AB = \dfrac{AB+CD}{2} \Leftrightarrow 4AB = 3AB + 3CD \Leftrightarrow AB = 3CD$.

Vậy với hình chóp ban đầu có $AB = 3CD$ thì $MNJI$ là hình bình hành

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD. Gọi M là trung điểm của SB. Gọi F là giao điểm của DM và (SIK). Tính tỉ số $\dfrac{MF}{MD}$.

Trả lời: 1

Lời giải



-Ta có $S \in (SIK) \cap (SAC)$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = IK \cap AC \Rightarrow \begin{cases} E \in IK \subset (SIK) \\ E \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow E \in (SIK) \cap (SAC)$.

Suy ra $SE = (SIK) \cap (SAC)$.

Ta có $\begin{cases} S \in (SIK) \cap (SBD) \\ BD \subset (SBD), IK \subset (SIK) \Rightarrow (SIK) \cap (SBD) = Sx, (\ Sx \parallel BD \parallel IK). \\ BD \parallel IK \end{cases}$

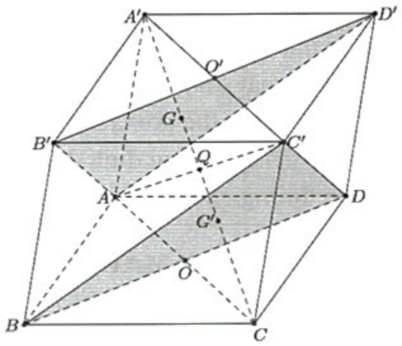
-Trong mp (SBD), gọi $F = Sx \cap DM \Rightarrow \begin{cases} S \in DM \\ S \in Sx \subset (SIK) \end{cases} \Rightarrow F = DM \cap (SIK)$.

Ta có $SF \parallel BD \Rightarrow \dfrac{MF}{MD} = \dfrac{MS}{MB} = 1$.

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác $B'D'A$ và BDC'. Khi đó: $GG' = kA'C$. Tìm k?

Trả lời: $\dfrac{1}{3}$

Lời giải



Gọi O, O' và Q lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD, A'B'C'D'$ và $AA'C'C$.

Vì G là trọng tâm tam giác $AB'D' \Rightarrow A'Q$ đi qua G (trong $\triangle AA'C'$).

Vì G' là trọng tâm tam giác $BDC' \Rightarrow CQ$ đi qua G' (trong $\triangle ACC'$).

Do đó $A'C$ qua G và G'.

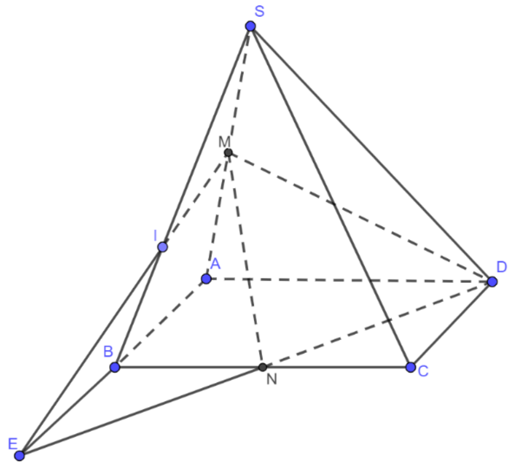
Lại có $\dfrac{A'G}{A'Q} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{A'G}{A'C} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow A'G = \dfrac{1}{3}A'C$; $\dfrac{CG'}{CQ} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{CG'}{A'C} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow CG' = \dfrac{1}{3}A'C$.

Do đó $A'G = GG' = G'C = \dfrac{1}{3}A'C$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SA, BC. Giao điểm của mặt phẳng (MND) và SB là I. Tính giá trị gần đúng của $\dfrac{SI}{SB}$.

Lời giải

Trả lời: $0,67$.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $DN \cap AB = \{E\}$.

Ta có $\{I\} = (MND) \cap SB$, suy ra $EM \cap SB = \{I\}$.

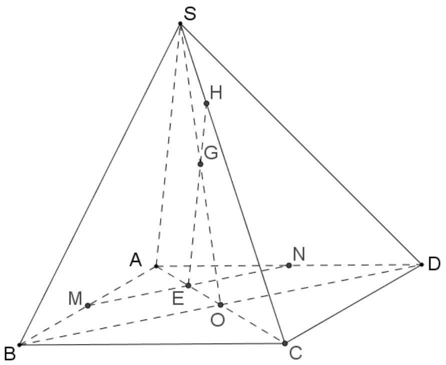
Vì N là trung điểm của BC nên B là trung điểm của AE.

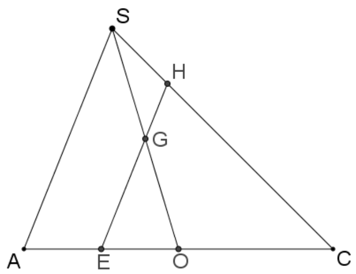
Vì EM và SB là hai đường trung tuyến trong tam giác SAE nên I là trọng tâm của tam giác SAE. Do đó $\dfrac{SI}{SB}=\dfrac{2}{3}\approx 0,67$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD và G là trung điểm SO. Mặt phẳng (MNG) cắt SC tại điểm H. Biết $HC=k.HS, k\in\mathbb{N}$. Tìm giá trị của k.

Lời giải

Trả lời: 3.





Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $\{E\}=MN\cap AC$.Trong mặt phẳng (SAC), gọi $\{H\}=EG\cap SC$ ta có $\{H\}=SC\cap(MNG)$.

Xét ΔABD có MN là đường trung bình $\Rightarrow E$ là trung điểm của AO.

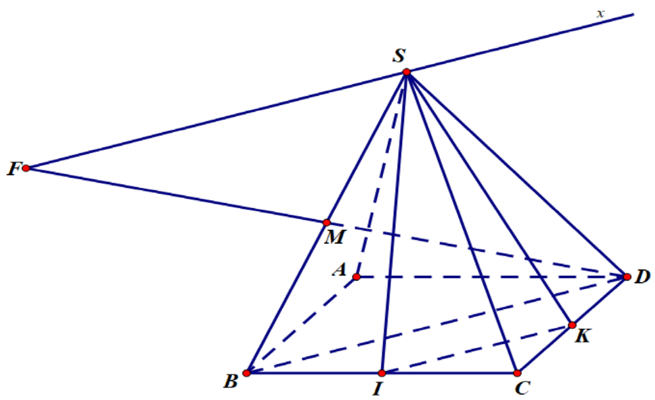
Có EG là đường trung bình của tam giác SAO $\Rightarrow EG \,//\, SA \Rightarrow \dfrac{SH}{SC}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $HC=3.HS$. Vậy $k=3$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I,K lần lượt là trung điểm của BC và CD. Gọi M là trung điểm của SB. Gọi F là giao điểm của DM và (SIK). Tính tỉ số $\dfrac{MF}{DF}$.

Lời giải

Trả lời: $0,5$.



Ta có $\begin{cases} S \in (SBD) \cap (SIK) \\ BD \,//\, IK \\ BD \subset (SBD), IK \subset (SIK) \end{cases} \Rightarrow (SBD) \cap (SIK) = Sx,\ Sx \,//\, BD \,//\, IK$.

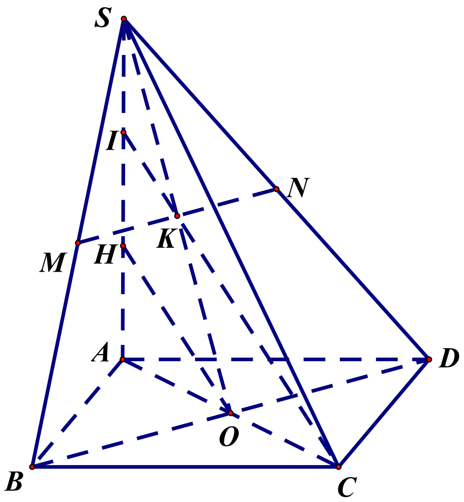
Trong (SBD), gọi $F = DM \cap Sx \Rightarrow \begin{cases} F \in DM \\ F \in Sx \subset (SIK) \end{cases} \Rightarrow F = DM \cap (SIK)$.

Ta có $FS \,//\, BD$ nên $\dfrac{MF}{MD} = \dfrac{MS}{MB} = 1 \Rightarrow MF = MD \Rightarrow \dfrac{MF}{DF} = \dfrac{1}{2} = 0,5$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Gọi I là giao điểm của SA và mặt phẳng (CMN). Tính tỉ số $\dfrac{SA}{SI}$.

Lời giải

Trả lời: 3.



Gọi $O = AC \cap BD$

Trong mặt phẳng (SBD) có $MN \cap SO = K$. Suy ra K là trung điểm của SO.

Trong mặt phẳng (SAC) có $CK \cap SA = I$. Vậy I là giao điểm của SA với $mp(CMN)$.

Qua O kẻ đường thẳng OH song song với CI, $H \in SA$.

Ta có IK là đường trung bình của tam giác SHO, suy ra I là trung điểm của SH.

Lại có OH là đường trung bình của tam giác ACI, suy ra H là trung điểm của AI.

Do đó $AH = HI = IS$. Vậy $\dfrac{SA}{SI} = 3$.

Lưu ý, ta có tính chất: Cho hình chóp Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm thuộc cạnh SA, SB, SC. Gọi D' là giao của SD với mặt phẳng $(A'B'C')$.

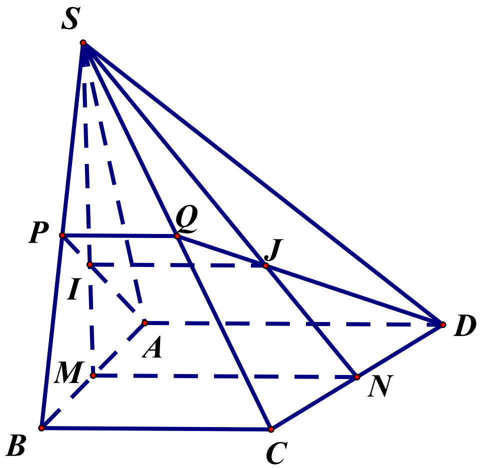
Khi đó $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'}$.

Áp dụng vào bài toán trên, ta có: $\frac{SA}{SI}+\frac{SC}{SC}=\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}\Leftrightarrow\frac{SA}{SI}+1=2+2\Rightarrow\frac{SA}{SI}=3$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy $AD=7$ và $BC=5$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh AB,CD và SB. Gọi Q là giao điểm của SC với mặt phẳng (APD), gọi I giao của AP và SM, J là giao của DQ và SN. Tính độ dài đoạn IJ.

Lời giải

Trả lời: 4.



Xét hai mp (APD) và (SBC) có $\begin{cases}AD//BC\\P\in(APD)\cap(SBC)\end{cases}\Rightarrow(APD)\cap(SBC)=Px//BC$. Gọi Q là giao điểm của SC và Px. Vậy Q là giao điểm của SC và (APD). Do P là trung điểm của SB nên Q là trung điểm của SC.

Trong tam giác SAB có $I=AP\cap SM$ nên I là trọng tâm tam giác.

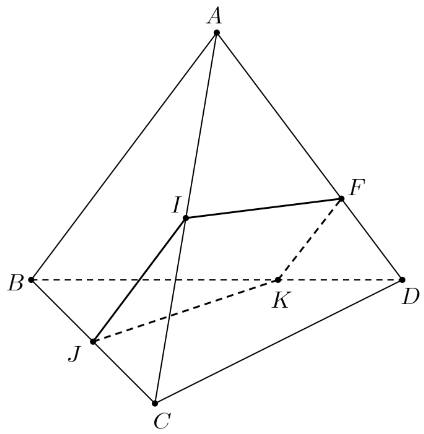
Tương tự, J là trọng tâm tam giác SCD.

Do đó, $\frac{SI}{SM}=\frac{SJ}{SN}=\frac{IJ}{MN}=\frac{2}{3}$, suy ra $IJ=\frac{2}{3}MN=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}(AD+BC)=4$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK=2KD$. Gọi F là giao điểm của AD với mặt phẳng (IJK). Tính tỉ số $\frac{AD}{AF}$.

Lời giải

Trả lời:1,5.



Ta có: $\begin{cases} K \in (ABD) \cap (IJK) \\ AB \subset (ABD) \\ IJ \subset (IJK) \\ AB // IJ \end{cases}$ $\Rightarrow$ Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là đường thẳng d đi qua điểm K và song song với hai đường thẳng AB và IJ.

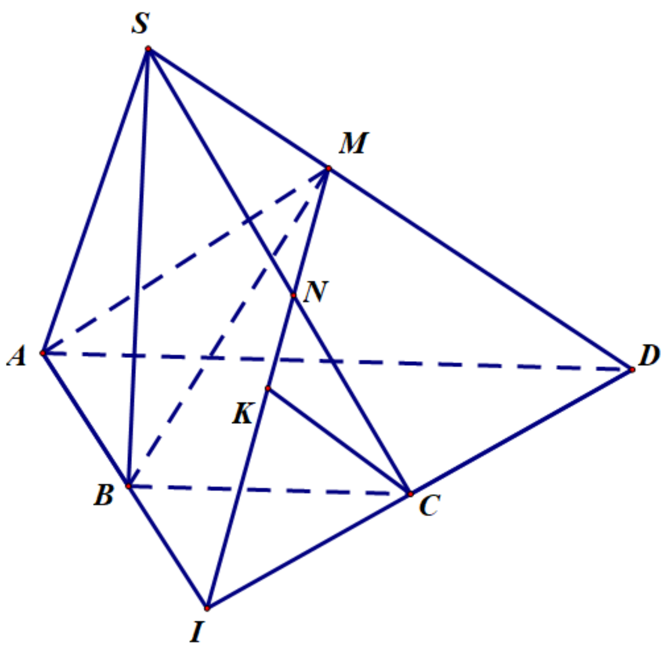
Đường thẳng d cắt đường thẳng AD tại điểm F. Khi đó $F = AD \cap (IJK)$

Do $\begin{cases} KF // AB \\ BK = 2KD \end{cases} \Rightarrow AF = 2FD \Rightarrow \dfrac{AD}{AF} = \dfrac{3}{2} = 1,5$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với $AD // BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD thỏa mãn $SM = \dfrac{1}{3}SD$. Gọi N là giao điểm của mặt phẳng (ABM) với cạnh bên SC. Tính tỉ số $\dfrac{SN}{SC}$.

Lời giải

Trả lời: $0,5$.



Trong $(ABCD)$ ta có $I = AB \cap CD$.

Trong (SCD) ta có $N = IM \cap SC$.

Ta có: $\begin{cases} N \in IM \subset (ABM) \\ N \in SC \end{cases} \Rightarrow SC \cap (ABM) = N$.

Gọi K là trung điểm của IM.

Do $AD//BC$ có $\dfrac{IC}{ID} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$.

Trong tam giác IMD có KC là đường trung bình nên $KC//MD$ và $KC = \dfrac{1}{2}MD$.

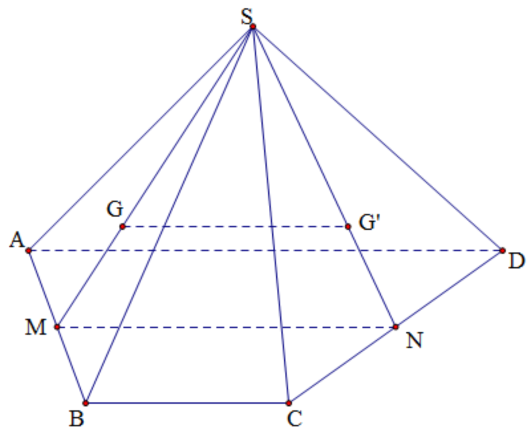
Mà $SM = \dfrac{1}{2}MD \Rightarrow SM = KC$.

Ta có: $\dfrac{SN}{NC} = \dfrac{SM}{KC} = 1 \Rightarrow \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2} = 0,5$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AD//BC)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD, G,G' lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và SCD. Có bao nhiêu mặt phẳng song song với GG'.

Lời giải

Trả lời: 3.



Ta có $\dfrac{SG}{SM} = \dfrac{SG'}{SN} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GG'//MN \subset (ABCD) \Rightarrow GG'//(ABCD)$.

Do $\begin{cases} MN//AD \\ GG'//MN \end{cases} \Rightarrow GG'//AD \subset (SAD) \Rightarrow GG'//(SAD)$.

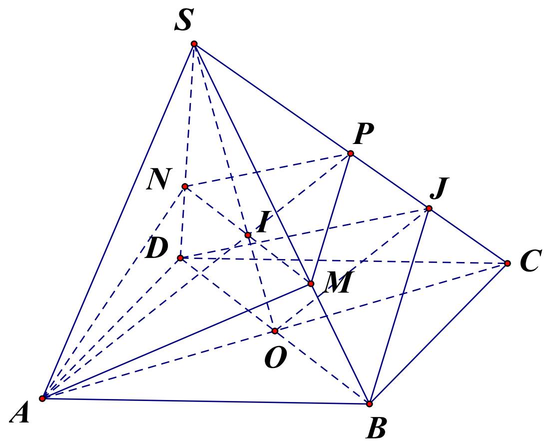
Mặt khác $\begin{cases} MN//BC \\ GG'//MN \end{cases} \Rightarrow GG'//BC \subset (SBC) \Rightarrow GG'//(SBC)$.

Vậy có 3 mặt phẳng song song với GG'.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Trên các cạnh SB,SD lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $\frac{SM}{SB}=\frac{SN}{SD}=\frac{2}{3}$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm O và song song với mặt phẳng (AMN) cắt SC tại J. Tính tỉ số $\frac{SJ}{SC}$

Lời giải

Trả lời: $0,75$.



Ta có: $\frac{SM}{SB}=\frac{SN}{SD}=\frac{2}{3}\Rightarrow MN//BD$

Trong mặt phẳng (SBD) gọi $I=MN\cap SO$. Ta có $MI//BD\Rightarrow\frac{SM}{SB}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}$

Trong mặt phẳng (SAC) gọi $P=AI\cap SC$ $\Rightarrow P=SC\cap(AMN)$ và $(SAC)\cap(AMN)=AP$

Hai mặt phẳng song song (AMN) và (α) bị cắt bởi mặt phẳng (SAC) theo hai giao tuyến AP và OJ nên $AP//OJ$

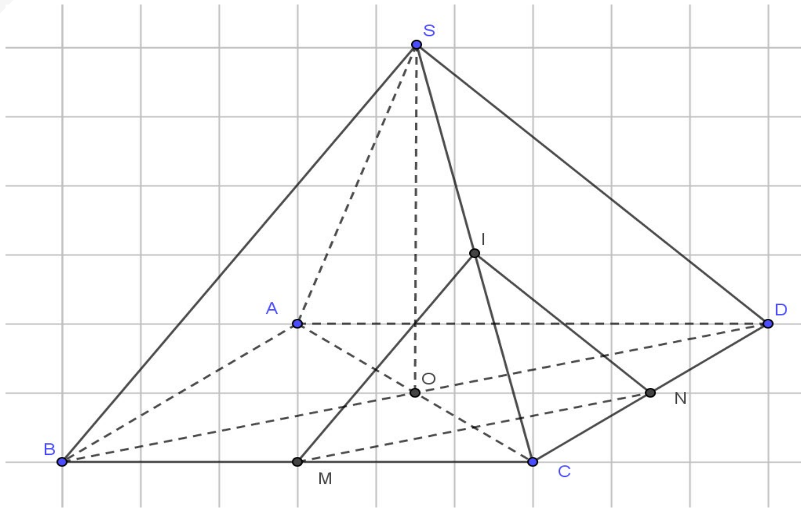
Ta có: $IP//OJ\Rightarrow\frac{SI}{SO}=\frac{SP}{SJ}=\frac{2}{3}\Rightarrow SJ=\frac{3}{2}SP=\frac{3}{2}.\frac{1}{2}SC=\frac{3}{4}SC\Rightarrow\frac{SJ}{SC}=\frac{3}{4}=0.75$

Câu 13. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M; N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và SD.

A. $45°$. **B.** $135°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của SC ta có $NI//SD$ nên suy ra $\left(\widehat{MN;SD}\right)=\left(\widehat{MN;NI}\right)$.

Ta có $MI;MN;IN$ lần lượt là các đường trung bình của các tam giác $\Delta SCB;\Delta BCD;\Delta SCD \Rightarrow MI=NI=\dfrac{a}{2};MN=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét ΔMIN ta có $\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}\Rightarrow MN^2=MI^2+NI^2\Rightarrow \Delta MIN$ vuông cân tại I.

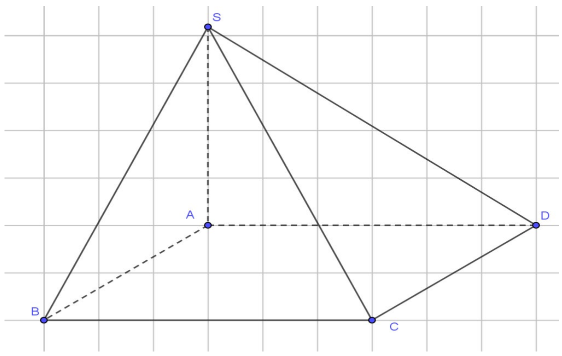
Vậy góc $\left(\widehat{MN;SD}\right)=\left(\widehat{MN;NI}\right)=\widehat{MNI}=45^\circ$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a;BC=2a$ và $SA\perp(ABCD);SA=2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

A. 45°. **B.** 135°. **C.**. 60° **D.** 90°.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AD//BC\Rightarrow\left(\widehat{SD;BC}\right)=\left(\widehat{SD;AD}\right)$.

Xét ΔSAD vuông tại A có $SA=AD\Rightarrow\Delta SAD$ vuông cân tại A.

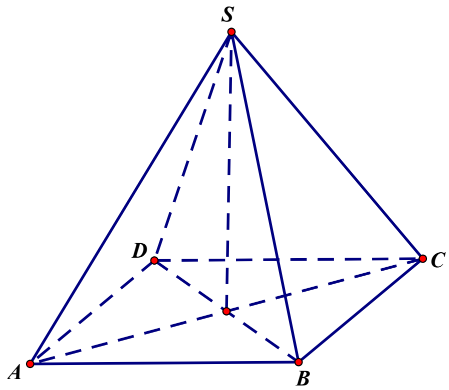
Suy ra $\left(\widehat{SD;BC}\right)=\left(\widehat{SD;AD}\right)=\widehat{SDA}=45^\circ$.

Câu 15. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Góc giữa hai đường thẳng SA và BC là

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn B



Do $BC // AD$ nên $\left(\widehat{SA,BC}\right)=\left(\widehat{SA,AD}\right)$. Mà tam giác SAD đều nên $\left(\widehat{SA,AD}\right)=60^{\circ}$.

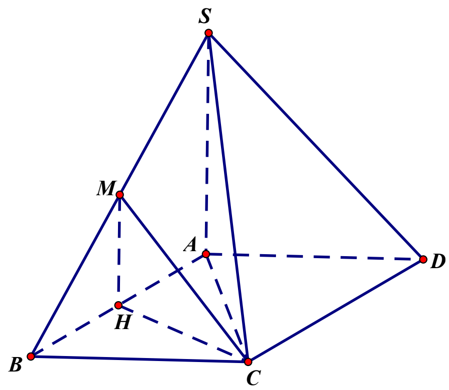
Vậy $\left(\widehat{SA,BC}\right)=60^{\circ}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a,\widehat{ABC}=60^{\circ}$, $SA=a$ và $SA\perp\left(ABCD\right)$. Gọi M là trung điểm của SB . Tính góc giữa hai đường thẳng SA và CM .

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của AB , suy ra $MH // SA$, do đó $\left(\widehat{SA,CM}\right)=\left(\widehat{MH,CM}\right)$.

Ta có $MH=\dfrac{1}{2}SA=\dfrac{a}{2}$, tam giác ABC đều cạnh a nên $CH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác MHC vuông tại H có $\tan\widehat{HMC}=\dfrac{CH}{MH}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{HMC}=60^{\circ}$.

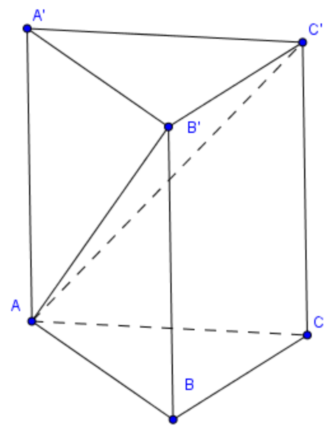
Vậy $\left(\widehat{MH,CM}\right)=60^{\circ}$ hay $\left(\widehat{SA,CM}\right)=60^{\circ}$.

Câu 17. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. $AA' = AB = a$. Tính góc giữa đường thẳng AB' và BC.

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn D



Có $BC // B'C' \Rightarrow \left(\widehat{AB', BC}\right) = \left(\widehat{AB', B'C'}\right)$

$B'C' \perp A'B'$, $AA' \perp (A'B'C')$ (tính chất lăng trụ đứng) $\Rightarrow AA' \perp B'C'$.

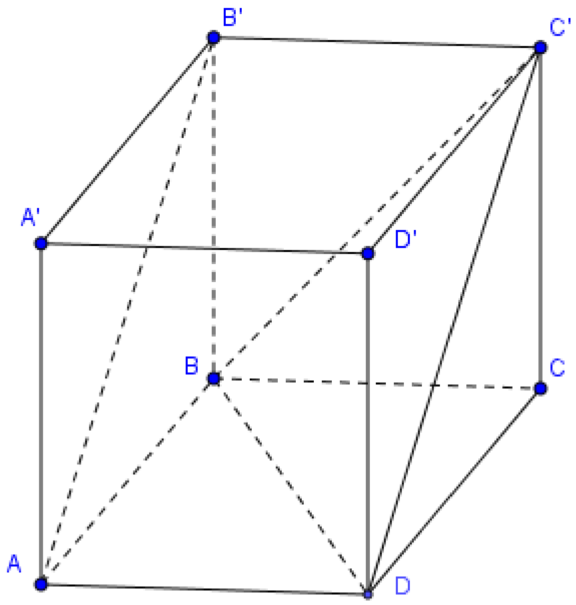
$\Rightarrow B'C' \perp (AA'B'B) \Rightarrow B'C' \perp AB' \Rightarrow \left(\widehat{AB', BC}\right) = 90°$.

Câu 18. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AA' = AB = a$, $AD = 2a$. Tính tang của góc giữa đường thẳng AB' và BC'.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D



Đặt $\left(\widehat{AB', BC'}\right) = \varphi$

Có $AB' // DC' \Rightarrow \left(\widehat{AB', BC'}\right) = \left(\widehat{BC', DC'}\right) = \widehat{BC'D} = \varphi$

$BC' = \sqrt{5}a; DC' = \sqrt{2}a; BD = \sqrt{5}a$

$$\Rightarrow \cos\widehat{BC'D} = \frac{BC'^2 + DC'^2 - BD^2}{2.BC'.DC'} = \frac{1}{\sqrt{10}} > 0$$

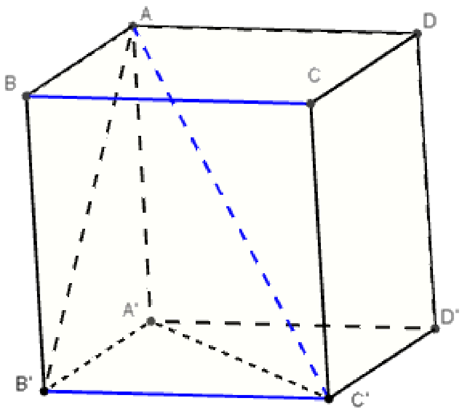
$$\tan\varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1} = 3.$$

Câu 19. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi với $AB = BD = AA' = a$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AC' và BC.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn D



$BC // B'C' \Rightarrow \left(\widehat{AC', BC}\right) = \left(\widehat{AC', B'C'}\right)$.

$ABCD$ là hình thoi với $AB = BD = AA' = a \Rightarrow AC = 2.\frac{\sqrt{3}}{2}a = a\sqrt{3}$, $AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = 2a$, $AB' = a\sqrt{2}$.

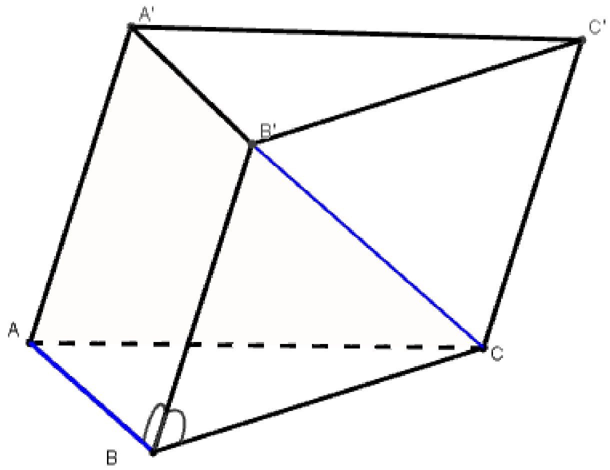
$$\cos\left(AC', BC\right) = \left|\cos\widehat{AC'B'}\right| = \left|\frac{AC'^2 + B'C'^2 - AB'^2}{2.AC'.B'C'}\right| = \frac{3}{4}.$$

Câu 20. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a và $\widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^0$. Góc giữa hai đường thẳng AB và $B'C$ bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C



CÁCH 1: Ta có: $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{B'C}\right)=\dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{B'C}}{BA.B'C}=\dfrac{\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BB'}\right)}{BA.B'C}=\dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BB'}}{AB.B'C}$

$$=\frac{a.a.\cos 60^\circ-a.a.\cos 60^\circ}{a.a}=0$$

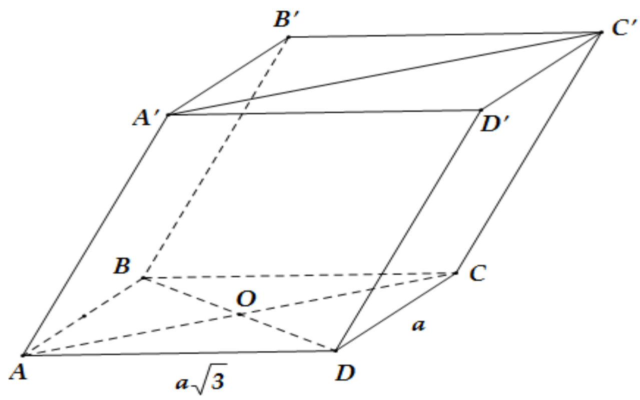
Suy ra góc giữa AB và $B'C$ bằng 90°.

Câu 21. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD.

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O=AC\cap BD$

Ta có $\left(\widehat{A'C',BD}\right)=\left(\widehat{AC,BD}\right)$.

Ta đi tính góc $\widehat{AOD}$

Xét tam giác ABD vuông tại A, ta có:

$\tan\widehat{BDA}=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{BDA}=30^\circ=\widehat{OAD}$ (do tam giác AOD cân tại O) $\Rightarrow\widehat{AOD}=120^\circ$

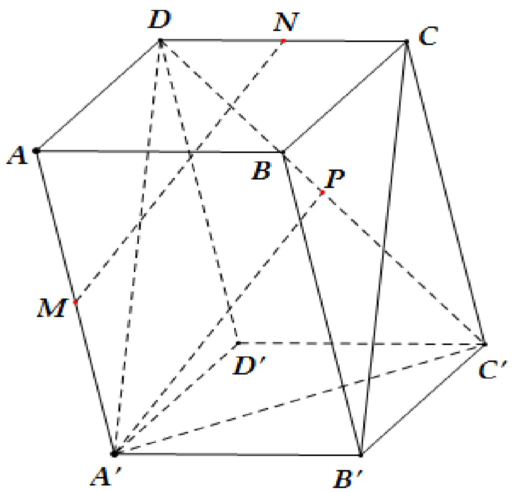
Vậy $\left(\widehat{A'C',BD}\right)=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

Câu 22. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và các góc $\widehat{BAD}$, $\widehat{DAA'}$, $\widehat{A'AB}$ đều bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD. Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng MN và $B'C$, giá trị của $\cos\alpha$ bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi P là trung điểm DC'

Ta có $\begin{cases} B'C // A'D \\ MN // A'P \end{cases}$. Suy ra $\cos\left(\widehat{MN, B'C}\right) = \cos\left(\widehat{A'P, A'D}\right) = \left|\cos\widehat{DA'P}\right|$

Do $\widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = \widehat{A'AB} = 60°$ và các cạnh hình hộp bằng a.

Do đó $A'D = a, C'D = C'A' = a\sqrt{3}, DP = \frac{1}{2}DC' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác $A'C'D$ với $A'P$ là đường trung tuyến, nên ta có:

$$A'P^2 = \frac{2\left(A'D^2 + C'A'^2\right) - C'D^2}{4} \Rightarrow A'P = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác $A'DP$, ta có:

$$\cos\widehat{DA'P} = \frac{A'D^2 + A'P^2 - DP^2}{2.A'D.A'P} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

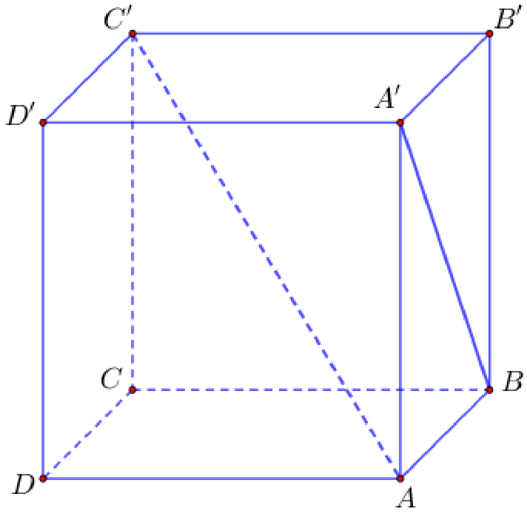
Như vậy $\cos\left(\widehat{MN, B'C}\right) = \cos\left(\widehat{A'P, A'D}\right) = \left|\cos\widehat{DA'P}\right| = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có:

$$\left.\begin{matrix} AB' \perp A'B \\ B'C' \perp A'B \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'B \perp \left(AB'C'\right) \Rightarrow A'B \perp AC'.$$

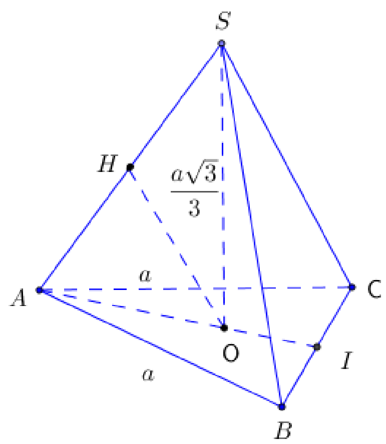
Vậy góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' bằng $90°$.

Câu 24. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, gọi O là tâm đáy và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Gọi I là trung điểm của BC. Tính khoảng cách từ O đến SA.

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $OH \perp SA$ $(H \in SA) \Rightarrow d\left(O, SA\right) = OH$.

Ta có: $OA = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = SO$ $\Rightarrow \Delta SOA$ vuông cân tại O

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}.SO.\sqrt{2} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

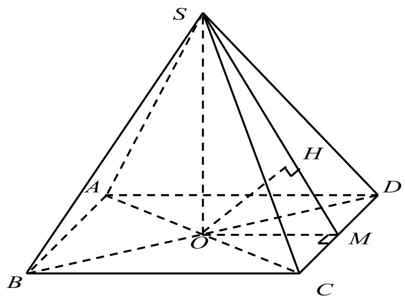
Vậy $d\left(O,SA\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 25. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên đều bằng a. Gọi O là tâm đáy và M là trung điểm của CD. Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng SM ?

A. $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $OH\perp SM$, suy ra $d\left(O,SM\right)=OH$.

Ta có $SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong ΔSOM vuông tại O, ta có:

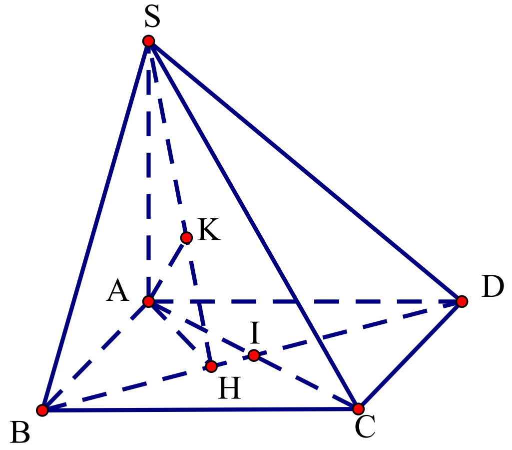
$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{OS^2}=\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{6}{a^2}\Rightarrow OH=\frac{a}{\sqrt{6}}\Rightarrow d\left(O,SM\right)=OH=\frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=2a$. Gọi H là hình chiếu của A lên BD. Tính khoảng cách d từ điểm A đến đường thẳng SH ?

A. $d=\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $d=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$

Lời giải

Chọn A



Kẻ $AK \perp SH$, suy ra $d\left(A,SH\right)=AK$.

Tam giác ABD vuông tại A có $AH \perp BD$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow AH^2=\frac{3a^2}{4}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Tam giác SAH vuông tại A có $AK \perp SH$

$$\Rightarrow \frac{1}{AK^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{\left(2a\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{19}{12a^2}$$

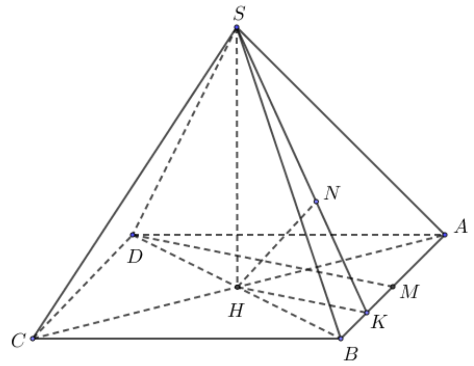
$$\Rightarrow AK^2=\frac{12a^2}{19}\Rightarrow AK=\frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

Câu 27. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $\widehat{BAD}=60°$, cạnh đáy bằng a thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng đáy trùng với giao điểm H của hai đường chéo của hình thoi. Gọi K là điểm trên cạnh AB sao cho $\left(SHK\right)\perp\left(SAB\right)$. Khoảng cách từ H đến đường thẳng SK bằng

A. $\frac{a}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



$S_{ABCD} = 2.S_{ABD} = AB.AD.\sin\widehat{A} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Độ dài đường cao : $SH = \dfrac{3.V_{SABCD}}{S_{ABCD}} = \dfrac{3.\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Gọi M là trung điểm của AB , K' là trung điểm của BM

Ta có $DM \perp AB \Rightarrow DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $DM \,//\, HK'$ và $HK' = \dfrac{DM}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $AB \perp (SHK') \Rightarrow (SAB) \perp (SHK')$ mà $(SAB) \perp (SHK) \Rightarrow K \equiv K'$.

Vẽ $HN \perp SK$ tại N $\Rightarrow d(H,(SK)) = HN$.

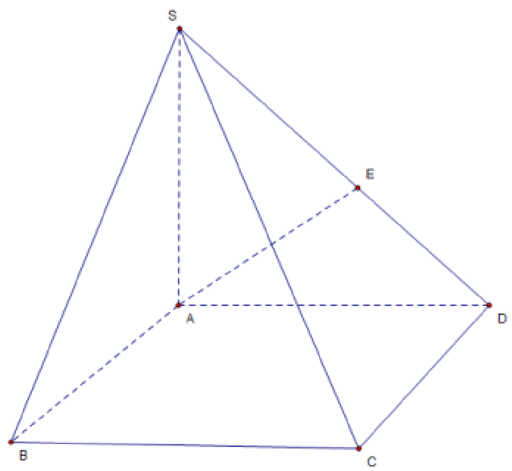
Suy ra $HN = \dfrac{HK.HS}{\sqrt{HK^2 + HS^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$, suy ra $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD))$.

Ta thấy: $CD \perp (SAD)$ Vì $CD \perp AD; CD \perp SA$.

Trong mặt phẳng (SAD), kẻ $AE \perp SD$ tại $E \Rightarrow AE \perp (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = AE$.

Ta có: $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

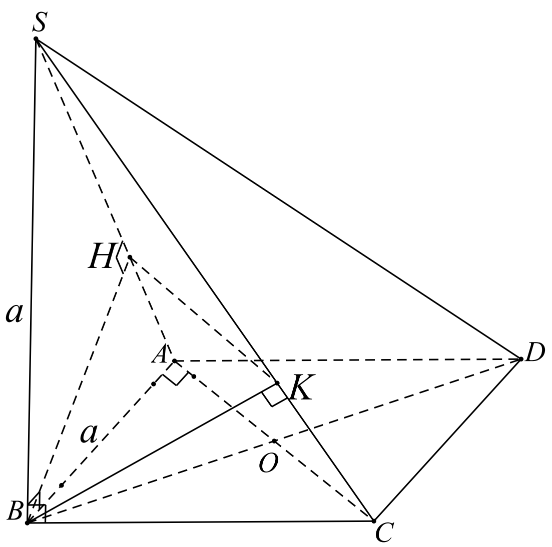
Vậy $d(B,(SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $\widehat{ABC} = 60°$, $\widehat{BAC} = 90°$, $SB \perp (ABCD)$, $SB = a$, $AB = a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B trên SA, SC. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (BHK) theo a.

A. $\frac{a}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{4a}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn B



□ Trước hết ta chứng minh $SC \perp (BHK)$:

$CA \perp AB$ (vì $\widehat{BAC} = 90°$).

$CA \perp SB$ vì $SB \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp (SAB)$.

Mà $BH \subset (SAB) \Rightarrow BH \perp AC$.

Mặt khác: $BH \perp SA$ nên $BH \perp (SAC)$

$\Rightarrow BH \perp SC$ (1).

Mà $BK \perp SC$ (2).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow SC \perp (BHK)$.

Khi đó $d(C,(BHK)) = CK$.

Ta có $AC = AB.\tan 60° = a\sqrt{3}$;

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$; $SC = \sqrt{SB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.

Trong ΔSBC ta có $CK.CS = CB^2 \Rightarrow CK = \dfrac{CB^2}{CS} = \dfrac{4a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$.

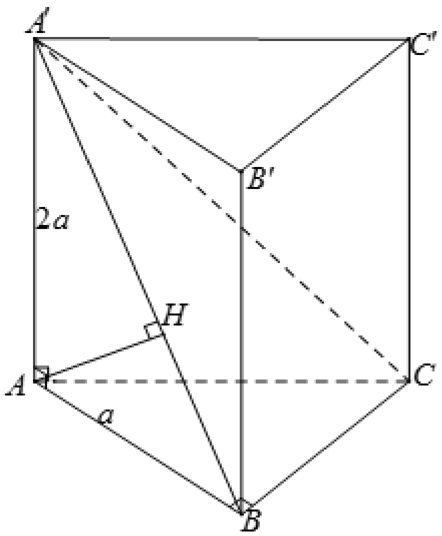
Vậy, $d(C,(BHK)) = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$.

Câu 30. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $AA' = 2a$. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $AH \perp A'B$ tại H (1).

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp A'B$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (A'BC)$

$\Rightarrow d(A,(A'BC)) = AH = \dfrac{AA'.AB}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \dfrac{2a.a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

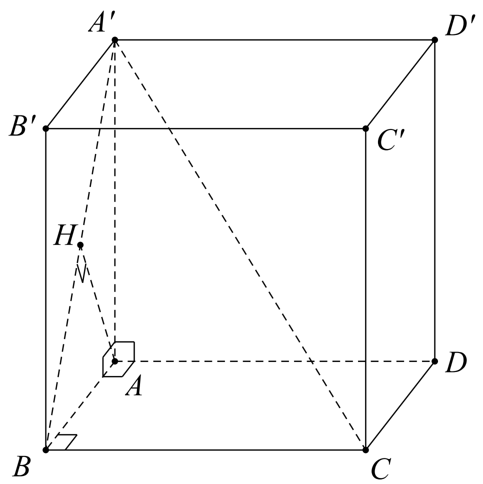
Vậy $d(A,(A'BC)) = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 31. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp A'A \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABB'A') \Rightarrow (A'BC) \perp (ABB'A')$.

Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, kẻ $AH \perp A'B$ tại H, ta có $AH \perp (A'BC) \Rightarrow AH = d(A,(A'BC))$.

Tam giác ABA' vuông cân tại A nên $AH = \frac{A'B}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

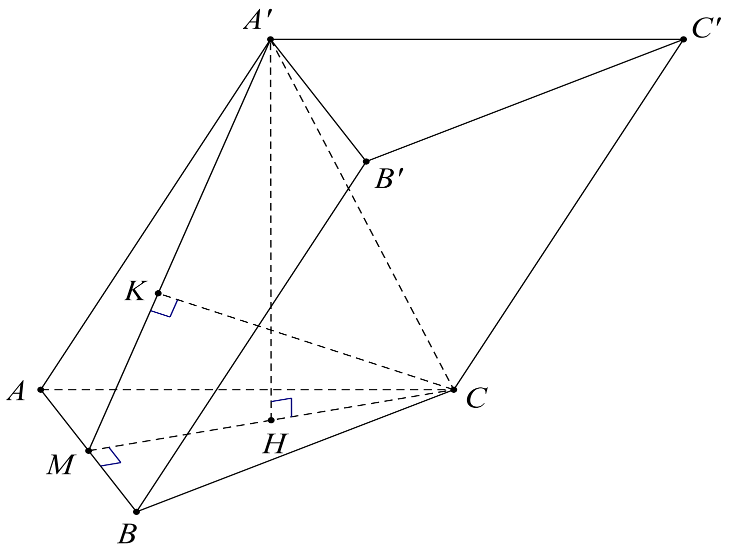
Ta có $AD // (A'BC)$ nên $d(D,(A'BC)) = d(A,(A'BC)) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 32. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, gọi M là trung điểm của AB, tam giác $A'CM$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối lăng trụ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(ABB'A')$.

A. $\frac{2a\sqrt{57}}{5}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{39}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $(A'MC)\perp(ABC)$. Gọi H là trung điểm của CM, ta có $A'H\perp CM$ suy ra $A'H\perp(ABC)$.

Ta có $\begin{cases} AB\perp CM \\ AB\perp A'H \end{cases}\Rightarrow AB\perp(A'CM)\Rightarrow(ABB'A')\perp(A'CM)$.

Trong mặt phẳng $(A'CM)$, kẻ $CK\perp A'M$, ta có $CK\perp(ABB'A')\Rightarrow CK=\mathrm{d}\left(C,(ABB'A')\right)$.

Hai tam giác CKM và $A'HM$ đồng dạng nên ta có $\dfrac{CK}{CM}=\dfrac{A'H}{A'M}\Rightarrow CK=\dfrac{CM\cdot A'H}{A'M}$.

Ta có $A'H=\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{ABC}}=\dfrac{\frac{a^3\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}=a$; $A'M=\sqrt{A'H^2+MH^2}=\sqrt{a^2+\dfrac{3a^2}{16}}=\dfrac{a\sqrt{19}}{4}$.

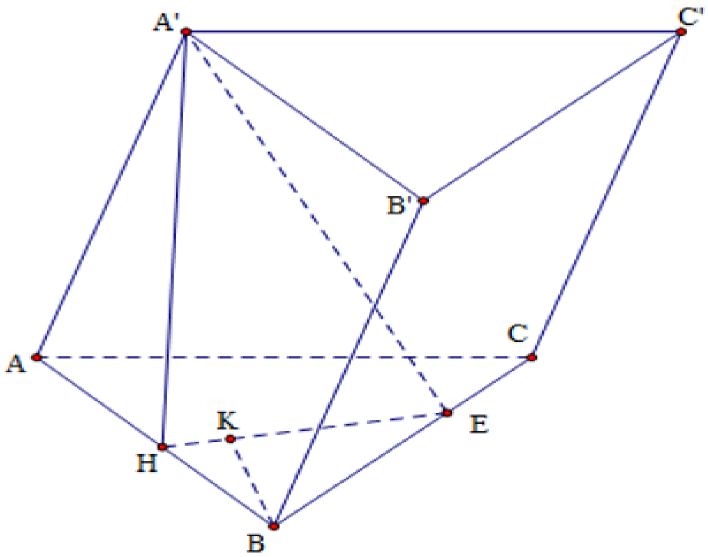
Vậy $CK=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot a}{\frac{a\sqrt{19}}{4}}=\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 33. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, điểm E thuộc đoạn BC sao cho $BC=3EC$. Biết hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm H của AB, cạnh bên $AA'=2a$ và tạo với đáy một góc $60°$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(A'HE)$ là

A. $\dfrac{4a}{5}$. **B.** $\dfrac{3a}{4}$. **C.** $\dfrac{3a}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có AA' tạo với đáy một góc 60° nên $\widehat{A'AH} = 60°$.

Khi đó $AH = A'A.\cos 60° = a \Rightarrow AB = BC = 2a$.

Do vậy $BH = a; BE = \dfrac{4a}{3}$.

Dựng $BK \perp HE$, lại có $BK \perp A'H \Rightarrow BK \perp (A'HE)$.

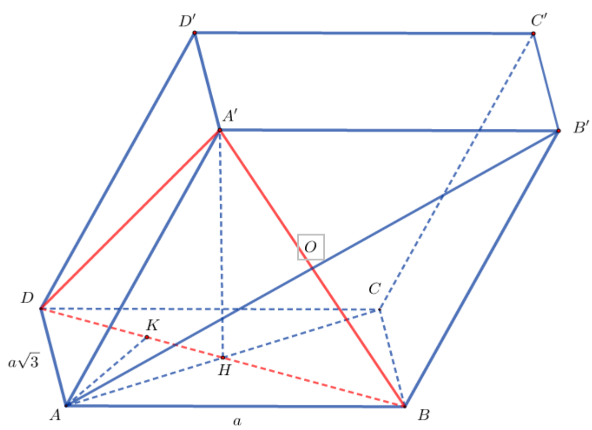
Do đó $d\left(B,\left(A'HE\right)\right) = BK = \dfrac{BH.BE}{\sqrt{BH^2 + BE^2}} = \dfrac{4a}{5}$.

Câu 34. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD. Khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ theo a bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Ta có AB' và $A'B$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên $\dfrac{d\left(B',\left(A'BD\right)\right)}{d\left(A,\left(A'BD\right)\right)}=\dfrac{B'O}{AO}=1$.

Do đó $d\left(B',\left(A'BD\right)\right)=d\left(A,\left(A'BD\right)\right)$.

Kẻ $AK\perp BD$.

Mặt khác $AK\perp A'H$ nên $AK\perp\left(A'BD\right)$.

Vậy $d\left(B',\left(A'BD\right)\right)=d\left(A,\left(A'BD\right)\right)=AK$.

Xét tam giác ABD vuông tại A và $AK\perp BD$ nên $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AD^2}\Rightarrow AK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

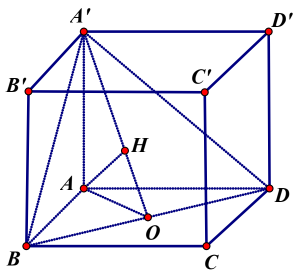
Vậy $d\left(B',\left(A'BD\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(A'BD\right)$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $AH\perp A'O$, khi đó do $\left(A'AO\right)\perp\left(A'BD\right)$ nên $AH\perp\left(A'BD\right)$. Do đó $d\left(A,\left(A'BD\right)\right)=AH$.

Ta có $AO=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác $A'AO$ vuông tại A có AH là đường cao: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AO^2}+\dfrac{1}{A'A^2}=2+1=3$.

Do đó $AH=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2:

Áp dụng công thức tam diện vuông:

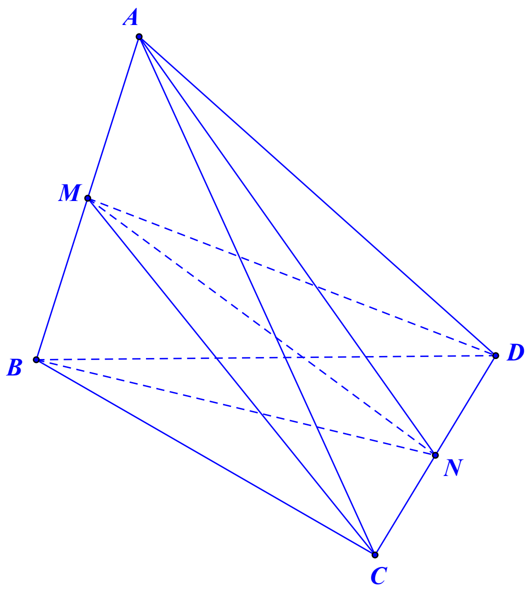
$$\frac{1}{d^2\left(A,\left(A'BD\right)\right)}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AA'^2}=3\Rightarrow d\left(A,\left(A'BD\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,CD. Biết $AB=CD$ $=AN=BN=CM=DM=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Theo bài ra: $DM=CM$ nên tam giác MCD cân tại M, do đó $\Rightarrow MN\perp CD$.

Tương tự $AN=BN\Rightarrow MN\perp AB$. Do đó MN là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD là MN.

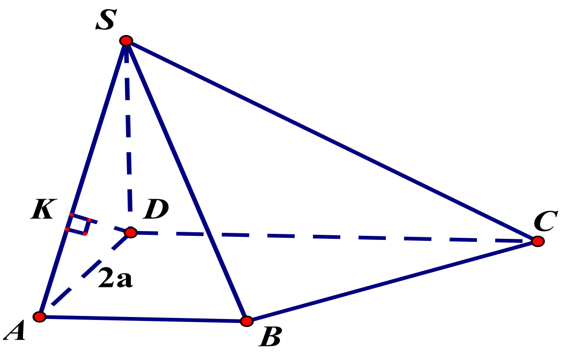
Xét tam giác AMN vuông tại M : $MN=\sqrt{AN^2-AM^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 37. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D, $AD=2a$. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại D lấy điểm S với $SD=a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DC và SA

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SD \end{cases} \Rightarrow CD \perp SA$.

Dựng $DK \perp SA\left(K \in SA\right)$, khi đó DK là đoạn vuông góc chung của SA, CD.

Do đó $d\left(DC, SA\right) = DK$. Xét tam giác SAD vuông tại D có DK là đường cao:

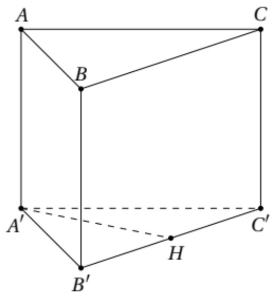
$$\frac{1}{DK^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow DK = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Câu 38. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm $B'C'$. Do tam giác $A'B'C'$ đều nên $A'H \perp B'C'$.

Mặt khác $AA' \perp \left(A'B'C'\right) \Rightarrow AA' \perp AH$.

Vậy AH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

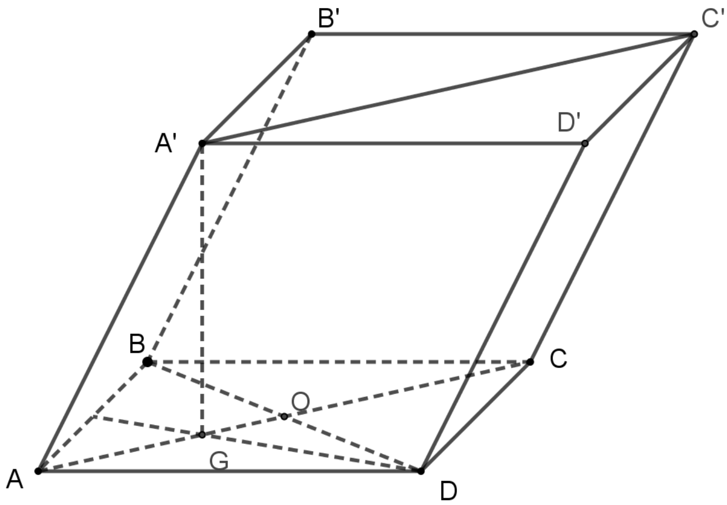
Khi đó $d\left(AA', B'C'\right) = A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

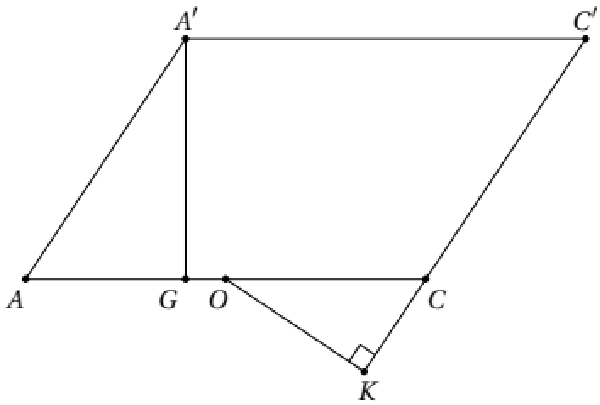
Câu 39. Cho lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAC} = 60°$. Biết $AA' = A'B = A'D$ và cạnh bên AA' hợp với mặt phẳng đáy góc $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và BD.

A. $\frac{3a}{4}$.   **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.   **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{8}$.   **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải

Chọn A





Ta có: ΔABD cân tại A và $\widehat{BAC}=60^\circ \Rightarrow \Delta ABD$ đều $\Rightarrow AO=OC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABD. Do $AA'=A'B=A'D \Rightarrow A'G\perp(ABCD)$.

Khi đó góc hợp bởi AA' với mặt đáy là $\widehat{A'AG}=60^\circ$.

Ta có:

$$\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp A'G \end{cases} \Rightarrow BD\perp(A'ACC') \Rightarrow BD\perp CC'.$$

Gọi $O=AC\cap BD$. Từ O kẻ $OK\perp CC'\left(K\in CC'\right)$. Khi đó OK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng $BD,CC' \Rightarrow OK=d\left(BD,CC'\right)$.

Xét hình bình hành $AA'C'C$, ta có: $\widehat{A'AG}=\widehat{ACK}=60^\circ$.

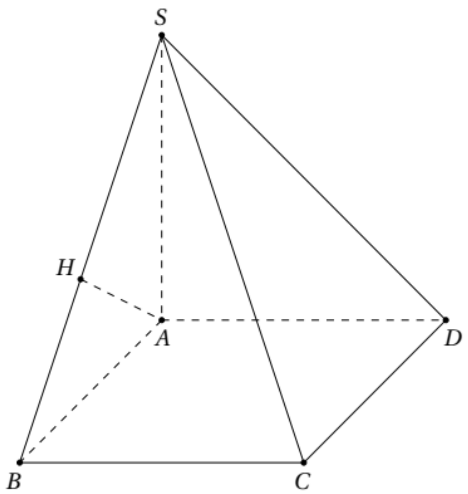
$$\sin\widehat{ACK}=\frac{OK}{OC} \Rightarrow OK=OC.\sin 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3a}{4}.$$

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3a$, $AD = a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{13}}{6}$. **B.** $a\sqrt{13}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\dfrac{6a\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải

Chọn D



Do $AD // BC \Rightarrow AD // (SBC) \Rightarrow d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$.

Lại có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

Ta có $SB = (SAB) \cap (SBC)$.

Kẻ $AH \perp SB \ (H \in SB) \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = d(A, (SBC))$.

Xét tam giác SAB vuông tại A có AH là đường cao:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{13}{36a^2} \Rightarrow AH = \frac{6a\sqrt{13}}{13}.$$

-----------------HẾT-----------------