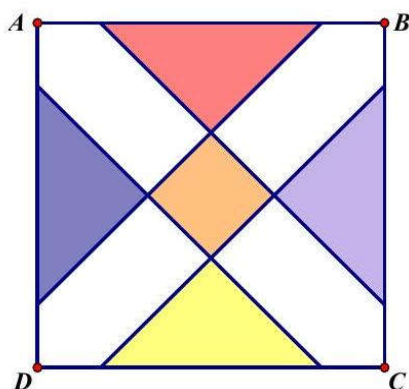


CHỦ ĐỀ 11. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM GIẢI TOÁN HÌNH HỌC**• PHẦN 3. TRẢ LỜI NGẮN**

CÂU HỎI (vì là ngân hàng được tách ra từ các trường, cho nên có trùng lặp câu hỏi thì do các trường tham khảo nhau)

Hình học

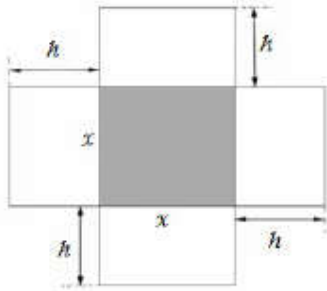
- Câu 1.** (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa 2025) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4m, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với hình vuông $ABCD$ (xem hình vẽ). Biết rằng bốn tam giác tô màu trên hình là bốn tam giác cân. Người ta cần sơn cho hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân trên, chi phí là 900 nghìn đồng trên 1 m^2 . Hỏi cần bỏ ra ít nhất bao nhiêu triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?



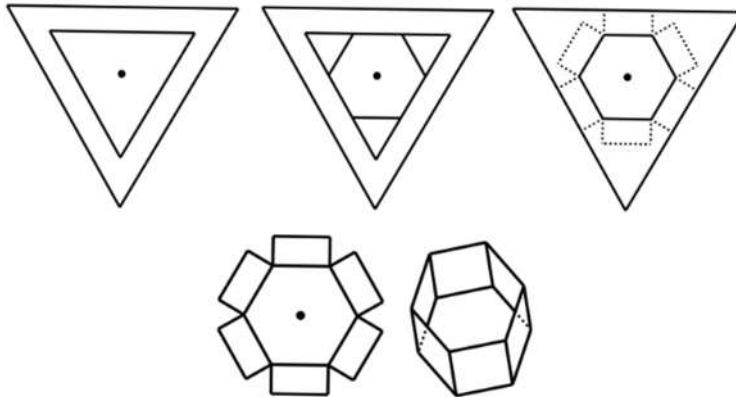
- Câu 2.** (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa 2025) Một ông chủ nhà muốn làm một cái thang cứu hộ khi có nguy hiểm xảy ra. Ông ta muốn làm cái thang để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (tham khảo hình vẽ). Với hàng rào cao 2,4 mét được đặt song song và cách bức tường của ngôi nhà một khoảng bằng 1,5 mét. Chiều dài ngắn nhất của cây thang bao nhiêu centimet (cm) để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (làm tròn đến hàng đơn vị)?



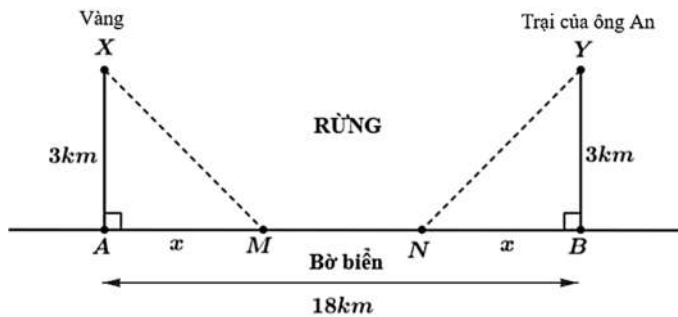
- Câu 3.** (THPT Văn Giang - Hưng Yên 2025) Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh $x(\text{cm})$, chiều cao là $h(\text{cm})$ và thể tích là 4000 cm^3 . Tìm $x(\text{cm})$ sao cho chiếc hộp làm ra tốn ít bìa các tông nhất.



- Câu 4. (THPT Tiên Du - Bắc Ninh 2025)** Cho một tấm tôn hình một tam giác đều có cạnh bằng $2m$. Người ta thiết kế một hình lục giác đều và sáu hình chữ nhật ở phía ngoài lục giác có một cạnh bằng cạnh của lục giác, một cạnh bằng x (mét) với $0 < x < \frac{2}{3}$. Sau đó người ta cắt theo nét đứt đoạn để thu được một hình hộp bởi một lục giác đều và sáu hình chữ nhật. Sau đó gấp các hình chữ nhật để tạo thành khối lăng trụ lục giác đều (tham khảo hình vẽ dưới đây). Thể tích của khối lăng trụ lớn nhất bằng bao nhiêu đề - xi - mét khối (dm^3) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



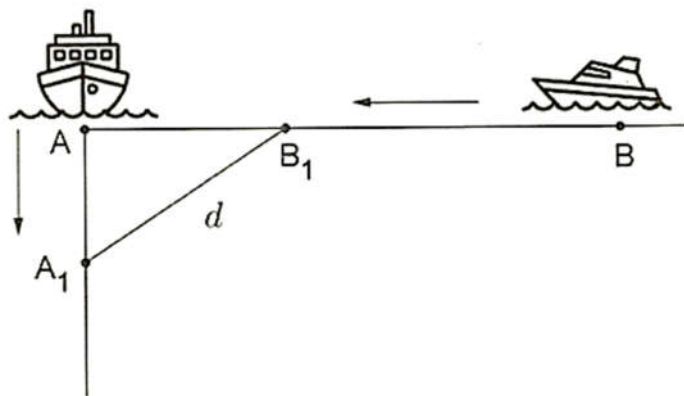
- Câu 5. (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025)** Ông An đang ở trong rừng để đào vàng. Ông ta tìm thấy vàng ở điểm X , cách điểm A 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của Ông An nằm ở Y , cách điểm B 3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 18$ km, $AM = NB = x$ km và $AX = BY = 3$ km. (Như hình vẽ)



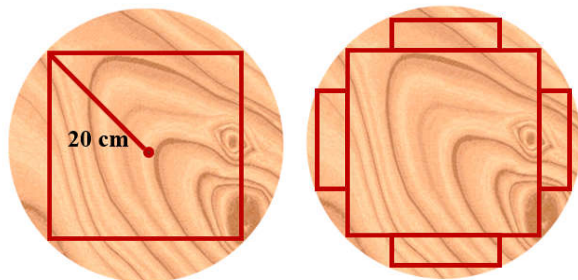
Khi đang đào vàng, ông An bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo hàm số $y = 50 \log(t + 2)$ (mg/l), trong đó y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông An cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng với vận tốc 5 km/h và chạy trên đường bờ biển với vận tốc 13 km/h. Để về đến trại ông An cần chạy từ trong rừng qua điểm M, N trên đường bờ biển. Chọn điểm M trên đường bờ biển sao cho khi ông An về đến trại nồng độ chất độc trong máu thấp nhất. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông An về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).

- Câu 6. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2025)** Hai con tàu A và B đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 6 hải lý. Cả hai tàu đồng thời cùng khởi hành. Tàu A chạy về hướng Nam với vận tốc 5 hải lý/ giờ,

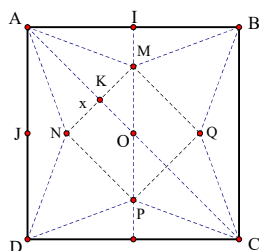
còn tàu B chạy về vị trí hiện tại của tàu A với vận tốc 7 hải lí/ giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là bé nhất?



- Câu 7. (Sở Ninh Bình 2025)** Một thanh dầm hình hộp chữ nhật được cắt từ một khúc gỗ hình trụ có bán kính đáy bằng 20 cm sao cho thanh dầm có diện tích mặt cắt ngang lớn nhất, tức là thanh dầm có mặt cắt ngang là hình vuông. Sau khi cắt thanh dầm đó, người ta lại cắt bốn tấm ván hình hộp chữ nhật từ bốn phần còn lại của khúc gỗ (tham khảo hình vẽ dưới đây). Xác định diện tích mặt cắt ngang tối đa của mỗi tấm ván (theo đơn vị cm^2 và làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

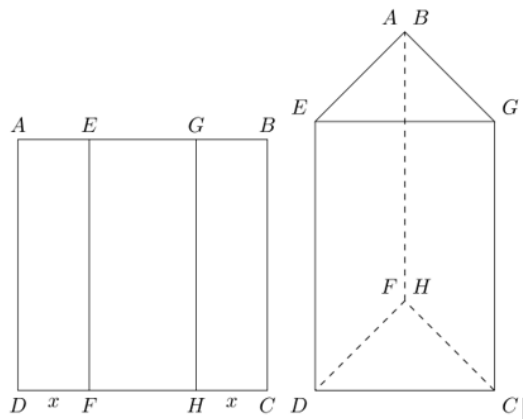


- Câu 8. (THPT Diễn Châu 5 - Nghệ An 2025)** Cho một tấm bìa hình vuông có cạnh $2m$. Từ tấm bìa này làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là các cạnh của hình vuông rồi gấp lên và ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều.

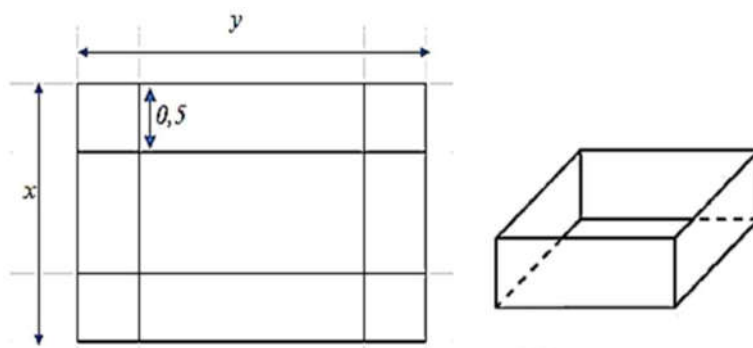


Thể tích của mô hình lớn nhất khi cạnh đáy của mô hình bằng $\frac{a\sqrt{2}}{b}(m)$ ($a, b \in \mathbb{Z}; a, b$ nguyên tố cùng nhau). Tính tổng $a^2 + b^2$?

- Câu 9. (THPT Hùng Vương - Bình Thuận 2025)** Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 cm. Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Khi thể tích khối lăng trụ lớn nhất thì khoảng cách từ A đến mặt phẳng $EFGH$ bằng $a\sqrt{b}(cm)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $T = a + 2025b$.



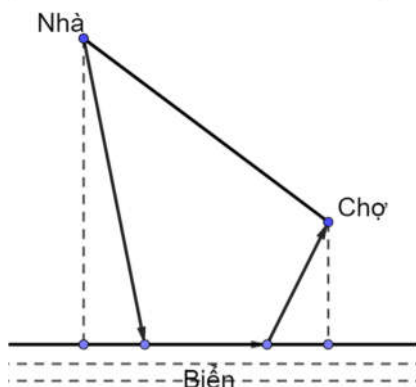
- Câu 10. (THPT Lý Thường Kiệt - Hà Nội 2025)** Từ một tấm tôn hình chữ nhật có các kích thước là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 1$ và $y > 1$ và diện tích bằng $4m^2$, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gấp lại thành một cái thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp có chiều cao bằng $0,5m$.



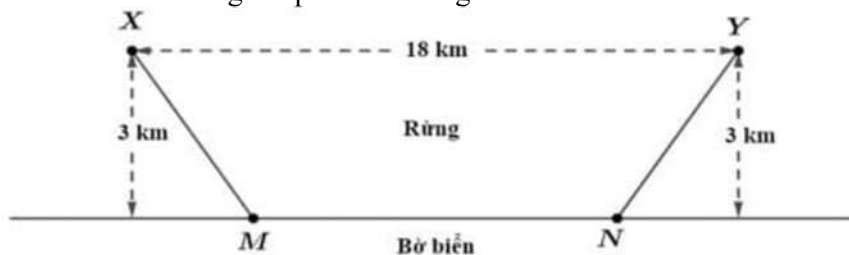
Thể tích của thùng là hàm số $V(x)$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- Câu 11. (THPT Triệu Sơn 4 - Thanh Hóa 2025)** Trong một bài thực hành huấn luyện quân sự có một tình huống chiến sĩ phải bơi qua sông để tấn công mục tiêu ở ngay phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy trên bộ. Biết dòng sông là thẳng, mục tiêu cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay và chiến sĩ cách bờ bên kia 100m. Hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

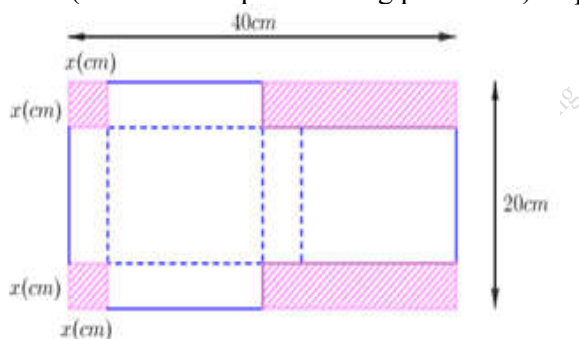
- Câu 12. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An 2025)** Nhà thầy Hùng cách bờ biển 1km. Mỗi buổi sáng thầy chạy bộ từ nhà ra bờ biển sau đó chạy dọc bờ biển 500m, rồi thầy chạy qua chợ hải sản để lấy thức ăn trong ngày, cuối cùng thầy chạy về nhà. Biết chợ hải sản cách bờ biển 400m và cách nhà thầy Hùng 1km, tính quãng đường ngắn nhất mà thầy Hùng đã chạy trong mỗi buổi sáng (đơn vị m và làm tròn đến hàng đơn vị).



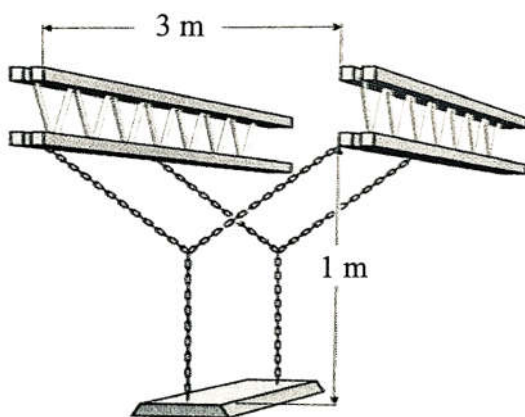
- Câu 13. (HSG Hải Phòng 2025)** Trong rừng, có hai điểm du lịch ở vị trí X và Y đều cách bờ biển một khoảng bằng 3 km (coi đường bờ biển là một đường thẳng). Khoảng cách giữa hai vị trí X và Y là 18 km. Người ta dự định đặt hai điểm nghỉ chân tại vị trí M, N trên bờ biển sao cho $XM = YN$ và làm đường từ X lần lượt qua M, N đến Y . Biết chi phí làm đường trong rừng là 1300 triệu/km và đường trên bờ biển là 500 triệu/km. Khoảng cách giữa hai vị trí M và N là bao nhiêu kilômét để tổng chi phí làm đường nêu trên ít nhất?



- Câu 14. (HSG Vũng Tàu 2025)** Để làm một cái hộp đựng quả tặng bạn nhân dịp sinh nhật. Từ một tấm bìa hình chữ nhật với kích thước $40\text{ cm} \times 20\text{ cm}$, bạn Hoa cắt bỏ hai hình vuông có cạnh là $x\text{ cm}$ và hai hình chữ nhật (phần gạch sọc như hình bên) rồi gấp theo đường nét đứt và dán các mép để được một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật. Hỏi bạn Hoa cần cắt bỏ cạnh hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) để phần không gian của hộp đựng nhiều quả nhất?

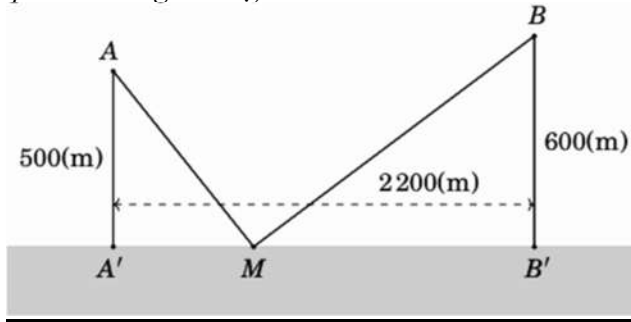


- Câu 15. (THPT Triệu Sơn 1-Thanh Hóa 2025)** Trong một cửa hàng, nhà quản lý dự định treo một đồ trang trí trên cao. Vật trang trí được đặt trên giá đỡ nằm dưới thanh treo 1m. Biết khoảng cách giữa hai thanh treo là 3m. Biết tổng độ dài nhỏ nhất của các đoạn dây xích là $a + b\sqrt{c}$ (trong đó a, b, c là các số tự nhiên). Tính $a - b - c$.



- Câu 16. (THPT Cầm trường Hải Dương 2025)** Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông. Khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500(m)$, $BB' = 600(m)$. Người ta đo được $A'B' = 2200(m)$ như hình vẽ dưới đây. Các kỹ sư muốn xây dựng một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông cho người dân của hai xã sử dụng. Để tiết kiệm chi phí, các kỹ sư phải chọn một vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến

vị trí M là nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó bằng bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

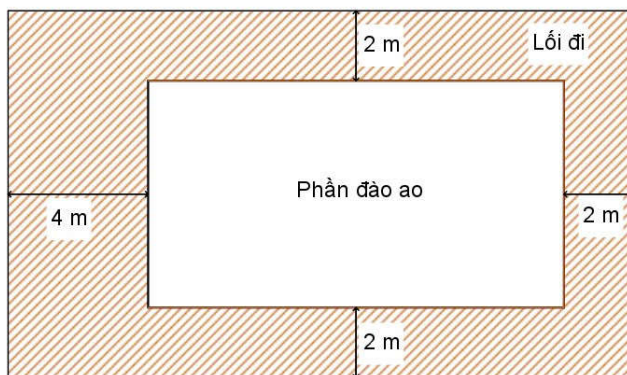


- Câu 17. (THPT Lê Xoay - Vĩnh Phúc 2025)** Một người cưỡi ngựa xuất phát từ A đi đến C . Điểm A nằm trong vùng đất ướt nên vận tốc của ngựa khi đi trong vùng này là 12 km/h . Điểm C nằm trong vùng đất khô hơn nên vận tốc của ngựa khi đi trong vùng này là 24 km/h . Hai phần đất này giáp nhau bởi một đường thẳng d đi qua trung điểm của AC và khoảng cách từ A và C đến đường thẳng này đều bằng 10 km .



Biết $AC = 5\sqrt{41} \text{ km}$, thời gian ít nhất để đi từ A đến C là $t = \frac{a\sqrt{5}}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$, a, b nguyên tố cùng nhau). Tính $T = 3a + b$?

- Câu 18. (Sở Bình Phước 2025)** Một gia đình dự định sử dụng một mảnh đất hình chữ nhật trong vườn có diện tích 384 m^2 để làm kinh tế gia đình. Sau khi bờ bên trái được trừ đi 4 m , 3 bờ còn lại đều trừ 2 m dùng làm lối đi và trồng cây thì diện tích còn lại được sử dụng để đào một cái ao dạng hình hộp chữ nhật có chiều sâu 2 m để thả cá (như hình vẽ). Khi thể tích của ao thả cá là lớn nhất thì chu vi mảnh vườn hình chữ nhật là bao nhiêu?

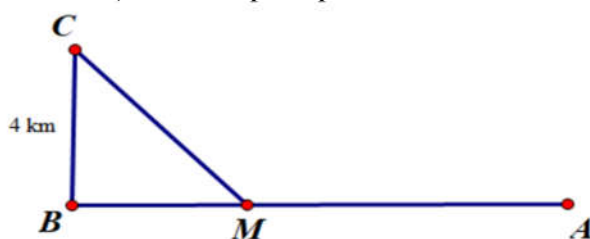


- Câu 19. (Sở Vĩnh Phúc 2025)** Người ta muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp (xây bốn mặt xung quanh với mặt đáy) chứa được 288 m^3 nước. Đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, tiền chi phí xây bể là 500.000 đồng/m^2 (tính trên diện tích mặt trong của bể). Hỏi chi phí thấp nhất để xây bể là bao nhiêu triệu đồng?
- Câu 20. (Chuyên KHTN Hà Nội 2025)** Một chiếc thang dài 9 mét tựa vào một bức tường thẳng đứng trên một mặt đất bằng phẳng. Khi đầu dưới của thang di chuyển (trên mặt đất) ra xa bức tường với vận tốc không đổi là 2 (m/s) thì đầu trên cùng của thang sẽ trượt xuống dọc theo bức tường. Khi điểm

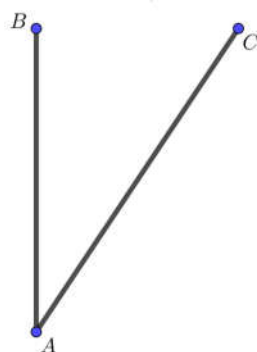
đầu thang cách mặt đất 3 mét thì tốc độ di chuyển của nó bằng bao nhiêu? (đơn vị: (m/s) và kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



- Câu 21. (Chuyên Thái Bình 2025)** Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C . Khoảng cách từ C đến B là 4km . Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 10km . Tổng chi phí lắp đặt cho 1km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng (hình vẽ mô tả đường dây từ A đến M được lắp trên đất liền, từ M đến C được lắp trên biển). Tính chi phí lắp đặt nhỏ nhất có thể đạt được (đơn vị triệu đồng).



- Câu 22. (Chuyên Vinh 2025)** Chào đón năm mới 2025, Thành phố trang trí đèn led cho biểu tượng hình chữ V được ghép từ các thanh $AB = 4\text{m}$, $AC = 5\text{m}$ sao cho tam giác ABC vuông tại B (tham khảo hình vẽ)

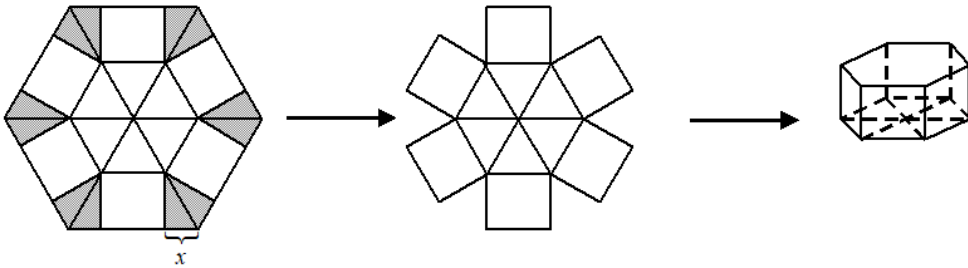


Để tăng hiệu ứng các kỹ sư đã thiết kế một chuỗi led chạy từ B xuống A với vận tốc 4m/phút và một chuỗi led chạy từ A đến C với vận tốc 10m/phút . Sau khi đóng nguồn điện thì cả hai chuỗi led đồng thời xuất phát. Hỏi sau bao giây từ thời điểm đóng nguồn điện thì khoảng cách giữa hai điểm sáng đầu tiên của hai chuỗi led là nhỏ nhất?

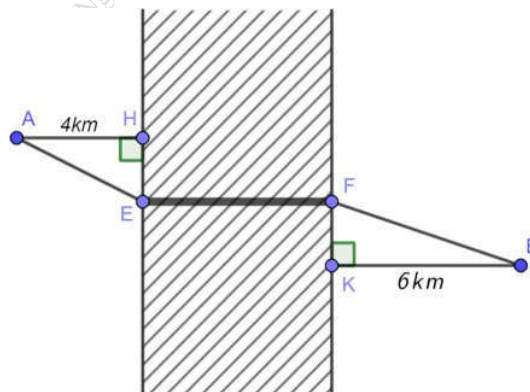
- Câu 23. (Chuyên Vinh 2025)** Để tạo một kiện hàng dạng hình lăng trụ đứng với đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, người ta dùng các thanh gỗ ghép khít đóng lại với nhau. Biết rằng, dung tích kiện hàng bằng 9m^3 và giá thành 1m^2 gỗ sử dụng là 200 000 đồng. Hỏi sau khi hoàn thành kiện hàng đó, người ta cần bỏ ra ít nhất bao nhiêu triệu đồng? (diện tích các mép giữa hai mặt kề nhau không đáng kể).



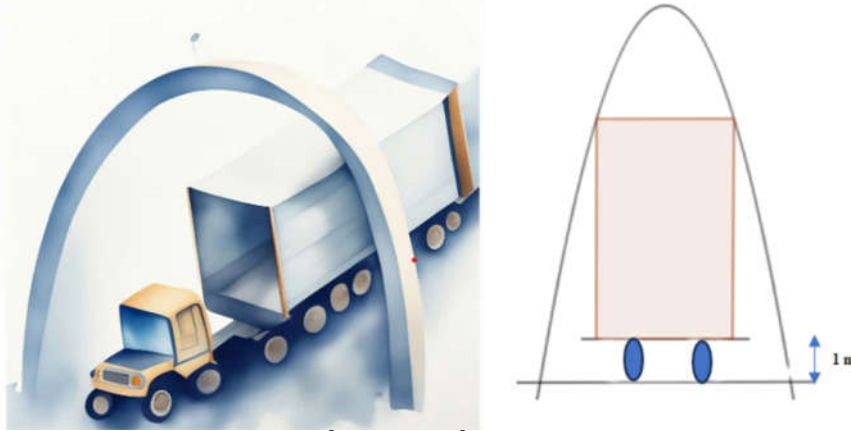
Câu 24. (THPT Trần Phú - Vĩnh Phúc 2025) Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh $90(\text{cm})$. Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau, biết cạnh góc vuông nhỏ bằng $x(\text{cm})$ (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi gấp tấm nhôm như hình vẽ để được một hình lăng trụ lục giác đều không có nắp. Tìm x để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất (đơn vị cm).



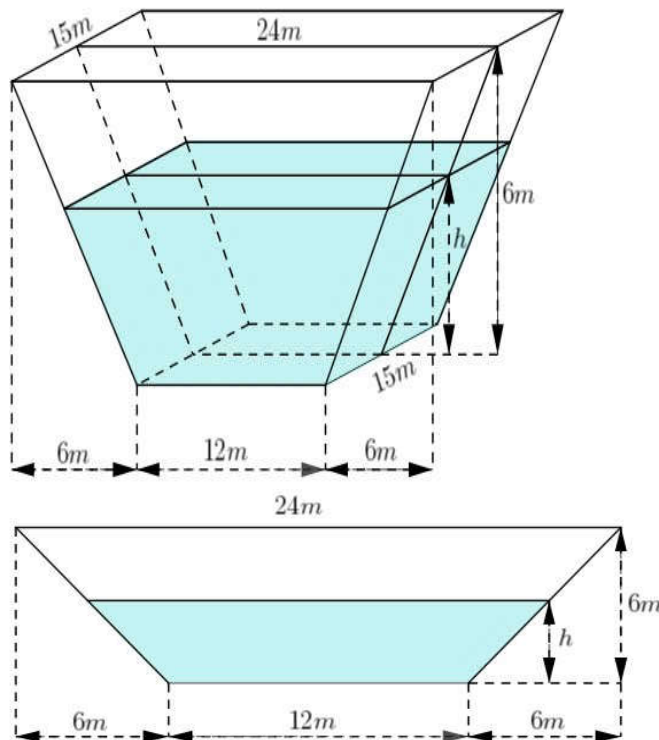
Câu 25. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2025) Hai thành phố ở hai vị trí A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu bắc qua sông biết rằng vị trí A cách con sông một khoảng là 4km , vị trí B cách con sông một khoảng là 6km (được mô hình hóa như hình vẽ bên dưới), $HE + KF = 20\text{km}$ và độ dài EF không đổi. Hỏi độ dài EH là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)?



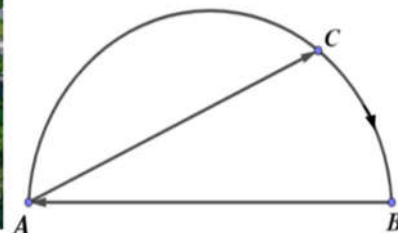
Câu 26. (Cụm trường THPT Hải Dương 2025) Một chiếc cổng hình Parabol có chiều cao 9 m , khoảng cách giữa hai chân cổng là 6 m . Để vận chuyển thùng hàng hình chữ nhật qua cổng, người ta dùng một xe kéo có chiều cao 1 m . Biết rằng mặt cắt của thùng hàng qua cổng là hình chữ nhật, hỏi diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất là bao nhiêu m^2 để xe chở thùng hàng có thể đi qua được cổng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



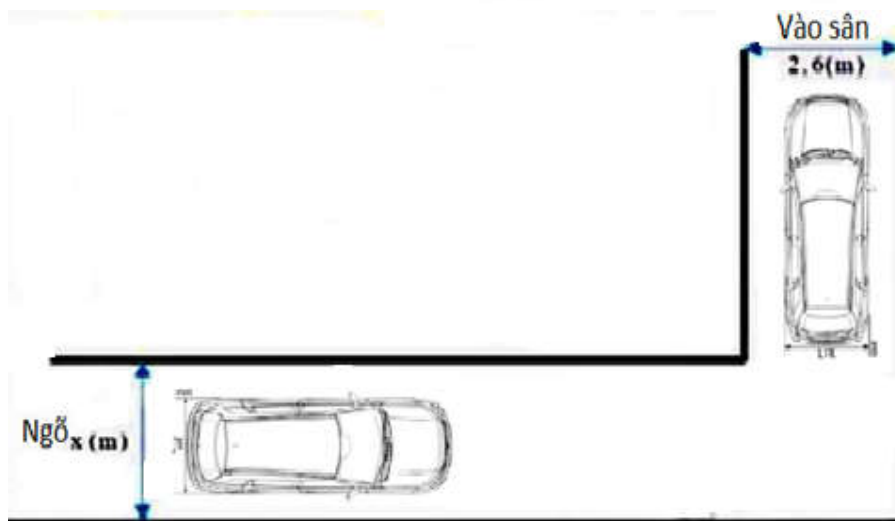
- Câu 27.** (Cụm trường Nguyễn Hiền - Lê Hồng Phong - Quảng Nam 2025) Công ty Sơn X cần làm những hộp hình trụ có thể tích 5 lít. Giả thiết rằng vật liệu và chi phí dùng để sản xuất các mặt của hộp là như nhau. Tính bán kính r của đáy hộp để chi phí là bé nhất (đơn vị là cm và làm tròn đến hàng phần trăm).
- Câu 28.** (Sở Bình Phước 2025) Một bể chứa nước có mặt đáy và miệng bể đều là hình chữ nhật nằm trên 2 mặt phẳng song song với nhau, miệng bể có chiều ngang $15m$ và chiều dài $24m$, đáy bể có kích thước $15m \times 12m$. Độ sâu của bể nước (tính từ miệng đến đáy) là $6m$, mặt cắt vuông góc với chiều ngang của bể có hình dạng là hình thang cân (như hình vẽ). Lúc đầu bể không có nước, người ta sử dụng một máy bơm để bơm nước vào bể với tốc độ $50m^3$ trong một phút. Vào lúc mực nước đúng $5m$ thì tốc độ dâng lên của mực nước trong bể là bao nhiêu m trên một phút? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



- Câu 29.** (Sở Thái Nguyên 2025) Một hồ nước hình bán nguyệt có đường kính $AB = 150m$. Một người chèo thuyền theo một đường thẳng với vận tốc $1,5 \text{ km/h}$ từ vị trí A đến vị trí C bất kỳ trên cung \widehat{AC} . Tại vị trí C người đó nghỉ 2 phút rồi tiếp tục đi bộ dọc theo cung nhỏ \widehat{CB} đến B , sau đó đi bộ theo đường thẳng BA để quay về A với vận tốc 3 km/h (tham khảo hình vẽ). Hỏi thời gian chậm nhất mà người đó về đến A là bao nhiêu phút? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

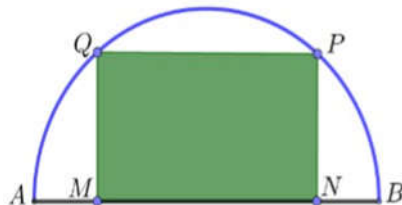


Câu 30. (THPT Lê Hồng Phong - Hải Phòng 2025) Ông An muốn mua một chiếc ô tô. Ngõ từ đường vào sân nhà ông An hình chữ L.

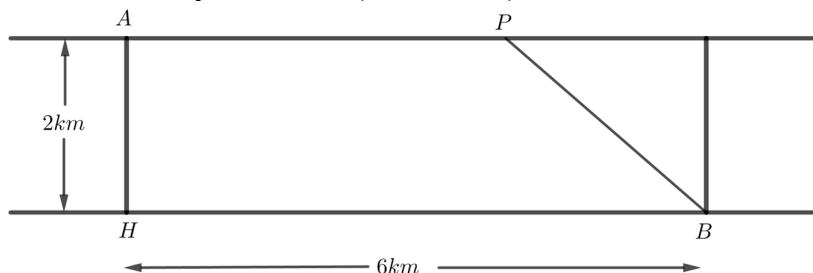


Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng $x(m)$, đoạn đường thẳng vào sân chiều rộng $2,6(m)$. Biết kích thước xe ô tô như hình vẽ trên và để ô tô đi qua an toàn thì chiều rộng và chiều dài tương ứng của đoạn đường phải lớn hơn kích thước thiết kế của ô tô một khoảng, cụ thể là $5m \times 1,9m$ (chiều dài \times chiều rộng). Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô từ ngõ vào sân, ông An coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài là $5(m)$, chiều rộng $1,9(m)$. Chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên là $x = \frac{p}{q}(m)$ (với p, q là các số nguyên dương và phân số $\frac{p}{q}$ tối giản) để ô tô của ông An có thể đi vào được sân (giả thiết ô tô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ô tô không bị biến dạng). Khi đó $p^2 - q$ bằng bao nhiêu?

- Câu 31. (THPT Lê Hồng Phong - Hải Phòng 2025)** Trước sân nhà A của một trường THPT có một mảnh đất là nửa hình tròn có đường kính $AB = 10m$. Nhà trường muốn trồng hoa trong hình chữ nhật $MNPQ$ và phần đất còn lại trồng cỏ Nhật. Biết chi phí trồng hoa là 100 ngàn đồng $/m^2$. Trồng cỏ Nhật hết 150 ngàn đồng $/m^2$. Hỏi chi phí (làm tròn đến đơn vị ngàn đồng) hết ít nhất là bao nhiêu?

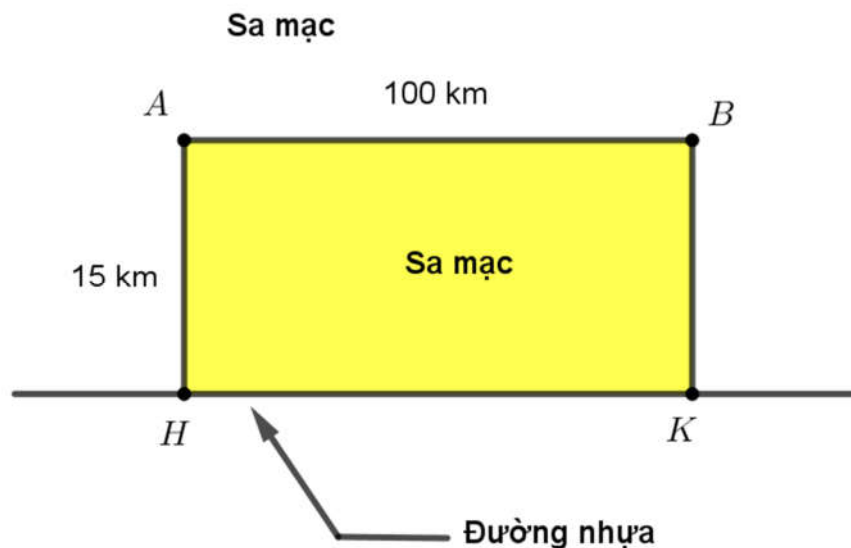


- Câu 32. (Sở Quảng Bình 2025)** Người ta muốn lắp một ống dẫn dầu từ nhà máy lọc dầu ở vị trí A đến kho chứa dầu đặt ở vị trí B qua một con sông rộng 2km, dài 6km. Chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu trên mặt đất để nối từ nhà máy lọc dầu đến trạm trung chuyển tại vị trí P là 4 tỷ VNĐ/1km và chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu dưới dòng sông để nối từ P đến kho chứa dầu tại vị trí B là 8 tỷ VNĐ/1km (như hình vẽ)



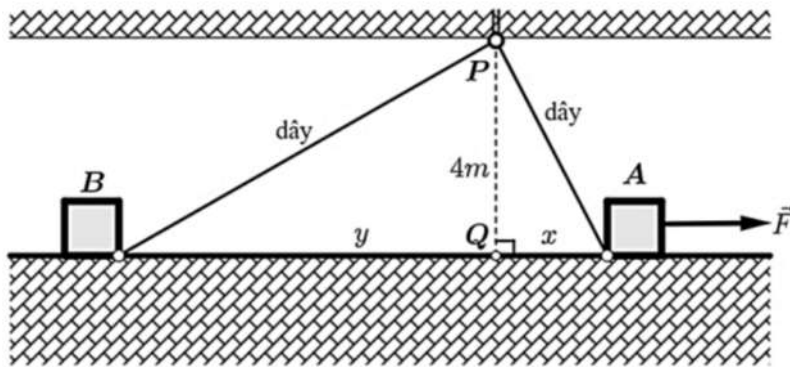
Hỏi chi phí lắp đặt ít nhất, cần đặt vị trí P cách nhà máy lọc dầu là bao nhiêu kilômét? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

- Câu 33. (Sở Bạc Liêu 2025)** Một nhà địa chất học đang ở tại điểm A trên sa mạc. Anh ta muốn đến điểm B và cách A một đoạn là 100 km. Trong sa mạc thì xe anh ta chỉ có thể di chuyển với vận tốc là 30km/h. Nhà địa chất phải đến được điểm B sau 3 giờ. Vì vậy, nếu anh ta đi từ A đến B sẽ không thể đến đúng giờ được. May mắn thay, có một con đường nhựa song song với đường nối A và B và cách AB một đoạn 15 km. Trên đường nhựa đó thì xe nhà địa chất này có thể di chuyển với vận tốc 50km/h. Thời gian ngắn nhất để nhà địa chất di chuyển từ A đến B là bao nhiêu phút?

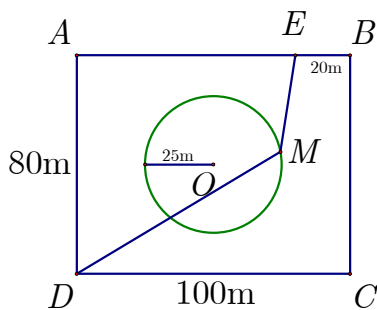


- Câu 34. (THPT Lê Thánh Tông - Nguyễn Khuyến 2025)** Có hai thùng hàng A và B được đặt trên sàn nhà kho. Hai thùng được nối với nhau bằng một sợi dây dài 15m, sợi dây luôn căng và được kéo qua một ròng rọc gắn tại điểm P trên trần nhà. Biết trần nhà cao 4m so với mặt sàn (đoạn $PQ = 4m$) và trong quá trình di chuyển, hai thùng hàng luôn nằm trên mặt sàn (bỏ qua lực ma sát).

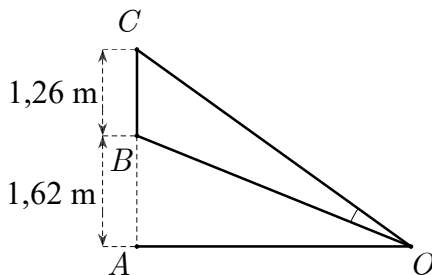
Nếu thùng A cách Q khoảng $3m$ và đang được kéo ra xa Q với tốc độ không đổi $0,5m/s$, hỏi thùng B đang di chuyển về phía Q với tốc độ bao nhiêu m/s ? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



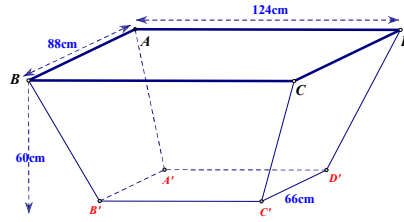
Câu 35. (Chuyên KHTN Hà Nội 2025) Trên sân vận động, người ta tổ chức một cuộc thi chạy thông minh. Sân vận động là hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $AB=100m$ và $CD=80m$. Ở chính giữa sân người ta vẽ một hình tròn có tâm trùng với tâm của hình chữ nhật, bán kính bằng $25m$ như hình vẽ. Lấy E là một vị trí trên cạnh AB sao cho $EB=20m$. Mỗi vận động viên cần xuất phát từ một điểm M trên đường tròn và chạy theo cung đường $MDCBEMD$. Vận động viên thắng cuộc là người chạy với quãng đường ngắn nhất. Tính độ dài quãng đường ngắn nhất vận động viên phải chạy (đơn vị m , kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 36. (Sở Bắc Ninh 2025) Hình vẽ bên minh họa một màn hình BC có chiều cao $1,26m$ được đặt thẳng đứng và mép dưới của màn hình cách mặt đất một khoảng $BA=1,62m$. Một chiếc đèn quan sát màn hình được đặt ở vị trí O trên mặt đất. Để góc quan sát \widehat{BOC} là lớn nhất thì độ dài OA bằng bao nhiêu mét?

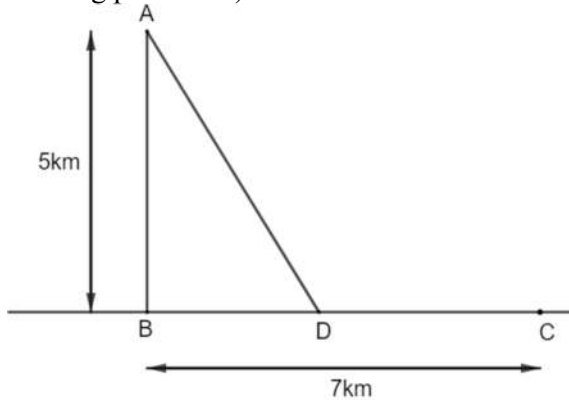


Câu 37. (Sở Hòa Bình 2025) Anh A bơm nước vào một chiếc thùng nhựa đựng nước có dạng hình chóp cụt với hai đáy là hai hình chữ nhật, các cạnh bên bằng nhau và có kích thước như hình bên dưới, với tốc độ bơm nước vào thùng là 20 lít/phút. Vận tốc nước dâng lên ở cạnh bên của thùng nhựa (đơn vị $cm/phút$) khi chiều cao mực nước là $25cm$ bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

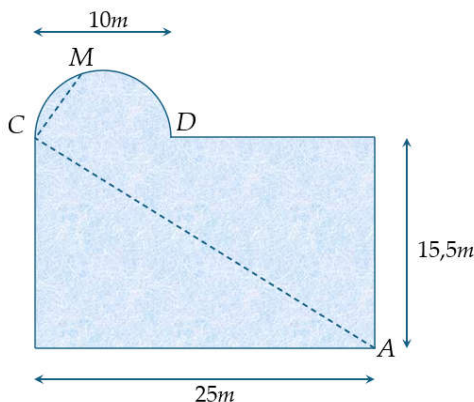


Câu 38. (Sở Sơn La 2025) Một đoàn cứu trợ lũ lụt đang ở vị trí A của một tỉnh miền trung muốn đến xã C để tiếp tế lương

thực và thuốc men. Đoàn cứu trợ phải đi theo con đường từ A đến B và từ B đến C (như hình vẽ). Do nước ngập con đường từ A đến B nên đoàn cứu trợ không thể đến C bằng xe mà phải chèo thuyền từ A đến vị trí D trên đoạn đường từ B đến C với vận tốc 4 km/h , rồi đi bộ từ D đến C với vận tốc 6 km/h . Biết A cách B một khoảng 5 km , B cách C một khoảng 7 km . Hỏi vị trí điểm D cách A bao nhiêu km để đoàn cứu trợ đi đến xã C nhanh nhất (kết quả làm tròn tới hàng phần trăm)?

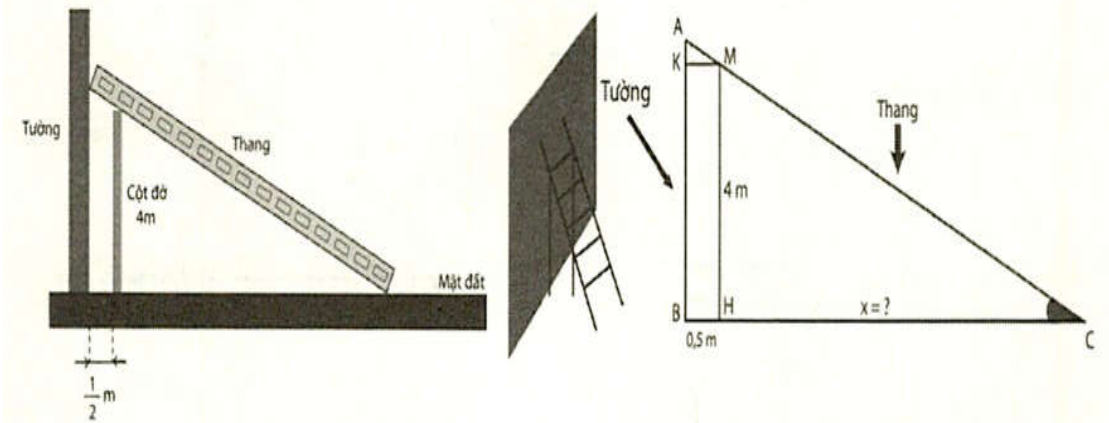


Câu 39. (Liên Trường Nghệ An 2025) Bạn Hoa thường đi bơi ở hồ Sky Garden cạnh nhà, hồ bơi có thiết kế là một hình chữ nhật với chiều dài 25 m , chiều rộng $15,5\text{ m}$ và bên cạnh đó là một hình bán nguyệt đường kính 10 m . Trong một lần bể bơi vắng người nên Hoa đã thực hiện một chu trình là bơi theo đoạn thẳng AC rồi bơi tiếp đoạn thẳng CM , với M là một vị trí bất kỳ trên hình bán nguyệt. Ngay sau đó bạn đi bộ theo một hướng qua điểm D dọc bờ của hồ bơi để quay lại vị trí A và kết thúc chu trình. (tham khảo hình vẽ).

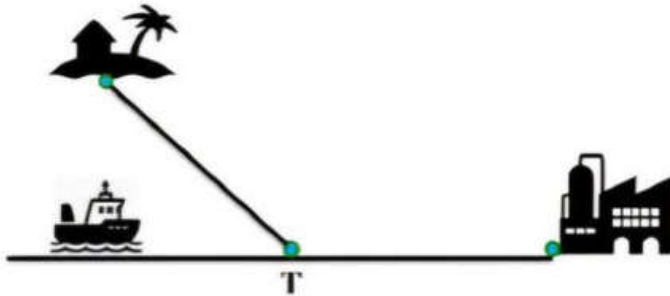


Biết rằng vận tốc bơi của Hoa là $2,4\text{ km/h}$, vận tốc đi bộ là $4,8\text{ km/h}$ và tốc độ bơi, vận tốc đi bộ không thay đổi trong một chu trình. Hỏi thời gian chậm nhất để Hoa thực hiện xong chu trình trên là bao nhiêu phút? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 40. (THPT DTNT - Nghệ An 2025) Tìm chiều dài bé nhất của cái thang để nó có thể tựa vào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ cao 4 m , song song và cách tường $0,5\text{ m}$ kể từ góc của cột đỡ như hình vẽ. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.



Câu 41. (Đề thi vào ĐHSHPN 2025) Công ty nước sạch Bình An đang cần lắp đặt đường ống dẫn nước từ nhà máy nước tới hòn đảo như trong sơ đồ (đường ống xuất phát từ nhà máy đến điểm T rồi đi ra đảo). Bến tàu cách đảo 1 km , đó chính là vị trí trên đất liền gần với đảo nhất. Nhà máy ước cách bến tàu 4 km . Biết rằng chi phí đặt mỗi ki-lô-mét ống nước trên đất liền là 30 triệu đồng, còn lại đặt dưới nước là 50 triệu đồng.



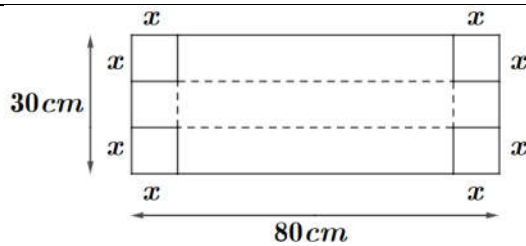
- a) Khoảng cách từ điểm T đến nhà máy nước là bao nhiêu ki-lô-mét để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất?
b) Tổng chi phí lắp đặt ít nhất bằng bao nhiêu (triệu đồng)?.

Câu 42. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh 2025) Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình 35). Đối với một hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.

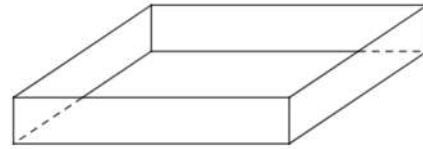


Hình 35

Câu 43. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025) Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm (Hình 2), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x(\text{ cm})$ với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình b.



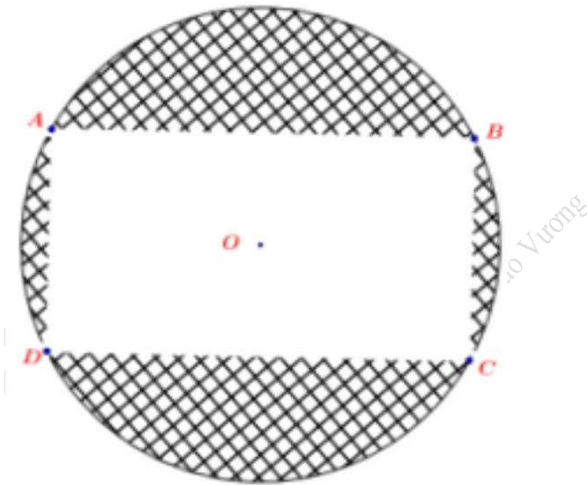
a)



b)

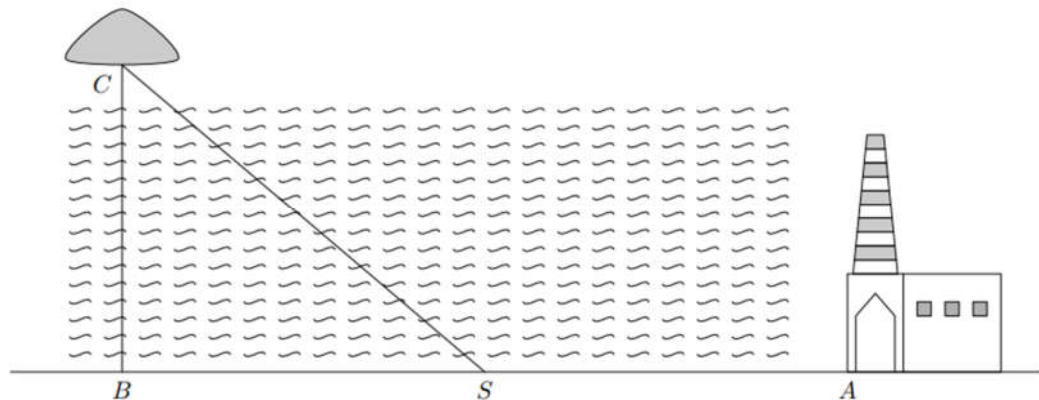
Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

- Câu 44. (Cụm Chuyên Môn Đắk Lak 2025)** Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 1000 m^2 , người ta muốn mở rộng thêm 4 phần đất sao cho tạo thành hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn (Tham khảo hình vẽ). Biết tâm của hình tròn trùng với tâm của hình chữ nhật. Tìm diện tích nhỏ nhất S_{\min} của 4 phần đất mở rộng. (làm tròn đến hàng đơn vị)



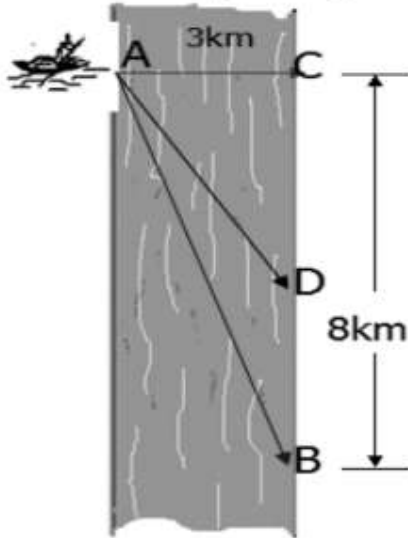
- Câu 45. (Sở Bắc Ninh 2025)** Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A (nằm tại bờ biển là đường thẳng

AB) đến một hòn đảo C , khoảng cách ngắn nhất từ đảo về bờ biển là đoạn BC dài 1 km, khoảng cách từ B đến A là 4 km được minh họa bằng hình vẽ dưới đây.



Biết rằng mỗi km dây điện đặt dưới nước chi phí mất 5000 USD, còn đặt dưới đất chi phí mất 3000 USD. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C có chi phí là ít nhất?

Câu 46. (Sở Hậu Giang 2025) Anh Tí muốn chèo thuyền từ vị trí A đến vị trí B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3km (như hình vẽ). Tí có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến vị trí C và sau đó chạy đến vị trí B, hay có thể chèo trực tiếp từ vị trí A đến vị trí B, hoặc anh ta có thể chèo đến một vị trí D ở giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền với tốc độ 6km/h , chạy với tốc độ 8km/h và quãng đường $BC = 8\text{km}$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể có với tốc độ chèo thuyền của anh Tí. Khoảng thời gian để anh Tí đến B là bao nhiêu phút? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

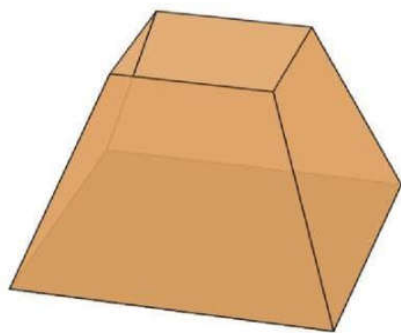


Câu 47. (Sở Lai Châu 2025) Một xưởng sản xuất cửa nhôm kính uốn vòm gồm phần dưới là hình chữ nhật có chiều rộng x (cm), chiều dài y (cm), phần vòm là hình bán nguyệt có bán kính $\frac{x}{2}$ (cm). Biết chu vi của cửa không đổi là 8m. Biết đơn giá làm cửa tính theo m^2 là 1.600.000 đồng. Khi diện tích của cái cửa lớn nhất thì cái cửa trị giá bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến hàng phần mười)?

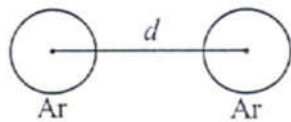


Câu 48. (Sở Nghệ An 2025) Một xưởng thủ công mỹ nghệ sản xuất loại chụp đèn trang trí dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Gọi x là độ dài cạnh đáy lớn (đơn vị:dm). Tính toán cho thấy tổng chi phí vật liệu (tính bằng nghìn đồng) cho một chụp đèn là $C(x) = x^2 + 108$ (nghìn đồng). Thời gian sản xuất

cho một chup đèn được xác định là $T(x) = x + 6$ (giờ). Xưởng muốn xác định kích thước x để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất, nhằm tối ưu hóa hiệu quả sử dụng thời gian và vật liệu. Hãy tìm giá trị của x .



- Câu 49. (Sở Hải Phòng 2025)** Xét hệ gồm hai nguyên tử khí argon (Ar) ở trạng thái cơ bản, mỗi nguyên tử được coi là một khối cầu, khoảng cách (d) giữa hai nguyên tử bằng khoảng cách giữa tâm của hai khối cầu (tham khảo hình bên). Coi như không có tương tác bên ngoài nào tác động đến hệ, sự phụ thuộc của thế năng tương tác $V(d)$ giữa hai nguyên tử khí vào khoảng cách d được xác định theo công thức:



Hình 1

$$V(d) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{d} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{d} \right)^6 \right]$$

Trong đó ε và σ là các hằng số đặc trưng cho từng khí hiếm. Đối với Ar, $\varepsilon = 0,930$ và $\sigma = 3,62$. Biết rằng khi thế năng tương tác đạt nhỏ nhất thì hệ hai nguyên tử Ar là bền nhất, khoảng cách (d) mà hai nguyên tử đó bền nhất là? (Công thức $V(d)$ có tên gọi là: Thế **Lennard-Jones**)

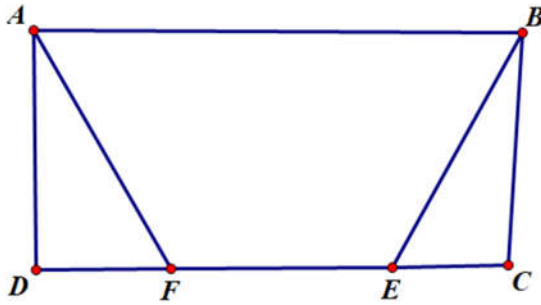
- Câu 50. (Cụm THPT Hoàn Kiếm - Hai Bà Trưng - Hà Nội 2025)** Một khu đất trồng bằng phẳng hình chữ nhật $ABCD$ như hình vẽ. Từ vị trí A, anh An chạy bộ theo

đường gấp khúc $ABEFA$ để quay lại vị trí A (trong đó E,F là hai vị trí bất kì trên đoạn CD). Vận tốc của anh

An trên đoạn AB và EF bằng $10\text{km} / \text{h}$, vận tốc của anh An trên đoạn BE và AF là $6\text{km} / \text{h}$. Thời gian ngắn

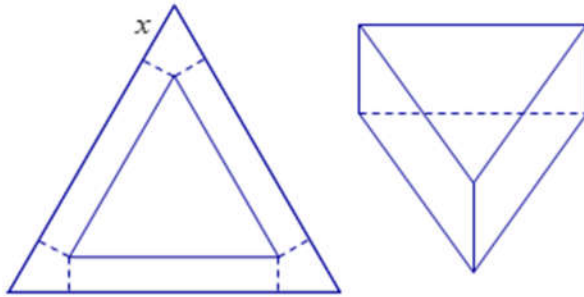
nhất mà anh An di chuyển từ A theo cách trên rồi quay lại A là bao nhiêu phút, biết khoảng cách $AB = 1\text{km}$ và

$$AD = 0,6\text{km}$$



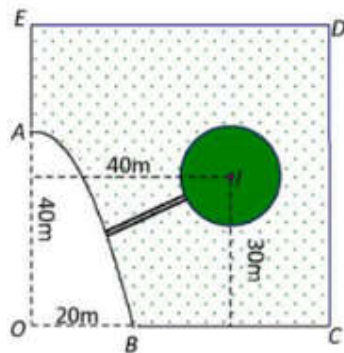
Câu 51. (THPT Bắc Đông Quan - Thái Bình 2025) Một người muốn tạo một hộp đựng quà khối lăng trụ tam giác đều, không có nắp bằng cách cắt ba góc của một tam giác đều cạnh bằng a các đoạn bằng x , $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$ như hình vẽ, rồi gấp lại tạo thành khối lăng trụ tam giác đều. Thể tích khối

lăng trụ lớn nhất khi $x = \frac{a}{b}$. Tìm b .

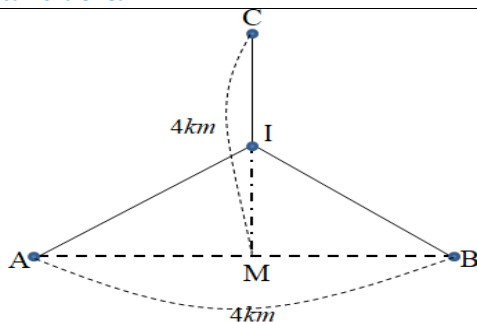


Câu 52. (Liên trường THPT Ninh Bình 2025) Một cái ao có hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn bán kính 12 m, người ta muốn bắc một cây cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Hỏi độ dài ngắn nhất l (đơn vị mét) của cây cầu là bao nhiêu (làm tròn đến chữ số hàng phần chục), biết:

- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;
- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40 m và 20 m;
- Tâm I của mảnh vườn cách đường thẳng AE và BC lần lượt là 40 m và 30 m.



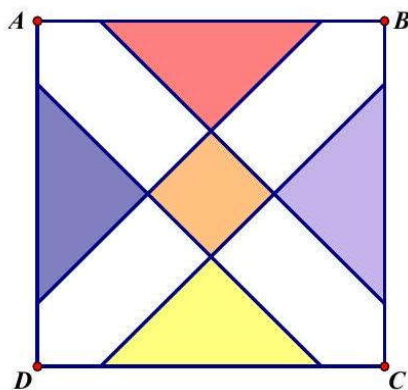
Câu 53. (Sở Hà Tĩnh 2025) Hai nhà máy sản xuất đặt tại các vị trí A và B cách nhau 4km . Một nhà máy cung cấp nước được đặt ở vị trí C nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB , cách trung điểm M của đoạn thẳng AB một khoảng 4km . Người ta muốn làm một đường ống dẫn nước từ nhà máy nước C đến một vị trí I nằm giữa đoạn thẳng MC sau đó chia ra hai nhánh dẫn tới hai nhà máy A và B (hình vẽ). Tổng độ dài đường ống dẫn nước nhỏ nhất bằng bao nhiêu km ? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



ĐÁP ÁN THAM KHẢO

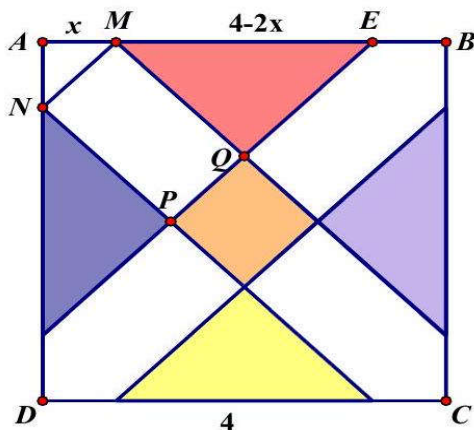
Hình học

Câu 1. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa 2025) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4m, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với hình vuông $ABCD$ (xem hình vẽ). Biết rằng bốn tam giác tô màu trên hình là bốn tam giác cân. Người ta cần sơn cho hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân trên, chi phí là 900 nghìn đồng trên 1 m^2 . Hỏi cần bỏ ra ít nhất bao nhiêu triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?



Lời giải

Đáp án: 4,8.



Đặt $AM = x$ ($0 < x < 4$) $\Rightarrow ME = 4 - 2x$, $MN = x\sqrt{2}$, $2MQ^2 = ME^2 = (4 - 2x)^2$.

Gọi S là tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ.

$$S = 4 \cdot \frac{MQ^2}{2} + PQ^2 = 2MQ^2 + MN^2 = (4 - 2x)^2 + (x\sqrt{2})^2 = 6x^2 - 16x + 16.$$

$$S' = 12x - 16. S' = 0 \Leftrightarrow 12x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{4}{3}$	4
S'	-	0	+
S		$\frac{16}{3}$	

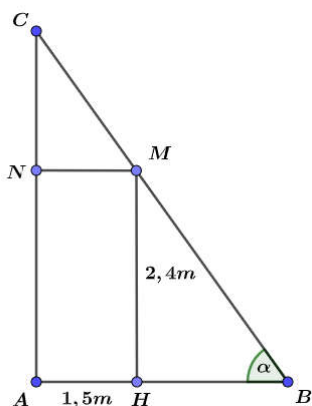
Vậy $S_{\min} = \frac{16}{3}$. Vậy số tiền tối thiểu là $T = \frac{16}{3} \cdot 0,9 = 4,8$ triệu.

Câu 2. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa 2025) Một ông chủ nhà muốn làm một cái thang cứu hộ khi có nguy hiểm xảy ra. Ông ta muốn làm cái thang để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (tham khảo hình vẽ). Với hàng rào cao 2,4 mét được đặt song song và cách bức tường của ngôi nhà một khoảng bằng 1,5 mét. Chiều dài ngắn nhất của cây thang bao nhiêu centimet (cm) để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (làm tròn đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Đáp án: 547.



Gọi góc hợp bởi thang và mặt đất là $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$. Chiều dài thang là $BC = BM + MC$.

Tam giác vuông MHB có $BM = \frac{2,4}{\sin \alpha}$. Tam giác vuông MNC có $MC = \frac{1,5}{\cos \alpha}$.

$$BC = BM + MC = \frac{2,4}{\sin \alpha} + \frac{1,5}{\cos \alpha}. \text{ Xét hàm số } y = \frac{2,4}{\sin x} + \frac{1,5}{\cos x} \text{ với } x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$$

$$y' = \frac{-2,4 \cdot \cos x}{\sin^2 x} + \frac{1,5 \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{-2,4 \cdot \cos^3 x + 1,5 \cdot \sin^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2,4 \cdot \cos^3 x = 1,5 \cdot \sin^3 x \Leftrightarrow \tan^3 x = \frac{2,4}{1,5} \Leftrightarrow \tan x = \sqrt[3]{\frac{8}{5}}, \text{ do } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên } x \approx 0,863 \text{ rad}$$

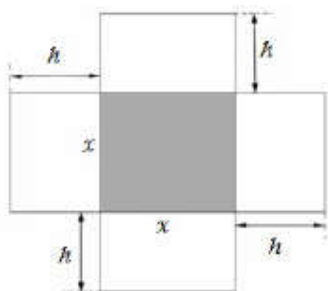
Ta có bảng biến thiên

x	0	0,863	$\frac{\pi}{2}$
y'	-	0	+
y		5,47	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy chiều dài thang bé nhất xấp xỉ 5,47 mét hay 547 cm.

Câu 3. (THPT Văn Giang - Hưng Yên 2025) Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), chiều cao là h (cm) và thể tích là 4000 cm^3 .

Tìm x (cm) sao cho chiếc hộp làm ra tốn ít bìa các tông nhất.



Lời giải

Đáp án: 20.

Điều kiện $x > 0$

Ta có thể tích của chiếc hộp là $V = x^2 \cdot h$

Theo giả thiết thể tích chiếc hộp bằng 4000 cm^3 nên ta có $x^2 \cdot h = 4000 \Leftrightarrow h = \frac{4000}{x^2}$

Ta có diện tích xung quanh và đáy của chiếc hộp là $S = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \cdot \frac{4000}{x^2} = x^2 + \frac{16000}{x}$

Ta khảo sát hàm số $f(x) = x^2 + \frac{16000}{x}$

Ta có $f'(x) = 2x - \frac{16000}{x^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20$

x	0	20	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		1200	

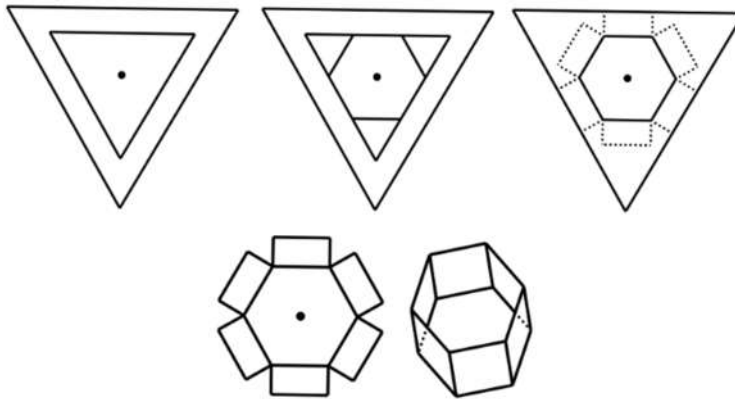
Ta có $x = 20$ (cm) thì chiếc hộp làm ra tốn ít bìa nhất.

Câu 4. (THPT Tiên Du - Bắc Ninh 2025) Cho một tấm tôn hình một tam giác đều có cạnh bằng $2m$.

Người ta thiết kế một hình lục giác đều và sáu hình chữ nhật ở phía ngoài lục giác có một cạnh

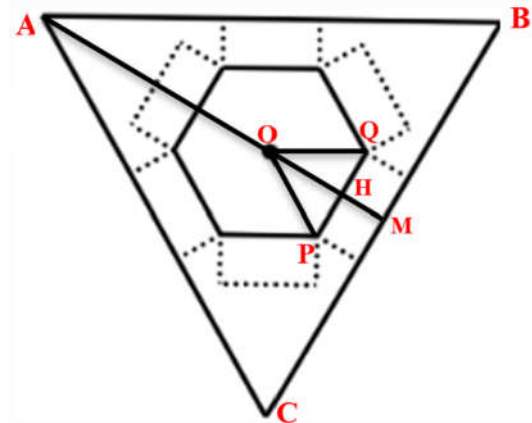
bằng cạnh của lục giác, một cạnh bằng x (mét) với $0 < x < \frac{2}{3}$. Sau đó người ta cắt theo nét đứt

đoạn để thu được một hình hợp bởi một lục giác đều và sáu hình chữ nhật. Sau đó gấp các hình chữ nhật để tạo thành khối lăng trụ lục giác đều (tham khảo hình vẽ dưới đây). Thể tích của khối lăng trụ lớn nhất bằng bao nhiêu đề - xi - mét khối (dm^3) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải

Đáp án: 99,8.



Kẻ đường cao AM , ta có $\triangle ABC$ đều, cạnh bằng 2 nên $AM = \sqrt{3}$.

Gọi O là tâm của $\triangle ABC \Rightarrow OM = \frac{1}{3} AM = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow OH = OM - x = \frac{\sqrt{3}}{3} - x$.

Lại có $\triangle OPQ$ đều nên $OH = \frac{\sqrt{3}}{2} PQ \Rightarrow PQ = \frac{2}{\sqrt{3}} OH = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - x \right)$.

Diện tích $\triangle OPQ$ là $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} OH \cdot PQ = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - x \right)^2$.

Diện tích lục giác đều: $S = 6S_{\triangle OPQ} = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - x \right)^2$.

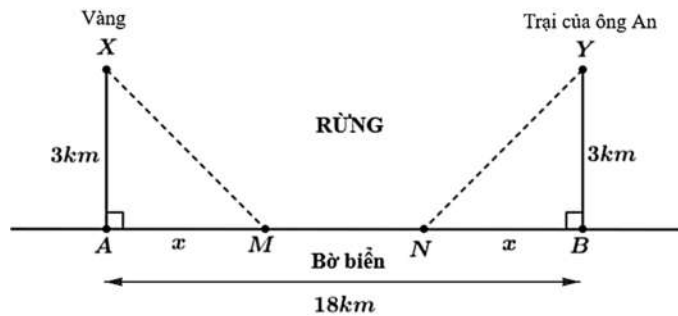
Thể tích khối lăng trụ lục giác đều: $V(x) = 2\sqrt{3}x \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - x \right)^2 = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 + x^3 \right)$.

Ta có: $V'(x) = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3}x + 3x^2 \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ hoặc $x = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Lập bảng giá trị của $V(x)$ với $x \in \left(0; \frac{2}{3} \right)$ ta thấy $V(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{8}{81}$ tại $x = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Vậy thể tích lớn nhất của khối lăng trụ lục giác đều là $\frac{8}{81}(m^3) \approx 98,8 (dm^3)$.

Câu 5. (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025) Ông An đang ở trong rừng để đào vàng. Ông ta tìm thấy vàng ở điểm X , cách điểm A 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của Ông An nằm ở Y , cách điểm B 3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 18$ km, $AM = NB = x$ km và $AX = BY = 3$ km. (Như hình vẽ)



Khi đang đào vàng, ông An bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo hàm số $y = 50 \log(t + 2)$ (mg/l), trong đó y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông An cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng với vận tốc 5 km/h và chạy trên đường bờ biển với vận tốc 13 km/h. Để về đến trại ông An cần chạy từ trong rừng qua điểm M, N trên đường bờ biển. Chọn điểm M trên đường bờ biển sao cho khi ông An về đến trại nồng độ chất độc trong máu thấp nhất. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông An về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).

Lời giải

Đáp án: 32,6.

Nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi thời gian di chuyển về đến trại thấp nhất.

Vậy nên quãng đường ông An di chuyển về đến trại phải ngắn nhất.

Theo bài ra ta có: ông An sẽ đi quãng đường $XM + MN + NY$.

Ta có: $XM = NY = \sqrt{9 + x^2}$; $MN = 18 - 2x$ (km).

Thời gian ông An chạy đến trại nghỉ là: $T(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{9 + x^2}}{5} + \frac{9 - x}{13} \right)$ với $[0; 9]$.

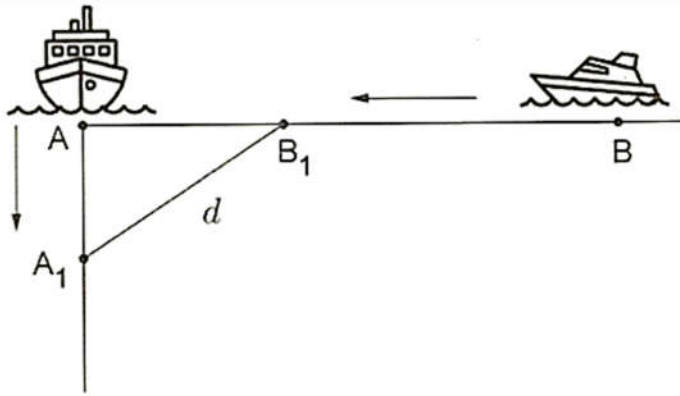
Xét $T'(x) = 2 \left(\frac{x}{5\sqrt{9 + x^2}} - \frac{1}{13} \right)$; $T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$ (thỏa mãn). Ta có bảng biến thiên:

x	0	$\frac{5}{4}$	9
$T'(x)$	—	0	+
$T(x)$	$\frac{168}{65}$	$\frac{162}{65}$	$\frac{6\sqrt{10}}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $T(x)$ nhỏ nhất khi $x = \frac{5}{4}$; $\min_{(0;9)} T(x) = T\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{162}{65}$.

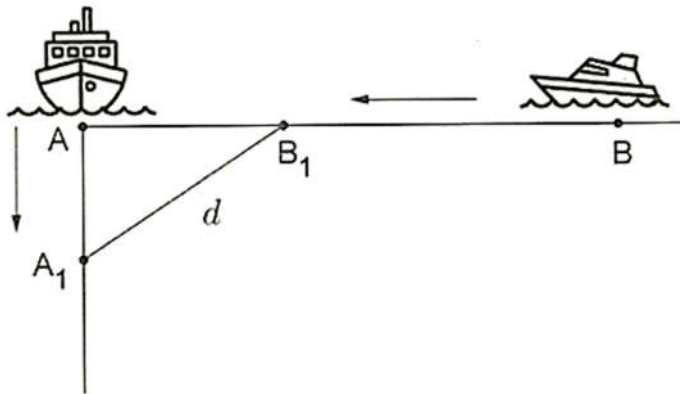
Vậy nồng độ chất độc trong máu thấp nhất là $\min_{(0;+\infty)} y = 50 \log\left(\frac{162}{65} + 2\right) \approx 32,6$.

Câu 6. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2025) Hai con tàu A và B đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 6 hải lí. Cả hai tàu đồng thời cùng khởi hành. Tàu A chạy về hướng Nam với vận tốc 5 hải lí/ giờ, còn tàu B chạy về vị trí hiện tại của tàu A với vận tốc 7 hải lí/ giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là bé nhất?



Lời giải

Đáp án: 0,57



Giả sử ban đầu tàu A ở vị trí A và tàu B ở vị trí B . Sau khoảng thời gian t :

Tàu A di chuyển được quãng đường $5t$ về phía Nam đến vị trí A_1 .

Tàu B di chuyển được quãng đường $7t$ đến vị trí B_1

Khoảng cách từ vị trí B_1 đến vị trí A là $6-7t$.

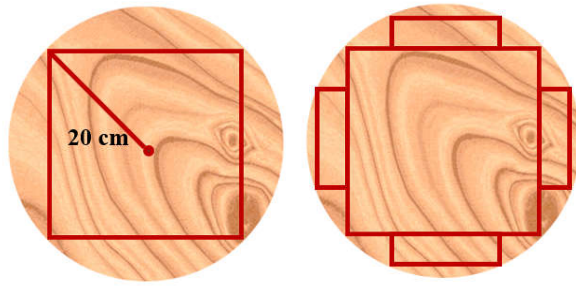
Áp dụng định lý Pytago ta có: $d = A_1B_1 = f(t) = \sqrt{(6-7t)^2 + (5t)^2} = \sqrt{74t^2 - 84t + 36}$

Để khoảng cách giữa hai tàu nhỏ nhất, thì hàm số $g(t) = 74t^2 - 84t + 36$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hàm số $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = \frac{-(-84)}{2 \cdot 74} = \frac{21}{37}$, vậy thời điểm khoảng cách giữa hai tàu bé

nhất là khi $t = \frac{21}{37} \approx 0,57$ (giờ).

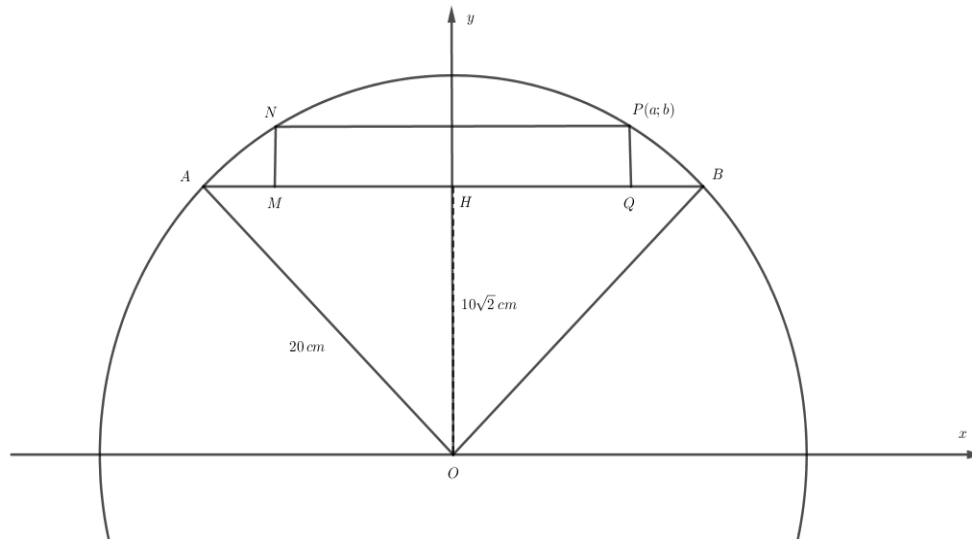
Câu 7. (Sở Ninh Bình 2025) Một thanh dầm hình hộp chữ nhật được cắt từ một khúc gỗ hình trụ có bán kính đáy bằng 20 cm sao cho thanh dầm có diện tích mặt cắt ngang lớn nhất, tức là thanh dầm có mặt cắt ngang là hình vuông. Sau khi cắt thanh dầm đó, người ta lại cắt bốn tấm ván hình hộp chữ nhật từ bốn phần còn lại của khúc gỗ (tham khảo hình vẽ dưới đây). Xác định diện tích mặt cắt ngang tối đa của mỗi tấm ván (theo đơn vị cm^2 và làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Lời giải

Đáp án: 67,3.

Xây dựng mô hình như hình vẽ



Vì OAH là tam giác vuông cân tại H nên ta được $OH = HA = HB = 10\sqrt{2}$.

Xem phần còn lại của tấm bìa là phần đồ thị bên trên AB của đường tròn $y = \sqrt{20^2 - x^2}$

Gọi $P(a; b)$, $0 < a < 10\sqrt{2}$ với $b = \sqrt{20^2 - a^2}$.

Ta có diện tích tấm bìa hình chữ nhật được cắt ra là $S_{MNPQ} = 2a(\sqrt{400 - a^2} - 10\sqrt{2})$.

Xét hàm số $f(x) = 2x(\sqrt{400 - x^2} - 10\sqrt{2})$, $x \in (0; 10\sqrt{2})$.

Ta có đạo hàm

$$f'(x) = 2(\sqrt{400 - x^2} - 10\sqrt{2}) - \frac{2x^2}{\sqrt{400 - x^2}} = \frac{800 - 4x^2 - 20\sqrt{2}\sqrt{400 - x^2}}{\sqrt{400 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 800 - 4x^2 - 20\sqrt{2}\sqrt{400 - x^2} = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{2}\sqrt{400 - x^2} = 200 - x^2$$

$$50(400 - x^2) = 40000 - 400x^2 + x^4 \Leftrightarrow x^4 - 350x^2 + 20000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{350 + \sqrt{42500}}{2} \\ x^2 = \frac{350 - \sqrt{42500}}{2} \end{cases}$$

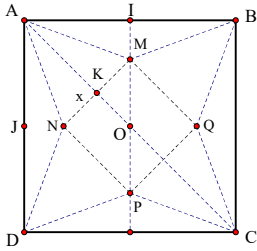
Với điều kiện đã cho ta được $x = \sqrt{175 - \sqrt{10625}}$

Do đó

$$\max S_{MNPQ} = 2\sqrt{175 - \sqrt{10625}} \cdot \left(\sqrt{400 - (175 - \sqrt{10625})} - 10\sqrt{2} \right)$$

$$= \sqrt{175 - \sqrt{10625}} \left(\sqrt{225 + \sqrt{10625}} - 10\sqrt{2} \right) \approx 67,3499 (\text{cm}^2).$$

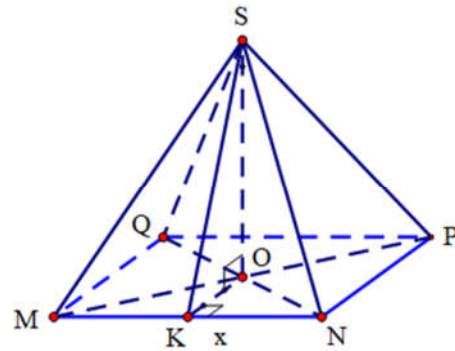
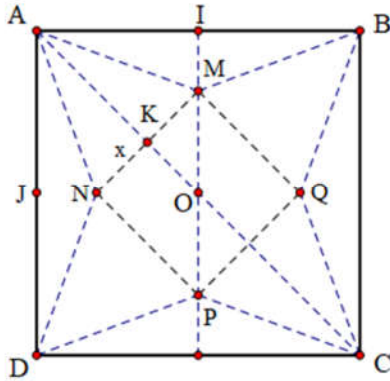
Câu 8. (THPT Diễn Châu 5 - Nghệ An 2025) Cho một tấm bìa hình vuông có cạnh $2m$. Từ tấm bìa này làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là các cạnh của hình vuông rồi gấp lên và ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều.



Thể tích của mô hình lớn nhất khi cạnh đáy của mô hình bằng $\frac{a\sqrt{2}}{b} (m)$ ($a, b \in \mathbb{Z}; a, b$ nguyên tố cùng nhau). Tính tổng $a^2 + b^2$?

Lời giải

Đáp án 41.



Gọi độ dài cạnh đáy của hình chóp là $x(m)$. Do $MN < IJ = \sqrt{2} \Rightarrow x \in (0; \sqrt{2})$.

Ta có: $OK = \frac{x}{2}; OA = \frac{AC}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow SK = AK = \sqrt{2} - \frac{x}{2}$.

Do vậy: $SO = \sqrt{SK^2 - OK^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}x}$.

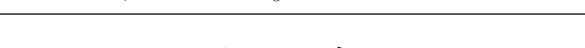
Khi đó thể tích khối chóp là: $V = \frac{1}{3}x^2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}$.

Xét $f(x) = \frac{1}{3}x^2\sqrt{2 - \sqrt{2}x} \left(x \in (0; \sqrt{2}) \right)$, ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(2x\sqrt{2 - \sqrt{2}x} - x^2 \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{4x(2 - \sqrt{2}x) - \sqrt{2}x^2}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}} \right) = \frac{8x - 5\sqrt{2}x^2}{3(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x})}$$

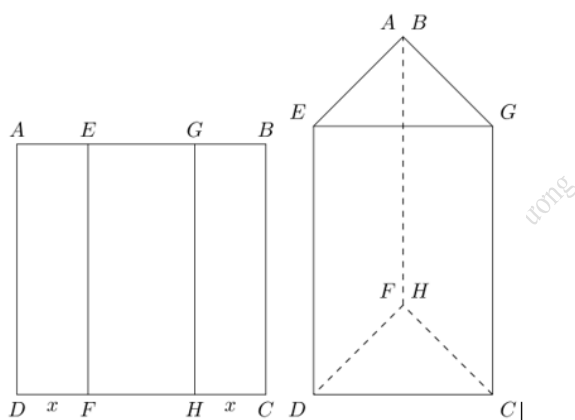
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 5\sqrt{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	$\frac{4\sqrt{2}}{5}$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

Ta thấy thể tích của mô hình lớn nhất khi cạnh đáy của mô hình là $x = \frac{4\sqrt{2}}{5} \Rightarrow a = 4, b = 5 \Rightarrow a^2 + b^2 = 41$.

Câu 9. (THPT Hùng Vương - Bình Thuận 2025) Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30cm . Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Khi thể tích khối lăng trụ lớn nhất thì khoảng cách từ A đến mặt phẳng $EFGH$ bằng $a\sqrt{b}(\text{cm})$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $T = a + 2025b$.



Lời giải

Đáp án: 6080.

Thể tích khối lăng trụ là $V = BC \cdot S_{ABG} = 30S_{AEG}$. Theo giả thiết ta có $2x < 30 \Leftrightarrow x < 15$.

Ta có tam giác $\triangle AEG$ có độ dài các cạnh là $AE = AG = x$ cm, $EG = 30 - 2x$ cm nên diện tích là


$$S = \sqrt{15(15-x)(15-x)[15-(30-2x)]} = \sqrt{15(15-x)^2(2x-15)} = (15-x)\sqrt{15(2x-15)} \text{ (cm}^2\text{)}$$

Xét hàm số $f(x) = (15-x)\sqrt{15(2x-15)}$ với $0 < x < 15$.

Ta có: $f'(x) = -\sqrt{15(2x-15)} + (15-x) \cdot \frac{15}{\sqrt{15(2x-15)}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{15(2x-15)} = (15-x) \frac{15}{\sqrt{15(2x-15)}} \Leftrightarrow 2x-15 = 15-x \Leftrightarrow x = 10.$$

BBT:

x	0	10	15
f'(x)	+	0	-
f(x)			

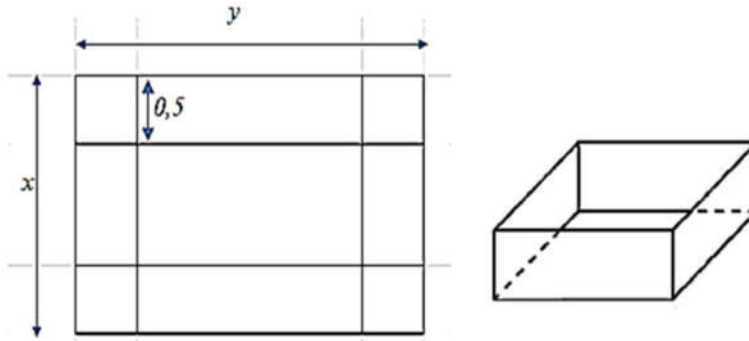
Giá trị lớn nhất của thể tích đạt được khi và chỉ khi diện tích S_{AEG} đạt giá trị lớn nhất khi đó $x = 10$

Tam giác AEG đều cạnh $x = 10$ nên $d(A, EG) = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.

Do (AEG) vuông góc với $(EFGH)$ nên khoảng cách từ A đến $(EFGH)$ bằng độ cao kẻ từ A đến EG

$$\text{Vậy } d(A; EFGH) = 5\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow T = a + 2025b = 5 + 2025 \cdot 3 = 6080.$$

Câu 10. (THPT Lý Thường Kiệt - Hà Nội 2025) Từ một tấm tôn hình chữ nhật có các kích thước là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 1$ và $y > 1$ và diện tích bằng $4m^2$, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập lại thành một cái thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp có chiều cao bằng $0,5m$.



Thể tích của thùng là hàm số $V(x)$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Lời giải

Đáp án: 2.

Do tấm tôn có diện tích bằng $4m^2$ nên $xy = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}$.

Thùng có chiều cao bằng $0,5m$ và các kích thước còn lại là: $x-1$, $y-1$.

Thể tích của thùng là $V(x) = 0,5(x-1)(y-1) = \frac{1}{2}(x-1)\left(\frac{4}{x}-1\right) = \frac{(x-1)(4-x)}{2x}$.

$$\text{Suy ra: } y = \frac{1}{V(x)} = \frac{2x}{(x-1)(4-x)}.$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = -\infty,$$

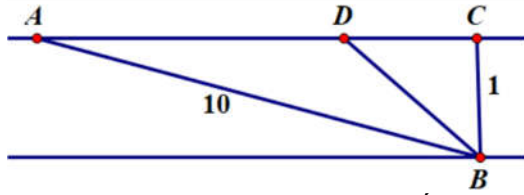
$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = +\infty.$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$ có hai đường tiệm cận đứng.

Câu 11. (THPT Triệu Sơn 4 - Thanh Hóa 2025) Trong một bài thực hành huấn luyện quân sự có một tình huống chiến sĩ phải bơi qua sông để tấn công mục tiêu ở ngay phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng $100m$ và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy trên bộ. Biết dòng sông là thẳng, mục tiêu cách chiến sĩ $1km$ theo đường chim bay và chiến sĩ cách bờ bên kia $100m$. Hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Đáp án: 106.



Gọi A là mục tiêu; B là vị trí chiến sỹ và BD là đường bơi của chiến sỹ.

Chọn một đơn vị độ dài là 100m suy ra $BC = 1$; $AB = 10$; $AC = 3\sqrt{11}$

Gọi vận tốc bơi của chiến sỹ là một đơn vị vận tốc thì vận tốc chạy của chiến sỹ là 3 đơn vị vận tốc. Gọi x là quãng đường chiến sỹ bơi suy ra $BD = x$

Vậy quãng đường chiến sỹ chạy là $AD = AC - CD = 3\sqrt{11} - \sqrt{x^2 - 1}$

Thời gian chiến sỹ đến được mục tiêu là: $t = \frac{3\sqrt{11} - \sqrt{x^2 - 1}}{3} + \frac{x}{1} = \sqrt{11} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 1} + x$

Xét hàm $f(x) = \sqrt{11} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 1} + x$ có $f'(x) = 1 - \frac{1}{3} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ (loại)} \end{cases}$

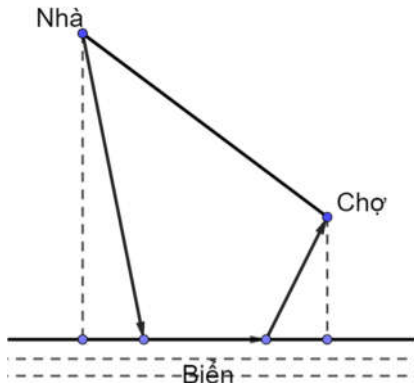
Bảng biến thiên:

x	1	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	10
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Vậy thời gian chiến sỹ đến mục tiêu ngắn nhất khi $f(x)_{\min} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Vậy chiến sỹ phải bơi $\frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot 100 = 75\sqrt{2} (m) \approx 106(m)$.

Câu 12. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An 2025) Nhà thầy Hùng cách bờ biển 1km. Mỗi buổi sáng thầy chạy bộ từ nhà ra bờ biển sau đó chạy dọc bờ biển 500m, rồi thầy chạy qua chợ hải sản để lấy thức ăn trong ngày, cuối cùng thầy chạy về nhà. Biết chợ hải sản cách bờ biển 400m và cách nhà thầy Hùng 1km, tính quãng đường ngắn nhất mà thầy Hùng đã chạy trong mỗi buổi sáng (đơn vị m và làm tròn đến hàng đơn vị).

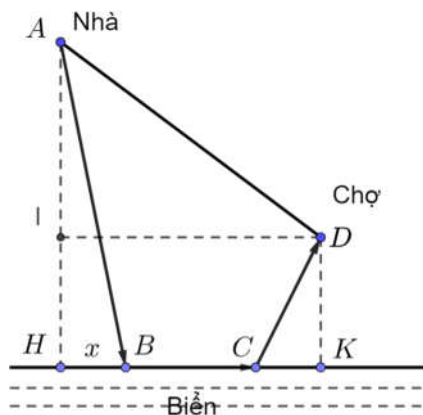


Lời giải

Đáp án: 2932.

Đổi: 500m = 0,5km, 400m = 0,4km.

Đặt tên các điểm như hình vẽ.



Dễ dàng tính được: $AI = AH - DK = 1 - 0,4 = 0,6$.

$$HK = ID = \sqrt{AD^2 - AI^2} = \sqrt{1^2 - 0,6^2} = 0,8.$$

Đặt $HB = x$ (km) suy ra $CK = HK - HC = 0,3 - x$, điều kiện: $0 \leq x \leq 0,3$.

Quãng đường mà thầy Hùng chạy mỗi sáng là

$$AB + BC + CD + DA = \sqrt{x^2 + 1} + 1,5 + \sqrt{(0,3 - x)^2 + 0,4^2} = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 0,6x + 0,25} + 1,5.$$

Xét hàm $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 0,6x + 0,25} + 1,5$ với $x \in [0; 0,3]$.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x - 0,3}{\sqrt{x^2 - 0,6x + 0,25}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{14}.$$

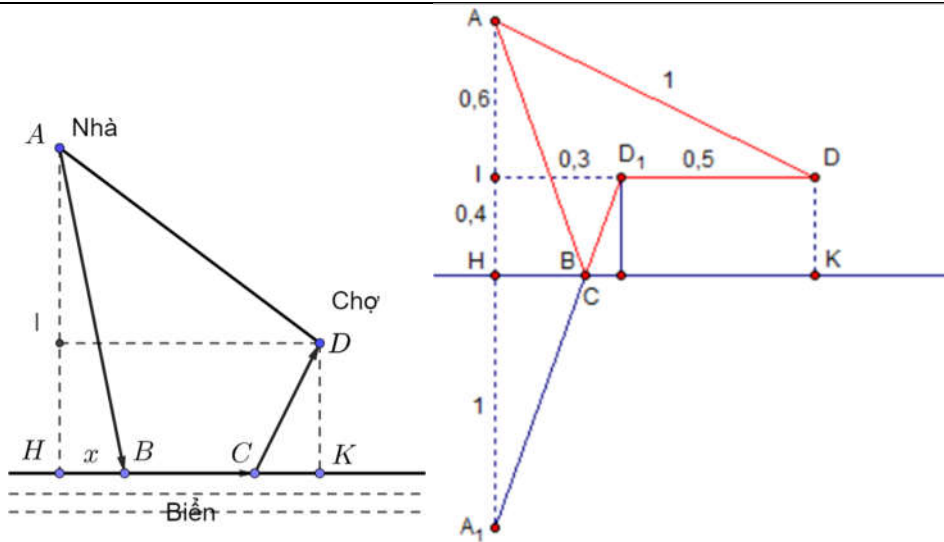
Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{3}{14}$	0,3
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$f(0)$	$f\left(\frac{3}{14}\right)$	$f(0,3)$

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{[0; 0,3]} f(x) = f\left(\frac{3}{14}\right) \approx 2,932$.

Vậy quãng đường ngắn nhất thầy Hùng chạy mỗi sáng là 2,932 km hay 2932 m.

Cách khác:



Tương tự như trên ta tính được: $ID = 0,8$; $ID_1 = 0,3$; $D_1D = 0,5$; $DK = IH = 0,4$.

Ta tịnh tiến D lại vị trí D_1 . Khi đó $B \equiv C$.

Bài toán chuyển về tìm vị trí điểm B trên đường thẳng KH sao cho $AB + BD_1$ nhỏ nhất.

Lấy A_1 đối xứng với A qua HK . Khi đó:

$$AB + BD_1 = A_1B + BD_1 \geq A_1D_1 = \sqrt{1,4^2 + 0,3^2} = \frac{\sqrt{205}}{10}.$$

$$\text{Suy ra: } (AB + BD_1)_{\min} = \frac{\sqrt{205}}{10}.$$

Vậy quãng đường thầy Hùng chạy ngắn nhất là:

$$\frac{\sqrt{205}}{10} + 0,5 + 1 = \frac{15 + \sqrt{205}}{10} \approx 2,932 \text{ km} = 2932 \text{ m}.$$

- Câu 13. (HSG Hải Phòng 2025)** Trong rừng, có hai điểm du lịch ở vị trí X và Y đều cách bờ biển một khoảng bằng 3 km (coi đường bờ biển là một đường thẳng). Khoảng cách giữa hai vị trí X và Y là 18 km. Người ta dự định đặt hai điểm nghỉ chân tại vị trí M, N trên bờ biển sao cho $XM = YN$ và làm đường từ X lần lượt qua M, N đến Y . Biết chi phí làm đường trong rừng là 1300 triệu/km và đường trên bờ biển là 500 triệu/km. Khoảng cách giữa hai vị trí M và N là bao nhiêu kilômét để tổng chi phí làm đường nêu trên ít nhất?



Lời giải

Đáp án: 15,5.



Đặt $XM = YN = x$, $x \geq 3$.

Xét $\triangle AMX$ vuông tại A ta có: $AM = \sqrt{XM^2 - XA^2} = \sqrt{x^2 - 9}$

Do đó $MN = AB - AM - NB = XY - 2AM = 18 - 2\sqrt{x^2 - 9}$ (vì $AM = NB$)

Tổng chi phí làm đường là $1,3 \cdot (XM + YN) + 0,5 \cdot MN = 2,6x + 9 - \sqrt{x^2 - 9}$ (ti đồng)

Xét hàm số $f(x) = 2,6x + 9 - \sqrt{x^2 - 9}$ trên $[3; +\infty)$ ta có:

$$f'(x) = \left(2,6x + 9 - \sqrt{x^2 - 9}\right)' = 2,6 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} \text{ với } x \in (3; +\infty)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2,6 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} = 0 \Leftrightarrow 2,6\sqrt{x^2 - 9} = x \Rightarrow 6,76(x^2 - 9) = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 10,5625 \Leftrightarrow x = \pm 3,25$$

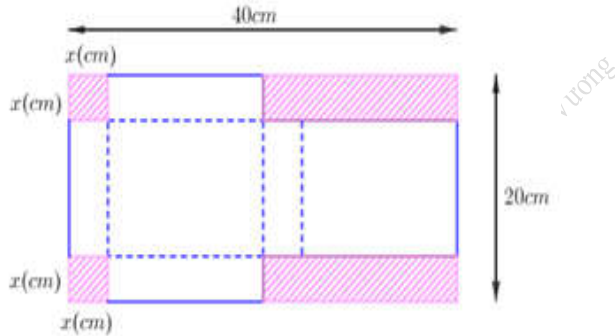
Mà $x \in [3; +\infty)$

Nên $x = 3,25$

Lại có $f(3) = 16,8; f(3,25) = 16,2$

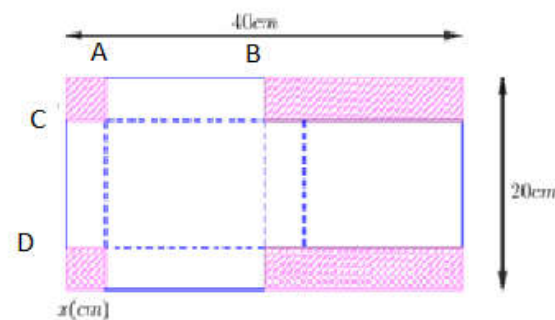
Do đó $f(x)_{\min} = 16,2 \Leftrightarrow x = 3,25 \Leftrightarrow MN = 15,5 \text{ (km)}$

Câu 14. (HSG Vũng Tàu 2025) Để làm một cái hộp đựng quả tặng bạn nhân dịp sinh nhật. Từ một tấm bìa hình chữ nhật với kích thước $40\text{ cm} \times 20\text{ cm}$, bạn Hoa cắt bỏ hai hình vuông có cạnh là $x\text{ cm}$ và hai hình chữ nhật (phần gạch sọc như hình bên) rồi gấp theo đường nét đứt và dán các mép để được một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật. Hỏi bạn Hoa cần cắt bỏ cạnh hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) để phần không gian của hộp đựng nhiều quả nhất?



Lời giải

Đáp án: 4,23.




Ta có bỏ đi hình vuông cạnh x ($0 < x < 10$) tạo được hình hộp chữ nhật có các cạnh lần lượt là $AB = 20 - x, CD = 20 - 2x$ và x

Thể tích hình hộp bằng $V = x(20 - x)(20 - 2x) = 2x^3 - 60x^2 + 400x$

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 400x$ với $0 < x < 10$

$$\Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 120x + 400 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{30+10\sqrt{3}}{3} \notin (0;10) \\ x = \frac{30-10\sqrt{3}}{3} \in (0;10) \end{cases}$$

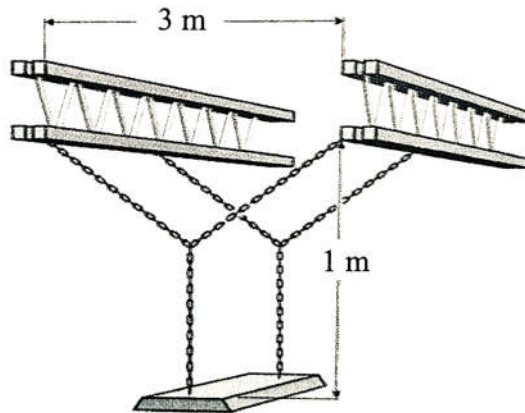
Lập bảng biến thiên của hàm số ta có

x	0	$\frac{30-10\sqrt{3}}{3}$	10
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta có thể tích lớn nhất của hình hộp bằng $V = f\left(\frac{30-10\sqrt{3}}{3}\right)$ khi cắt bỏ

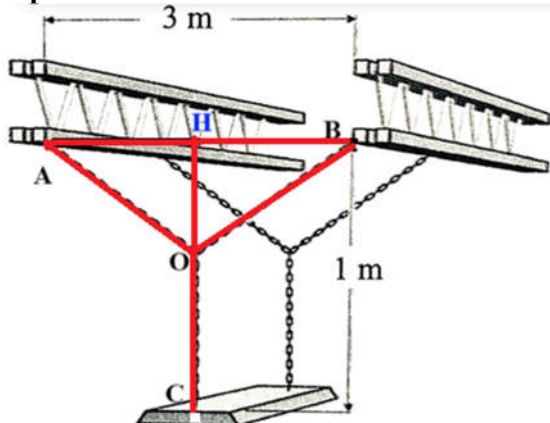
$$\text{đi } x = \frac{30-10\sqrt{3}}{3} \approx 4,23.$$

Câu 15. (THPT Triệu Sơn 1-Thanh Hóa 2025) Trong một cửa hàng, nhà quản lý dự định treo một đồ trang trí trên cao. Vật trang trí được đặt trên giá đỡ nằm dưới thanh treo 1m. Biết khoảng cách giữa hai thanh treo là 3m. Biết tổng độ dài nhỏ nhất của các đoạn dây xích là $a+b\sqrt{c}$ (trong đó a, b, c là các số tự nhiên). Tính $a - b - c$.



Lời giải

Đáp án: -4.



Đặt $OH = x (0 \leq x \leq 1)$ ta có $OA = OB = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + x^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + x^2}$ và $OC = 1 - x$.

Tổng độ dài các dây xích là

$$L(x) = 2(OA + OB + OC) = 2\left(2\sqrt{\frac{9}{4} + x^2} + 1 - x\right) = 4\sqrt{\frac{9}{4} + x^2} + 2 - 2x.$$

$$L'(x) = \frac{4x}{\sqrt{\frac{9}{4} + x^2}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{9}{4} + x^2} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = x^2 + \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

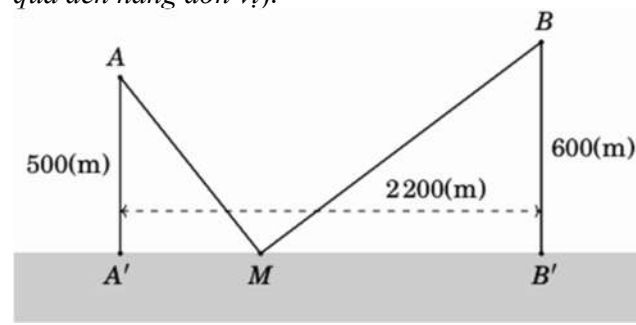
Bảng biến thiên

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$L'(x)$	-	0	+
$L(x)$		$2 + 3\sqrt{3}$	

Vậy chiều dài tối thiểu của dây xích là $L\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 3\sqrt{3}$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow a - b - c = -4.$$

Câu 16. (THPT Cụm trường Hải Dương 2025) Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông. Khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500(m)$, $BB' = 600(m)$. Người ta đo được $A'B' = 2200(m)$ như hình vẽ dưới đây. Các kỹ sư muốn xây dựng một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông cho người dân của hai xã sử dụng. Để tiết kiệm chi phí, các kỹ sư phải chọn một vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó bằng bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp án: 2460.

Đặt $A'M = x (m)$ với $0 \leq x \leq 2200$. Khi đó $B'M = 2200 - x (m)$

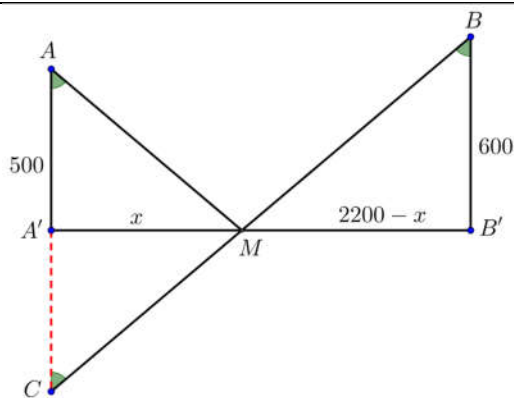
Áp dụng định lý Pitago cho hai tam giác vuông $AA'M$ và $BB'M$ ta tính được

$$AM = \sqrt{500^2 + x^2}, \quad BM = \sqrt{600^2 + (2200 - x)^2}$$

Tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là

$$T = f(x) = AM + BM = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(x - 2200)^2 + 600^2}$$

Gọi C là điểm đối xứng với A qua đường thẳng $A'B'$. Khi đó T đạt giá trị nhỏ nhất khi B, M, C thẳng hàng (xem hình vẽ dưới)



Khi B, M, C thẳng hàng $\Rightarrow \tan \hat{C} = \tan \hat{B} \Leftrightarrow \frac{x}{500} = \frac{2200-x}{600} \Leftrightarrow x = 1000$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là

$$T_{\min} = f(1000) = \sqrt{1^2 + 0,5^2} + \sqrt{(1-2,2)^2 + 0,6^2} = 1100\sqrt{5} \approx 2460 \text{ (m)}.$$

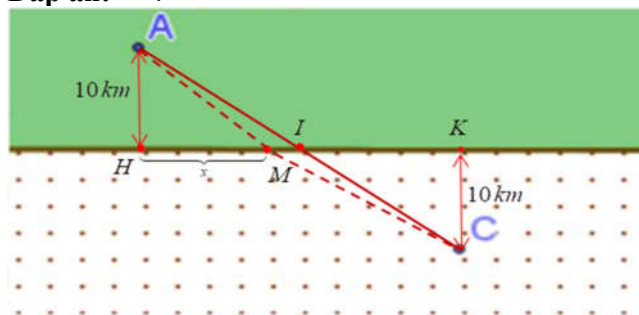
Câu 17. (THPT Lê Xoay - Vĩnh Phúc 2025) Một người cưỡi ngựa xuất phát từ A đi đến C . Điểm A nằm trong vùng đất ướt nên vận tốc của ngựa khi đi trong vùng này là 12 km/h . Điểm C nằm trong vùng đất khô hơn nên vận tốc của ngựa khi đi trong vùng này là 24 km/h . Hai phần đất này giáp nhau bởi một đường thẳng d đi qua trung điểm của AC và khoảng cách từ A và C đến đường thẳng này đều bằng 10 km .



Biết $AC = 5\sqrt{41} \text{ km}$, thời gian ít nhất để đi từ A đến C là $t = \frac{a\sqrt{5}}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$, a, b nguyên tố cùng nhau). Tính $T = 3a + b$?

Lời giải

Đáp án: 21.



Gọi H , K lần lượt là chân đường vuông góc lần lượt kẻ từ A và C đến đường thẳng d . Điểm I là trung điểm của HK .

Gọi M là điểm mà người cưỡi ngựa đi từ A đến đường thẳng d cách điểm H một khoảng bằng $x(km)$ ($x \geq 0$).

Theo giả thiết ta có I cũng là trung điểm của AC .

$$HK = 2HI = 2\sqrt{\frac{AC^2}{4} - AH^2} = 2\sqrt{\frac{(5\sqrt{41})^2}{4} - 10^2} = 25 \text{ (km)}.$$

Suy ra: $MK = 25 - x$, $AM = \sqrt{x^2 + 100}$, $MC = \sqrt{(25 - x)^2 + 100}$.

Thời gian đi từ A đến C là

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{12} + \frac{\sqrt{(25 - x)^2 + 100}}{24} = \frac{1}{24} \left[2\sqrt{x^2 + 100} + \sqrt{(25 - x)^2 + 100} \right]$$

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{24} \left[\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 100}} - \frac{(25 - x)}{\sqrt{(25 - x)^2 + 100}} \right]$.

$$f''(x) = \frac{1}{24} \left[\frac{200}{(x^2 + 100)\sqrt{x^2 + 100}} + \frac{100}{((25 - x)^2 + 100)\sqrt{(25 - x)^2 + 100}} \right] > 0 \quad \forall x.$$

Suy ra hàm số $y = f'(x)$ đồng biến trên tập xác định.

Mặt khác ta lại có: $f'(5) = \frac{1}{24} \left[\frac{10}{\sqrt{25 + 100}} - \frac{20}{\sqrt{(20)^2 + 100}} \right] = \frac{1}{24} \left[\frac{10}{5\sqrt{5}} - \frac{20}{10\sqrt{5}} \right] = 0$.

Suy ra phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ là nghiệm duy nhất.

Bảng biến thiên:

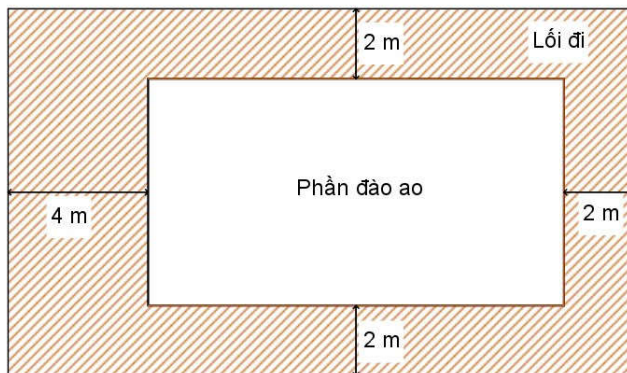
x	0	5	25
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	<div><div>\swarrow</div><div>$\frac{5\sqrt{5}}{6}$</div><div>\searrow</div></div>		

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{[0;25]} f(x) = f(5) = \frac{5\sqrt{5}}{6}$.

Suy ra thời gian ít nhất để đi từ A đến C là $t = \frac{5\sqrt{5}}{6}$.

Vậy $T = 3a + b = 21$.

Câu 18. (Sở Bình Phước 2025) Một gia đình dự định sử dụng một mảnh đất hình chữ nhật trong vườn có diện tích $384m^2$ để làm kinh tế gia đình. Sau khi bờ bên trái được trừ đi $4m$, 3 bờ còn lại đều trừ $2m$ dùng làm lối đi và trồng cây thì diện tích còn lại được sử dụng để đào một cái ao dạng hình hộp chữ nhật có chiều sâu $2m$ để thả cá (như hình vẽ). Khi thể tích của ao thả cá là lớn nhất thì chu vi mảnh vườn hình chữ nhật là bao nhiêu?



Lời giải

+ Gọi x, y , ($x, y > 0$) là độ dài 2 cạnh của mảnh đất hình chữ nhật. Theo giả thiết:

+ Theo giả thiết: $xy = 384$. Khi đó: $V_{ao} = (x-4)(y-6) \cdot 2 = (x-4) \left(\frac{384}{x} - 6 \right) \cdot 2$

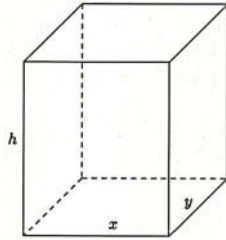
+ Sử dụng khảo sát hàm hoặc bất đẳng thức AM-GM ta được: $V_{ao} \leq 432$. Suy ra: Thể tích ao lớn nhất bằng 432 khi hình chữ nhật có kích 16×24 . Vậy chu vi là: $80(m)$

Đáp số: 80.

Câu 19. (Sở Vĩnh Phúc 2025) Người ta muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp (xây bốn mặt xung quanh với mặt đáy) chứa được $288m^3$ nước. Đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, tiền chi phí xây bể là 500.000 đồng/ m^2 (tính trên diện tích mặt trong của bể). Hỏi chi phí thấp nhất để xây bể là bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

Đáp án: 36.



Gọi $x, y (0 < x < y)$ lần lượt là chiều rộng và chiều dài của đáy bể. Gọi h là chiều cao của bể ($h > 0$).

Theo bài ra, ta có $y = 2x$ và $V = 288 = hxy \Rightarrow h = \frac{288}{2x^2} = \frac{144}{x^2}$.

Để chi phí xây bể là thấp nhất, ta cần tìm các kích thước sao cho diện tích toàn phần của bể là nhỏ nhất.

Khi đó, ta có

$$S_{tp} = 2xh + 2yh + xy = (2x + 4x) \frac{144}{x^2} + x \cdot 2x = 6 \cdot \frac{144}{x} + 2x^2 = 3 \cdot \frac{144}{x} + 3 \cdot \frac{144}{x} + 2x^2$$

Áp dụng bất đẳng thức cosi ba số ta được $S_{tp} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{3^2}{x} \cdot \frac{144^2}{x} \cdot 2x^2} = 72$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{3 \cdot 144}{x} = 2x^2 \Leftrightarrow x = 6$

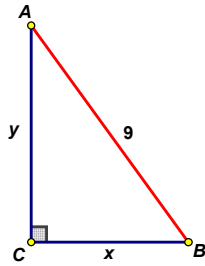
Khi đó chi phí xây bể là thấp nhất là $72 \cdot 0,5 = 36$ triệu đồng.

Câu 20. (Chuyên KHTN Hà Nội 2025) Một chiếc thang dài 9 mét tựa vào một bức tường thẳng đứng trên một mặt đất bằng phẳng. Khi đầu dưới của thang di chuyển (trên mặt đất) ra xa bức tường với vận tốc không đổi là 2 (m/s) thì đầu trên cùng của thang sẽ trượt xuống dọc theo bức tường. Khi điểm đầu thang cách mặt đất 3 mét thì tốc độ di chuyển của nó bằng bao nhiêu? (đơn vị: (m/s) và kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 5,66.



Độ dài của thang là $AB = 9$

Gọi $x(t)$ là khoảng cách từ đầu dưới của thang đến chân tường và $y(t)$ khoảng cách từ đầu trên của thang đến mặt đất.

Vì độ dài của thang không đổi và luôn bằng 9 nên ta có: $x^2(t) + y^2(t) = 81$ (1)

Từ (1) ta đạo hàm 2 vế theo biến t ta được: $2.x(t).x'(t) + 2.y(t).y'(t) = 0$ (2)

Trong (2) ta hiểu $x'(t)$ là tốc độ (vận tốc) của đầu dưới của thang và $y'(t)$ là tốc độ (vận tốc) của đầu trên của thang.

Từ (2) suy ra $y'(t) = -\frac{x(t).x'(t)}{y(t)}$

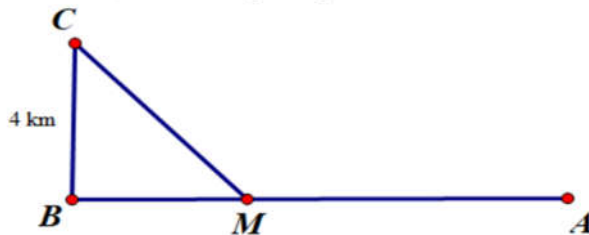
Theo giả thiết ta có $x'(t) = 2$ (m/s) và tại thời điểm đầu trên của thang cách mặt đất 3m thì $y(t) = 3$ nên $x^2(t) = 72 \Rightarrow x(t) = 6\sqrt{2}$.

Suy ra tốc độ của đầu trên của thang khi cách mặt đất 3 mét là $y'(t) = -\frac{6\sqrt{2}.2}{3} = -4\sqrt{2}$ (m/s).

Theo đề thì đầu trên của thang trượt xuống nên tốc độ di chuyển của nó là

$$|y'(t)| = 4\sqrt{2} \approx 5,66 \text{ (m/s)}$$

Câu 21. (Chuyên Thái Bình 2025) Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C . Khoảng cách từ C đến B là 4km . Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 10km . Tổng chi phí lắp đặt cho 1km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng (hình vẽ mô tả đường dây từ A đến M được lắp trên đất liền, từ M đến C được lắp trên biển). Tính chi phí lắp đặt nhỏ nhất có thể đạt được (đơn vị triệu đồng).



Lời giải

Đáp án: 460.

Giả sử $BM = x$ ($0 \leq x \leq 10$).

$$\Rightarrow AM = 10 - x, CM = \sqrt{16 + x^2}.$$

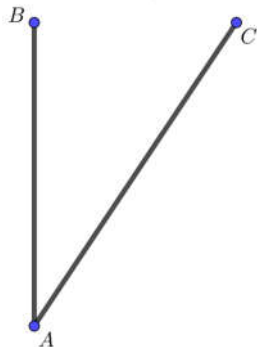
Tổng chi phí lắp đặt là $f(x) = 50.\sqrt{16 + x^2} + 30.(10 - x)$ với $x \in [0; 10]$.

$$\text{Xét } f'(x) = \frac{50x}{\sqrt{16 + x^2}} - 30 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ta có $f(0) = 500, f(10) = 100\sqrt{29}, f(3) = 460$

Vậy chi phí lắp đặt thấp nhất là 460 triệu đồng.

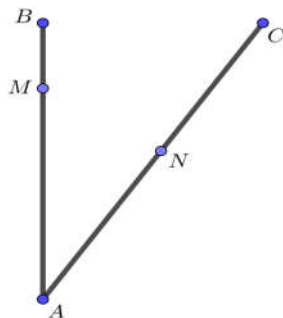
Câu 22. (Chuyên Vinh 2025) Chào đón năm mới 2025, Thành phố trang trí đèn led cho biểu tượng hình chữ V được ghép từ các thanh $AB = 4\text{ m}$, $AC = 5\text{ m}$ sao cho tam giác ABC vuông tại B (tham khảo hình vẽ)



Để tăng hiệu ứng các kỹ sư đã thiết kế một chuỗi led chạy từ B xuống A với vận tốc 4 m/phút và một chuỗi led chạy từ A đến C với vận tốc 10 m/phút . Sau khi đóng nguồn điện thì cả hai chuỗi led đồng thời xuất phát. Hỏi sau bao giây từ thời điểm đóng nguồn điện thì khoảng cách giữa hai điểm sáng đầu tiên của hai chuỗi led là nhỏ nhất?

Lời giải

Đáp án: 16.



Gọi x (giây, $x > 0$) là khoảng thời gian sau khi đóng nguồn điện hai điểm sáng gần nhau nhất.

$$\text{Đổi } 4\text{ m/phút} = \frac{1}{15}\text{ m/s}; 10\text{ m/phút} = \frac{1}{6}\text{ m/s}$$

Giả sử sau x (giây), điểm sáng từ B đi được quãng đường $BM = \frac{1}{15}x$ và quãng đường

$$AN = \frac{1}{6}x.$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác AMN , ta có:

$$\begin{aligned} MN^2 &= AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos \widehat{MAN} \\ &= \left(4 - \frac{x}{15}\right)^2 + \left(\frac{x}{6}\right)^2 - 2\left(4 - \frac{x}{15}\right) \cdot \frac{x}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{(60-x)^2}{225} + \frac{x^2}{36} - \frac{8(60-x)x}{30 \cdot 15} \\ &= \frac{3600 - 120x + x^2}{225} + \frac{x^2}{36} - \frac{8(-x^2 + 60x)}{450} = \frac{1}{20}x^2 - \frac{8}{5}x + 16. \end{aligned}$$

Ta thấy $MN_{\min} \Leftrightarrow MN^2_{\min}$

$$\text{Do đó, đặt } f(x) = \frac{1}{20}x^2 - \frac{8}{5}x + 16, \quad x > 0.$$

$$\text{Có } f'(x) = \frac{1}{10}x - \frac{8}{5}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 16.$$

Bảng biến thiên

x	0	16	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Từ bảng biến thiên suy ra $\min_{(0;+\infty)} f(x) = f(16)$.

Vậy sau 16 giây thì khoảng cách giữa hai điểm sáng là nhỏ nhất.

Câu 23. (Chuyên Vinh 2025) Để tạo một kiện hàng dạng hình lăng trụ đứng với đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, người ta dùng các thanh gỗ ghép khít đóng lại với nhau. Biết rằng, dung tích kiện hàng bằng 9 m^3 và giá thành 1 m^2 gỗ sử dụng là 200 000 đồng. Hỏi sau khi hoàn thành kiện hàng đó, người ta cần bỏ ra ít nhất bao nhiêu triệu đồng? (diện tích các mép giữa hai mặt kề nhau không đáng kể).



Lời giải

Đáp án: 5,4.

Gọi $x(x > 0)$ là chiều rộng của đáy bể. Khi đó chiều dài của kiện hàng là $2x$ là chiều cao của kiện hàng là $\frac{9}{2x^2}$. Khi đó diện tích của kiện hàng là $4x^2 + \frac{27}{x}$

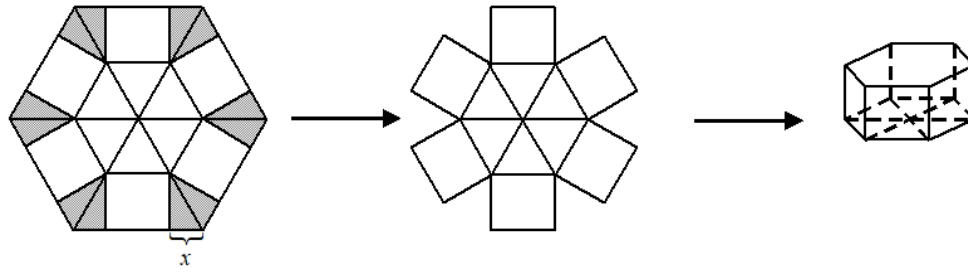
Xét hàm số $f(x) = 4x^2 + \frac{27}{x}$ có $f'(x) = 8x - \frac{27}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1,5$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0	1,5	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	27	$+\infty$

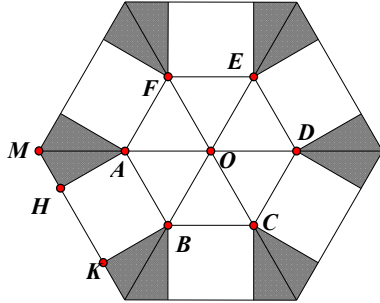
Từ bảng biến thiên ta có $\min f(x) = f(1,5) = 27$ Vậy chi phí thấp nhất làm kiện hàng là: $200000.27 = 5400000$ đồng.

Câu 24. (THPT Trần Phú - Vĩnh Phúc 2025) Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh $90(\text{cm})$. Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau, biết cạnh góc vuông nhỏ bằng $x(\text{cm})$ (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi gập tấm nhôm như hình vẽ để được một hình lăng trụ lục giác đều không có nắp. Tìm x để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất (đơn vị cm).



Lời giải

Đáp án: 15.

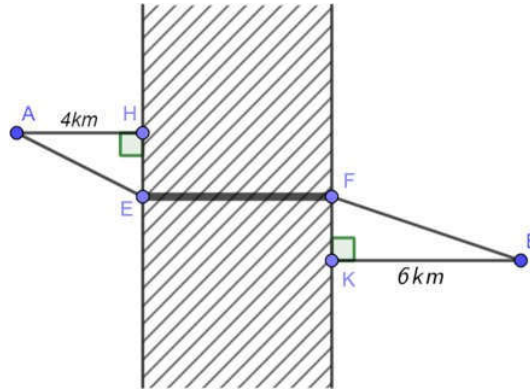
Điều kiện $0 < x < 45$ Cạnh đáy của lăng trụ lục giác đều: $AB = HK = 90 - 2x$ Chiều cao của lăng trụ lục giác đều: $HA = MH \cdot \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$ Diện tích đáy của lăng trụ lục giác đều: $S_{ABCDEF} = 6S_{ABO} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (90 - 2x)^2$ Thể tích của khối lăng trụ lục giác đều: $V(x) = HA \cdot S_{ABCDEF} = \frac{9}{2} x (90 - 2x)^2$ Hay $V(x) = 18x^3 - 1620x^2 + 36450x$ Xét hàm số $V(x) = 18x^3 - 1620x^2 + 36450x$ trên khoảng $(0; 45)$. $V'(x) = 54x^2 - 3240x + 36450$ $V'(x) = 0 \Leftrightarrow 54x^2 - 3240x + 36450 = 0 \Leftrightarrow x = 15$ hoặc $x = 45$ (loại).

Bảng biến thiên:

x	0	15	45	
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$	0	243000	0	

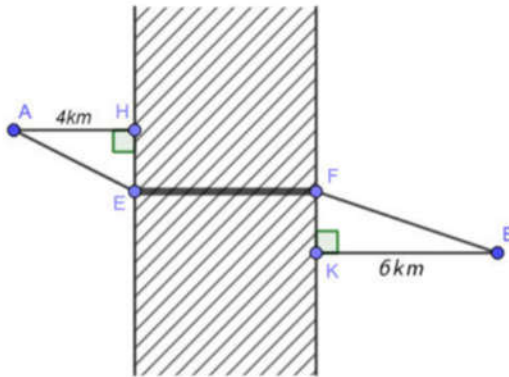
Từ bảng biến thiên ta có: $\max_{(0; 45)} V(x) = 243000 (cm^3)$ khi và chỉ khi $x = 15cm$ Vậy thể tích của khối lăng trụ lục giác đều lớn nhất khi và chỉ khi $x = 15cm$.

Câu 25. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2025) Hai thành phố ở hai vị trí A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu bắc qua sông biết rằng vị trí A cách con sông một khoảng là $4km$, vị trí B cách con sông một khoảng là $6km$ (được mô hình hóa như hình vẽ bên dưới), $HE + KF = 20km$ và độ dài EF không đổi. Hỏi độ dài EH là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)?



Lời giải

Trả lời: 8.



Gọi $HE = x, 0 \leq x \leq 20$.

Tổng quãng đường AHEFB là một hàm số $f(x) = \sqrt{4^2 + x^2} + EF + \sqrt{6^2 + (20-x)^2}$.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{4^2 + x^2}} - \frac{20-x}{\sqrt{6^2 + (20-x)^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{4^2 + x^2}} = \frac{20-x}{\sqrt{6^2 + (20-x)^2}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 [6^2 + (20-x)^2] = (20-x)^2 (4^2 + x^2)$$

$$\Leftrightarrow 20x^2 - 640x - 6400 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \in (0; 20) \\ x = -40 \notin (0; 20) \end{cases}$$

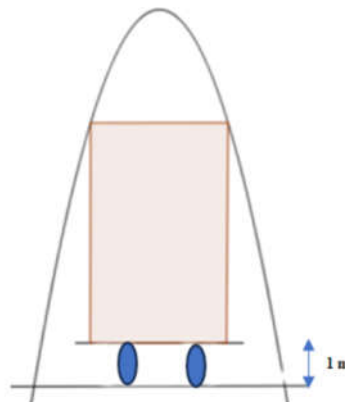
$$f(0) \approx 24,9 + EF$$

$$f(20) \approx 26,4 + EF$$

$$f(8) \approx 22,4 + EF$$

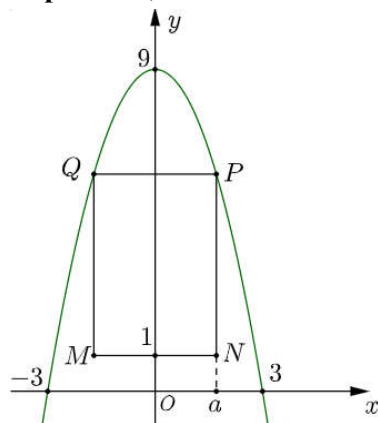
$$\min_{[0,20]} f(x) = f(8) \approx 22,4 + EF \text{ khi } HE = 8 \text{ km}$$

Câu 26. (Cụm trường THPT Hải Dương 2025) Một chiếc cổng hình Parabol có chiều cao 9 m , khoảng cách giữa hai chân cổng là 6 m . Để vận chuyển thùng hàng hình chữ nhật qua cổng, người ta dùng một xe kéo có chiều cao 1 m . Biết rằng mặt cắt của thùng hàng qua cổng là hình chữ nhật, hỏi diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất là bao nhiêu m^2 để xe chở thùng hàng có thể đi qua được cổng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải

Đáp án: 17,4.



Trong hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, chiếc cổng hình parabol có phương trình $y = -x^2 + 9$. Xe chở hàng có thể đi qua được cổng nếu điểm P thuộc parabol với hoành độ điểm P bằng a , $a \in (0; 3)$. Khi đó tung độ của điểm P bằng $-a^2 + 9$ và

$$\begin{cases} MN = 2a \\ NP = -a^2 + 9 - 1 = -a^2 + 8 \end{cases}$$

Diện tích của hình chữ nhật là $S = MN \cdot NP = 2a \cdot (-a^2 + 8) = -2a^3 + 16a$

Ta có: $S' = -6a^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow a = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Do $a \in (0; 3)$ nên $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

a	0	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	3
$S'(a)$	-	0	+
$S(a)$		$S(\frac{2\sqrt{6}}{3})$	

Khi đó $S_{\max} = S\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \approx 17,4 (m^2)$.

Câu 27. (Cụm trường Nguyễn Hiền - Lê Hồng Phong - Quảng Nam 2025) Công ty Sơn X cần làm những hộp hình trụ có thể tích 5 lít. Giả thiết rằng vật liệu và chi phí dùng để sản xuất các mặt của hộp là như nhau. Tính bán kính r của đáy hộp để chi phí là bé nhất (đơn vị là cm và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 9,27.

Chi phí làm hộp sơn bé nhất khi và chỉ khi diện tích toàn phần của hộp sơn nhỏ nhất.

Gọi h (dm) là chiều cao và r (dm) là bán kính đáy của hộp sơn.

Khi đó thể tích của hộp sơn là: $V = \pi r^2 h = 5 \Leftrightarrow h = \frac{5}{\pi r^2}$

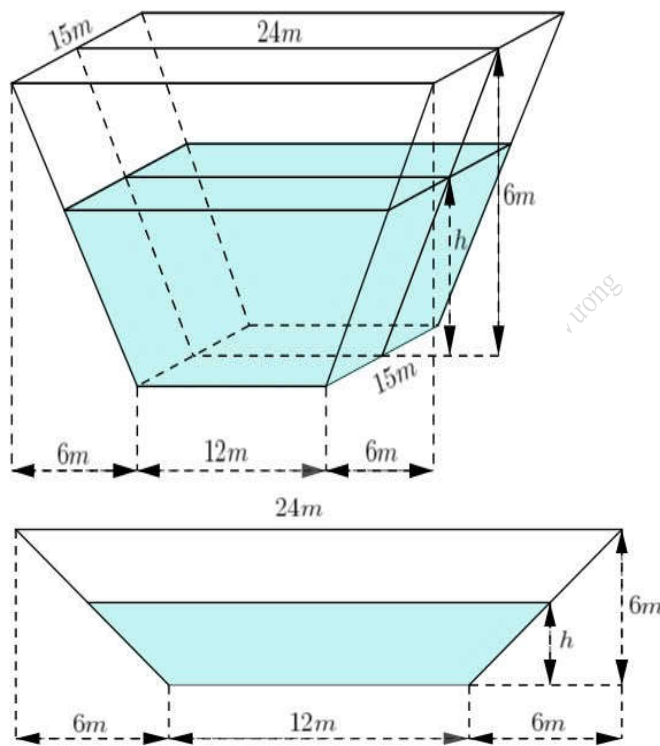
Diện tích toàn phần của hộp sơn là $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r^2 + \frac{10}{r}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số, ta có

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{5}{r} + \frac{5}{r} \geq 3\sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{5}{r} \cdot \frac{5}{r}} = 3\sqrt[3]{50\pi}$$

Vậy $S(r)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $3\sqrt[3]{50\pi}$ khi $2\pi r^2 = \frac{5}{r} \Leftrightarrow r = 0,927 \text{ (dm)} = 9,27 \text{ (cm)}$.

Câu 28. (Sở Bình Phước 2025) Một bể chứa nước có mặt đáy và miệng bể đều là hình chữ nhật nằm trên 2 mặt phẳng song song với nhau, miệng bể có chiều ngang $15m$ và chiều dài $24m$, đáy bể có kích thước $15m \times 12m$. Độ sâu của bể nước (tính từ miệng đến đáy) là $6m$, mặt cắt vuông góc với chiều ngang của bể có hình dạng là hình thang cân (như hình vẽ). Lúc đầu bể không có nước, người ta sử dụng một máy bơm để bơm nước vào bể với tốc độ $50m^3$ trong một phút. Vào lúc mực nước đúng $5m$ thì tốc độ dâng lên của mực nước trong bể là bao nhiêu m trên một phút? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Gọi h là mực nước của bể tại thời điểm t phút ($h, t > 0$, h đơn vị là m). Suy ra: Thể tích nước

$$\text{lúc đó là: } V = \frac{h(12+12+2h)}{2} \cdot 15 = 15h(12+h) (m^3)$$

Mặt khác: Theo giả thiết về tốc độ bơm nước thì lúc đó thể tích là: $V = 50t (m^3)$

$$\text{Do đó: } 15h(12+h) = 50t \Rightarrow h^2 + 12h + 36 = \frac{10}{3}t + 36 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{10}{3}t + 36} - 6$$

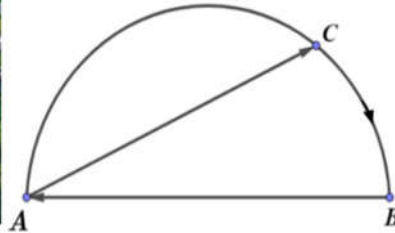
$$\text{Tại } h = 5(m) \text{ thì } t = \frac{1}{50} \cdot 15 \cdot 5(12+5) = \frac{51}{2} \text{ phút}$$

Tốc độ dâng của mực nước tại lúc mực nước đứng $5m$ là:

$$h'(t) = \frac{5}{3\sqrt{\frac{10}{3}t + 36} - 6} \Rightarrow h'\left(\frac{51}{2}\right) \approx 0,15 (m / phút)$$

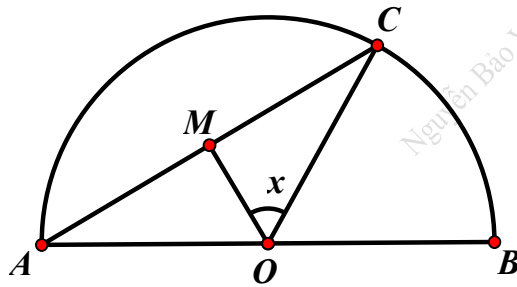
Đáp số: 0,15.

Câu 29. (Sở Thái Nguyên 2025) Một hồ nước hình bán nguyệt có đường kính $AB = 150m$. Một người chèo thuyền theo một đường thẳng với vận tốc $1,5 \text{ km/h}$ từ vị trí A đến vị trí C bất kỳ trên cung \widehat{AC} . Tại vị trí C người đó nghỉ 2 phút rồi tiếp tục đi bộ dọc theo cung nhỏ \widehat{CB} đến B , sau đó đi bộ theo đường thẳng BA để quay về A với vận tốc 3 km/h (tham khảo hình vẽ). Hỏi thời gian chậm nhất mà người đó về đến A là bao nhiêu phút? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Đáp án: 11,8.



Gọi O là tâm đường tròn, M là trung điểm AB , $\widehat{COM} = x \text{ (rad)}$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó $AC = 2CM = 2 \cdot 75 \cdot \sin x = 150 \sin x \text{ (m)}$.

$\widehat{COB} = \pi - 2x \Rightarrow \widehat{CB} = 75\pi - 150x$.

Thời gian di chuyển là $T = \frac{AC}{25} + \frac{\widehat{BC}}{50} + \frac{AB}{50} + 2 = \frac{150 \sin x}{25} + \frac{75\pi - 150x}{50} + \frac{150}{50} + 2$

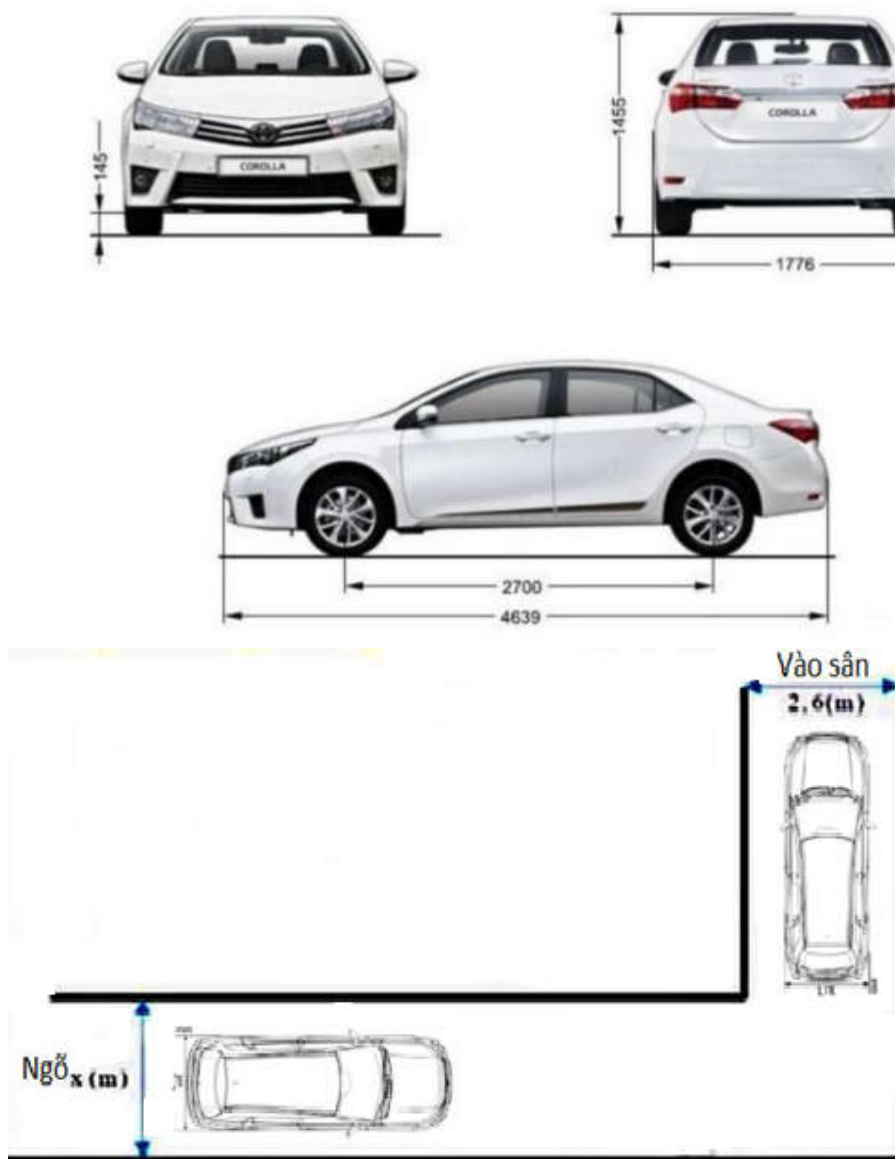
$T = 6 \sin x - 3x + \frac{3}{2}\pi + 5 \text{ (phút)}$ (vì $1,5 \text{ km/h} = 25 \text{ m/phút}$; $3 \text{ km/h} = 50 \text{ m/phút}$)

$T' = 6 \cos x - 3$; $T' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

$T(0) = 9,7$; $T\left(\frac{\pi}{2}\right) = 11$; $T\left(\frac{\pi}{3}\right) = 11,8$.

Vậy thời gian chậm nhất khoảng $11,8$ phút.

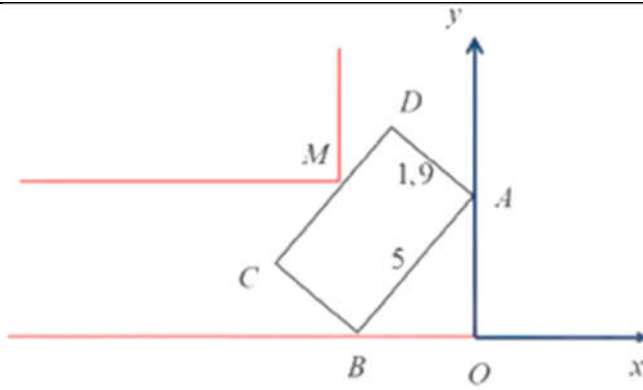
Câu 30. (THPT Lê Hồng Phong - Hải Phòng 2025) Ông An muốn mua một chiếc ô tô. Ngõ từ đường vào sân nhà ông An hình chữ L.



Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng $x(m)$, đoạn đường thẳng vào sân chiều rộng $2,6(m)$. Biết kích thước xe ô tô như hình vẽ trên và để ô tô đi qua an toàn thì chiều rộng và chiều dài tương ứng của đoạn đường phải lớn hơn kích thước thiết kế của ô tô một khoảng, cụ thể là $5m \times 1,9m$ (chiều dài \times chiều rộng). Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô từ ngõ vào sân, ông An coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài là $5(m)$, chiều rộng $1,9(m)$. Chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên là $x = \frac{p}{q}(m)$ (với p, q là các số nguyên dương và phân số $\frac{p}{q}$ tối giản) để ô tô của ông An có thể đi vào được sân (giả thiết ô tô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ô tô không bị biến dạng). Khi đó $p^2 - q$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 1359.



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Khi đó, $M(-2, 6; h)$.

Gọi $B(-a; 0)$, suy ra $A(0; \sqrt{25-a^2})$, $a > 0$.

Từ đó, phương trình của AB là $\frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25-a^2}} = 1$.

Do $CD \parallel AB$ nên phương trình CD là $\frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25-a^2}} - k = 0$.

Khoảng cách giữa AB và CD là chiều rộng của ô tô và bằng 1,9 m nên

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}} = 1,9 \Leftrightarrow k = 1 + \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}. \text{ (vì } CD \text{ nằm phía trên } AB \text{ nên } k > 1)$$

Phương trình CD được viết lại là $\frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25-a^2}} - 1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}} = 0$

Điều kiện để ô tô đi qua được là M và O nằm khác phía đối với đường thẳng CD .

Suy

$$\text{ra} \left(\frac{2,6}{a} + \frac{h}{\sqrt{25-a^2}} - 1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}} \right) \left(-1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2,6}{a} + \frac{h}{\sqrt{25-a^2}} - 1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow h \geq \sqrt{25-a^2} + \frac{9,5}{a} - \frac{2,6\sqrt{25-a^2}}{a} \text{ (đúng với mọi } a \in (0; 5]).$$

Xét hàm số $f(a) = \sqrt{25-a^2} + \frac{9,5}{a} - \frac{2,6\sqrt{25-a^2}}{a}$ trên nửa khoảng $(0; 5]$.

$$\text{Ta có } f'(a) = \frac{65-9,5\sqrt{25-a^2}-a^3}{a^2\sqrt{25-a^2}} \Rightarrow f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 3 \in (0; 5).$$

Bảng biến thiên

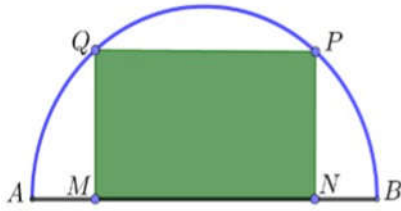
a	0	3	5
$f'(a)$		+	-
$f(a)$	$-\infty$	$\frac{37}{10}$	$\frac{19}{10}$

Do đó, $h \geq f(a), \forall a \in (0; 5] \Leftrightarrow h \geq \frac{37}{10}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của x là $x = \frac{37}{10}$

Vậy $p^2 - q = 37^2 - 10 = 1359$. là giá trị cần tìm.

Câu 31. (THPT Lê Hồng Phong - Hải Phòng 2025) Trước sân nhà A của một trường THPT có một mảnh đất là nửa hình tròn có đường kính $AB = 10m$. Nhà trường muốn trồng hoa trong hình chữ nhật $MNPQ$ và phần đất còn lại trồng cỏ Nhật. Biết chi phí trồng hoa là 100 ngàn đồng / $1m^2$. Trồng

cỏ Nhật hết 150 ngàn đồng / $1m^2$. Hỏi chi phí (làm tròn đến đơn vị ngàn đồng) hết ít nhất là bao nhiêu ?



Lời giải

Đáp án: 4640 .

Bán kính nửa hình tròn là $R = \frac{AB}{2} = 5(m)$.

Đặt $MN = 2x(m)$, $(0 < x < 5) \Rightarrow MQ = \sqrt{R^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - x^2}$.

Diện tích trồng hoa (diện tích hình chữ nhật $MNPQ$) là $S_1 = 2x \cdot \sqrt{25 - x^2}$.

Diện tích trồng cỏ nhật là $S_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2 - S_1 = \frac{25 \cdot \pi}{2} - 2x \cdot \sqrt{25 - x^2}$.

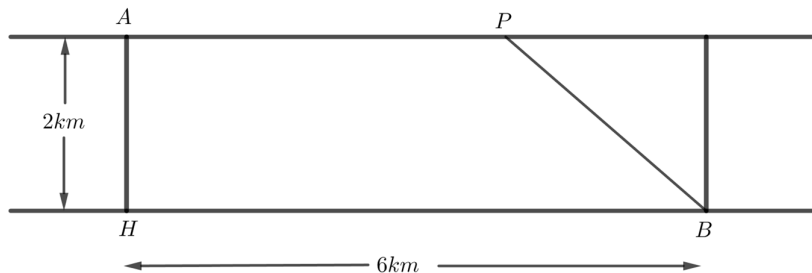
Tổng chi phí trồng hoa và trồng cỏ là
 $f(x) = 100S_1 + 150S_2 = 100 \cdot 2x \cdot \sqrt{25 - x^2} + 150 \left(\frac{25 \cdot \pi}{2} - 2x \cdot \sqrt{25 - x^2} \right) = 1875\pi - 100x\sqrt{25 - x^2}$ (nghìn đồng)

Ta có $2x \cdot \sqrt{25 - x^2} \leq x^2 + 25 - x^2 = 25$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $f(x) \geq 1875\pi - 1250 \approx 4640$, Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

Vậy chi phí nhỏ nhất ≈ 4640 nghìn đồng.

Câu 32. (Sở Quảng Bình 2025) Người ta muốn lắp một ống dẫn dầu từ nhà máy lọc dầu ở vị trí A đến kho chứa dầu đặt ở vị trí B qua một con sông rộng 2km, dài 6km. Chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu trên mặt đất để nối từ nhà máy lọc dầu đến trạm trung chuyển tại vị trí P là 4 tỷ VNĐ/1km và chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu dưới dòng sông để nối từ P đến kho chứa dầu tại vị trí B là 8 tỷ VNĐ/1km (như hình vẽ)

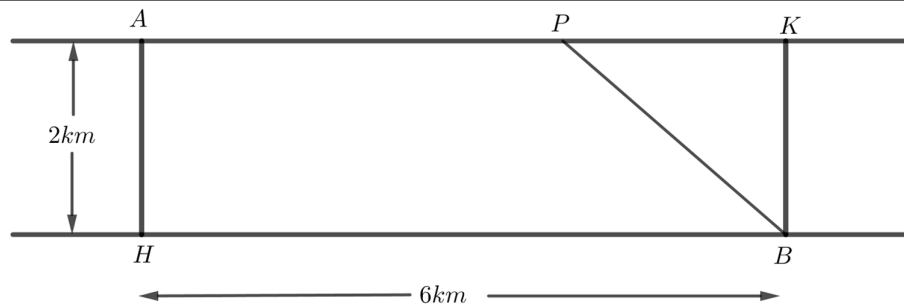


Hỏi chi phí lắp đặt ít nhất, cần đặt vị trí P cách nhà máy lọc dầu là bao nhiêu kilômét? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp án: 4,85 .

Đặt $AP = x$ ($0 \leq x \leq 6$, km).



Khi đó, chiều dài quãng đường $PK = 6 - x$.

Tổng chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu là: $T = 4x + 8\sqrt{(6-x)^2 + 2^2}$.

Ta có $T'(x) = 4 + 8 \frac{x-6}{\sqrt{x^2 - 12x + 40}}$;

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 - 12x + 40} + 8x - 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 12x + 40} = 12 - 2x \quad (\text{ĐK: } 0 < x \leq 6)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 36x + 104 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{18 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

Kết hợp đk ta thấy: $x = \frac{18 - 2\sqrt{3}}{3} \approx 4,85$ là nghiệm của pt.

$$T'(x) < 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 - 12x + 40} + 8x - 48 < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 12x + 40} < 12 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 2x > 0 \\ x^2 - 12x + 40 < 144 - 48x + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 6 \\ 3x^2 - 36x + 104 > 0 \end{cases}$$

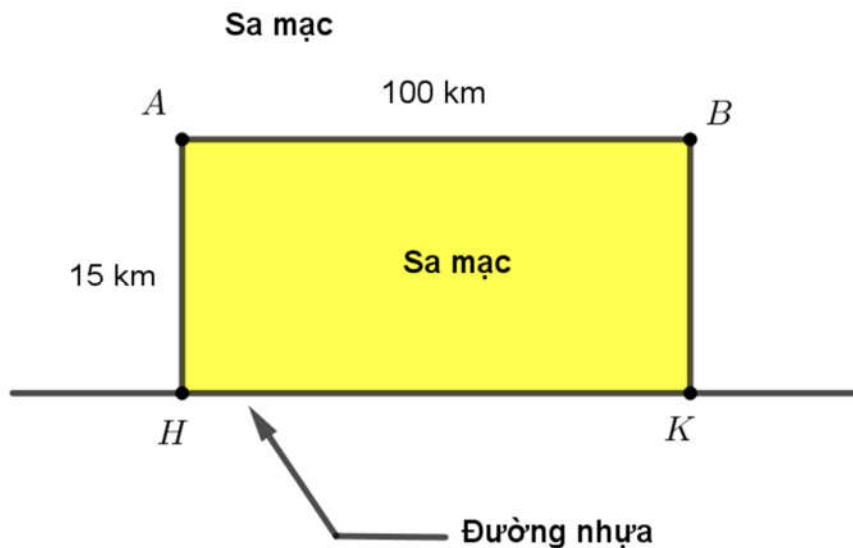
$$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{18 - 2\sqrt{3}}{3} \approx 4,85$$

Từ đây ta có bảng biến thiên

x	0	4,85	6
$T'(x)$	-	0	+
$T(x)$			

Từ bảng biến thiên ta suy ra chi phí thấp nhất khi $x = 4,85$.

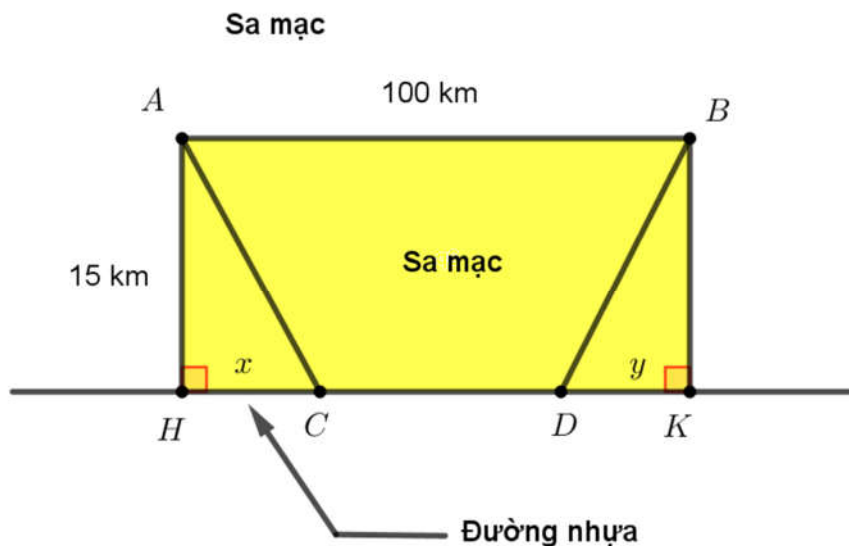
Câu 33. (Sở Bạc Liêu 2025) Một nhà địa chất học đang ở tại điểm A trên sa mạc. Anh ta muốn đến điểm B và cách A một đoạn là 100 km. Trong sa mạc thì xe anh ta chỉ có thể di chuyển với vận tốc là 30 km/h. Nhà địa chất phải đến được điểm B sau 3 giờ. Vì vậy, nếu anh ta đi từ A đến B sẽ không thể đến đúng giờ được. May mắn thay, có một con đường nhựa song song với đường nối A và B và cách AB một đoạn 15 km. Trên đường nhựa đó thì xe nhà địa chất này có thể di chuyển với vận tốc 50 km/h. Thời gian ngắn nhất để nhà địa chất di chuyển từ A đến B là bao nhiêu phút?



Lời giải

Đáp án: 168.

Ta có thể mô tả bài toán trên bằng hình vẽ sau:



Nếu đi trực tiếp từ A đến B trên sa mạc với vận tốc và khoảng cách hiện có thì nhà địa chất học không thể đến đúng thời gian quy định.

Gọi C, D là các điểm như hình vẽ.

Vì vậy cần thiết phải chia quãng đường đi được thành 3 giai đoạn:

Giai đoạn 1: đi từ A đến C (từ sa mạc đến đường nhựa song song).

Giai đoạn 2: đi từ C đến D (một quãng đường nào đó trên đường nhựa).

Giai đoạn 3: đi từ D đến B (từ điểm kết thúc D trên đường nhựa đi tiếp đến B bằng qua sa mạc).

Khi đó gọi $HC = x$ ($0 < x < 100$) và $DK = y$ ($0 < y < 100$).

$$\text{Quãng đường đi từ } A \text{ đến } C \text{ là } AC = \sqrt{225 + x^2} \Rightarrow t_1 = \frac{AC}{v_{sa\ mac}} = \frac{\sqrt{225 + x^2}}{30}.$$

$$\text{Quãng đường đi từ } D \text{ đến } B \text{ là } DB = \sqrt{225 + y^2} \Rightarrow t_2 = \frac{DB}{v_{sa\ mac}} = \frac{\sqrt{10^2 + y^2}}{30}.$$

$$\text{Và quãng đường đi } C \text{ đến } D \text{ là } CD = 100 - (x + y) \Rightarrow t_3 = \frac{CD}{v_{\text{duong nhua}}} = \frac{100 - (x + y)}{50}.$$

Vậy tổng thời gian mà nhà địa chất học đi từ A đến B là $t = t_1 + t_2 + t_3$.

$$\Rightarrow t = T(x; y) = \frac{\sqrt{225 + x^2}}{30} + \frac{\sqrt{225 + y^2}}{30} + \frac{100 - (x + y)}{50}.$$

Đến đây ta cần tìm $\min T(x; y)$.

$$\text{Ta có } T(x; y) = \frac{\sqrt{225 + x^2}}{30} + \frac{50 - x}{50} + \frac{\sqrt{225 + y^2}}{30} + \frac{50 - y}{50} = f(x) + f(y).$$

$$\text{Xét hàm số } f(u) = \frac{\sqrt{225 + u^2}}{30} + \frac{50 - u}{50}, \quad 0 < u < 100.$$

$$\text{Ta có } f'(u) = \frac{u}{30\sqrt{225 + u^2}} - \frac{1}{50}.$$

$$f'(u) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{225 + u^2} = \frac{5u}{3} > 0 \Leftrightarrow u = \frac{45}{4}.$$

Lập bảng biến thiên ta có

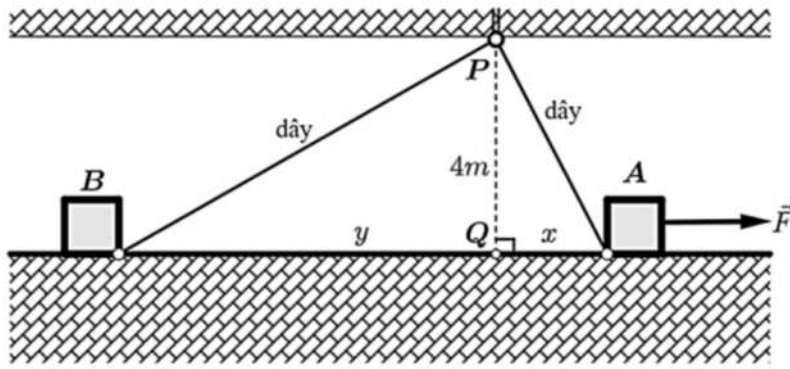
u	0	$\frac{45}{4}$	100
$f'(u)$	+	0	-
$f(u)$			
		$\frac{7}{5}$	

$$\min_{u \in (0; 70)} f(u) = f\left(\frac{45}{4}\right) = \frac{7}{5}.$$

$$\text{Do đó ta có } T(x; y) = f(x) + f(y) \geq \frac{7}{5} + \frac{7}{5} = \frac{14}{5} (h) = 168 \text{ (phút)}.$$

Thời gian ngắn nhất để nhà địa chất di chuyển từ A đến B là 168 phút.

Câu 34. (THPT Lê Thánh Tông - Nguyễn Khuyến 2025) Có hai thùng hàng A và B được đặt trên sàn nhà kho. Hai thùng được nối với nhau bằng một sợi dây dài 15m, sợi dây luôn căng và được kéo qua một ròng rọc gắn tại điểm P trên trần nhà. Biết trần nhà cao 4m so với mặt sàn (đoạn PQ = 4m) và trong quá trình di chuyển, hai thùng hàng luôn nằm trên mặt sàn (bỏ qua lực ma sát). Nếu thùng A cách Q khoảng 3m và đang được kéo ra xa Q với tốc độ không đổi 0,5m/s, hỏi thùng B đang di chuyển về phía Q với tốc độ bao nhiêu m/s? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 0,33.

Với $x = 3 \Rightarrow PA = 5, PB = 10, BQ = 2\sqrt{21}$.

Ta có: $PA^2 = PQ^2 + QA^2 \Leftrightarrow PA^2 = 16 + QA^2$

Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$2.PA.(PA)' = 2.QA.(QA)'$$

$$\Rightarrow (PA)' = \frac{QA}{PA} \cdot (QA)' = \frac{3}{5} \cdot x' = \frac{3}{5} \cdot 0,5 = 0,3.$$

Ta có: $PA + PB = 15 \Rightarrow (PA)' + (PB)' = 0$

$$\Rightarrow (PB)' = -(PA)' \Rightarrow (PB)' = -0,3.$$

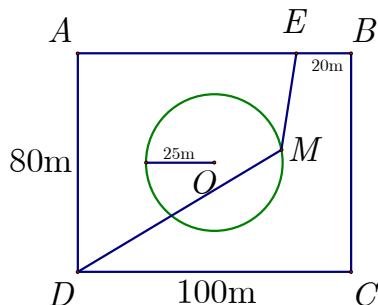
Vì độ dài dây không đổi nên $v_{PA} + v_{PB} = 0$.

Ta có: $PB^2 = PQ^2 + BQ^2$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được: $2.PB.(PB)' = 2.BQ.(BQ)'$

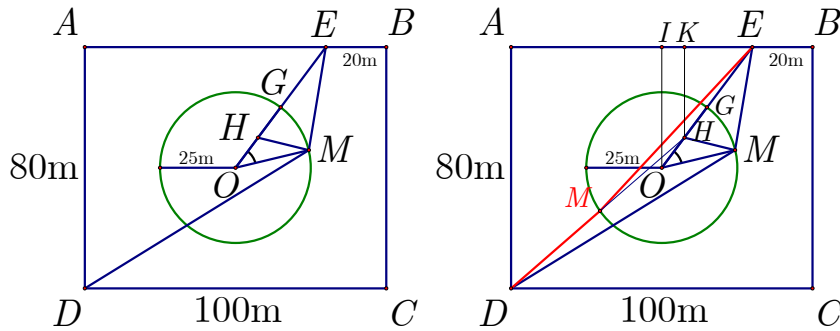
$$\Rightarrow (BQ)' = \frac{PB}{BQ} \cdot (PB)' = \left| \frac{10}{2\sqrt{21}} \cdot (-0,3) \right| \approx 0,33(m/s).$$

Câu 35. (Chuyên KHTN Hà Nội 2025) Trên sân vận động, người ta tổ chức một cuộc thi chạy thông minh. Sân vận động là hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $AB = 100m$ và $CD = 80m$. Ở chính giữa sân người ta vẽ một hình tròn có tâm trùng với tâm của hình chữ nhật, bán kính bằng $25m$ như hình vẽ. Lấy E là một vị trí trên cạnh AB sao cho $EB = 20m$. Mỗi vận động viên cần xuất phát từ một điểm M trên đường tròn và chạy theo cung đường $MDCBEMD$. Vận động viên thắng cuộc là người chạy với quãng đường ngắn nhất. Tính độ dài quãng đường ngắn nhất vận động viên phải chạy (đơn vị m, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp án: 352.



Đoạn đường $MDCBEMD$ ngắn nhất khi và chỉ khi $2MD + ME$ ngắn nhất.

Ta có: $OE = \sqrt{OI^2 + IE^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50\text{m} = 2R$.

Gọi $G = (O) \cap OE$, H là trung điểm của OG . Khi đó, ta có

$$R = OM = OG = \frac{1}{2}OE = 2.OH.$$

Xét tam giác OMH , ta có

$$MH^2 = OM^2 + OH^2 - 2OM.OH.\cos O = R^2 + \frac{1}{4}R^2 - R^2.\cos O = \frac{R^2}{4}(5 - 4\cos O).$$

$$\begin{aligned} ME^2 &= OM^2 + OE^2 - 2OM.OE.\cos O = R^2 + 4R^2 - 4R^2.\cos O \\ &= R^2(5 - 4\cos O) = 4MH^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow ME = 2MH$$

$$\Rightarrow 2MD + ME = 2(MD + MH)$$

Do đó, $2MD + ME$ ngắn nhất khi và chỉ khi $MD + MH$ ngắn nhất hay $MD + MH = DH$.

Mà $M \in (O) \Rightarrow M = (O) \cap DH$

Xét tam giác OIE , ta có

$$\frac{OH}{OE} = \frac{IK}{IE} = \frac{1}{4} \Rightarrow IK = \frac{IE}{4} = \frac{15}{2}\text{m}; \frac{HE}{OE} = \frac{HK}{OI} = \frac{3}{4} \Rightarrow HK = \frac{3OI}{4} = 30\text{m}.$$

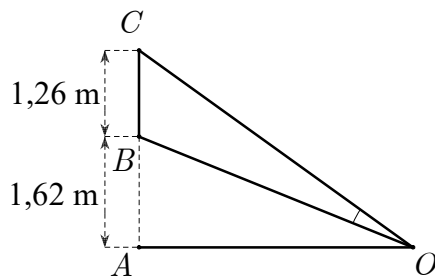
$$\text{Suy ra } DH = \sqrt{AK^2 + (AD - HK)^2} = \frac{5\sqrt{929}}{2}$$

$$\text{Khi đó, } 2MD + ME = 2(MD + MH) = 2DH = 5\sqrt{929}.$$

Vậy khoảng đường chạy ngắn nhất là:

$$MDCBEMD = DC + CB + BE + 2MD + ME = 100 + 80 + 20 + 5\sqrt{929} \approx 352\text{m}.$$

Câu 36. (Sở Bắc Ninh 2025) Hình vẽ bên minh họa một màn hình BC có chiều cao $1,26\text{ m}$ được đặt thẳng đứng và mép dưới của màn hình cách mặt đất một khoảng $BA = 1,62\text{ m}$. Một chiếc đèn quan sát màn hình được đặt ở vị trí O trên mặt đất. Để góc quan sát \widehat{BOC} là lớn nhất thì độ dài OA bằng bao nhiêu mét?



Lời giải

Đáp án: 2,16.

Đặt $OA = x(\text{m})$. Ta có:

$$\frac{BC}{\sin \widehat{BOC}} = \frac{OB}{\sin \widehat{OCA}} \Leftrightarrow \sin \widehat{BOC} = \frac{BC \cdot \sin \widehat{OCA}}{OB}$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{BOC} = \frac{BC \cdot \frac{OA}{OC}}{OB} = \frac{BC \cdot OA}{\sqrt{OA^2 + AB^2} \cdot \sqrt{OA^2 + AC^2}} = \frac{1,26 \cdot x}{\sqrt{x^2 + 1,62^2} \cdot \sqrt{x^2 + 2,88^2}}$$

Xét hàm số $y = \frac{1,26x}{\sqrt{x^2 + 1,62^2} \cdot \sqrt{x^2 + 2,88^2}} = \frac{1,26x}{\sqrt{x^4 + 10,9188x^2 + 21,76782336}}$

$$y' = 1,26 \cdot \frac{x^4 + 10,9188x^2 + 21,76782336 - 2x^4 - 10,9188x^2}{\left(\sqrt{x^4 + 10,9188x^2 + 21,76782336}\right)^3} = \frac{1,26(21,76782336 - x^4)}{\left(\sqrt{x^4 + 10,9188x^2 + 21,76782336}\right)^3}$$

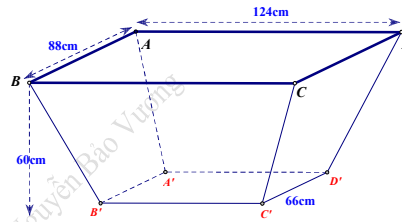
$$y' = 0 \Leftrightarrow x^4 = 21,76782336 \Leftrightarrow x = \pm 2,16.$$

Lập bảng biến thiên với điều kiện $x > 0$ ta được giá trị lớn nhất của y đạt được tại $x = 2,16$.

Ta thấy \widehat{BOC} lớn nhất khi và chỉ khi $\sin \widehat{BOC}$ lớn nhất hay y lớn nhất.

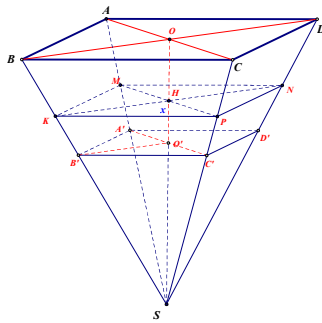
Vậy $x = OA = 2,16$.

Câu 37. (Sở Hòa Bình 2025) Anh A bơm nước vào một chiếc thùng nhựa đựng nước có dạng hình chóp cụt với hai đáy là hai hình chữ nhật, các cạnh bên bằng nhau và có kích thước như hình bên dưới, với tốc độ bơm nước vào thùng là 20 lít/phút. Vận tốc nước dâng lên ở cạnh bên của thùng nhựa (đơn vị cm/phút) khi chiều cao mực nước là 25 cm bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

Đáp án: 2,64



Kéo dài các cạnh $A'A, B'B, C'C, D'D$ cắt nhau tại S ta có hình chóp $S.ABCD$ có SO là đường cao; $SO \perp (A'B'C'D')$; $O'O = 60$.

$$\text{Đặt } V_1 = V_{S.ABCD}; V_2 = V_{S.A'B'C'D'} \Rightarrow V = V_{ABCD.A'B'C'D'} = V_1 - V_2.$$

$$\text{Ta có } \frac{C'D'}{CD} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SO'}{SO} = \frac{SO'}{SO' + 60} \Rightarrow \frac{SO'}{SO' + 60} = \frac{66}{88} \Rightarrow SO' = 180.$$

$$\text{Suy ra } \frac{A'D'}{AD} = \frac{66}{88} \Rightarrow A'D' = 93. \text{ Ta có } A'C' = B'D' = 51\sqrt{5}.$$

Đặt chiều cao mực nước $O'H = x = 25$ cm.

$$+ \frac{SO'}{SH} = \frac{SB'}{SK} = \frac{B'C'}{KP} = \frac{C'D'}{PN} \Leftrightarrow \frac{180}{180+x} = \frac{\sqrt{180^2 + \left(\frac{51\sqrt{5}}{2}\right)^2}}{SK} = \frac{93}{KP} = \frac{66}{PN}$$

$$\text{Suy ra } KP = 93 + \frac{31}{60}x; PN = 66 + \frac{11}{30}x.$$

Ta sẽ tính thể tích nước trong thùng theo x :

$$V_{A'B'C'D'.MNPQ} = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \left(93 + \frac{31}{60}x \right) \left(66 + \frac{11}{30}x \right) dx = \int_0^h \left(6138 + \frac{341}{5}x + \frac{341}{1800}x^2 \right) dx.$$

$$V_{A'B'C'D'.MNPQ} = 6138h + \frac{341}{10}h^2 + \frac{341}{1800} \cdot \frac{h^3}{3}$$

$$\text{Mà } KB' = s = \frac{\sqrt{15845}}{120} \cdot h = Ch \Rightarrow h = \frac{s}{C}.$$

$$\text{Suy ra } V_{A'B'C'D'.MNPQ} = 6138 \cdot \frac{s}{C} + \frac{341}{10} \cdot \frac{s^2}{C^2} + \frac{341}{1800} \cdot \frac{s^3}{3C^3}.$$

Tại thời điểm t phút lượng nước trong thùng là $V(t) = 20000t \text{ (cm}^3\text{)}$.

$$\text{Suy ra } 20000t = 6138 \cdot \frac{s}{C} + \frac{341}{10} \cdot \frac{s^2}{C^2} + \frac{341}{1800} \cdot \frac{s^3}{3C^3}, \text{ đạo hàm hai vế theo biến } t.$$

$$\Rightarrow 20000 = \left[\frac{6138}{C} + \frac{341}{5} \cdot \frac{s}{C^2} + \frac{341}{1800} \cdot \frac{s^2}{C^3} \right] \cdot \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow 20000 = \frac{1}{C} \left[6138 + \frac{341}{5}h + \frac{341}{1800}h^2 \right] \frac{ds}{dt}$$

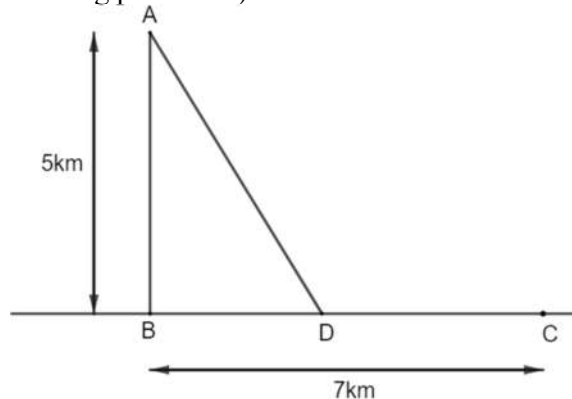
$$\Rightarrow 20000 = \left[\frac{6138}{C} + \frac{341}{5} \cdot \frac{s}{C^2} + \frac{341}{1800} \cdot \frac{s^2}{C^3} \right] \cdot \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow 20000 = \frac{1}{C} \left[6138 + \frac{341}{5}h + \frac{341}{1800}h^2 \right] \frac{ds}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{20000 \cdot C}{S(h)}, \text{ thay } h = 25, C = \frac{\sqrt{15845}}{120}.$$

$$\text{Vậy vận tốc cần tìm là } v(25) = \frac{ds}{dt} = 2,6351 \text{ cm/phút} \approx 2,64 \text{ cm/phút}.$$

Câu 38. (Sở Sơn La 2025) Một đoàn cứu trợ lũ lụt đang ở vị trí A của một tỉnh miền trung muốn đến xã C để tiếp tế lương

thực và thuốc men. Đoàn cứu trợ phải đi theo con đường từ A đến B và từ B đến C (như hình vẽ). Do nước ngập con đường từ A đến B nên đoàn cứu trợ không thể đến C bằng xe mà phải chèo thuyền từ A đến vị trí D trên đoạn đường từ B đến C với vận tốc 4 km/h , rồi đi bộ từ D đến C với vận tốc 6 km/h . Biết A cách B một khoảng 5 km , B cách C một khoảng 7 km . Hỏi vị trí điểm D cách A bao nhiêu km để đoàn cứu trợ đi đến xã C nhanh nhất (kết quả làm tròn tới hàng phần trăm)?



Lời giải

Đáp án: 6,71.

$$\text{Gọi } AD = x \left(5 \leq x \leq \sqrt{74} \right). \text{ Khi đó: } BD = \sqrt{x^2 - 25} \Rightarrow CD = 7 - \sqrt{x^2 - 25}$$

$$\text{Tổng thời gian từ xã } A \text{ đến xã } C \text{ là: } f(x) = \frac{AD}{4} + \frac{CD}{6} = \frac{x}{4} + \frac{7 - \sqrt{x^2 - 25}}{6}$$

Ta cần tìm GTNN của hàm $f(x)$ trên $[5; \sqrt{74}]$.

$$\text{Có } f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{x}{6\sqrt{x^2 - 25}}$$

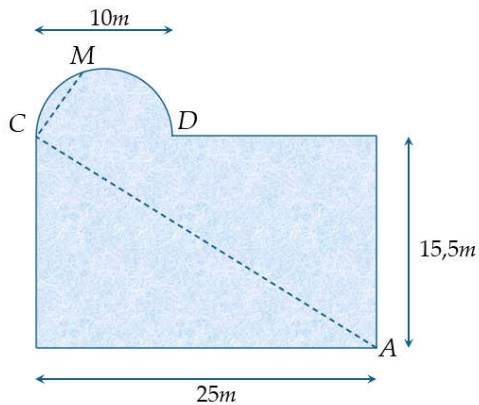
$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - 25} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9(x^2 - 25) = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 3\sqrt{5} \\ x = -3\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{5}$$

$$\text{Ta có: } f(5) = \frac{29}{12}; f(3\sqrt{5}) = \frac{7}{6} + \frac{5}{12}\sqrt{5}; f(\sqrt{74}) = \frac{\sqrt{74}}{4}$$

$$\Rightarrow \min_{x \in [5; \sqrt{74}]} f(x) = \frac{7}{6} + \frac{5}{12}\sqrt{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 3\sqrt{5}$

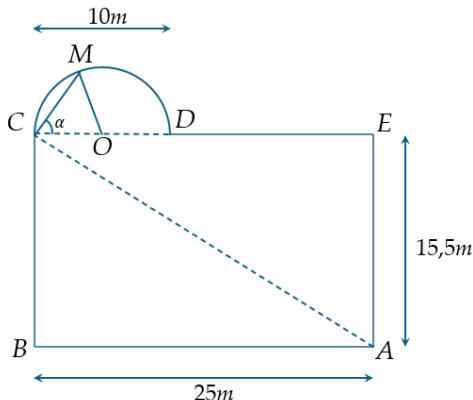
Câu 39. (Liên Trường Nghệ An 2025) Bạn Hoa thường đi bơi ở hồ Sky Garden cạnh nhà, hồ bơi có thiết kế là một hình chữ nhật với chiều dài 25 m, chiều rộng 15,5 m và bên cạnh đó là một hình bán nguyệt đường kính 10 m. Trong một lần bể bơi vắng người nên Hoa đã thực hiện một chu trình là bơi theo đoạn thẳng AC rồi bơi tiếp đoạn thẳng CM , với M là một vị trí bất kỳ trên hình bán nguyệt. Ngay sau đó bạn đi bộ theo một hướng qua điểm D dọc bờ của hồ bơi để quay lại vị trí A và kết thúc chu trình. (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng vận tốc bơi của Hoa là 2,4 km/h, vận tốc đi bộ là 4,8 km/h và tốc độ bơi, vận tốc đi bộ không thay đổi trong một chu trình. Hỏi thời gian chậm nhất để Hoa thực hiện xong chu trình trên là bao nhiêu phút? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Đáp số: 1,4 phút.



$$\text{Đổi } 2,4 \text{ km/h} = \frac{2}{3} \text{ m/s}; 4,8 \text{ km/h} = \frac{4}{3} \text{ m/s}.$$

Quãng đường Hoa đi hết một chu trình là $AC + CM + \widehat{MD} + DE + EA$.

Tổng thời gian Hoa thực hiện một chu trình là $T = \frac{AC + CM}{\frac{2}{3}} + \frac{\widehat{MD} + DE + EA}{\frac{4}{3}}$.

Do AC, DE, EA không đổi nên T_{\max} khi $\frac{CM}{\frac{2}{3}} + \frac{\widehat{MD}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}CM + \frac{3}{4}\widehat{MD}$ đạt giá trị lớn nhất.

Đặt $\widehat{MCD} = \alpha, \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \widehat{MOD} = 2\alpha$.

Suy ra $CM = 10 \cos \alpha, \widehat{MD} = 10\alpha \Rightarrow \frac{3}{2}CM + \frac{3}{4}\widehat{MD} = 15 \cos \alpha + \frac{15}{2}\alpha$.

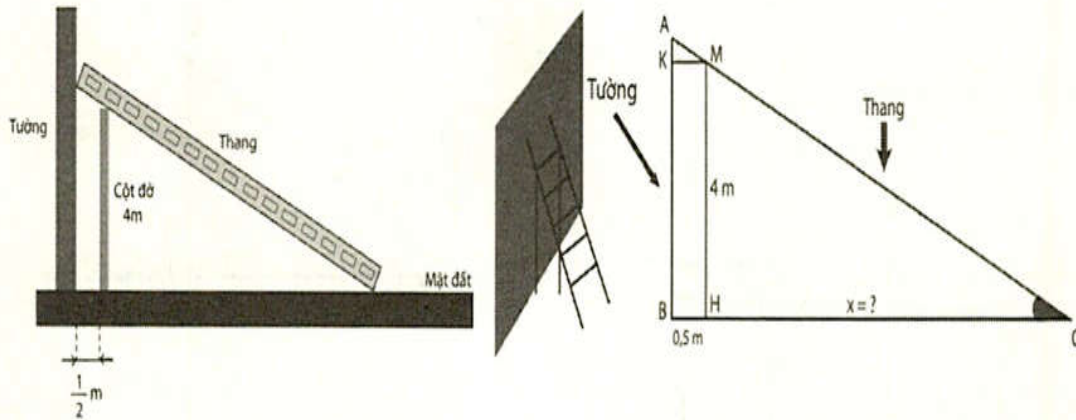
Xét hàm số $f(\alpha) = 15 \cos \alpha + \frac{15}{2}\alpha, \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $f'(\alpha) = -15 \sin \alpha + \frac{15}{2}, f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -15 \sin \alpha + \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có $\max_{\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)} f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Vậy $T_{\max} = \frac{3\sqrt{25^2 + 15,5^2}}{2} + \frac{15}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3(15 + 15,5)}{4} \approx 83,9$ giây $\approx 1,4$ phút.

Câu 40. (THPT DTNT - Nghệ An 2025) Tìm chiều dài bé nhất của cái thang để nó có thể tựa vào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ cao $4m$, song song và cách tường $0,5m$ kể từ gốc của cột đỡ như hình vẽ. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.



Trả lời: 5,59

Lời giải

Đặt $HC = x > 0$. Suy ra $BC = x + 0,5$.

Áp dụng định lý Thales, ta có $\frac{HC}{BC} = \frac{MH}{AB} = \frac{x}{x + 0,5}$.

Vậy $AB = \frac{4(x + 0,5)}{x}$.

Do tam giác ABC vuông tại B nên suy ra $AC^2 = AB^2 + BC^2 = (x + 0,5)^2 + \frac{16(x + 0,5)^2}{x^2}$.

Ra rút ra $AC^2 = \frac{(x+0,5)^2(x^2+16)}{x^2}$.

Đặt $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + \frac{65}{4}x^2 + 16x + 4}{x^2} (x > 0)$.

Bài toán trở thành tìm $\min f(x)$ với $x > 0$.

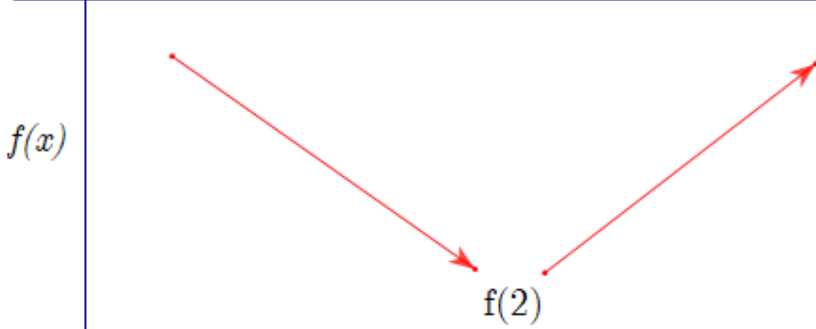
Ta có

$$f'(x) = \frac{\left(4x^3 + 3x^2 + \frac{65}{2}x + 16\right)x^2 - 2x\left(x^4 + x^3 + \frac{65}{4}x^2 + 16x + 4\right)}{x^4}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x^4 + x^3 - 16x - 8}{x^3}$$

$$\text{Vậy } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x+1)(x^2+2x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 > 0 \\ x = -\frac{1}{2} < 0. \end{cases}$$

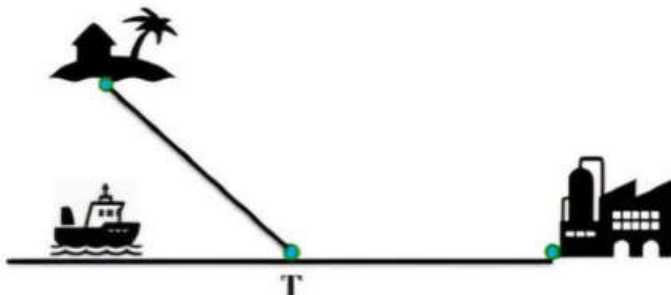
Lập bảng biến thiên, ta có

x	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$				

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\min_{x>0} f(x) = f(2) = \frac{125}{4}$.

Do đó, ta có $\min AC = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \approx 5,59$.

Câu 41. (Đề thi vào ĐHSPHN 2025) Công ty nước sạch Bình An đang cần lắp đặt đường ống dẫn nước từ nhà máy nước tới hòn đảo như trong sơ đồ (đường ống xuất phát từ nhà máy đến điểm T rồi đi ra đảo). Bến tàu cách đảo 1km, đó chính là vị trí trên đất liền gần với đảo nhất. Nhà máy ước cách bến tàu 4km. Biết rằng chi phí đặt mỗi ki-lô-mét ống nước trên đất liền là 30 triệu đồng, còn lại đặt dưới nước là 50 triệu đồng.



a) Khoảng cách từ điểm T đến nhà máy nước là bao nhiêu ki-lô-mét để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất?

b) Tổng chi phí lắp đặt ít nhất bằng bao nhiêu (triệu đồng)?.

Lời giải

Đáp số: a) $\frac{13}{4}$ b) 160.

Gọi chiều dài đoạn ống nước kéo từ điểm T đến nhà máy nước là $x(\text{km})$, $0 \leq x \leq 4$.

Khi đó chiều dài đoạn ống nước kéo từ điểm T đến đảo là: $\sqrt{x^2 - 8x + 17}$ (km)

Tổng tiền công là $f(x) = 30x + 50\sqrt{x^2 - 8x + 17}$ (triệu đồng)

$$\text{Ta có: } f'(x) = 30 + \frac{50(x-4)}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}}$$

$$f'(x) = 30 + \frac{50(x-4)}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - 8x + 17} = 5(4-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 9(x^2 - 8x + 17) = 25(16 - 8x + x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x = \frac{19}{4} \Leftrightarrow x = \frac{13}{4} \\ x = \frac{13}{4} \end{cases}$$

x	0	$\frac{13}{4}$	4
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$50\sqrt{17}$	160	170

a) Khoảng cách từ điểm T đến nhà máy nước là $\frac{13}{4}$ ki-lô-mét để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất.

b) Khi đó tổng chi phí lắp đặt ít nhất bằng là 160 triệu đồng.

Câu 42. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh 2025) Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình 35). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Hình 35

Trả lời: 6250

Lời giải



Gọi chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn lần lượt là y và x , ($x > 0$, $y > 0$).

Diện tích mảnh vườn là $S = xy$.

Chi phí để rào mảnh vườn theo chữ E là: $T = 3x.50\,000 + y.60\,000 = 150\,000\,000$

$$\Leftrightarrow 15x + 6y = 1500 \Leftrightarrow 5x + 2y = 500 \Rightarrow y = \frac{500 - 5x}{2} \quad (x < 100) \Rightarrow S = x \left(\frac{500 - 5x}{2} \right).$$

Ta có $S' = 250 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 50$.

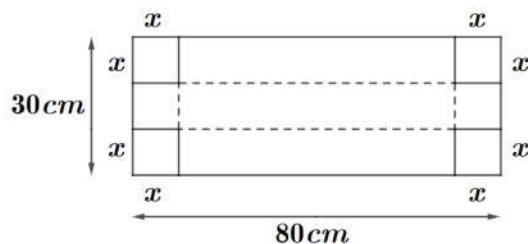
Bảng xét dấu

x	0	50	100	
S'		+	0	-
S			6250	

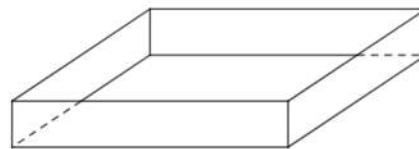
Để diện tích mảnh vườn thu được sau khi rào lớn nhất thì $x = 50 \Rightarrow y = 125$.

Vậy diện tích lớn nhất của mảnh vườn là 6250 m^2 .

Câu 43. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025) Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30cm và chiều dài 80cm (Hình 2), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x(\text{cm})$ với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình b.



a)



b)

Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Lời giải

Trả lời: 6,7

Theo đề bài; chiều rộng, chiều dài và chiều cao của hộp lần lượt là $30 - 2x$, $80 - 2x$ và x .

Khi đó thể tích của hộp là

$$V = x(30 - 2x)(80 - 2x) = x(4x^2 - 220x + 2400) = 4x^3 - 220x^2 + 2400x.$$

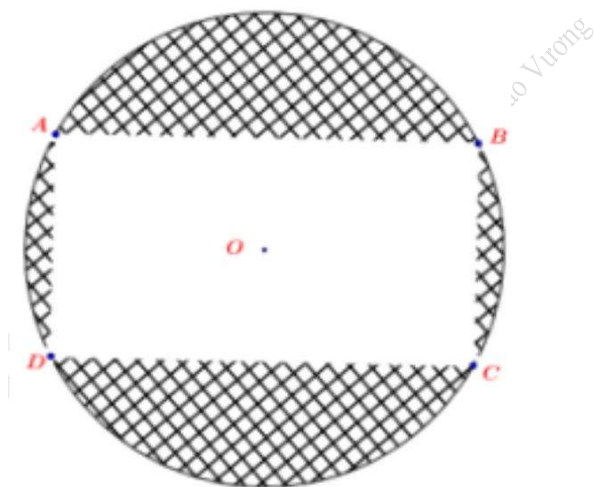
Xét hàm số $f(x) = 4x^3 - 220x^2 + 2400x$ với $5 \leq x \leq 10$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 12x^2 - 440x + 2400 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 & (l) \\ x = \frac{20}{3} & (n) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(5) = 7000 \\ f\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{2 \cdot 10^5}{27} \\ f(10) = 6000 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in [5;10]} f(x) = f\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{2 \cdot 10^5}{27} \approx 7407,41 \text{ hay thể tích lớn nhất của hộp là } 7407,41 \text{ cm}^3.$$

Câu 44. (Cụm Chuyên Môn Đắk Lak 2025) Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 1000 m^2 , người ta muốn mở rộng thêm 4 phần đất sao cho tạo thành hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn (Tham khảo hình vẽ). Biết tâm của hình tròn trùng với tâm của hình chữ nhật. Tìm diện tích nhỏ nhất S_{\min} của 4 phần đất mở rộng. (làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Gọi a, b lần lượt là chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn, khi đó ta có:

$$S_{hcn} = a.b = 1000 (\text{m}^2). \text{ Suy ra } b = \frac{1000}{a}$$

$$\text{Diện tích của phần đất mở rộng là } S = S_{ht} - S_{hcn} = \pi R_{ht}^2 - 1000 (\text{m}^2).$$

$$\text{Với } R_{ht} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S = \pi \frac{a^2 + b^2}{4} - 1000 (\text{m}^2).$$

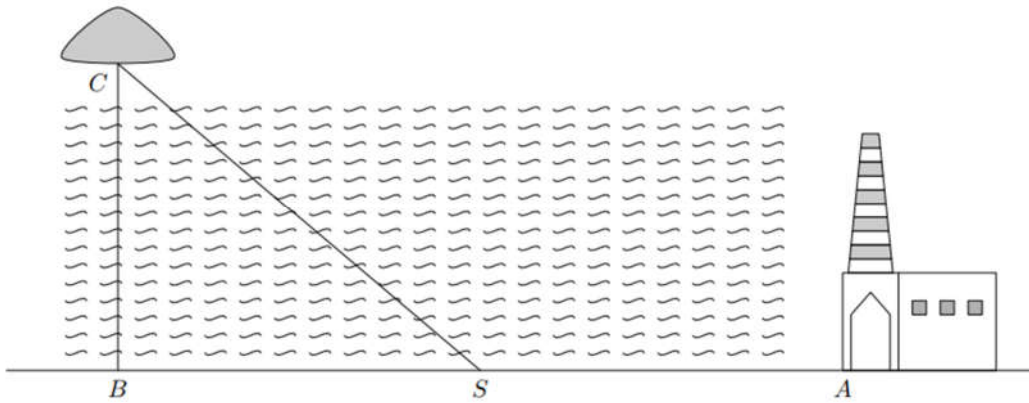
$$\text{Thay } b = \frac{1000}{a} \text{ ta có:}$$

$$S = \pi \frac{a^2 + \frac{1000^2}{a^2}}{4} - 1000 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Khi đó $S_{\min} \approx 571$ khi $a = 10\sqrt{10}$.

Câu 45. (Sở Bắc Ninh 2025) Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A (nằm tại bờ biển là đường thẳng

AB) đến một hòn đảo C , khoảng cách ngắn nhất từ đảo về bờ biển là đoạn BC dài 1 km, khoảng cách từ B đến A là 4 km được minh họa bằng hình vẽ dưới đây.



Biết rằng mỗi km dây điện đặt dưới nước chi phí mất 5000 USD, còn đặt dưới đất chi phí mất 3000 USD. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C có chi phí là ít nhất?

Lời giải

Trả lời: 3,25

Đặt $AS = x$ với $0 < x < 4$, khi đó $BS = 4 - x$ và $CS = \sqrt{BC^2 + BS^2} = \sqrt{1 + (4 - x)^2}$.

Chi phí lắp đặt dây điện từ A đến S là $P_1 = 3000x$.

Chi phí lắp đặt dây điện từ C đến S là $P_2 = 5000\sqrt{1 + (4 - x)^2}$.

Tổng chi phí lắp đặt dây điện là

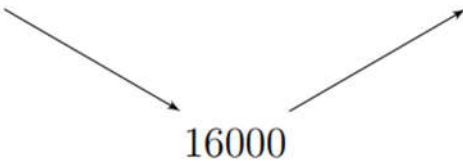
$$P = P_1 + P_2 = 3000x + 5000\sqrt{1 + (4 - x)^2}.$$

Xét hàm $f(x) = 3000x + 5000\sqrt{1 + (4 - x)^2}$ trên khoảng $(0; 4)$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3000 - \frac{5000(4 - x)}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}}.$$

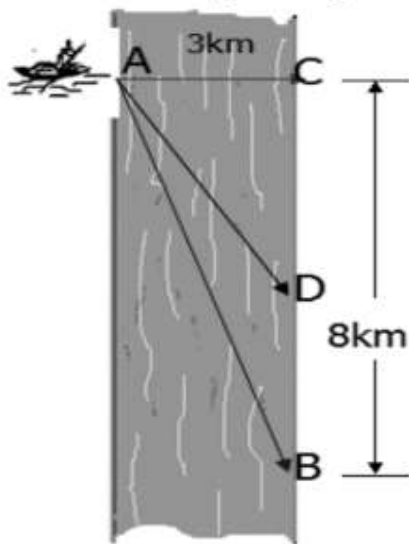
$$\text{Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5(4 - x) = 3\sqrt{x^2 - 8x + 17} \Leftrightarrow x = \frac{13}{4}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	0	$\frac{13}{4}$	4
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Vậy để chi phí mắc dây điện là ít nhất thì điểm S cách A một khoảng là $\frac{13}{4} = 3,25$ km.

- Câu 46. (Sở Hậu Giang 2025)** Anh Tí muốn chèo thuyền từ vị trí A đến vị trí B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3km (như hình vẽ). Tí có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến vị trí C và sau đó chạy đến vị trí B , hay có thể chèo trực tiếp từ vị trí A đến vị trí B , hoặc anh ta có thể chèo đến một vị trí D ở giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền với tốc độ 6km/h , chạy với tốc độ 8km/h và quãng đường $BC = 8\text{km}$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể có với tốc độ chèo thuyền của anh Tí. Khoảng thời gian để anh Tí đến B là bao nhiêu phút? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Đáp án: 80

Gọi $x = CD$, khi đó $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{x^2 + 9}$ và $BD = 8 - x$ với $0 \leq x \leq 8$

Thời gian anh Tí đi từ A đến B là: $t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$.

Ta có: $t'(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$,

$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 9} = 4x \Rightarrow 7x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm \frac{9}{\sqrt{7}}$.

Vì $x \in [0; 8]$ nên $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$.

$$\text{Ta có: } t(0) = \frac{3}{2}; t(8) = \frac{\sqrt{73}}{6}, t\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = \frac{8+\sqrt{7}}{8}$$

$$\text{Vậy thời gian ngắn nhất khi } x = \frac{9}{\sqrt{7}} \text{ và } t\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) \approx 1,33h \approx 80p.$$

Câu 47. (Sở Lai Châu 2025) Một xưởng sản xuất cửa nhôm kính uốn vòm gồm phần dưới là hình chữ nhật có chiều rộng x (cm), chiều dài y (cm), phần vòm là hình bán nguyệt có bán kính $\frac{x}{2}$ (cm).

Biết chu vi của cửa không đổi là 8m. Biết đơn giá làm cửa tính theo m^2 là 1.600.000 đồng. Khi diện tích của cái cửa lớn nhất thì cái cửa trị giá bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến hàng phần mười)?



Lời giải

Đáp án: 7,2

Phần giải chi tiết:

Đổi $8m = 800cm$.

$$\text{Ta có chu vi của cửa là } y + x + y + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{x}{2} = 800 \Rightarrow y = \frac{800 - x\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)}{2}.$$

$$\text{Diện tích hình chữ nhật là } S_1 = x \cdot \frac{800 - x\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)}{2}.$$

$$\text{Diện tích nửa hình tròn là } S_2 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{x^2}{8}.$$

Diện tích toàn cánh cửa là

$$S(x) = S_1 + S_2 = -\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\right)x^2 + 400x.$$

Ta có $S'(x) = -\left(\frac{\pi}{4} + 1\right)x + 400$, $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1600}{4 + \pi}$.

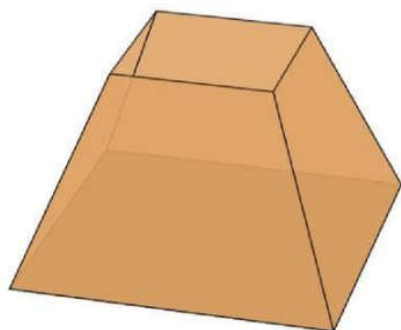
Khi đó hàm $S(x)$ đạt GTLN tại $x = \frac{1600}{4 + \pi}$.

Giá trị lớn nhất của hàm $S(x)$ là $S\left(\frac{1600}{4 + \pi}\right) (cm^2)$.

Số tiền để làm cánh cửa đó là

$1600000 \cdot S\left(\frac{1600}{4 + \pi}\right) \cdot 10^{-4} \approx 7,2$ (triệu đồng).

Câu 48. (Sở Nghệ An 2025) Một xưởng thủ công mỹ nghệ sản xuất loại chụp đèn trang trí dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Gọi x là độ dài cạnh đáy lớn (đơn vị:dm). Tính toán cho thấy tổng chi phí vật liệu (tính bằng nghìn đồng) cho một chụp đèn là $C(x) = x^2 + 108$ (nghìn đồng). Thời gian sản xuất cho một chụp đèn được xác định là $T(x) = x + 6$ (giờ). Xưởng muốn xác định kích thước x để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất, nhằm tối ưu hóa hiệu quả sử dụng thời gian và vật liệu. Hãy tìm giá trị của x .



Lời giải

Đáp án: 6

Gọi hàm chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là $f(x) = \frac{C(x)}{T(x)} = \frac{x^2 + 108}{x + 6}, x > 0$.

Ta có $f'(x) = \frac{x^2 + 12x - 108}{(x + 6)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -18(L) \\ x = 6 \end{cases}$

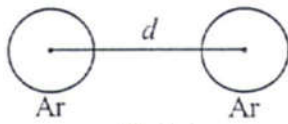
Ta có bảng biến thiên :

x	0	6	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	18	12	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt GTNN bằng 12 khi $x = 6$.

Vậy để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất thì $x = 6$.

Câu 49. (Sở Hải Phòng 2025) Xét hệ gồm hai nguyên tử khí argon (Ar) ở trạng thái cơ bản, mỗi nguyên tử được coi là một khối cầu, khoảng cách (d) giữa hai nguyên tử bằng khoảng cách giữa tâm của hai khối cầu (tham khảo hình bên). Coi như không có tương tác bên ngoài nào tác động đến hệ, sự phụ thuộc của thế năng tương tác $V(d)$ giữa hai nguyên tử khí vào khoảng cách d được xác định theo công thức:



Hình 1

$$V(d) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{d} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{d} \right)^6 \right]$$

Trong đó ε và σ là các hằng số đặc trưng cho từng khí hiếm. Đối với Ar, $\varepsilon = 0,930$ và $\sigma = 3,62$. Biết rằng khi thế năng tương tác đạt nhỏ nhất thì hệ hai nguyên tử Ar là bền nhất, khoảng cách (d) mà hai nguyên tử đó bền nhất là? (Công thức $V(d)$ có tên gọi là: Thế **Lennard-Jones**)

Lời giải:

- Theo đề ta có thế năng tương tác đạt nhỏ nhất, Ta tìm: $\min V(d), d > 0$.

$$V(d) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{d} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{d} \right)^6 \right] = 4\varepsilon \sigma^6 \left(\frac{\sigma^6}{d^{12}} - \frac{1}{d^6} \right) = 4\varepsilon \sigma^6 \left(\sigma^6 d^{-12} - d^{-6} \right).$$

$$\Rightarrow V'(d) = 4\varepsilon \sigma^6 \left(-12\sigma^6 d^{-13} + 6d^{-7} \right) = 24\varepsilon \sigma^6 \left(\frac{1}{d^7} - \frac{2\sigma^6}{d^{13}} \right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{d^7} = \frac{2\sigma^6}{d^{13}} \Leftrightarrow d^{13} = 2d^7 \sigma^6 \Leftrightarrow d^6 = 2\sigma^6 \Rightarrow d = \sqrt[6]{2\sigma^6} \approx 4,06.$$

Ta có bảng biến thiên

x	0	4.06	$+\infty$
$f(x)$		-	0 +

Khi đó $\min_{d \in (0; +\infty)} V(d)$ tại $d \approx 4,06$.

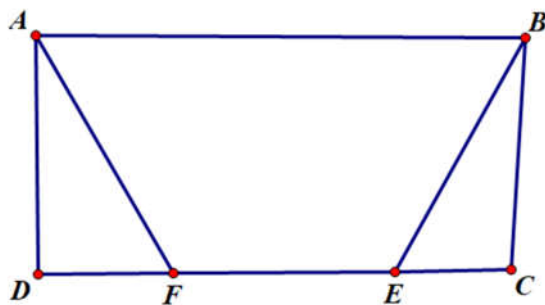
Câu 50. (Cụm THPT Hoàn Kiếm - Hai Bà Trưng - Hà Nội 2025) Một khu đất trống bằng phẳng hình chữ nhật $ABCD$ như hình vẽ. Từ vị trí A, anh An chạy bộ theo

đường gấp khúc $ABEFA$ để quay lại vị trí A (trong đó E,F là hai vị trí bất kì trên đoạn CD). Vận tốc của anh

An trên đoạn AB và EF bằng $10\text{km} / h$, vận tốc của anh An trên đoạn BE và AF là $6\text{km} / h$. Thời gian ngắn

nhất mà anh An đi chuyển từ A theo cách trên rồi quay lại A là bao nhiêu phút, biết khoảng cách $AB = 1\text{km}$ và

$$AD = 0,6\text{km}$$



Lời giải

Đáp số: 21,6

Khi đó gọi $EC = x$ ($0 < x < 1$) và $DF = y$ ($0 < y < 1$).

Quãng đường đi từ A đến B là $AB = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{10}$.

Quãng đường đi từ B đến E là $BE = \sqrt{0,6^2 + x^2} \Rightarrow t_2 = \frac{\sqrt{0,6^2 + x^2}}{6}$.

Quãng đường đi từ F đến A là $FA = \sqrt{0,6^2 + y^2} \Rightarrow t_3 = \frac{\sqrt{0,6^2 + y^2}}{6}$.

Và quãng đường đi E đến F là $EF = 1 - (x + y) \Rightarrow t_4 = \frac{1 - (x + y)}{10}$.

Vậy tổng thời gian An đi là $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$.

$$\Rightarrow t = T(x; y) = \frac{1}{10} + \frac{\sqrt{0,6^2 + x^2}}{6} + \frac{\sqrt{0,6^2 + y^2}}{6} + \frac{1 - (x + y)}{10}.$$

Đến đây ta cần tìm $\min T(x; y)$.

$$\text{Ta có } T(x; y) = \frac{1}{10} + \frac{\sqrt{0,6^2 + x^2}}{6} + \frac{0,5 - x}{10} + \frac{\sqrt{0,6^2 + y^2}}{6} + \frac{0,5 - y}{10} = \frac{1}{10} + f(x) + f(y).$$

$$\text{Xét hàm số: } f(u) = \frac{\sqrt{0,6^2 + u^2}}{6} + \frac{0,5 - u}{10}, \quad 0 < u < 1.$$

$$\text{Ta có: } f'(u) = \frac{u}{6\sqrt{0,6^2 + u^2}} - \frac{1}{10}, f'(u) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{0,6^2 + u^2} = \frac{5u}{3} \Leftrightarrow u = \frac{9}{20}.$$

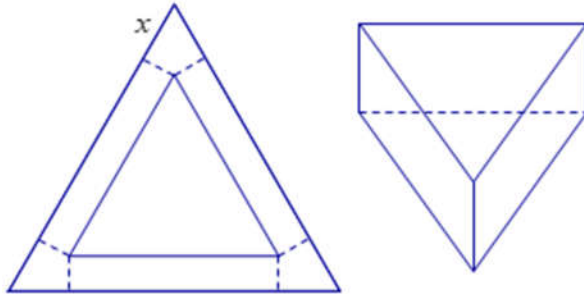
$$\text{Lập bảng biến thiên ta có: } \min_{u \in (0;1)} f(u) = f\left(\frac{9}{20}\right) = \frac{13}{100}.$$

$$\text{Do đó } T(x; y) = \frac{1}{10} + f(x) + f(y) \geq \frac{1}{10} + \frac{13}{100} + \frac{13}{100} = \frac{9}{25} (h) = 21,6 \text{ (phút)}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = \frac{9}{20}$.

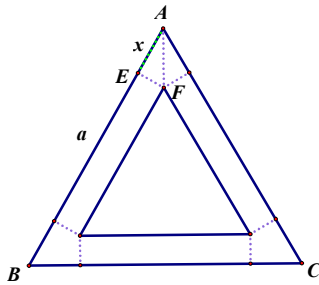
Câu 51. (THPT Bắc Đông Quan - Thái Bình 2025) Một người muốn tạo một hộp đựng quà khối lăng trụ tam giác đều, không có nắp bằng cách cắt ba góc của một tam giác đều cạnh bằng a các đoạn bằng x , $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$ như hình vẽ, rồi gấp lại tạo thành khối lăng trụ tam giác đều. Thể tích khối

lăng trụ lớn nhất khi $x = \frac{a}{b}$. Tìm b .



Lời giải

Đáp án: 6



Tam giác AEF vuông tại E có $EF = AE \cdot \tan 30^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

EF cũng là đường cao của hình lăng trụ tam giác đều được tạo thành.

Lại có, đáy của hình lăng trụ được tạo thành là tam giác đều có cạnh bằng $a - 2x$.

$$\Rightarrow S = \frac{(a-2x)^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Nên thể tích khối lăng trụ $V = \frac{(a-2x)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{(a-2x)^2 x}{4}, \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

$$V' = \frac{1}{4}(a-2x)(a-6x); V' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}$$

Bảng biến thiên

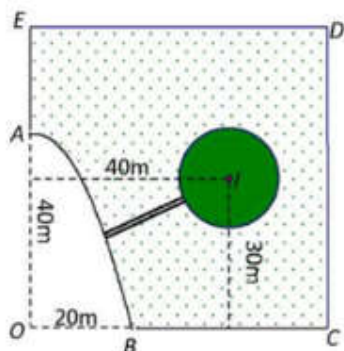
x	0	$\frac{a}{6}$	$\frac{a}{2}$
V'		+	-
V	0	$\frac{a^3}{54}$	0

Vậy, thể tích khối lăng trụ lớn nhất khi $x = \frac{a}{6}$. Nên $b = 6$.

Câu 52. (Liên trường THPT Ninh Bình 2025) Một cái ao có hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn bán kính 12 m, người ta muốn bắc một cây cầu từ bờ AB của ao đến

vườn. Hỏi độ dài ngắn nhất l (đơn vị mét) của cây cầu là bao nhiêu (làm tròn đến chữ số hàng phần chục), biết:

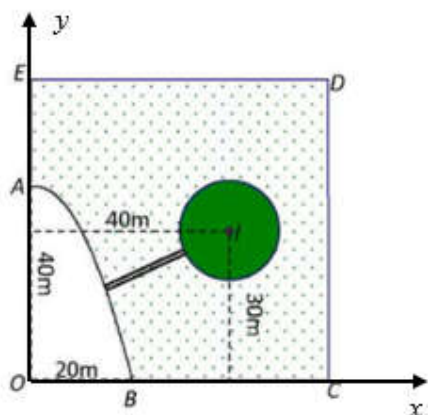
- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;
- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40 m và 20 m;
- Tâm I của mảnh vườn cách đường thẳng AE và BC lần lượt là 40 m và 30 m.



Lời giải

Đáp số: 15,7.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ sau (mỗi đơn vị trên trục tọa độ tương ứng với 1m):



Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm $A \in Oy$ nên phương trình Parabol (P) chứa bờ AB có dạng $y = ax^2 + c$, $(a, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

$$\text{Do } (P) \text{ đi qua điểm } A(0; 40) \text{ và } B(20; 0) \text{ nên ta có: } \begin{cases} 40 = a \cdot 0^2 + c \\ 0 = a \cdot 20^2 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 40 \\ a = -\frac{1}{10} \end{cases}.$$

Khi đó ta có phương trình (P) là: $y = -\frac{1}{10}x^2 + 40$.

Đường tròn tâm $I(40; 30)$, bán kính $R = 12$ có phương trình là: $(x - 40)^2 + (y - 30)^2 = 144$

Ta có: $f(0) = 8$; $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 4 + 2\sqrt{3}$; $f(4) = 4\sqrt{5}$. Do đó, $\min_{[0;4]} f(x) = 4\sqrt{3} + 2 \approx 7,46 \text{ (km)}$.

Nguyễn Bảo Vương