CHINH PHỤC 9+ TOÁN CÙNG THẦY HUY HƯỚNG NỘI

CHUỖI CHINH PHỤC 10 CÂU CUỐI

Thầy Lương Văn Huy - Học Toán cùng người hướng nội

NỘI DUNG DAY 02

CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: [10 CÂU CUỐI - DAY 02] Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16$ và điểm $A(-1;-1;-1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ và bán kính $R=4$.

b) Với I là tâm của mặt cầu (S), phương trình đường thẳng IA là $\begin{cases}x=2+3t\\y=3+4t\\z=-1+t\end{cases}$.

c) Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $B(2;3;3)$ là $z=3$.

d) Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là $3x+4y-2=0$.

Lời giải

a) Đúng

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ và bán kính $R=4$.

b) Sai

Với I là tâm của mặt cầu (S), phương trình đường thẳng IA là

Ta có: $\overrightarrow{IA}=(-3;-4;0)$

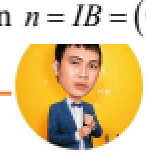
Đường thẳng IA đi qua điểm $I(2;3;-1)$ và nhận véctơ $\overrightarrow{IA}=(-3;-4;0)$ làm véctơ chỉ phương. Vậy phương trình của IA là $\begin{cases}x=2-3t\\y=3-4t\\z=-1\end{cases}$.

c) Đúng

Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $B(2;3;3)$ là $z=3$.

Ta có: $\overrightarrow{IB}=(0;0;4)$.

Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $B(2;3;3)$ có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{IB}=(0;0;4)$.



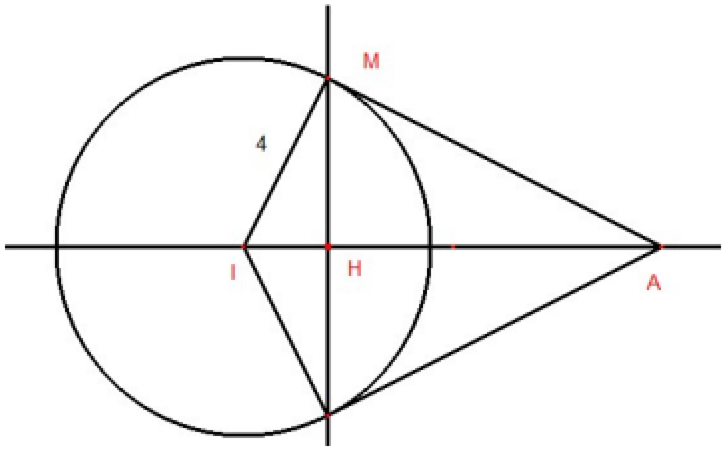
Suy ra phương trình mặt phẳng là: $0(x-2)+0(y-3)+4(z-3)=0 \Leftrightarrow z=3$.

d) Đúng

Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S). M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là $3x+4y-2=0$.

(S) có tâm $I(2;3;-1)$; bán kính $R=4$

$A(-1;-1;-1) \Rightarrow \overrightarrow{IA}=(-3;-4;0)$, tính được $IA=5$.



Mặt phẳng cố định đi qua điểm H là hình chiếu của M xuống IA và nhận $\overrightarrow{IA}=(-3;-4;0)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do hai tam giác MHI và AMI đồng dạng nên tính được $IM^2=IH.IA \Rightarrow IH=\frac{IM^2}{IA}=\frac{16}{5}$, từ đó tính được $\overrightarrow{IH}=\frac{16}{25}\overrightarrow{IA}$ tìm được $H\left(\frac{2}{25};\frac{11}{25};-1\right)$

Mặt phẳng cần tìm có phương trình là: $-3\left(x-\frac{2}{25}\right)-4\left(y-\frac{11}{25}\right)+0(z+1)=0 \Leftrightarrow 3x+4y-2=0$.

Câu 2: [10 CÂU CUỐI - DAY 02] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(1;-3;4)$, đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z+2=0$.

a) Điểm M thuộc đường thẳng d.

b) Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-3t \\ z=2+4t \end{cases}$

c) Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P).

d) Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (P) có phương trình $d':\frac{x}{14}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{8}$.

Lời giải

a) Thay tọa độ điểm M vào phương trình đường thẳng d ta có: $d:\frac{1}{1}=\frac{-3}{-1}=\frac{3}{2}$. Vậy $M\notin d$ nên **a sai.**

b) Đường thẳng Δ vuông góc với (P) nên Δ có VTCP là $\vec{u}_{\Delta}=\vec{n}_{P}=(1;2;-2)$

Δ đi qua M nên phương trình tham số của Δ là $\begin{cases}x=1+t\\y=-3+2t\\z=4-2t\end{cases}$ suy ra **b) sai**

c) Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}_{d}=(1;-1;2)$, (P) có VTPT là $\vec{n}_{P}=(1;2;-2)$

$\Rightarrow \vec{u}_{d}.\vec{n}_{P}=1-2-4=-5\neq 0$ nên d cắt (P) suy ra **c) sai**

d)

Gọi d' là hình chiếu của d lên (P);

• Tọa độ $A=d\cap(P)$ thỏa $\begin{cases}x+2y-2z+2=0\\\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}=\frac{x+2y-2z+2}{1-2-4}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=1\end{cases}\Rightarrow A(0;0;1)$.

• Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P)

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(1;-1;2)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_p}=(1;2;-2)$.

Suy ra (Q) có VTPT là $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_P}\right]=(-2;4;3)$.

• Khi đó do $d'=(P)\cap(Q)$ nên $\overrightarrow{u_{d'}}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(14;1;8)$ là vectơ chỉ phương của (d').

• Đường thẳng d' đi qua $A(0;0;1)$ và có VTCP là $\overrightarrow{u_{d'}}=(14;1;8)$ có phương trình chính tắc là $d':\frac{x}{14}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{8}$.

Vậy **d) đúng.**

Câu 3: [10 CÂU CUỐI - DAY 02] Trong không gian $Oxyz$, cho cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Xét tinh đúng sai của các mệnh đề sau

a) Véctơ chỉ phương của đường thẳng (d) là $\vec{u}=(-1;1;-1)$.

b) Đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng (d) có phương trình là $\frac{x-5}{1}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-1}{1}$.

c) Đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng $(\alpha):3x+y-2z-2=0$.

d) Biết (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng $3x+z+2=0$.

Lời giải

a) Đúng

Ta thấy ngay véctơ chỉ phương của đường thẳng (d) là $\vec{u}=(-1;1;-1)$.

b) Đúng

Ta thấy đường thẳng $(\Delta):\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ có VTCP là $\vec{u}=(1;-1;1)$ nên (Δ) song song với (d)

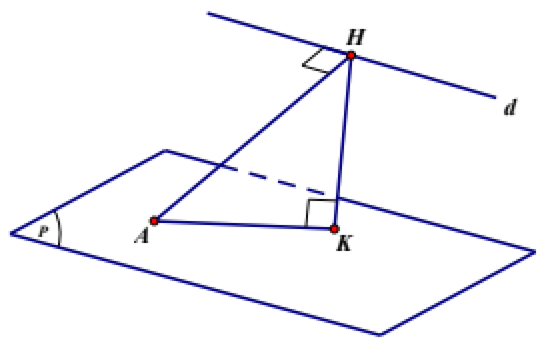
Thay tọa độ điểm A vào phương trình (Δ) ta thấy $(\Delta):\dfrac{2-5}{1}=\dfrac{-1+4}{-1}=\dfrac{-2-1}{1}$ nên $A\in(\Delta)$

c) Đúng

Lấy $M(1;1;1), N(2,0,2)\in(d)$. Thay tọa độ điểm $M(1;1;1), N(2,0,2)$ vào phương mặt phẳng $(\alpha): 3x+y-2z-2=0$ ta thấy thỏa mãn.

Vậy đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng $(\alpha): 3x+y-2z-2=0$.

d) Đúng



Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d. Ta tìm được điểm $H(1;1;1)$.

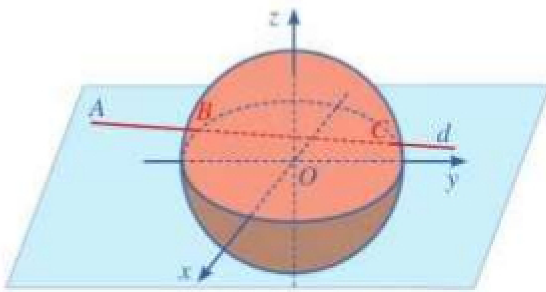
Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và (P) song song với đường thẳng d. Gọi K là hình chiếu của H lên mặt phẳng (P). Do $d\ //\ (P)$ nên ta có $d(d,(P))=d(H,(P))=HK$.

Ta luôn có bất đẳng thức $HK\le HA$. Như vậy khoảng cách từ (d) đến (P) lớn nhất bằng AH. Và khi đó (P) nhận $\overrightarrow{AH}=(-1;2;3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do (P) đi qua $A(2;-1;-2)$ nên ta có phương trình của (P) là: $x-2y-3z-10=0$.

Do đó (P) vuông góc với mặt phẳng có phương trình: $3x+z+2=0$.

Câu 4: [10 CÂU CUỐI - DAY 02] Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay đang chuyển động với vận tốc $900\,km/h$ theo đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=-1000+100t\\ y=-300+80t\\ z=100\sqrt{11}\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu . Các mệnh đề sau đây **đúng** hay **sai**?



a) Ranh giới vùng phát sóng bên ngoài của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng $300\,km$.

b) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2+y^2+z^2=360000$.

c) Máy bay đang chuyển động theo đường thẳng d đến vị trí điểm $M\left(-500;100;100\sqrt{11}\right)$. Vị trí này nằm ngoài vùng kiểm soát không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.

d) Thời gian kể từ khi đài kiểm soát không lưu phát hiện may bay đến khi máy ra khỏi vùng kiểm soát không lưu là $\frac{4}{3}$ giờ.

Lời giải

a) Sai.

Vì đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$ nên ranh giới vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng $600\,km$.

b) Đúng.

Ranh giới vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu tâm $O(0;0;0)$ có bán kính bằng $R=600$ có phương trình là: $x^2+y^2+z^2=360000$

c) Đúng.

Ta có $OM=\sqrt{(-500)^2+(100)^2+\left(100\sqrt{11}\right)^2}\approx 608>600=R$.

Vậy, tại vị trí điểm $M\left(-500;100;100\sqrt{11}\right)$ máy bay nằm ngoài vùng kiểm soát không không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.

d) Sai.

Thay $d:\begin{cases}x=-1000+100t\\ y=-300+80t\\ z=100\sqrt{11}\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ vào phương trình mặt cầu $x^2+y^2+z^2=360000$, ta có:

$$(100t-1000)^2+(80t-300)^2+\left(100\sqrt{11}\right)^2=360000$$

$$\Leftrightarrow 164t^2-2480t+8400=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=10\Rightarrow B\left(0;500;100\sqrt{11}\right)\\ t=\dfrac{210}{41}\Rightarrow C\left(-\dfrac{20000}{41};\dfrac{4500}{41};100\sqrt{11}\right)\end{array}\right.$$

Quãng đường máy bay di chuyển trong vùng kiểm soát không lưu là:

$$BC=\sqrt{\left(-\frac{20000}{41}\right)^2+\left(\frac{4500}{41}-500\right)^2+\left(100\sqrt{11}-100\sqrt{11}\right)^2}\approx 625\,km.$$

Vậy thời gian máy bay di chuyển theo đường thẳng d và trong phạm vi kiểm soát không lưu của sân bay là: $\frac{625}{900}=\frac{25}{36}$ giờ.

CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN. Thí sinh trả lời từ câu 17 đến câu 22.

Câu 5: [10 CÂU CUỐI - DAY 02] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng qua $M(2;1;3)$, $A(0;0;4)$ và cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại B, C khác O thỏa mãn diện tích tam giác OBC bằng 1?

Lời giải

ĐS: 2

Gọi $B(a;0;0)$, $C(0;b;0)$ lần lượt là giao điểm của (P) với các trục Ox,Oy.

Phương trình mặt phẳng $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{4}=1$.

Vì $M(2;1;3)$ thuộc (P) nên ta có $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{4}=1 \Leftrightarrow \frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4a+8b=ab$.

Diện tích tam giác $S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}OB.OC=\frac{1}{2}|a|.|b|=\frac{1}{2}|ab|=1\Leftrightarrow |ab|=2$

Xét hệ phương trình $\begin{cases}4a+8b=ab\\ ab=2\end{cases},(I)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4a+8b=2\\ ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+4b=1\\ 2ab=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=1-4b\\ (1-4b)b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=1-4b\\ 4b^2-b+4=0,(vn)\end{cases}$. Hệ vô nghiệm.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}4a+8b=ab\\ ab=-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4a+8b=-2\\ ab=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+4b=-1\\ 2ab=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=-1-4b\\ (-1-4b)b=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=-1-4b\\ 4b^2+b-4=0\end{cases}$. Hệ có hai nghiệm.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 6: [10 CÂU CUỐI - DAY 02] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;-2;1)$, $N(0;1;3)$ và $P(a,b,5)$. Tính $a+b$ để đường thẳng Δ đi qua hai điểm M,N cũng đi qua điểm P

Lời giải

ĐÁP SỐ:

3			

Ta có: $\overrightarrow{MN}=(-1;3;2)$

Đường thẳng Δ đi qua 2 điểm M,N có phương trình $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$

Vì đường thẳng Δ đi qua điểm P nên $\frac{a}{-1}=\frac{b-1}{3}=\frac{5-3}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=4\end{cases}$

Câu 7: [10 CÂU CUỐI - DAY 02] Trong không gian, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để phương trình $x^2+y^2+z^2+2(m+2)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$ là phương trình mặt cầu.

Lời giải

ĐÁP SỐ:

7				

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$(m+2)^2+(m-1)^2-3m^2+5>0$

$\Leftrightarrow m^2-2m-10<0$

$\Leftrightarrow 1-\sqrt{11}<m<1+\sqrt{11}$

Theo bài ra $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-2;-1;0;1;2;3;4\}\Rightarrow$ có 7 giá trị của m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 8: [10 CÂU CUỐI - DAY 02] Khi gắn hệ toạ độ $Oxyz$ vào một căn nhà sao cho nền nhà thuộc mặt phẳng (Oxy), người ta coi mỗi mái nhà là một phần của mặt phẳng và thấy ba vị trí A, B, C ở mái nhà bên phải lần lượt có toạ độ $(2;\ 0;\ 4)$, $(4;\ 0;\ 3)$ và $(4;\ 9;\ 3)$. Góc giữa mái nhà bên phải và nền nhà bằng bao nhiêu độ ?

Lời giải

ĐÁP SỐ:

2	7		

Ta có: mặt phẳng (ABC) và (Oxy) có vectơ pháp tuyến lần lượt là: $\vec{n}_1=(1;\ 0;\ 2)$, $\vec{n}_2=(0;\ 0;\ 1)$. Từ đó, góc có α giữa mái nhà bên phải và nền nhà có $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Suy ra $\alpha\approx 27^\circ$.

Câu 9: [10 CÂU CUỐI - DAY 02] Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(5;\ 0;\ 5)$ đến vị trí $B(10;\ 10;\ 3)$ và hạ cánh tại vị trí $M(a;\ b;\ 0)$. Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu ?

Lời giải

ĐÁP SỐ:

4	2	,	5

Ta có: phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x-5}{5}=\frac{y}{10}=\frac{z-5}{-2}$. Vì M thuộc AB nên tồn tại số thực t sao cho $M(5t+5;\ 10t;\ -2t+5)$. Ngoài ra, M thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $-2t+5=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$.

Suy ra $M(17,5;\ 25;\ 0)$. Vậy $a+b=17,5+25=42,5$.

Câu 10: [10 CÂU CUỐI - DAY 02] Một người đứng ở mặt đất điều khiển hai flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí A cách vị trí điều khiển $150\,\text{m}$ về phía nam và $200\,\text{m}$ về phía đông, đồng thời cách mặt đất $50\,\text{m}$. Flycam II ở vị trí B cách vị trí điều khiển $180\,\text{m}$ về phía bắc và $240\,\text{m}$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $60\,\text{m}$.

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông

góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét ?

Lời giải

ĐÁP SỐ:

5	5	0	

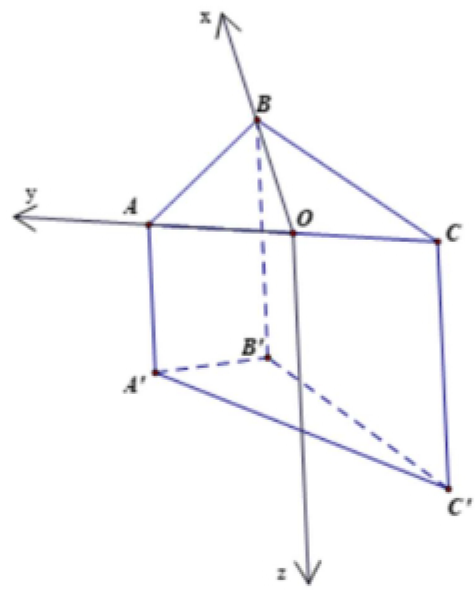
Ta có: Vị trí A, B có tọa độ lần lượt là: $(150; 200; 50)$, $(-180; -240; 60)$. Suy ra khoảng cách giữa hai flycam đó bằng:

$AB = \sqrt{(-180-150)^2 + (-240-200)^2 + (60-50)^2} \approx 550(\text{m})$

Câu 11: [10 CÂU CUỐI - DAY 02] Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 6 m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 2 m; 3 m; 4 m. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ?

Lời giải

Trả lời: 18,4



Gọi ba điểm trên mặt nước lần lượt là A, B, C và ba điểm tương ứng dưới đáy bể là A', B', C' sao cho $AA' = 2, BB' = 3, CC' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, trong đó O là trung điểm AC.

Ta có $A(0;3;0), B\left(3\sqrt{3};0;0\right), C(0;-3;0), A'(0;3;2), B'\left(3\sqrt{3};0;3\right), C'(0;-3;4)$.

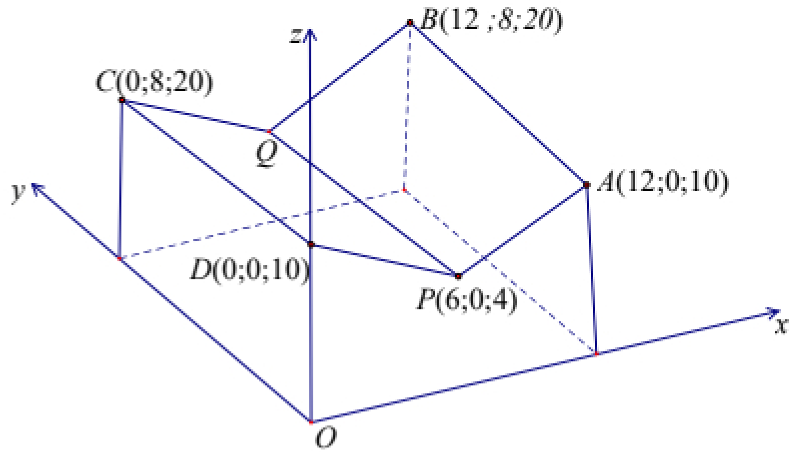
Khi đó $\overrightarrow{A'B'} = \left(3\sqrt{3};-3;1\right), \overrightarrow{A'C'} = (0;-6;2)$, suy ra $\left[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right] = \left(0;-6\sqrt{3};-18\sqrt{3}\right)$.

Do đó mặt phẳng đáy bể có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0;1;3)$.

Mặt phẳng nằm ngang chính là mặt phẳng $(Oxy): z = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$.

Do đó $\cos\left((A'B'C'),(Oxy)\right) = \dfrac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \dfrac{|0.0+1.0+1.3|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \left((A'B'C'),(Oxy)\right) \approx 18,4°$.

Câu 12: [10 CÂU CUỐI - DAY 02] Hình vẽ dưới đây minh họa hình ảnh hai mái nhà của một nhà kho trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$.



Các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất. Biết tọa độ vectơ $\overrightarrow{PQ}=(x;y;z)$, tính $x+y+z$.

Lời giải

Trả lời: 18

Hai mặt phẳng tương ứng mỗi mái nhà là (ABP) và (CDP).

Do (ABP) có cặp VTCP là $\overrightarrow{AB}(0;8;10)$, $\overrightarrow{AP}(-6;0;-6)$

$\Rightarrow (ABP)$ có VTPT là $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\right]=(-48;-60;48)$.

Mà (ABP) đi qua $P(6;0;4)$

$\Rightarrow (ABP): -48(x-6)-60(y-0)+48(z-4)=0 \Leftrightarrow 4x+5y-4z-8=0$.

Do (CDP) có cặp VTCP là $\overrightarrow{DP}(6;0;-6)$, $\overrightarrow{DC}(0;8;10)$

$\Rightarrow (CDP)$ có VTPT là $\left[\overrightarrow{DP},\overrightarrow{DC}\right]=(48;-60;48)$.

Mà (CDP) đi qua $P(6;0;4) \Rightarrow (CDP): 48(x-6)-60(y-0)+48(z-4)=0 \Leftrightarrow 4x-5y+4z-40=0$
.

Vì các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất nên với hệ tọa độ trên, ta có $(CBQ): y-8=0$.

Ta thấy Q thuộc cả 3 mặt phẳng (ABP), (CDP) và (CBQ)

Suy ra tọa độ Q là nghiệm của hệ phương trình:

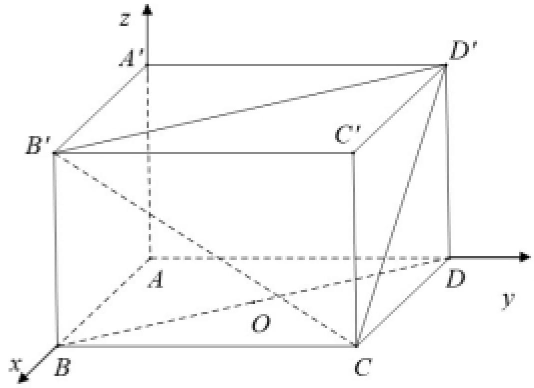
$$\begin{cases}4x+5y-4z-8=0\\4x-5y+4z-40=0\\y-8=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=6\\y=8\\z=14\end{cases} \Rightarrow Q(6;8;14) \Rightarrow \overrightarrow{PQ}(0;8;10).$$

Vậy: $x+y+z=18$.

Câu 13: **[10 CÂU CUỐI - DAY 02]** Trong một trò chơi mô phỏng bắn súng, một người chơi đặt điểm ngắm tại điểm O là giao điểm của AC và BD trong căn phòng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có kích thước $AB=50(m), AD=35(m), AA'=10(m)$. Người chơi có nhiệm vụ từ điểm ngắm đã đặt bắn trúng một mục tiêu di động trên mặt phẳng $(CB'D')$ Tính khoảng cách ngắn nhất từ điểm ngắm đó đến mục tiêu .

Lời giải

Trả lời: 9,44



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có $B'(50;0;10), D'(0;35;10), C(50;35,0)$ và $O(25;17,5;0)$

Mặt phẳng $(CB'D')$ nhận $\overrightarrow{B'D'}=(-50;35;0)$ và $\overrightarrow{CB'}=(0;-35;10)$ làm cặp vectơ chỉ phương nên $(CB'D')$ nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{CB'}\right]=(350;500;1750)$ làm vectơ pháp tuyến n

Mặt khác, $(CB'D')$ qua $D'(0;35;10)$ nên có phương trình $35x+50y+175z-3500=0$

Do mục tiêu di động trên mặt phẳng $(CB'D')$ nên khoảng cách ngắn nhất từ điểm ngắm đến mục tiêu chính là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng $(CB'D')$

Ta có $d(O;(CB'D'))=\dfrac{|35.25+50.17,5+175.0-3500|}{\sqrt{35^2+50^2+175^2}}\approx 9,44(m)$

Vậy khoảng cách ngắn nhất từ điểm ngắm đến mục tiêu là khoảng $9,44$ mét.

Câu 14: [10 CÂU CUỐI - DAY 02] Một chiếc đèn đường có bán kính phủ sáng là 700 m và vị trí của bóng đèn được xác định trên hệ trục toạ độ $Oxyz$ là $I(2;5;5)$ và gốc toạ độ O là một điểm trên mặt đất. Giả sử cột đèn có dạng đường thẳng đứng, hướng lên và mặt đất là mặt phẳng (Oxy). Người đặt một tấm bạt hứng sáng đủ lớn sao cho tấm bạt đi qua gốc toạ độ và một điểm nằm trên cột đèn, cách bóng đèn 400m, đồng thời tấm bạt tạo với mặt đất một góc α có $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{30}}$. Xem tấm bạt là một mặt phẳng. Khi đó, ánh sáng từ đèn được tấm bạt hứng vào tạo thành một hình tròn. Bán kính của hình tròn đó bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

Trả lời: 555

Gọi tấm bạt là một mặt phẳng (P), theo đề ta có (P) đi qua điểm $O(0;0;0)$, điểm $A(2;5;1)$ và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc α có $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{30}}$.

Ta có $\sin(OA;(Oxy)) = \frac{|2.0+5.0+1.0|}{\sqrt{2^2+5^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$, suy ra $(OA;(Oxy)) = ((P);(Oxy))$.

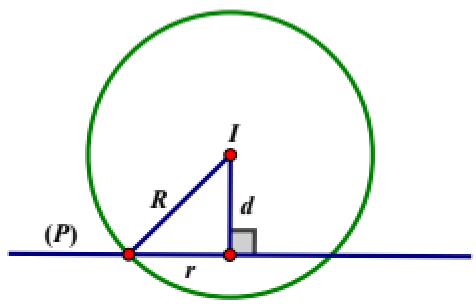
Suy ra giao tuyến của (P) và (Oxy) vuông góc với OA.

Gọi $d = (P)\cap(Oxy) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{u_{OA}} \\ \overrightarrow{u_d} \perp \vec{k} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{u_{OA}};\vec{k}\right] = (5;-2;0)$.

Ta có $\begin{cases} d\subset(P) \\ OA\subset(P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{u_d} \\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{u_{OA}} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{u_{OA}}\right] = (-2;-5;29)$.

Vậy $(P): -2x-5y+29z=0$.

Do bóng đèn có bán kính phủ sáng là 700 m nên vùng ánh sáng chiếu ra có dạng một hình cầu tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=7$. Ta có: $d(I;(P)) = \frac{|-2.2-5.3+29.5|}{\sqrt{2^2+5^2+29^2}} = \sqrt{\frac{2646}{145}}$.

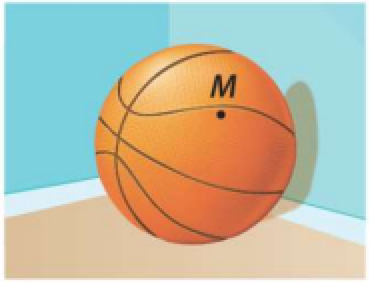


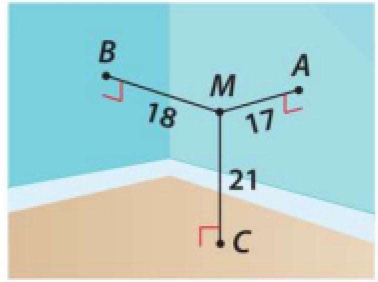
Gọi bán kính đường tròn giao tuyến là r, áp dụng định lý Pythagore, ta có:

$$r = \sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{7^2 - \left(\sqrt{\frac{2646}{145}}\right)^2} \approx 5,55.$$

Vậy bán kính đường tròn thu được trên tấm bạt là 555 .

Câu 15: [10 CÂU CUỐI - DAY 02] Một quả bóng rổ được đặt ở một góc của căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm và tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó thì có một điểm trên quả bóng có khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm, 21 cm . Hỏi độ dài đương kính của quả bóng bằng bao nhiêu cm biết rằng quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm? *Kết quả là tròn đến một chữ số thập phân.*

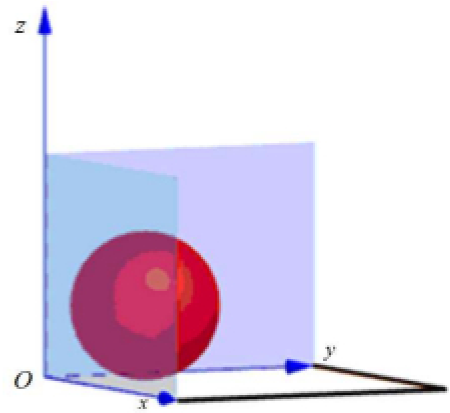




Lời giải

Trả lời: 23,9

Ta đặt hệ trục vào căn phòng sao cho có hai bức tường là mặt $(Oxz),(Oyz)$, và nền là (Oxy).



Vậy bài toán dẫn đến việc tìm đường kính của mặt cầu tiếp xúc với 3 mặt phẳng toạ độ và chứa điểm $M(17;18;21)$.

Ta có thể gọi phương trình mặt cầu là $(S):(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$, với $a>0$.

Do $M(17;18;21)\in(S)$ nên $(17-a)^2+(18-a)^2+(21-a)^2=a^2$

$$\Rightarrow 2a^2-112a+1054=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=28-\sqrt{257} \\ a=28+\sqrt{257} \end{array}\right..$$

Vì quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm nên $a=28-\sqrt{257}$ thỏa.

Vậy đường kính quả bóng bằng $2a=56-2\sqrt{257}\approx 23,9(\text{cm})$.