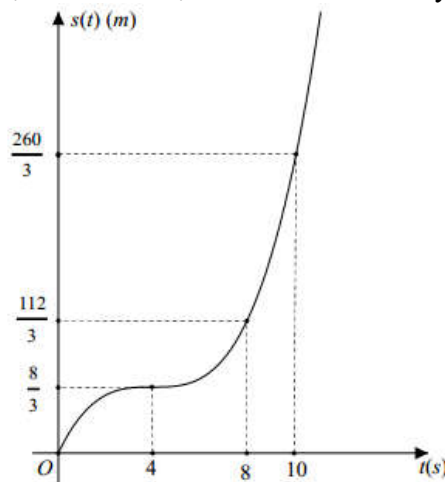


CHỦ ĐỀ 10. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM GIẢI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG**• PHẦN 3. TRẢ LỜI NGẮN**

CÂU HỎI (vì là ngân hàng được tách ra từ các trường, cho nên có trùng lặp câu hỏi thì do các trường tham khảo nhau)

BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

- Câu 1.** (THPT Đào Duy Từ - Thanh Hóa 2025) Một vật chuyển động theo quy luật $S = -t^3 + 18t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu (m/s)?
- Câu 2.** (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Trên một trục số thẳng đứng có chiều dương hướng lên trên, một chất điểm bắt đầu chuyển động dọc theo trục số. Giả sử, tại thời điểm t giây ($t \geq 0$) tính từ lúc bắt đầu chuyển động thì vị trí $s(t)$ của chất điểm trên trục số thẳng đứng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - 18t^2 + 81t$ (mét). Trong 15 giây chuyển động đầu tiên thì chất điểm di chuyển được quãng đường bằng bao nhiêu mét?
- Câu 3.** (THPT Nguyễn Đăng Đạo - Bắc Ninh 2025) Một vật chuyển động. Quãng đường $s(t)$ (tính theo mét) vật đi được sau khoảng thời gian t (tính theo giây), $t \geq 0$, được mô tả là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



- Hỏi trong 10 giây đầu tiên, khoảng thời gian vật chuyển động nhanh dần kéo dài bao nhiêu giây?
- Câu 4.** (THPT Gia Bình - Bắc Ninh 2025) Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 2$. Trong đó, t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời nhỏ nhất bằng bao nhiêu m/s trong 5 giây đầu tiên đó?
- Câu 5.** (THPT Thuận Thành 1&2 - Bắc Ninh 2025) Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?
- Câu 6.** (Chuyên Thái Bình 2025) Một vật chuyển động trên đường thẳng có quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian t (giây) được cho bởi phương trình $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ (m), với $0 \leq t \leq 12$. Tính từ khi bắt đầu di chuyển đến thời điểm vận tốc của vật đạt giá trị lớn nhất thì vật di chuyển được quãng đường dài bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng đơn vị)?
- Câu 7.** (Cụm trường Nguyễn Hiền - Lê Hồng Phong - Quảng Nam 2025) Ngày khai giảng năm học 2024–2025. Học sinh khối 12 trường THPT Nguyễn Hiền thả chùm bóng bay gắn thông điệp “Học Sinh khối 12 chiến thắng CT2018”. Ước tính độ cao h (tính bằng km) của chùm bóng bay

so với mặt đất vào thời điểm t (đơn vị giờ) được cho bởi công thức $h(t) = -t^3 + 3t^2, (0 \leq t \leq 3)$.

Chùm bóng bay đạt độ cao lớn nhất so với mặt đất là: $a(km)$. Tìm a ?

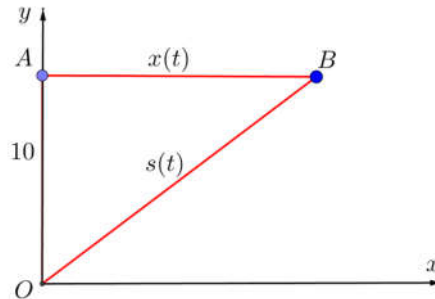
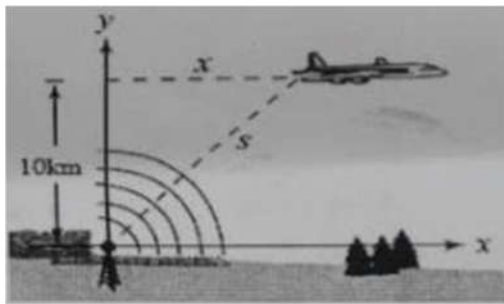
Câu 8. (Sở Phú Thọ 2025) (Sở Phú Thọ 2025) Trong một trò chơi điện tử, hai bạn Tít và Mít thi xem ai chạy được quãng đường xa hơn. Tít chạy với vận tốc $v_T(t) = 5\sqrt{t}$ (km/h), quãng đường Mít chạy được cho bởi phương trình

$$s_M(t) = 5t - \frac{5}{2\pi} \sin(2\pi t) \text{ (km)} \text{ (với } t \text{ là thời gian tính theo giờ)}. \text{ Nếu cuộc đua kết thúc khi Tít}$$

hoặc Mít chạy được $10km$ đầu tiên thì khoảng cách giữa hai bạn là bao nhiêu kilômét (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 9. (Cụm trường THPT Hải Dương 2025) Ngày khai giảng năm học 2024 – 2025, học sinh khối 12 trường THPT Thanh Miện thả chùm bóng bay gắn thông điệp “Học Sinh khối 12 chiến thắng CT2018”. Ước tính độ cao h (tính bằng km) của chùm bóng bay so với mặt đất vào thời điểm t (đơn vị giờ) được cho bởi công thức $h(t) = -t^3 + 3t^2$ ($0 \leq t \leq 3$). Chùm bóng bay đạt độ cao lớn nhất so với mặt đất là $a(km)$. Tìm a .

Câu 10. (Chuyên KHTN Hà Nội 2025) Một máy bay đang bay ở độ cao $10km$ so với mặt đất, thu phát tín hiệu qua một ăng-ten ra đa như hình vẽ. Khi máy bay cách ra đa $16km$, ra đa phát hiện khoảng cách giữa máy bay và ra đa thay đổi với tốc độ $546km/h$. Tìm vận tốc của máy bay (đơn vị km/h , kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 11. (Sở Tuyên Quang 2025) Một vật chuyển động theo quy luật $s = s(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 10t + 2$ với $t \geq 0$ (giây) là khoảng thời gian từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là vị trí của vật trong khoảng thời gian đó. Tính quãng đường mà vật đi được khi vận tốc đạt $20m/s$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Câu 12. (THPT Hương Hóa - Quảng Trị 2025) Kính viễn vọng Hubble được tàu không gian Discovery đưa vào sử dụng ngày 24/4/1990. Mô hình vận tốc của tàu trong sứ mệnh này, từ lúc rời bệ phóng ($t = 0$ giây) cho đến khi được tên lửa đẩy nhanh khỏi bệ tại thời điểm $t = 126$ giây, được xác định bởi công thức $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083$ (feet/s).



(Nguồn: James Stewart, J (2015). Calculus. Cengage Learning 8th edition, p. 282)

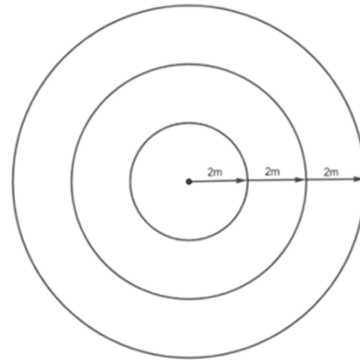
Tính gia tốc lớn nhất của tàu trong khoảng thời gian này (đơn vị: feet/s², làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

- Câu 13. (THPT Hoàng Hóa 2-Thanh Hóa 2025)** Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 10t + 2$ (với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó). Tính quãng đường mà vật đi được khi vận tốc đạt 20 m/s (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).
- Câu 14. (THPT Ngô Sĩ Liên - Bắc Giang 2025)** Một chất điểm chuyển động biết quãng đường biểu diễn theo quỹ đạo có phương trình $s(t) = t^3 - 6t^2 + 30t$ (trong đó quãng đường s tính bằng mét (m), thời gian t tính bằng giây (s)). Tìm tốc độ nhỏ nhất của chất điểm (đơn vị (m/s)).
- Câu 15. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh 2025)** Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)(km)$ là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2te^{3t+1}(km)$. Hỏi vận tốc của tên lửa sau 1 giây là bao nhiêu (biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian) $ae^b(km/s)$ tính $a+2b$?

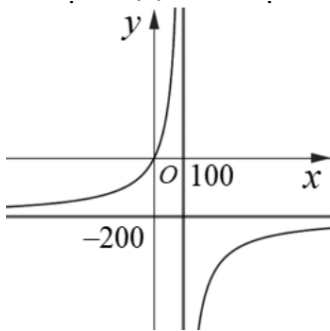
Trả lời: 18

BÀI TOÁN NỒNG ĐỘ - QUẦN THỂ

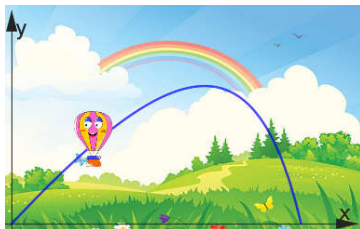
- Câu 16. (Sở Hà Tĩnh 2025)** Giả sử tỷ lệ sinh của Tỉnh A tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = \frac{200}{1+4e^{-t}}$; $t \geq 0, t \in \mathbb{N}$, trong đó thời gian t được tính bằng tháng. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng dân số của tỉnh A . Hỏi sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng trưởng của dân số tỉnh A là lớn nhất?
- Câu 17. (THPT Cẩm Xuyên - Hà Tĩnh 2025)** Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1+5e^{-t}}$, $t \geq 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành thì tốc độ bán hàng đạt lớn nhất bằng bao nhiêu?
- Câu 18. (THPT Cẩm Xuyên - Hà Tĩnh 2025)** Sau khi phát hiện ra dịch bệnh vi rút Đậu mùa Khỉ, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ khi xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ x là $f(x) = -x^3 + 18x^2$. Ta xem $f'(x)$ là tốc độ truyền bệnh tại thời điểm x . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ bao nhiêu?
- Câu 19. (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025)** Anh Nam có một cái ao diện tích $50m^2$ để nuôi cá điêu hồng. Vụ vừa qua, anh nuôi với mật độ 40 con / m^2 và thu được 3 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình anh thấy cứ thả giảm đi 8 con / m^2 thì mỗi con cá thành phẩm tăng thêm 0,5kg. Để tổng năng suất cao nhất thì vụ tới anh Nam nên mua bao nhiêu cá giống để thả? (giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)
- Câu 20. (Cụm trường THPT Hải Dương 2025)** Một đường ống dẫn dầu bị rò rỉ hình thành nên một mảng dầu loang hình tròn trên mặt biển. Tốc độ tăng của bán kính mảng dầu loang theo thời gian là $2m/h$. Khi đó tốc độ tăng của diện tích (tính theo m^2) của mảng dầu loang cũng phụ thuộc theo thời gian $t(h)$. Hỏi tại thời điểm bán kính mảng dầu loang là $25m$ thì tốc độ tăng diện tích mảng dầu loang theo thời gian là bao nhiêu m^2/h ? (Đáp số làm tròn đến hàng đơn vị)



- Câu 21.** (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2025) Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm môi trường từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí (triệu đồng) cần bỏ ra được mô hình hóa bởi hàm số có dạng $C(x) = \frac{ax+b}{-x+d}$ (như hình vẽ), ($0 \leq x < 100$). Tính chi phí chênh lệch (tỉ đồng) phải bỏ ra để loại bỏ 90% và loại bỏ 99% chất gây ô nhiễm từ khí thải của nhà máy.



- Câu 22.** (THPT Trục Ninh - Nam Định 2025) Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y = a$. Giá trị của a là bao nhiêu?
- Câu 23.** (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Nồng độ C của một loại hóa chất trong máu sau t giờ tiêm vào cơ thể được cho bởi công thức $C(t) = \frac{4t}{64+t^3}$ với $t \geq 0$. Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hóa chất trong máu là cao nhất? (kết quả làm tròn tới hàng phần trăm)
- Câu 24.** (THPT Nguyễn Khuyến - Lê Thánh Tông 2025) Đường đi của một khinh khí cầu được gắn trong hệ trục tọa độ là một đường cong bậc hai trên bậc nhất có đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ là $(1; 0)$ và $(8; 0)$ với đơn vị trên hệ trục tọa độ là $1 (km)$. Biết rằng điểm cực đại của đồ thị hàm số là điểm $(6; 5)$. Hỏi khi khinh khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất $3875 (m)$ thì khinh khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang bao nhiêu? (đơn vị: km)



- Câu 25.** (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ t của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi hàm số $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12000$ (con), $0 \leq t \leq 365$ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con. Ngày

- 25/11/2014 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).
- Câu 26. (THPT Tiên Du - Bắc Ninh 2025)** Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2002 được tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,075 nghìn người/năm?
- Câu 27. (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025)** Một bể chứa 3000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam/lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử nồng độ muối trong nước bể sau t phút được xác định bởi một hàm số $f(t)$ trên $t \in [0; +\infty)$ (gam/lít). Khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến bao nhiêu gam/lít.
- Câu 28. (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025)** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$, $t = 0, 1, 2, \dots, 25$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Giả sử khoảng thời gian mà tốc độ truyền bệnh giảm là từ ngày thứ m đến ngày thứ n . Khi đó $n - m$ bằng bao nhiêu?
- Câu 29. (THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc 2025)** Số lượng cá thể của một loài sinh vật phụ thuộc nhiệt độ môi trường sống và được sấp xỉ bởi hàm số $f(t) = 300 \cdot e^{\frac{t-3t^2}{100}}$, trong đó t là nhiệt độ môi trường xét từ 0° đến 60° . Hỏi số cá thể loài sinh vật trên nhiều nhất là bao nhiêu?
- Câu 30. (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025)** Một bể ban đầu chứa 160 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 10 lít nước vào bể, đồng thời cho vào bể 21 gam chất khử trùng (hòa tan). Đặt $f(t)$ gam/lít là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p .
- Câu 31. (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025)** Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1 + 5 \cdot e^{-t}}$, ($t \geq 0$), trong đó thời gian t được tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ là biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).
- Câu 32. (THPT Thuận Thành 1&2 - Bắc Ninh 2025)** Ông Thanh nuôi cá chim ở một ao có diện tích 50m^2 . Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20con/m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8con/m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên 0,5kg. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi).
- Câu 33. (THPT Lê Xoay - Vĩnh Phúc 2025)** Giả sử chiều cao (tính bằng cm) của một giống cây trồng (trong vòng một số tháng nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{200}{1 + 3e^{-t}}$, $t \geq 0$, trong đó thời gian t được tính bằng tháng kể từ khi hạt bắt đầu nảy mầm. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng chiều cao của giống cây đó. Biết rằng kể từ khi hạt giống bắt đầu nảy mầm thì sau t tháng, tốc độ tăng chiều cao của cây là lớn nhất. Tính t (làm tròn kết quả đến đến chữ số thập phân thứ nhất).
- Câu 34. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025)** Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) vượt khoảng cách 300km để tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6km/h . Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v\text{km/h}$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ trong đó c là hằng số cho trước. E tính bằng Jun. Tính vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên, để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất?

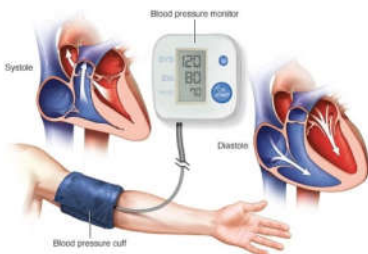
Câu 35. (Cụm Chương Mỹ - Thanh Oai 2025) Huyết áp là đại lượng để đo độ lớn của lực tác dụng lên thành mạch máu. Nó được đo bằng 2 chỉ số; huyết áp tâm thu (là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) và huyết áp tâm trương (là áp lực của máu lên thành động mạch khi tim giãn ra). Huyết áp khác nhau đáng kể giữa người này và người khác, nhưng huyết áp tiêu chuẩn là 120/80, nó có nghĩa là huyết áp tâm thu là 120mmHg và huyết áp tâm trương là 80mmHg. Giả sử rằng trái tim của một người đập 70 lần một phút, huyết áp riêng P sau t giây có thể được mô tả bằng hàm số $P(t) = 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$. Trong thời gian từ 0 giây đến 1 giây, thời điểm $t = \frac{a}{b}$

($a, b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ tối giản) mà tại đó huyết áp bằng 80 mmHg. Tính $2a - b$

Câu 36. (Cụm Chương Mỹ - Thanh Oai 2025) Một bể chứa ban đầu có 250 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 25 lít nước, đồng thời cho vào bể 8 gam chất khử khuẩn (ClO_2) được hòa tan.

Giả sử $C(t)$ là nồng độ chất khử khuẩn trong bể sau t phút (với $C(t) = \frac{m(t)}{V(t)}$, đơn vị gam/lít, trong đó $m(t)$ là khối lượng chất khử khuẩn trong bể và $V(t)$ là thể tích nước trong bể). Gọi c là số dương nhỏ nhất mà nồng độ chất khử khuẩn là $C(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt quá ngưỡng c gam/lít. Tìm c

Câu 37. (THPT Hà Trung - Thanh Hóa 2025) Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.



Câu 38. (Sở Bắc Ninh 2025) Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ (đơn vị: mg/l) của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$. Để đưa ra lời khuyên và cách xử lý phù

hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu mg/l (kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)?

Câu 39. (Sở Hải Phòng 2025) Trong Vật lý, một dao động điều hòa là dao động có phương trình chuyển động

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Trong đó A là Biên độ của dao động.

$\omega(\text{rad/s})$ là tần số góc.

$\varphi(\text{rad})$ là pha ban đầu.

Trong Vật lý, **Động năng** (Tiếng Anh: *kinetic energy*) của một vật là năng lượng mà nó có được từ chuyển động của nó. Được xác định bởi công thức.

$$W = \frac{1}{2} m.v^2(t)$$

Trong đó $m(\text{kg})$ là khối lượng của vật.

$v(t)(\text{m/s})$ là vận tốc của vật tại thời điểm $t(\text{s})$.

Giả sử một vật có khối lượng $m=100(g)$ dao động điều hòa với phương trình chuyển động:

$$x = 40 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)(cm). \text{ Khi đó Động năng vật đó đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (J)?}$$

(Làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 40. (Sở Gia Lai 2025) Biết rằng tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của một học viên lớn tuổi

sau t tuần (kể từ khi chưa biết đánh máy) được cho bởi một trong hai công thức sau

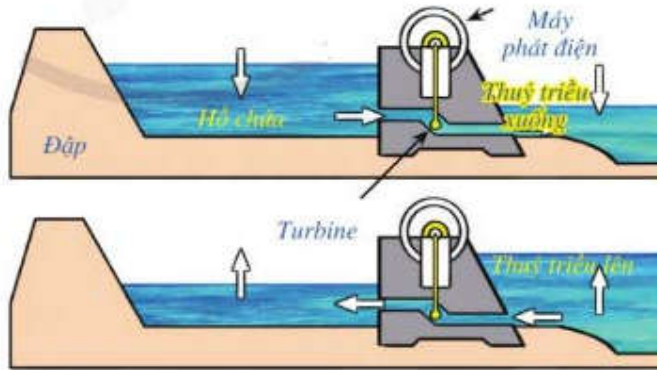
$$S(t) = \frac{at^2 + b}{ct^2 + d} \text{ và } S(t) = \frac{at^2 + b}{ct + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}; ac \neq 0).$$

Ông A (một người lớn tuổi chưa biết đánh máy) sau 4 tuần đi học thì tốc độ đánh máy trung bình đạt 20 từ trên phút, sau 6 tuần đạt 30 từ trên phút. Em hãy dự đoán xem, sau khóa học 15 tuần thì tốc độ đánh máy trung bình của ông A là bao nhiêu từ trên phút.

Câu 41. (THPT Hương Hóa - Quảng Trị 2025) Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Gọi $f(t)$ (gam/lít) là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p (kết quả viết dưới dạng số thập phân).

Câu 42. (THPT DTNT - Nghệ An 2025) Mực nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mực nước được xác định bởi hàm số $h'(t) = \frac{1}{90}(t^2 - 17t + 60)$,

trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 24$), $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t=0$, mực nước trong hồ chứa cao $8m$. Mực nước trong hồ cao nhất bao nhiêu mét?



ĐÁP ÁN THAM KHẢO

BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Câu 1. (THPT Đào Duy Từ - Thanh Hóa 2025) Một vật chuyển động theo quy luật $S = -t^3 + 18t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu (m/s)?

Lời giải

Đáp án: 108.

Ta có: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 36t$ với $t \in [0; 10]$.

$$v'(t) = -6t + 36; v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$$

$$v(0) = 0; v(10) = 60; v(6) = 108.$$

Vậy vận tốc lớn nhất của vật trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động là 108 (m/s) .

Câu 2. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Trên một trục số thẳng đứng có chiều dương hướng lên trên, một chất điểm bắt đầu chuyển động dọc theo trục số. Giả sử, tại thời điểm t giây ($t \geq 0$) tính từ lúc bắt đầu chuyển động thì vị trí $s(t)$ của chất điểm trên trục số thẳng đứng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - 18t^2 + 81t$ (mét). Trong 15 giây chuyển động đầu tiên thì chất điểm di chuyển được quãng đường bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

Đáp án: 756

$$\text{Ta có } s'(t) = 3t^2 - 36t + 81.$$

$$s'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 36t + 81 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 9 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	3	9	15	
$s'(t)$		+	0	-	+
$s(t)$	0	108	0	540	

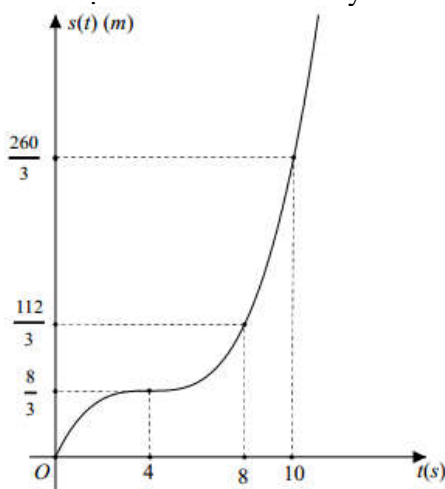
Trong 3 giây đầu, chất điểm di chuyển hướng lên 108m .

Trong khoảng $(3;9)$ giây tiếp theo chất điểm di chuyển hướng xuống 108m .

Trong khoảng $(9;15)$ giây cuối chất điểm di chuyển hướng lên 540m .

Vậy trong 15 giây chuyển động đầu tiên thì chất điểm di chuyển được quãng đường là $108 + 108 + 540 = 756$ (mét).

Câu 3. (THPT Nguyễn Đăng Đạo - Bắc Ninh 2025) Một vật chuyển động. Quãng đường $s(t)$ (tính theo mét) vật đi được sau khoảng thời gian t (tính theo giây), $t \geq 0$, được mô tả là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hỏi trong 10 giây đầu tiên, khoảng thời gian vật chuyển động nhanh dần kéo dài bao nhiêu giây?

Lời giải

Đáp án: 8.

$$\text{Giả sử } s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \text{ (} a \neq 0 \text{)}.$$

Vì đồ thị hàm số $s(t)$ đi qua các điểm $(0;0)$, $(4; \frac{8}{3})$, $(8; \frac{112}{3})$ và $(10; \frac{260}{3})$ nên ta có

$$\begin{cases} 64a + 16b + 4c = \frac{8}{3} \\ 512a + 64b + 8c = \frac{112}{3} \\ 1000a + 100b + 10c = \frac{260}{3} \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = -1 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases}$$

Do đó $s(t) = \frac{1}{6}t^3 - t^2 + 2t$.

Ta có $v(t) = s'(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 2 \Rightarrow v'(t) = t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên:

t	0	2	10
v'	-	0	+
v	2	0	32

Dựa vào bảng biến thiên, từ giây thứ 2 trở đi vận tốc của vật tăng dần theo thời gian. Do đó trong 10 giây đầu tiên, khoảng thời gian vật chuyển động nhanh dần kéo dài trong 8 giây.

Câu 4. (THPT Gia Bình - Bắc Ninh 2025) Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 2$. Trong đó, t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời nhỏ nhất bằng bao nhiêu m/s trong 5 giây đầu tiên đó?

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 8$

$v'(t) = 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Ta có $v(0) = 8, v(1) = 5, v(5) = 53$.

Vậy chất điểm có vận tốc tức thời nhỏ nhất bằng $5(m/s)$ trong 5 giây đầu tiên.

Câu 5. (THPT Thuận Thành 1&2 - Bắc Ninh 2025) Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Lời giải

Đáp án: 13.

Vận tốc tức thời của chất điểm được xác định bởi công thức $v(t) = -3t^2 + 12t + 1$.

Ta có $v'(t) = -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên:

t	0	2	5
$v'(t)$		+	-
$v(t)$	1	13	-14

Vậy trong 5 giây đầu tiên, chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng 13.

Câu 6. (Chuyên Thái Bình 2025) Một vật chuyển động trên đường thẳng có quãng đường đi chuyển trong khoảng thời gian t (giây) được cho bởi phương trình $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ (m), với $0 \leq t \leq 12$. Tính từ khi bắt đầu di chuyển đến thời điểm vận tốc của vật đạt giá trị lớn nhất thì vật di chuyển được quãng đường dài bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Đáp số: 144.

Vận tốc của vật có phương trình là $v(t) = s'(t) = -t^2 + 12t$ (m/s).

Với $0 \leq t \leq 12$ thì vận tốc của vật đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = 6$ (s).

Khi đó quãng đường vật di chuyển được từ khi bắt đầu đến thời điểm $t = 6$ (s) là:

$$S = s(6) - s(0) = -\frac{1}{3}6^3 + 6.6^2 = 144 \text{ (m)}.$$

Vậy từ khi bắt đầu di chuyển đến thời điểm vận tốc của vật đạt giá trị lớn nhất thì vật di chuyển được quãng đường dài 144 mét.

Câu 7. (Cụm trường Nguyễn Hiền - Lê Hồng Phong - Quảng Nam 2025) Ngày khai giảng năm học 2024 – 2025. Học sinh khối 12 trường THPT Nguyễn Hiền thả chùm bóng bay gắn thông điệp “Học Sinh khối 12 chiến thắng CT2018”. Ước tính độ cao h (tính bằng km) của chùm bóng bay so với mặt đất vào thời điểm t (đơn vị giờ) được cho bởi công thức $h(t) = -t^3 + 3t^2$, ($0 \leq t \leq 3$). Chùm bóng bay đạt độ cao lớn nhất so với mặt đất là: a (km). Tìm a ?

Lời giải

Đáp án: 4.

$$\text{Ta có } h'(t) = -3t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(t) = -t^3 + 3t^2$, ($0 \leq t \leq 3$)

t	0	2	3
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	0	\nearrow^4	\searrow_0

Vậy chùm bóng bay đạt độ cao lớn nhất so với mặt đất là 4 (km).

Câu 8. (Sở Phú Thọ 2025) (Sở Phú Thọ 2025) Trong một trò chơi điện tử, hai bạn Tít và Mít thi xem ai chạy được quãng đường xa hơn. Tít chạy với vận tốc $v_T(t) = 5\sqrt{t}$ (km/h), quãng đường Mít chạy được cho bởi phương trình $s_M(t) = 5t - \frac{5}{2\pi} \sin(2\pi t)$ (km) (với t là thời gian tính theo giờ). Nếu cuộc đua kết thúc khi Tít hoặc Mít chạy được 10 km đầu tiên thì khoảng cách giữa hai bạn là bao nhiêu kilômét (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 0,57.

$$\text{Quãng đường Tít chạy là: } s_T(t) = \int v_T(t) dt = \int 5\sqrt{t} dt = \frac{10}{3}\sqrt{t^3} + c.$$

$$\text{Khi } t = 0 \text{ thì } s_T = 0 \Rightarrow c = 0. \text{ Do đó } s_T(t) = \frac{10}{3}\sqrt{t^3}$$

Thời gian để Tít chạy được quãng đường 10 km là:

$$s_T(t) = \frac{10}{3}\sqrt{t^3} = 10 \Rightarrow t_T = \sqrt[3]{9} \text{ (h)}$$

Thời gian để Mít chạy được quãng đường 10 km là:

$$s_M(t) = 5t - \frac{5}{2\pi}\sin(2\pi t) = 10$$

Xét $s'_M(t) = 5 - 5\cos(2\pi t) \geq 0 \forall t$ mà $s_M(2) = 10$ suy ra $t_M = 2 \text{ (h)}$.

Ta thấy $t_M < t_T$ nên Mít chạy được 10 km đầu tiên. Khi đó khoảng cách giữa hai bạn là

$$s_M(2) - s_T(2) = 10 - \frac{10}{3}\sqrt{2^3} \approx 0,57 \text{ (km)}.$$

Câu 9. (Cụm trường THPT Hải Dương 2025) Ngày khai giảng năm học 2024 – 2025, học sinh khối 12 trường THPT Thanh Miện thả chùm bóng bay gắn thông điệp “Học Sinh khối 12 chiến thắng CT2018”. Ước tính độ cao h (tính bằng km) của chùm bóng bay so với mặt đất vào thời điểm t (đơn vị giờ) được cho bởi công thức $h(t) = -t^3 + 3t^2 \text{ (} 0 \leq t \leq 3 \text{)}$. Chùm bóng bay đạt độ cao lớn nhất so với mặt đất là $a \text{ (km)}$. Tìm a .

Lời giải

Đáp án: 4.

$$\text{Ta có: } h'(t) = -3t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

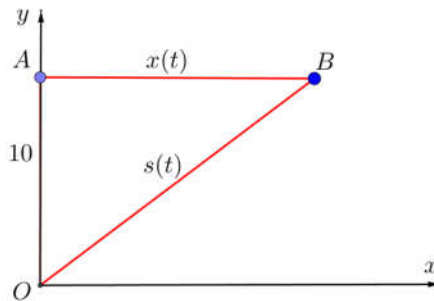
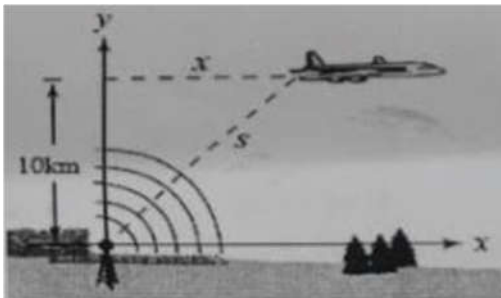
t	0	2	3
$h'(t)$	0	+	0
$h(t)$	0	4	0

Từ bảng biến thiên trên ta thấy $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất khi $t = 2$.

Khi đó, chùm bóng bay đạt độ cao lớn nhất so với mặt đất là $h(2) = 4 \text{ (km)}$

Vậy $a = 4$.

Câu 10. (Chuyên KHTN Hà Nội 2025) Một máy bay đang bay ở độ cao 10 km so với mặt đất, thu phát tín hiệu qua một ăng-ten ra đa như hình vẽ. Khi máy bay cách ra đa 16 km , ra đa phát hiện khoảng cách giữa máy bay và ra đa thay đổi với tốc độ 546 km/h . Tìm vận tốc của máy bay (đơn vị km/h , kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp án: 699.

Xét gốc thời gian ($t=0$) tại điểm $A(0;10)$. Khi đó tại một thời điểm t , máy bay đang ở vị trí B với $BA = x(t)$, ra đa đặt tại gốc tọa độ O với $OB = s(t)$.

Ta có phương trình liên hệ: $s(t) = \sqrt{10^2 + x^2(t)}$

Lấy đạo hàm hai vế theo biến t , ta được $s'(t) = \frac{x(t).x'(t)}{\sqrt{10^2 + x^2(t)}}$

Ta có $s'(t)$ là tốc độ thay đổi khoảng cách giữa máy bay và ra đa tại thời điểm t , $x'(t)$ là vận tốc của máy bay tại thời điểm t .

Xét tại thời điểm $t = t_0$ là thời điểm máy bay cách ra đa 16 km . Ta có

$$s'(t_0) = 546, x(t_0) = \sqrt{16^2 - 10^2} = 2\sqrt{39}$$

$$\text{Suy ra } x'(t_0) = \frac{s'(t_0)\sqrt{10^2 + x^2(t_0)}}{x(t_0)} = \frac{546.16}{2\sqrt{39}} \approx 699.$$

Vậy vận tốc của máy bay là 699 km/h .

Câu 11. (Sở Tuyên Quang 2025) Một vật chuyển động theo quy luật $s = s(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 10t + 2$ với $t \geq 0$ (giây) là khoảng thời gian từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là vị trí của vật trong khoảng thời gian đó. Tính quãng đường mà vật đi được khi vận tốc đạt 20 m/s (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Đáp án: 54,2.

Vận tốc của vật tại thời điểm t giây là: $v(t) = t^2 - 3t + 10$.

Vận tốc đạt 20 m/s thì ta có:

$$v(t) = t^2 - 3t + 10 = 20 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \text{ (n)} \\ t = -2 \text{ (l)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy quãng đường vật đi được là: } s = \int_0^5 |v(t)| dt = \int_0^5 |t^2 - 3t + 10| dt \approx 54,2 \text{ (m)}.$$

Câu 12. (THPT Hương Hóa - Quảng Trị 2025) Kính viễn vọng Hubble được tàu không gian Discovery đưa vào sử dụng ngày 24/4/1990. Mô

hình vận tốc của tàu trong sứ mệnh này, từ lúc rời bệ phóng ($t = 0$ giây) cho đến khi được tên lửa đẩy nhanh khỏi bệ tại thời điểm $t = 126$ giây, được xác định bởi công thức $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083$ (feet/s).



(Nguồn: James Stewart, J (2015). Calculus. Cengage Learning 8th edition, p. 282)

Tính gia tốc lớn nhất của tàu trong khoảng thời gian này (đơn vị: feet/s^2 , làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 62,9

Cho vận tốc $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083$ (feet/s), $0 \leq t \leq 126$

Gia tốc là

$$a(t) = v'(t) = 3 \cdot 0,001302t^2 - 2 \cdot 0,09029t + 23,61 = 0,003906t^2 - 0,18058t + 23,61 \text{ (feet/s}^2\text{)}$$

- Hệ số $0,003906 > 0$ nên đồ thị $a(t)$ là parabol, có cực tiểu tại $t_0 = -\frac{b}{2a} \approx 23,13$ (giây).

Xét: $a(0) = 23,6; a(126) \approx 62,9$

Vì parabol mở lên, giá trị lớn nhất trên $[0, 126]$ xảy ra tại $t = 126$:

Suy ra $a_{\max} = a(126) \approx 62,9 \text{ feet} / s^2$

- Câu 13. (THPT Hoàng Hóa 2-Thanh Hóa 2025)** Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 10t + 2$ (với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó). Tính quãng đường mà vật đi được khi vận tốc đạt 20 m/s (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Ta có $v(t) = s'(t) = t^2 - 3t + 10$. Vì vận tốc của vật đạt 20 m/s ,

$$\text{suy ra } t^2 - 3t + 10 = 20 \Rightarrow t^2 - 3t - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -2 \text{ (l)} \end{cases}$$

Quãng đường vật đi được khi vận tốc đạt 20 m/s là $s(5) = \frac{1}{3} \cdot 5^3 - \frac{3}{2} \cdot 5^2 + 10 \cdot 5 + 2 \approx 56,2(m)$.

- Câu 14. (THPT Ngô Sĩ Liên - Bắc Giang 2025)** Một chất điểm chuyển động biết quãng đường biểu diễn theo quỹ đạo có phương trình $s(t) = t^3 - 6t^2 + 30t$ (trong đó quãng đường s tính bằng mét (m), thời gian t tính bằng giây (s)). Tìm tốc độ nhỏ nhất của chất điểm (đơn vị (m/s)).

Lời giải

Đáp số: 18

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 30.$$

$$\text{Xét hàm } v(t) = 3t^2 - 12t + 30 = 3(t-2)^2 + 18 \geq 18 \forall t.$$

$$\text{Vậy } \min_{[0; +\infty)} v(t) = 18 \Leftrightarrow t = 2.$$

Tốc độ nhỏ nhất của chất điểm bằng $18(m/s)$.

- Câu 15. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh 2025)** Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)(km)$ là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2te^{3t+1}(km)$. Hỏi vận tốc của tên lửa sau 1 giây là bao nhiêu (biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian) $ae^b(km/s)$ tính $a+2b$?

Trả lời: 18

Lời giải

$$v(t) = s'(t) = 2te^{t^2+3} + 2e^{3t+1} + 6te^{3t+1} \Rightarrow v(1) = 2e^4 + 2e^4 + 6e^4 = 10e^4(km/s)$$

$$a+2b = 18$$

BÀI TOÁN NỒNG ĐỘ - QUẦN THỂ

- Câu 16. (Sở Hà Tĩnh 2025)** Giả sử tỷ lệ sinh của Tỉnh A tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = \frac{200}{1+4e^{-t}}; t \geq 0, t \in N$, trong đó thời gian t được tính bằng tháng. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng dân số của tỉnh A . Hỏi sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng trưởng của dân số tỉnh A là lớn nhất?

Lời giải

Đáp án: 1,39.

$$\text{Ta có } f(t) = \frac{200}{1+4e^{-t}} = \frac{200e^t}{e^t+4}$$

$$\text{Khi đó } f'(t) = \frac{800e^t}{(e^t+4)^2}$$

$$\Rightarrow f''(t) = \frac{800e^t(4-e^t)}{(e^t+4)^3}. \text{ Khi đó } f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = \ln 4.$$

Dựa vào bảng biến thiên

t	0	$\ln 4$	$+\infty$
$f''(t)$		0	
$f'(t)$			

Vậy tốc độ tăng trưởng của dân số tỉnh A lớn nhất là $f'(\ln 4) = \frac{800e^{\ln 4}}{(e^{\ln 4} + 4)^2} = \frac{800 \cdot 4}{16^2} = \frac{25}{2}$ tại thời

điểm $t = \ln 4 \approx 1,39$

Câu 17. (THPT Cẩm Xuyên - Hà Tĩnh 2025) Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f(t) = \frac{5000}{1+5e^{-t}}, t \geq 0 \text{ trong đó thời gian } t \text{ được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới.}$$

Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành thì tốc độ bán hàng đạt lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 1250.

$$\text{Ta có } f(t) = \frac{5000}{1+5e^{-t}} = \frac{5000e^t}{e^t+5}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{5000e^t(e^t+5) - 5000e^{2t}}{(e^t+5)^2} = \frac{25000 \cdot e^t}{(e^t+5)^2} > 0, \forall t \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f''(t) &= \frac{25000 \cdot e^t \cdot (e^t+5)^2 - 50000 \cdot e^t \cdot (e^t+5) \cdot e^t}{(e^t+5)^4} \\ &= \frac{25000 \cdot e^t \cdot (e^t+5) \cdot (e^t+5-2e^t)}{(e^t+5)^4} = \frac{25000 \cdot e^t \cdot (5-e^t)}{(e^t+5)^3} \end{aligned}$$

$$\text{Có } f''(t) = 0 \Leftrightarrow 5 - e^t = 0 \Leftrightarrow t = \ln 5.$$

Ta có bảng biến thiên

t	0	$\ln 5$	$+\infty$
$f''(t)$		0	
$f'(t)$	$\frac{6250}{9}$	1250	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có tốc độ bán hàng lớn nhất là 1250.

Câu 18. (THPT Cẩm Xuyên - Hà Tĩnh 2025) Sau khi phát hiện ra dịch bệnh vi rút Đậu mùa Khỉ, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ khi xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ x là $f(x) = -x^3 + 18x^2$. Ta xem $f'(x)$ là tốc độ truyền bệnh tại thời điểm x . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 6.Ta có. $f'(x) = -3x^2 + 36x \Rightarrow f''(x) = -6x + 36$.Xét $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$

Bảng biến thiên

x	0	6	$+\infty$
$f''(x)$		+	0
$f'(x)$	0	108	$-\infty$

Như vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất vào ngày thứ 6.

Câu 19. (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025) Anh Nam có một cái ao diện tích $50m^2$ để nuôi cá điêu hồng. Vụ vừa qua, anh nuôi với mật độ $40 \text{ con} / m^2$ và thu được 3 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình anh thấy cứ thả giảm đi $8 \text{ con} / m^2$ thì mỗi con cá thành phẩm tăng thêm $0,5kg$. Để tổng năng suất cao nhất thì vụ tới anh Nam nên mua bao nhiêu cá giống để thả? (giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)

Lời giải**Đáp án: 1600.**

Số cá anh Nam nuôi vụ vừa qua là: 2000 (con)

Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phẩm là $\frac{3000}{2000} = 1,5 \text{ (kg/con)}$ Gọi $x \text{ (} x > 0 \text{) (con} / m^2 \text{)}$ là số cá mà anh Nam thả ít đi trong vụ tới, ta thấy:Giảm $8 \text{ (con} / m^2 \text{)}$ khối lượng cá thành phẩm tăng $0,5kg / \text{con}$ Giảm $x \text{ (con} / m^2 \text{)}$ khối lượng cá thành phẩm tăng $0,0625x kg / \text{con}$ Vậy tổng sản lượng cá thu được là: $f(x) = (2000 - 50x)(1,5 + 0,0625x)$ Khi đó, ta đi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$

$$f(x) = 3000 + 125x - 75x - 3,125x^2 = -3,125x^2 + 50x + 3000$$

$$f'(x) = -6,25x^2 + 50 = 0$$

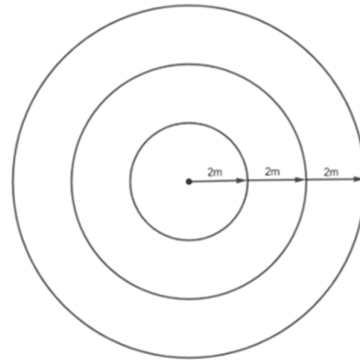
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -8(l) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	8	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		$f(8)$	

Vậy để sản lượng cá thu được lớn nhất thì số cá cần thả của anh Nam là $2000 - 50.8 = 1600 \text{ (con)}$

Câu 20. (Cụm trường THPT Hải Dương 2025) Một đường ống dẫn dầu bị rò rỉ hình thành nên một mảng dầu loang hình tròn trên mặt biển. Tốc độ tăng của bán kính mảng dầu loang theo thời gian là $2m / h$. Khi đó tốc độ tăng của diện tích (tính theo m^2) của mảng dầu loang cũng phụ thuộc theo thời gian $t(h)$. Hỏi tại thời điểm bán kính mảng dầu loang là $25m$ thì tốc độ tăng diện tích mảng dầu loang theo thời gian là bao nhiêu m^2 / h ? (Đáp số làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Đáp án: 314.

Bán kính của mảng dầu loang tăng theo thời gian, do vậy ta có thể coi bán kính r (m) của mảng dầu là một hàm số phụ thuộc theo thời gian t (h), tức là $r = f(t)$.

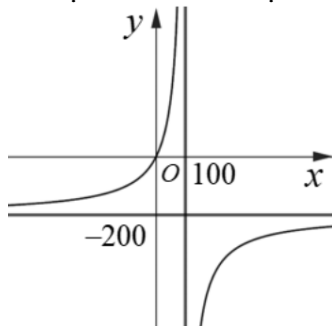
Từ giả thiết về tốc độ dầu loang ta có $f'(t) = 2$

Diện tích mảng dầu loang hình tròn là $S = \pi.r^2$, coi đây là hàm số theo biến r ta được $S'(r) = 2\pi.r$.

Sử dụng công thức tính đạo hàm hàm hợp, ta có $S'(t) = S'(r).f'(t) = 4.\pi.r$

Khi $r = 25m$ thì $S'(t) = 100.\pi \approx 314$. Tức là diện tích mảng dầu loang tăng với tốc độ 314 m^2 mỗi giờ.

Câu 21. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2025) Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm môi trường từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí (triệu đồng) cần bỏ ra được mô hình hóa bởi hàm số có dạng $C(x) = \frac{ax+b}{-x+d}$ (như hình vẽ), ($0 \leq x < 100$). Tính chi phí chênh lệch (tỉ đồng) phải bỏ ra để loại bỏ 90% và loại bỏ 99% chất gây ô nhiễm từ khí thải của nhà máy.



Lời giải

Đáp án: 18.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: Đồ thị đi qua gốc tọa độ nên $b = 0$.

Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 100 \Rightarrow d = 100$.

Đồ thị có đường tiệm cận ngang $y = -200 \Rightarrow -a = -200 \Rightarrow a = 200$.

Vậy ta có $C(x) = \frac{200x}{-x+100}$.

Suy ra chi phí chênh lệch (tỉ đồng) phải bỏ ra để loại bỏ 90% và loại bỏ 99% chất gây ô nhiễm từ khí thải của nhà máy là:

$$C(99) - C(90) = \frac{200.99}{-99+100} - \frac{200.90}{-90+100} = 18000 \text{ (triệu đồng)} = 18 \text{ tỉ đồng.}$$

- Câu 22. (THPT Trực Ninh - Nam Định 2025)** Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y = a$. Giá trị của a là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 26.

$$\text{Ta có: } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{26t+10}{t+5} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{26 + \frac{10}{t}}{1 + \frac{5}{t}} = 26 \Rightarrow \text{TCN: } y = 26.$$

- Câu 23. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025)** Nồng độ C của một loại hóa chất trong máu sau t giờ tiêm vào cơ thể được cho bởi công thức $C(t) = \frac{4t}{64+t^3}$ với $t \geq 0$. Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hóa chất trong máu là cao nhất? (kết quả làm tròn tới hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp án: 3,17.

$$\text{Ta có } C'(t) = \frac{-8t^3 + 256}{(64+t^3)^2}.$$

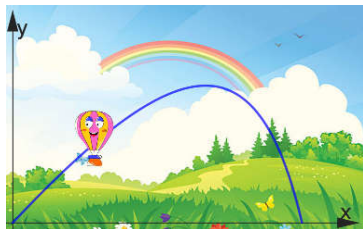
$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow -8t^3 + 256 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{32}.$$

Bảng biến thiên

t	0	$\sqrt[3]{32}$	$+\infty$
$C'(t)$	+	0	-
$C(t)$		$C(\sqrt[3]{32})$	

Dựa vào bảng biến thiên thì nồng độ hóa chất trong máu cao nhất khi $t = \sqrt[3]{32} \approx 3,17$ (giờ).

- Câu 24. (THPT Nguyễn Khuyến - Lê Thánh Tông 2025)** Đường đi của một khinh khí cầu được gắn trong hệ trục tọa độ là một đường cong bậc hai trên bậc nhất có đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ là $(1;0)$ và $(8;0)$ với đơn vị trên hệ trục tọa độ là 1 (km). Biết rằng điểm cực đại của đồ thị hàm số là điểm $(6;5)$. Hỏi khi khinh khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất 3875 (m) thì khinh khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang bao nhiêu? (đơn vị: km)



Lời giải

Đáp án: 7,2.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử phương trình của đường cong là $y = \frac{x^2 + bx + c}{dx + e}$

Vì đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm có tọa độ là $(1;0)$ và $(8;0)$ nên

$$x^2 + bx + c = (x-1)(x-8) = x^2 - 9x + 8$$

$$\text{Suy ra } y = \frac{x^2 - 9x + 8}{dx + e} \Rightarrow y' = \frac{(2x-9)(dx+e) - d(x^2 - 9x + 8)}{(dx+e)^2}$$

Vì đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(6;5)$ nên suy ra

$$\begin{cases} y'(6) = 0 \\ y(6) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(6d+e)+10d=0 \\ \frac{-10}{6d+e}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28d+3e=0 \\ 30d+5e=-10 \end{cases} \Leftrightarrow d = \frac{3}{5}; e = -\frac{28}{5}$$

Vậy phương trình của hàm số là: $y = \frac{5(x^2 - 9x + 8)}{3x - 28}$. Kiểm tra lại điểm cực trị của hàm số này ta thấy điểm $(6;5)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Yêu cầu bài toán \Leftrightarrow tìm nghiệm $x > 6$ của phương trình

$$\frac{5(x^2 - 9x + 8)}{3x - 28} = 3,875 \Leftrightarrow 5x^2 - 56,625x + 148,5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7,2 \\ x = 4,125 \end{cases} (L)$$

Vậy khi khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất 3875 (m) thì khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang là 7,2 km.

Câu 25. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ t của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi hàm số $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12000$ (con), $0 \leq t \leq 365$ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con. Ngày 25/11/2014 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Đáp án: 49,6

Năm 2024, tháng một có 31 ngày, tháng hai có 29 ngày, tháng ba có 31 ngày, tháng tư có 30 ngày, tháng năm có 31 ngày, tháng sáu có 30 ngày, tháng bảy có 31 ngày, tháng tám có 31 ngày, tháng chín có 30 ngày, tháng mười có 31 ngày, tháng mười một có 30 ngày.

Ta có $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12000$

$$f'(t) = -\frac{1}{100}t^2 + 2bt + c$$

Ngày 26/09/2024 ứng với $t = 270$ là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con nên hàm số đạt cực đại tại $t = 270$.


$$f'(270) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}270^2 + 540b + c = 0 \Leftrightarrow 540b + c = 729 \quad (1)$$

$$f(270) = 55740 \Leftrightarrow -\frac{1}{300}270^3 + b \cdot 270^2 + 270c + 12000 = 55740 \Leftrightarrow 72900b + 270c = 109350 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $b = \frac{6}{5}$, $c = 81$, vậy hàm số đã cho là $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + \frac{6}{5}t^2 + 81t + 12000$

$$\text{Thử lại } f'(t) = -\frac{1}{100}t^2 + \frac{12}{5}t + 81, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 270 \\ t = -30 \end{cases} (l)$$

BBT

t	0	270	365
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$			

Hàm số đạt cực đại tại $t = 270$.

Ngày 25/11/2014 ứng với $t = 330$, khi đó số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng

$$\text{bằng: } f(330) = -\frac{1}{300}330^3 + \frac{6}{5} \cdot 330^2 + 81 \cdot 330 + 12000 = 49620 \text{ (con).}$$

- Câu 26. (THPT Tiên Du - Bắc Ninh 2025)** Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2002 được tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,075 nghìn người/năm?

Lời giải

Đáp án: 2037.

$$\text{Ta có: } f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$$

Vì t là số năm nên $t > 0$.

Hàm số xác định với $\forall t > 0$.

$$f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}.$$

$$\Rightarrow f'(t) = 0,075 \Leftrightarrow \frac{120}{(t+5)^2} = 0,075 \Leftrightarrow (t+5)^2 = 1600 \Leftrightarrow (t+5)^2 = 40^2.$$

Vì $t > 0$ nên $t = 35$.

Vậy sau 35 năm kể từ năm 2002, tức là vào năm 2037 thì tốc độ tăng dân số của thị trấn đó là 0,075 nghìn người/năm.

- Câu 27. (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025)** Một bể chứa 3000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam/lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử nồng độ muối trong nước bể sau t phút được xác định bởi một hàm số $f(t)$ trên $t \in [0; +\infty)$ (gam/lít). Khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến bao nhiêu gam/lít.

Lời giải

Đáp án: 25

Sau t phút khối lượng muối trong bể là $25 \cdot 20 \cdot t = 500t$ (gam).

Thể tích của bể sau t phút là $3000 + 20 \cdot t$ (lít).

$$\text{Khi đó nồng độ muối có trong nước bể là: } f(t) = \frac{500t}{3000 + 20t} = \frac{25t}{150 + t} \text{ (gam/lít).}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25t}{150 + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{150}{t} + 1} = 25.$$

Vậy khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến 25 gam/lít.

- Câu 28. (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025)** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$, $t = 0, 1, 2, \dots, 25$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Giả sử khoảng thời gian mà tốc độ truyền bệnh giảm là từ ngày thứ m đến ngày thứ n . Khi đó $n - m$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 10.

Tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t được xác định bởi hàm $f'(t) = 90t - 3t^2$.

Ta có $f''(t) = 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$.

Bảng biến thiên:

t	0	15	25
$f''(t)$		+	-
$f'(t)$	0	675	375

Dựa vào bảng biến thiên, tốc độ truyền bệnh giảm từ ngày 15 đến ngày 25.

Vậy $m - n = 25 - 15 = 10$.

Câu 29. (THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc 2025) Số lượng cá thể của một loài sinh vật phụ thuộc nhiệt độ môi trường sống và được sắp xếp bởi hàm số $f(t) = 300 \cdot e^{\frac{t-3t^2}{100}}$, trong đó t là nhiệt độ môi trường xét từ 0° đến 60° . Hỏi số cá thể loài sinh vật trên nhiều nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 419.

Xét hàm số $f(t) = 300 \cdot e^{\frac{t-3t^2}{100}}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$, $[0; 60] \subset D$.

$$f'(t) = 300 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{3t}{50} \right) \cdot e^{\frac{t-3t^2}{100}}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow 300 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{3t}{50} \right) \cdot e^{\frac{t-3t^2}{100}} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{3} \in (0; 60).$$

$$f(0) = 300; f\left(\frac{10}{3}\right) = 300 \cdot e^{\frac{10}{15} - \frac{3 \cdot 100}{100 \cdot 9}} = 300 \cdot e^{\frac{1}{3}} \approx 419, f(60) = 300 \cdot e^{\frac{60}{5} - \frac{3 \cdot 60^2}{100}} \approx 6,09 \cdot 10^{-40}.$$

$$\text{Vậy } \max_{[0; 60]} f(t) = f\left(\frac{10}{3}\right) \approx 419.$$

Câu 30. (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025) Một bể ban đầu chứa 160 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 10 lít nước vào bể, đồng thời cho vào bể 21 gam chất khử trùng (hòa tan). Đặt $f(t)$ gam/lít là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p .

Lời giải

Đáp án: 2,1.

Sau t phút khối lượng chất khử trùng là $21t$ gam và thể tích nước là $160 + 10t$. Do đó nồng độ chất khử trùng là

$$f(t) = \frac{21t}{10t + 160}$$

$$\text{Do } f'(t) = \left(\frac{21t}{10t + 160} \right)' = \frac{3360}{(10t + 160)^2} > 0 \text{ nên } f(t) \text{ tăng theo } t.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$

x	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	0	$\frac{21}{10}$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(t)$ không vượt quá $\frac{21}{10} = 2,1$

- Câu 31. (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025)** Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1+5.e^{-t}}, (t \geq 0)$, trong đó thời gian t được tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ là biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Đáp án: 1,6

Xét hàm số: $f(t) = \frac{5000}{1+5.e^{-t}}, (t \geq 0)$

Vì đạo hàm $f'(t)$ là biểu thị tốc độ bán hàng nên để biết được sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất ta tìm GTLN của hàm số:

$$f'(t) = \frac{25000e^{-t}}{(1+5.e^{-t})^2}, (t \geq 0)$$

$$f''(t) = \frac{25000e^{-t}(5.e^{-t}-1)}{(1+5.e^{-t})^3}$$

$$f'''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{25000e^{-t}(5.e^{-t}-1)}{(1+5.e^{-t})^3} = 0 \Leftrightarrow 5e^{-t}-1=0 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = \ln 5$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\ln 5$	$+\infty$
$f''(t)$	+	0	-
$f'(t)$		Max	

Hàm số $f'(t)$ đạt GTLN khi $t = \ln 5 \approx 1,6$

Vậy sau khi phát hành 1,6 năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

- Câu 32. (THPT Thuận Thành 1&2 - Bắc Ninh 2025)** Ông Thanh nuôi cá chim ở một ao có diện tích $50m^2$. Vụ trước ông nuôi với mật độ là $20\text{con}/m^2$ và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi $8\text{con}/m^2$ thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên $0,5\text{kg}$. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi).

Lời giải

Đáp án: 1100.

Số cá vụ vừa rồi ông Thanh nuôi là $20.50 = 1000$ con.

Vậy trọng lượng mỗi con là $1,5\text{kg}$.

Gọi số cá giảm là $8x$ con.

Trọng lượng thu được của vụ tới là: $(1000 - 400x)(1,5 + 0,5x) = -200x^2 - 100x + 1500$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -\frac{1}{4}$. Vậy số cá giống ban đầu là 1100 con.

Câu 33. (THPT Lê Xoay - Vĩnh Phúc 2025) Giả sử chiều cao (tính bằng cm) của một giống cây trồng (trong vòng một số tháng nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{200}{1+3e^{-t}}$, $t \geq 0$, trong đó thời gian t được tính bằng tháng kể từ khi hạt bắt đầu nảy mầm.

Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng chiều cao của giống cây đó. Biết rằng kể từ khi hạt giống bắt đầu nảy mầm thì sau t tháng, tốc độ tăng chiều cao của cây là lớn nhất. Tính t (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Đáp án: 1,1.

+) Xét hàm số $f(t) = \frac{200}{1+3e^{-t}}$ trên $[0; +\infty)$

Ta có $f'(t) = \frac{600e^{-t}}{(1+3e^{-t})^2}$; $f''(t) = \frac{600e^{-t}(3e^{-t}-1)}{(1+3e^{-t})^3}$, $f''(t) = 0 \Rightarrow e^{-t} = \frac{1}{3} \Rightarrow t = \ln 3$

Bảng biến thiên

t	0	$\ln 3$	$+\infty$
$f''(t)$		+	-
$f'(t)$	$\frac{75}{2}$	50	0

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra sau $t = \ln 3 \approx 1,1$ (tháng) thì tốc độ tăng chiều cao của cây là lớn nhất.

Câu 34. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025) Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) vượt khoảng cách 300km để tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ trong đó c là hằng số cho trước. E tính bằng Jun. Tính vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên, để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất?

Lời giải

Trả lời: 9

Theo đề bài, vận tốc của cá khi bơi trên sông là $v - 6$, khi đó thời gian để cá bơi đến nơi sinh sản là $t = \frac{300}{v-6}$.

Khi đó, $E(v) = cv^3 \frac{300}{v-6}$ với $v > 6$. Đặt $x = v - 6$.

Bài năng lượng tiêu hao của cá được tính bởi hàm số:

$$f(x) = 300c \frac{(x+6)^3}{x} = 300c \left(x^2 + 18x + 108 + \frac{216}{x} \right) \text{ với } x > 0.$$

Ta có: $f'(x) = 300c \left(2x + 18 - \frac{216}{x^2} \right) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 18x^2 - 216 = 0 \Rightarrow x = 3$.

Bảng biến thiên:

x	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(3)$	$+\infty$

Vậy $\min_{x \in (0; +\infty)} f(x) = f(3)$ hay khi vận tốc của cá khi nước đứng yên là $v = 9 \text{ km/h}$ thì cá ít tốn năng lượng nhất.

Câu 35. (Cụm Chương Mỹ - Thanh Oai 2025) Huyết áp là đại lượng để đo độ lớn của lực tác dụng lên thành mạch máu. Nó được đo bằng 2 chỉ số; huyết áp tâm thu (là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) và huyết áp tâm trương (là áp lực của máu lên thành động mạch khi tim giãn ra). Huyết áp khác nhau đáng kể giữa người này và người khác, nhưng huyết áp tiêu chuẩn là 120/80, nó có nghĩa là huyết áp tâm thu là 120mmHg và huyết áp tâm trương là 80mmHg. Giả sử rằng trái tim của một người đập 70 lần một phút, huyết áp riêng P sau t giây có thể được mô tả bằng hàm số $P(t) = 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$. Trong thời gian từ 0 giây đến 1 giây, thời điểm $t = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ tối giản) mà tại đó huyết áp bằng 80 mmHg. Tính $2a - b$

Lời giải

$$\text{Xét } P(t) = 80 \Leftrightarrow 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 80$$

$$\Leftrightarrow 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = -20$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{3}{14} + \frac{6k}{7} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Mà } 0 \leq t \leq 1 \text{ nên } 0 \leq -\frac{3}{14} + \frac{6k}{7} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{17}{12}$$

$$\text{Mặt khác } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1$$

$$\text{Với } k = 1 \text{ thì } t = \frac{9}{14}$$

$$\text{Vậy } 2a - b = 2 \cdot 9 - 14 = 4$$

Đáp án: 4

Câu 36. (Cụm Chương Mỹ - Thanh Oai 2025) Một bể chứa ban đầu có 250 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 25 lít nước, đồng thời cho vào bể 8 gam chất khử khuẩn (ClO_2) được hòa tan.

Giả sử $C(t)$ là nồng độ chất khử khuẩn trong bể sau t phút (với $C(t) = \frac{m(t)}{V(t)}$, đơn vị gam/lít,

trong đó $m(t)$ là khối lượng chất khử khuẩn trong bể và $V(t)$ là thể tích nước trong bể). Gọi c là số dương nhỏ nhất mà nồng độ chất khử khuẩn là $C(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt quá ngưỡng c gam/lít. Tìm c

Lời giải

Nồng độ chất khử khuẩn trong bể sau t phút là $C(t) = \frac{8t}{25t + 250}, t > 0$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $C(t)$ trên khoảng xác định

Ta có: $C'(t) = \frac{2000}{(25t + 250)^2} > 0, \forall t > 0$

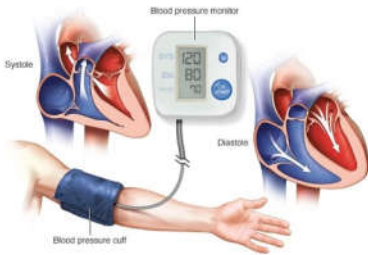
Do đó $C(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{8t}{25t + 250} = \frac{8}{25} = 0,32$

Vậy nồng độ chất khử khuẩn tăng theo thời gian và không vượt quá 0,32

Đáp án: 0,32

Câu 37. (THPT Hà Trung - Thanh Hóa 2025) Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.



Lời giải

Đáp số 10.

Đk: $x \in [0; 15]$. (vì độ giảm huyết áp không thể là số âm)

Có $G'(x) = 0,035[2x(15 - x) - x^2] = 0,105x(10 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$.

$G(0) = 0$; $G(10) = \frac{35}{2}$; $G(15) = 0$.

Vậy huyết áp bệnh nhân giảm nhiều nhất khi tiêm cho bệnh nhân liều $x = 10$ miligam.

Câu 38. (Sở Bắc Ninh 2025) Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ (đơn vị: mg/l) của thuốc trong máu sau x phút

(kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$. Để đưa ra lời khuyên và cách xử lý phù hợp

cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu mg/l (kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)?

Lời giải

Trả lời: 10,6

Ta có $C'(x) = \frac{-30x^2 + 60}{(x^2 + 2)^2}$ nên $C'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Suy ra $\max_{(0;6)} C(x) = C(\sqrt{2}) = \frac{15\sqrt{2}}{2} \approx 10,6$.

Câu 39. (Sở Hải Phòng 2025) Trong Vật lý, một dao động điều hòa là dao động có phương trình chuyển động

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Trong đó A là Biên độ của dao động.

$\omega(\text{rad/s})$ là tần số góc.

$\varphi(\text{rad})$ là pha ban đầu.

Trong Vật lý, **Động năng** (Tiếng Anh: *kinetic energy*) của một vật là năng lượng mà nó có được từ chuyển động của nó. Được xác định bởi công thức.

$$W = \frac{1}{2} m.v^2(t)$$

Trong đó $m(\text{kg})$ là khối lượng của vật.

$v(t)(\text{m/s})$ là vận tốc của vật tại thời điểm $t(\text{s})$.

Giả sử một vật có khối lượng $m = 100(\text{g})$ dao động điều hòa với phương trình chuyển động:

$$x = 40 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)(\text{cm}).$$

Khi đó **Động năng** vật đó đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (J)?
(Làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải:

Từ công thức $W = \frac{1}{2} m.v^2(t)$, để **Động năng** vật đó đạt giá trị lớn nhất thì $v(t)(\text{m/s})$ đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Khi đó ta có } v(t) = (x(t))' = \left(40 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)\right)' = -8000\pi \sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)(\text{cm/s}).$$

$$\text{Ta có } -8000\pi \leq v(t) = -8000\pi \sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \leq 8000\pi$$

Vậy $v(t)(\text{m/s})$ đạt giá trị lớn nhất bằng $8\pi(\text{m/s})$.

$$\text{Khi đó động năng lớn nhất của vật là: } W = \frac{1}{2} m.v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot (8\pi)^2 \approx 31,6(\text{J})$$

Câu 40. (Sở Gia Lai 2025) Biết rằng tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của một học viên lớn tuổi

sau t tuần (kể từ khi chưa biết đánh máy) được cho bởi một trong hai công thức sau

$$S(t) = \frac{at^2 + b}{ct^2 + d} \text{ và } S(t) = \frac{at^2 + b}{ct + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}; ac \neq 0).$$

Ông A (một người lớn tuổi chưa biết đánh máy) sau 4 tuần đi học thì tốc độ đánh máy trung bình đạt 20 từ trên phút, sau 6 tuần đạt 30 từ trên phút. Em hãy dự đoán xem, sau khóa học 15 tuần thì tốc độ đánh máy trung bình của ông A là bao nhiêu từ trên phút.

Lời giải

Đáp số: 45.

$$+) \text{ Do } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{at^2 + b}{ct + d} = \pm\infty \text{ nên } S(t) = \frac{at^2 + b}{ct + d} \text{ loại.}$$

$$+) \text{ Ta có } S(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow S(t) = \frac{at^2}{ct^2 + d}.$$

$$+) \text{ Mặt khác có } \begin{cases} S(4) = 20 \\ S(6) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a = 20(16c + d) \\ 36a = 30(36c + d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 80c + 5d \\ 6a = 180c + 5d \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) ta được $a = 50c$ thay vào (1) ta được $d = 24c$.

$$\text{Vậy } S(t) = \frac{50ct^2}{ct^2 + 24c} = \frac{50t^2}{t^2 + 24}.$$

$$+) \text{ Do đó } S(15) = \frac{50 \cdot 15^2}{15^2 + 24} \approx 45.$$

Câu 41. (THPT Hương Hóa - Quảng Trị 2025) Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Gọi $f(t)$ (gam/lít) là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p (kết quả viết dưới dạng số thập phân).

Lời giải

Đáp án: 0,4.

Thể tích nước trong bể sau t phút là $150 + 50t$ (lít).

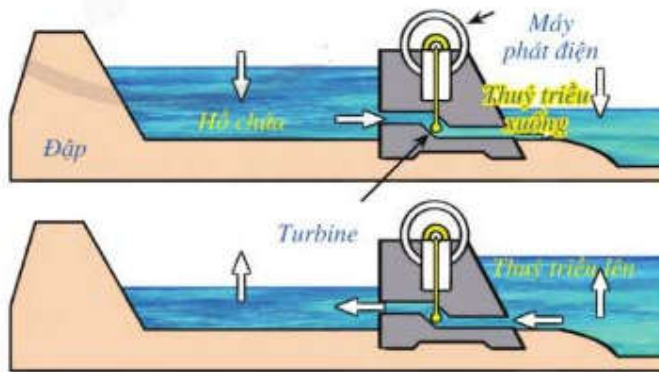
Khối lượng chất khử trùng trong bể sau t phút là $20t$ (gam).

Nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút là $f(t) = \frac{20t}{50t + 150}$ (gam/lít).

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{3000}{(50t + 150)^2} > 0, \forall t \geq 0 \text{ và } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20t}{50t + 150} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Vậy giá trị hàm $f(t)$ luôn tăng nhưng không vượt ngưỡng 0,4 gam/lít.

Câu 42. (THPT DTNT - Nghệ An 2025) Mức nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mực nước được xác định bởi hàm số $h'(t) = \frac{1}{90}(t^2 - 17t + 60)$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 24$), $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa cao $8m$. Mực nước trong hồ cao nhất bao nhiêu mét?



Lời giải

$$\text{Trả lời: } \frac{104}{5} = 20,8m$$

$$\text{Ta có } h'(t) = \frac{1}{90}(t^2 - 17t + 60) \Rightarrow h(t) = \frac{1}{90} \int (t^2 - 17t + 60) dt = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{17}{2}t^2 + 60t \right) + C$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{17}{2}t^2 + 60t \right) + C$$

Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa cao $8m$ nên $h(0) = 8 \Rightarrow C = 8$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{17}{2}t^2 + 60t \right) + 8 \quad (0 \leq t \leq 24)$$

Ta có: $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 17t + 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 12 \end{cases}$

Lập bảng biến thiên:

t	0	5	12	24	
$h'(t)$	+	0	-	0	+
$h(t)$	8	$\frac{1019}{108}$	$\frac{44}{5}$	$\frac{104}{5}$	

Mức nước trong hồ cao nhất: $\frac{104}{5} = 20,8m$

Nguyễn Bảo Vương