

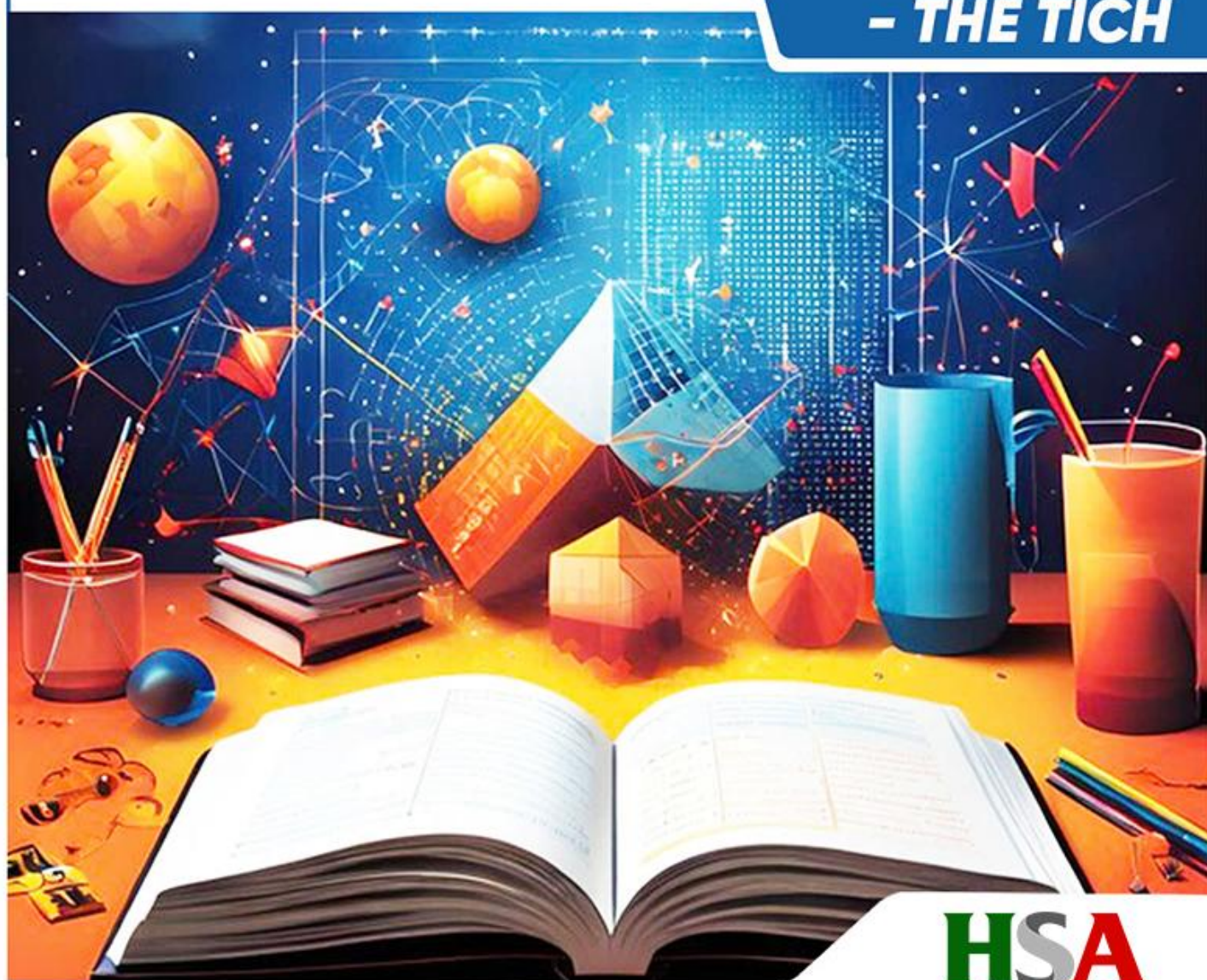
25

CÂU

CHINH PHỤC 8+

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

- THỂ TÍCH



LỜI NÓI ĐẦU

“Hành trình vạn dặm bắt đầu từ một bước chân.”

Câu nói của Lão Tử đã sống mãi cùng thời gian, như một lời nhắc nhở dịu dàng rằng mỗi hành trình lớn lao trong cuộc đời, dù là chinh phục đỉnh cao tri thức, vượt qua những thử thách của tuổi trẻ, hay theo đuổi ước mơ thắm kín – đều khởi nguồn từ những bước đi đầu tiên, dù là chậm rãi, vụng về hay đầy lo lắng.

Các em học sinh thân mến, có lẽ trong mỗi người đều từng có những khoảnh khắc chùn bước. Có khi là nỗi lo sợ về bài kiểm tra sắp tới, là cảm giác mệt mỏi giữa những buổi học dày đặc, hay là sự hoang mang không biết con đường mình đang đi sẽ dẫn đến đâu. Nhưng chính trong những giây phút ấy, nếu các em chọn không dừng lại, chọn nhích thêm một bước dù rất nhỏ, thì các em đã tiến gần hơn tới mục tiêu của mình!

Cuốn sách nhỏ này được viết dành tặng các em – những học sinh đang từng ngày bồi đắp kiến thức, rèn luyện bản thân và nuôi dưỡng hoài bão. Trong hành trình học tập, sẽ có lúc các em cảm thấy mệt mỏi, hoang mang hoặc nghi ngờ chính mình. Nhưng xin hãy nhớ: không ai sinh ra đã mạnh mẽ, không ai bắt đầu mà đã thành công. Quan trọng nhất, là các em dám bước đi.

Cuốn sách này được gửi đến như một món quà, không chỉ chứa đựng tri thức mà còn chất chứa niềm tin. Tin rằng các em có thể. Tin rằng bên trong mỗi người là một khả năng tiềm ẩn chờ được đánh thức. Và tin rằng, không có con đường nào là vô vọng nếu ta bước đi với sự kiên trì và trái tim cháy bỏng ước mơ.

Mỗi trang sách là một nấc thang. Mỗi câu hỏi, mỗi bài học không chỉ giúp các em chuẩn bị tốt hơn cho kỳ thi, mà còn là dịp để rèn luyện tư duy, ý chí và bản lĩnh – những hành trang quý giá cho suốt cuộc đời.

Hãy bắt đầu từ hôm nay. Từng dòng chữ, từng lần cố gắng, từng giọt mồ hôi đều có ý nghĩa. Có thể hiện tại chưa thấy ngay kết quả, nhưng giống như hạt giống âm thầm nảy mầm dưới lớp đất, mọi nỗ lực rồi sẽ kết trái. Và khi các em bước qua hành trình này, ngoảnh lại nhìn, chính các em cũng sẽ phải ngạc nhiên về sự trưởng thành của mình.

Chúc các em giữ vững ngọn lửa học tập, luôn can đảm bước tiếp – vì mỗi bước chân hôm nay là nền móng cho những giấc mơ ngày mai.

Thân gửi,



HSA MEGA EDU – LUYỆN THI ĐGNL ĐHQG HÀ NỘI

ÔN TẬP THỂ TÍCH

25

BỘ CÂU HỎI CHINH PHỤC 8+
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN (PHẦN 2)

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và SA vuông góc với mặt đáy. Góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt đáy bằng 30° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. C. $\frac{a^3}{4}$. D. $\frac{a^3}{12}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a$. Biết (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy, SB tạo với mặt đáy một góc 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{48}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy là điểm A , $AB = 5$, $AC = 3$, $\widehat{CAB} = 60^\circ$, $SA = 4$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

- A. $15\sqrt{3}$. B. $10\sqrt{3}$. C. $5\sqrt{3}$. D. $\frac{15\sqrt{3}}{16}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có chiều cao SA và đáy là hình chữ nhật, biết $AB = 3a$, $SC = 5a\sqrt{2}$, góc giữa SC và mặt đáy là 45° . Thể tích của khối chóp là

- A. $60a^3$. B. $30a^3$. C. $20a^3$. D. $10a^3$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$. $SA \perp (ABCD)$, góc giữa SC và đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{3}$. C. $\frac{3a^3}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , SAB là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết góc tạo bởi mặt phẳng đáy với các đường thẳng SC , SD lần lượt là 45° và 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

~ HỌC TOÁN CÙNG THẦY GIANG ~

- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $a^3\sqrt{2}$. C. $2a^3\sqrt{3}$. D. $a^3\sqrt{6}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên (SAB) nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết góc tạo bởi đường thẳng SC với mặt phẳng đáy, mặt phẳng (SAB) lần lượt là 45° và 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 9. Thể tích khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $3a$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{26}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{26}}{9}$. C. $\frac{a^3\sqrt{26}}{13}$. D. $\frac{a^3\sqrt{26}}{12}$.

Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. C. $\frac{a^3}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 6$, $AC = 4$, tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = 16\sqrt{7}$. B. $V = \frac{16\sqrt{7}}{3}$. C. $V = 16\sqrt{2}$. D. $V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 5\text{ cm}$, $BC = 6\text{ cm}$, $CA = 7\text{ cm}$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC . Các mặt phẳng (SAB) , (SBC) , (SCA) đều tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = 4\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}$. B. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$. C. $V = 8\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}$. D. $V = 8\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$.

Câu 13. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 20, cạnh bên bằng 30. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = 4000\sqrt{7}$. B. $V = \frac{4000\sqrt{7}}{9}$. C. $V = \frac{4000}{3}$. D. $V = \frac{4000\sqrt{7}}{3}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a , tam giác SBA vuông tại B , tam giác SAC vuông tại C . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 15. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A . Biết $AB = a$, góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

~ HỌC TOÁN CÙNG THẦY GIANG ~

A. $V = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. B. $V = a^3$. C. $V = \frac{1}{3}a^3$. D. $V = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Câu 16. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$ bằng 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3}{8}a^3$. B. $V = \frac{3\sqrt{6}}{8}a^3$. C. $V = \frac{3\sqrt{2}}{8}a^3$. D. $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Câu 17. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2a$, cạnh bên $AA' = \sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AC . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{1}{2}a^3$. B. $V = \frac{a^3}{3}$. C. $V = a^3$. D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 18. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , tâm O và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng 60° . Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D . Tính theo a thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3a^3}{2}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Câu 19. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{ND}$. Mặt phẳng (P) chứa MN và song song với AC chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích là V . Tính V .

A. $V = \frac{\sqrt{2}}{18}$. B. $V = \frac{7\sqrt{2}}{216}$. C. $V = \frac{\sqrt{2}}{108}$. D. $V = \frac{11\sqrt{2}}{216}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA} = k, 0 < k < 1$. Khi đó giá trị của k để mặt phẳng (BMC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau là

A. $k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. B. $k = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. C. $k = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. D. $k = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Một mặt phẳng đi qua A vuông góc với SC cắt SB, SD, SC lần lượt tại B', D', C' . Thể tích khối chóp $SAB'C'D'$ là:

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$. D. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

~ HỌC TOÁN CÙNG THẦY GIANG ~

Câu 22. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AA' và BB' ; đường thẳng CE cắt đường thẳng $C'A'$ tại E' , đường thẳng CF cắt đường thẳng $C'B'$ tại F' . Thể tích khối đa diện $EFA'B'E'F'$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC . Gọi (α) là mặt phẳng chứa AG và song song với BC , chia khối chóp thành hai phần. Tính thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S .

- A. $\frac{4a^3}{9}$. B. $\frac{4a^3}{27}$. C. $\frac{2a^3}{9}$. D. $\frac{5a^3}{54}$.

Câu 24. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Điểm P là một điểm trên cạnh CD sao cho $PC = 2PD$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh AD tại Q . Thể tích của khối đa diện $BDMNPQ$ bằng:

- A. $\frac{11\sqrt{2}}{216}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{27}$. C. $\frac{5\sqrt{2}}{108}$. D. $\frac{7\sqrt{2}}{216}$.

Câu 25. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , $AB = 2a$ và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và BC . Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện. Khối đa diện có thể tích nhỏ hơn bằng

- A. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$. B. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{4}$. C. $\frac{9\sqrt{3}a^3}{24}$. D. $\frac{5\sqrt{3}a^3}{32}$.

-----HẾT-----

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và SA vuông góc với mặt đáy. Góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt đáy bằng 30° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

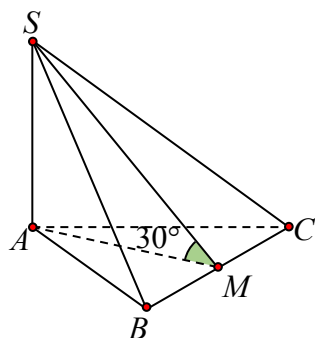
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

C. $\frac{a^3}{4}$.

D. $\frac{a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm BC , ta có $AM \perp BC$ và $SM \perp BC$

Suy ra $\widehat{((SBC), (ABC))} = \widehat{SMA}$ và $\widehat{SMA} = 30^\circ$.

$$SA = AM \cdot \tan \widehat{SMA} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a$. Biết (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy, SB tạo với mặt đáy một góc 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$.

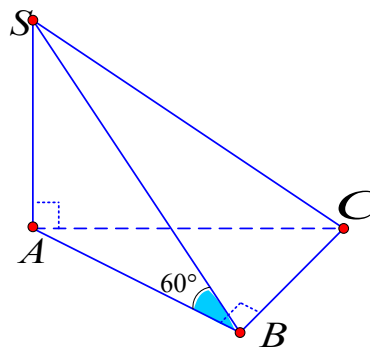
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{48}$.

Lời giải

Chọn A



Do (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy nên $SA \perp (ABC)$, suy ra hình chiếu của SB lên mặt phẳng (ABC) là AB . Do đó góc giữa SB và mặt đáy là góc \widehat{SBA} và $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Xét $\triangle ABC$ vuông cân tại B với $AC = a$, ta có $AC^2 = 2AB^2 \Rightarrow AB = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2}{4}$

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A , $SA = AB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{24}.$$

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy là điểm A , $AB = 5$, $AC = 3$, $\widehat{CAB} = 60^\circ$, $SA = 4$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $15\sqrt{3}$.

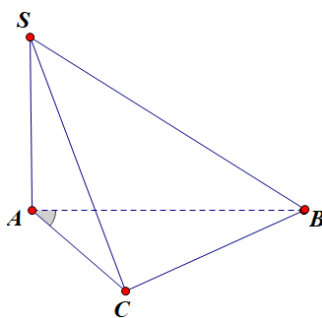
B. $10\sqrt{3}$.

C. $5\sqrt{3}$.

D. $\frac{15\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Diện tích đáy } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{CAB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Thể tích } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 5\sqrt{3}$$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có chiều cao SA và đáy là hình chữ nhật, biết $AB = 3a$, $SC = 5a\sqrt{2}$, góc giữa SC và mặt đáy là 45° . Thể tích của khối chóp là

A. $60a^3$.

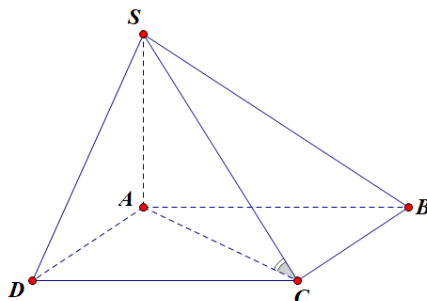
B. $30a^3$.

C. $20a^3$.

D. $10a^3$.

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác SAC vuông cân tại A mà $SC = 5a\sqrt{2} \Rightarrow AC = SA = 5a$

Xét tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(5a)^2 - (3a)^2} = 4a$

Diện tích đáy $S_{ABCD} = AB.BC = 3a.4a = 12a^2$

Thể tích $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.12a^2.5a = 20a^3$

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$. $SA \perp (ABCD)$, góc giữa SC và đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{2}$.

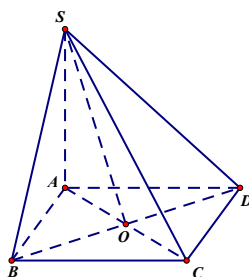
B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{3a^3}{2}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Tam giác BAC đều cạnh a nên $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = \widehat{SCA} = 60^\circ$. Suy ra $SA = \tan 60^\circ.AC = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \frac{a^3}{2}$.

~ HỌC TOÁN CÙNG THẦY GIANG ~

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

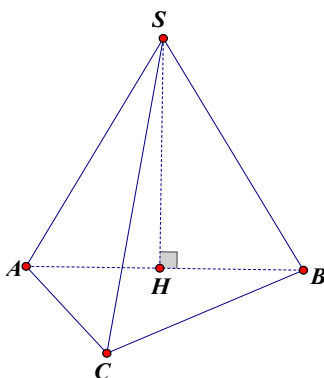
B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của AB thì $SH \perp AB$ và $SH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$ ($\triangle SAB$ cân đỉnh S).

Mà $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAB) \cap (ABC) = AB$ nên $SH \perp (ABC)$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}.$$

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , SAB là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết góc tạo bởi mặt phẳng đáy với các đường thẳng SC , SD lần lượt là 45° và 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

A. $a^3\sqrt{3}$.

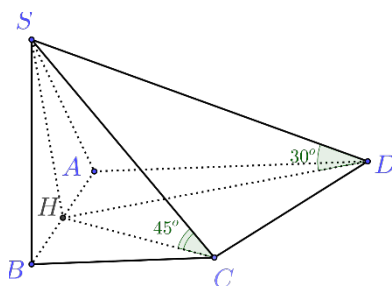
B. $a^3\sqrt{2}$.

C. $2a^3\sqrt{3}$.

D. $a^3\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của AB , khi đó $SH \perp AB$ và $SH = a\sqrt{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

~ HỌC TOÁN CÙNG THẦY GIANG ~

Góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCH} = 45^\circ \Rightarrow CH = \frac{SH}{\tan 45^\circ} = a\sqrt{3}$.

Do đó $BC = \sqrt{CH^2 - HB^2} = a\sqrt{2}$.

Góc giữa SD và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDH} = 30^\circ \Rightarrow DH = \frac{SH}{\tan 30^\circ} = 3a$.

Do đó $AD = \sqrt{DH^2 - HA^2} = 2a\sqrt{2}$.

Diện tích đáy $S_{ABCD} = \frac{(AD + BC)AB}{2} = 3a^2\sqrt{2}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{SH \cdot S_{ABCD}}{3} = a^3\sqrt{6}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên (SAB) nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết góc tạo bởi đường thẳng SC với mặt phẳng đáy, mặt phẳng (SAB) lần lượt là 45° và 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

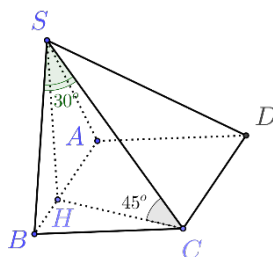
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của S trên đường thẳng AB .

Ta có $\left. \begin{array}{l} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCH} = 45^\circ \Rightarrow SH = SC \cdot \sin 45^\circ$.

Mặt khác $\left. \begin{array}{l} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ CB \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow CB \perp (SAB)$

Góc giữa SC và (SAB) là góc $\widehat{CSB} = 30^\circ \Rightarrow SC = \frac{BC}{\sin 30^\circ} = 2a$.

Do đó $SH = SC \cdot \sin 45^\circ = a\sqrt{2}$.

~ HỌC TOÁN CÙNG THẦY GIANG ~

Diện tích đáy $S_{ABCD} = a^2$.

$$\text{Thể tích khối chóp } V_{S.ABCD} = \frac{SH \cdot S_{ABCD}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}.$$

Kết quả trên không phụ thuộc vào vị trí của H trên đường thẳng AB.

Câu 9. Thể tích khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $3a$.

A. $\frac{a^3 \sqrt{26}}{2}$.

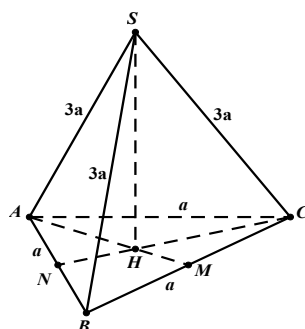
B. $\frac{a^3 \sqrt{26}}{9}$.

C. $\frac{a^3 \sqrt{26}}{13}$.

D. $\frac{a^3 \sqrt{26}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow SH \perp (ABC)$. Khi đó $V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC}$ (do khối chóp $S.ABC$ đều).

$$\text{Ta có } AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{26}}{\sqrt{3}}; S_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4};$$

$$\text{Suy ra } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{26}}{12} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{2}$.

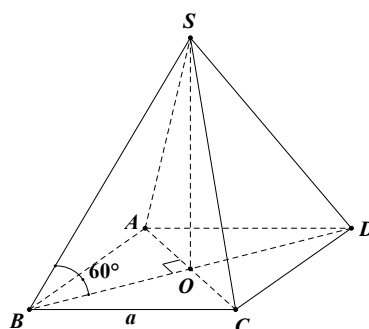
B. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$.

C. $\frac{a^3}{6}$.

D. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



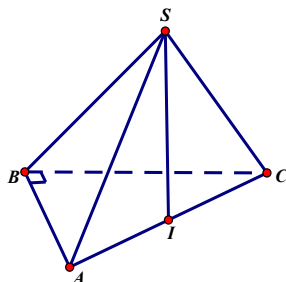
~ HỌC TOÁN CÙNG THẦY GIANG ~

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$ và $\widehat{SBO} = 60^\circ$.

Đường cao $SO = OB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

$$S_{ABCD} = a^2 \Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 6$, $AC = 4$, tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.



A. $V = 16\sqrt{7}$.

B. $V = \frac{16\sqrt{7}}{3}$.

C. $V = 16\sqrt{2}$.

D. $V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của AC

Do $\triangle ABC$ vuông cân tại $B \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và $IB = \frac{AC}{2} = 2$.

Vì hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 6$ nên hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle ABC$, $\Rightarrow SI \perp (ABC)$ tại I .

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BI = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4; SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SI = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4 = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $CA = 7$ cm. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC . Các mặt phẳng (SAB) , (SBC) , (SCA) đều tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 4\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}$.

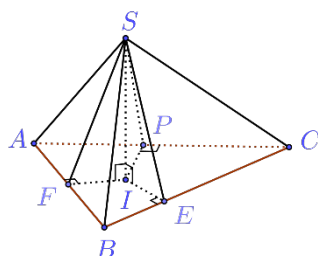
B. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$.

C. $V = 8\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}$.

D. $V = 8\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) ; F, E, P lần lượt là hình chiếu của I trên AB, BC, CA , suy ra $\widehat{SFI} = \widehat{SEI} = \widehat{SPI} = 60^\circ \Rightarrow FI = EI = PI = r \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , bán kính r .

Gọi p là nửa chu vi tam giác $\triangle ABC$ thì $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = 9$.

Ta có: $S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} = 6\sqrt{6}$ và $r = \frac{S}{p} = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Tam giác vuông $\triangle SFI$ có: $h = SI = IF \cdot \tan 60^\circ = r \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SI \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{6} = 8\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$

Câu 13. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 20, cạnh bên bằng 30. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = 4000\sqrt{7}$.

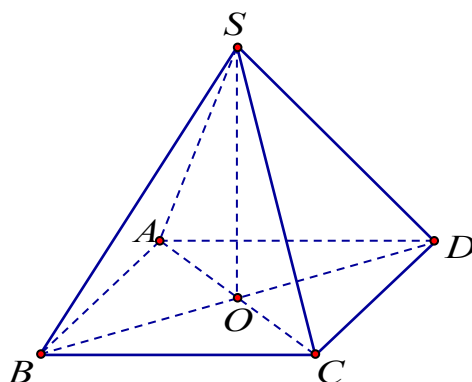
B. $V = \frac{4000\sqrt{7}}{9}$.

C. $V = \frac{4000}{3}$.

D. $V = \frac{4000\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng $ABCD$, gọi $O = AC \cap BD$, do hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$. Đáy là hình vuông cạnh 20 $\Rightarrow AO = \frac{AC}{2} = 10\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông SAO có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = 10\sqrt{7}$.

Thể tích V của khối chóp trên là $V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} 10\sqrt{7} \cdot 400 = \frac{4000\sqrt{7}}{3}$.

~ HỌC TOÁN CÙNG THẦY GIANG ~

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a , tam giác SBA vuông tại B , tam giác SAC vuông tại C . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

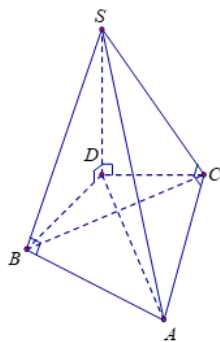
B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) , suy ra $SD \perp (ABC)$.

Ta có $SD \perp AB$ và $SB \perp AB$ (gt) suy ra $AB \perp (SBD) \Rightarrow BA \perp BD$.

Tương tự có $AC \perp DC$ hay tam giác ACD vuông ở C .

Dễ thấy $\triangle SBA = \triangle SCA$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông), suy ra $SB = SC$. Từ đó ta chứng minh được $\triangle SBD = \triangle SCD$ nên cũng có $DB = DC$.

Vậy DA là đường trung trực của BC nên cũng là đường phân giác của góc \widehat{BAC} .

Ta có $\widehat{DAC} = 30^\circ$, suy ra $DC = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Ngoài ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là $\widehat{SBD} = 60^\circ$,

$$\text{suy ra } \tan \widehat{SBD} = \frac{SD}{BD} \Rightarrow SD = BD \cdot \tan \widehat{SBD} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SD = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}.$$

Câu 15. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A . Biết $AB = a$, góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3$.

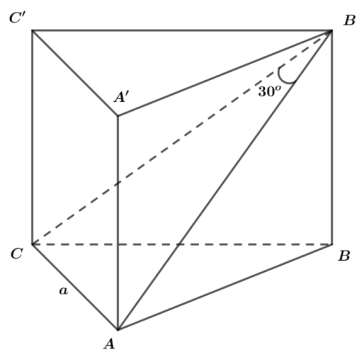
B. $V = a^3$.

C. $V = \frac{1}{3} a^3$.

D. $V = \frac{\sqrt{2}}{2} a^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $CA \perp (ABB'A')$ nên $B'A$ là hình chiếu của $B'C$ trên mp $(ABB'A')$.

Từ giả thiết suy ra $\widehat{AB'C} = 30^\circ$.

Trong tam giác $AB'C$ vuông tại A , $AB' = AC \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}$, từ đó ta có $AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2} = a\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } V = AA' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3.$$

Câu 16. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$ bằng 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3}{8}a^3$.

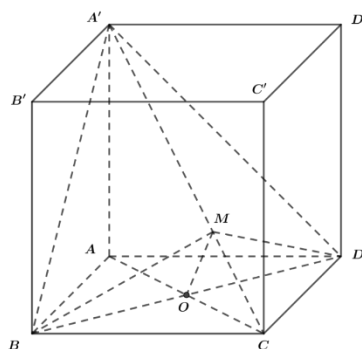
B. $V = \frac{3\sqrt{6}}{8}a^3$.

C. $V = \frac{3\sqrt{2}}{8}a^3$.

D. $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 120^\circ$ nên $BD = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $BD \perp (A'AC) \Rightarrow BD \perp A'C$.

Kẻ $OM \perp A'C$ tại M thì $A'C \perp (BDM) \Rightarrow A'C \perp MD$, do đó góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$

là góc giữa hai đường thẳng MB và MD . Vậy $\widehat{BMD} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{BMD} = 120^\circ$.

TH1: $\widehat{BMD} = 60^\circ$ thì do $MB = MD$ nên tam giác BMD là tam giác đều, do đó $OM = a \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OM = OC$

(vô lý vì $\triangle OMC$ vuông tại M).

~ HỌC TOÁN CÙNG THẦY GIANG ~

TH2: $\widehat{BMD} = 120^\circ$ thì do tam giác BMD cân tại M nên $\widehat{BMO} = 60^\circ \Rightarrow MO = BO \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, do đó

$$MC = \sqrt{OC^2 - MO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Có tam giác $AA'C$ đồng dạng với tam giác MOC nên $\frac{AA'}{AC} = \frac{MO}{MC} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

$$\text{Vậy } V = AA' \cdot S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{8} a^3.$$

Câu 17. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2a$, cạnh bên $AA' = \sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AC . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{1}{2}a^3$.

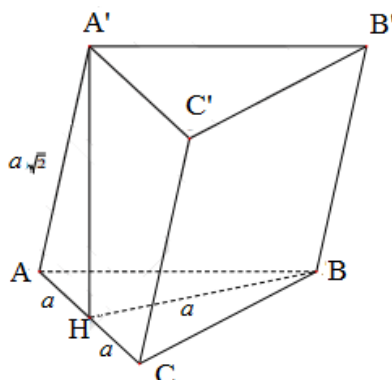
B. $V = \frac{a^3}{3}$.

C. $V = a^3$.

D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Vì ABC là tam giác vuông cân tại B nên trung tuyến BH cũng là đường cao.

$$HB = HA = HC = \frac{1}{2}AC = a, \quad A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a.$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = A'H \cdot \frac{1}{2}BH \cdot AC = a^3.$$

Câu 18. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , tâm O và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng 60° . Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D . Tính theo a thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3a^3}{2}$.

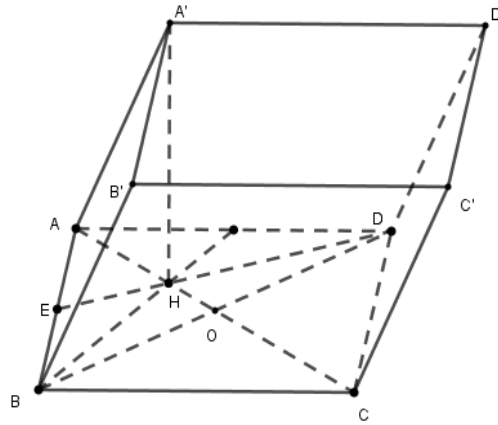
B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Hình thoi $ABCD$ cạnh a , $\widehat{ABC} = 120^\circ$ nên góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, suy ra tam giác ABD đều cạnh a . Diện tích đáy $ABCD$ là $S = 2.S_{ABD} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABD . Ta có $A'H \perp (ABCD)$.

Tính được $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Góc giữa AA' và mặt đáy bằng góc $\widehat{AA'H} = 60^\circ$.

Ta có $A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$. Thể tích lăng trụ $V = A'H \cdot S = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{ND}$. Mặt phẳng (P) chứa MN và song song với AC chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích là V . Tính V .

A. $V = \frac{\sqrt{2}}{18}$.

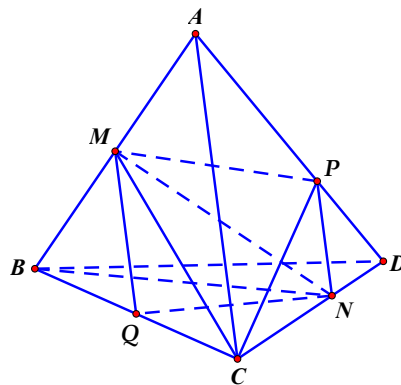
B. $V = \frac{7\sqrt{2}}{216}$.

C. $V = \frac{\sqrt{2}}{108}$.

D. $V = \frac{11\sqrt{2}}{216}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, suy ra M là trung điểm AB ;

$\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{ND}$, suy ra $NC = 2ND$.

Từ N kẻ $NP \parallel AC$, $N \in AD$; M kẻ $MQ \parallel AC$, $Q \in BC$.

~ HỌC TOÁN CÙNG THẦY GIANG ~

Mặt phẳng (P) là $(MPNQ)$.

Gọi AH là chiều cao khối chóp hạ từ A .

$$\text{Ta có } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{BCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

$$V = V_{ACMPNQ} = V_{AMPC} + V_{MQNC} + V_{MPNC}$$

$$\text{Ta có } V_{AMPC} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AP}{AD} \cdot V_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot V_{ABCD} = \frac{1}{3} V_{ABCD}.$$

$$V_{MQNC} = \frac{1}{2} V_{AQNC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CQ}{CB} \cdot \frac{CN}{CD} \cdot V_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{ABCD} = \frac{1}{2} V_{ABCD}.$$

$$V_{MPNC} = \frac{2}{3} V_{MPCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} V_{MACD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot V_{ABCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{ABCD} = \frac{1}{9} V_{ABCD}.$$

$$\text{Vậy } V = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \right) V_{ABCD} \Rightarrow V = \frac{11}{18} V_{ABCD} = \frac{11\sqrt{2}}{216}.$$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA} = k, 0 < k < 1$. Khi đó giá trị của k để mặt phẳng (BMC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau là

A. $k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$

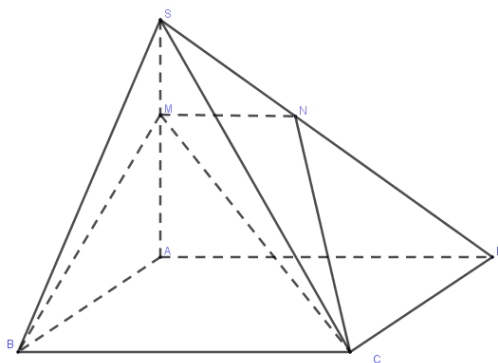
B. $k = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$

C. $k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$

D. $k = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}.$

Lời giải

Chọn A



Giả sử (MBC) cắt SD tại N . Khi đó $MN \parallel BC \parallel AD$ suy ra $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SD} = k (k > 0)$.

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = k, \quad \frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ADC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} = k^2.$$

$$\text{Do đó: } \frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABCD}} = \frac{k}{2}; \quad \frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABCD}} = \frac{k^2}{2}.$$

~ HỌC TOÁN CÙNG THẦY GIANG ~

Bài toán thỏa mãn khi $\frac{k}{2} + \frac{k^2}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Vậy chọn đáp án **A**.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Một mặt phẳng đi qua A vuông góc với SC cắt SB , SD , SC lần lượt tại B' , D' , C' . Thể tích khối chóp $SAB'C'D'$ là:

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

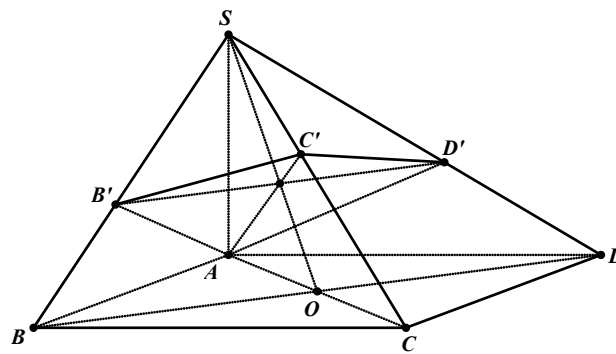
B. $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

D. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Ta có $AD' \perp (SDC) \Rightarrow AD' \perp SD$; $AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB$.

Do $SC \perp (AB'D') \Rightarrow SC \perp AC'$.

Tam giác SAC vuông cân tại A nên C' là trung điểm của SC .

Trong tam giác vuông SAB' ta có $\frac{SB'}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}$.

$\frac{V_{SAB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{SAB'C'} + V_{SAC'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \left(\frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} \right) = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Vậy $V_{SAB'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu 22. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi E , F lần lượt là trung điểm các cạnh AA' và BB' ; đường thẳng CE cắt đường thẳng $C'A'$ tại E' , đường thẳng CF cắt đường thẳng $C'B'$ tại F' . Thể tích khối đa diện $EFA'B'E'F'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

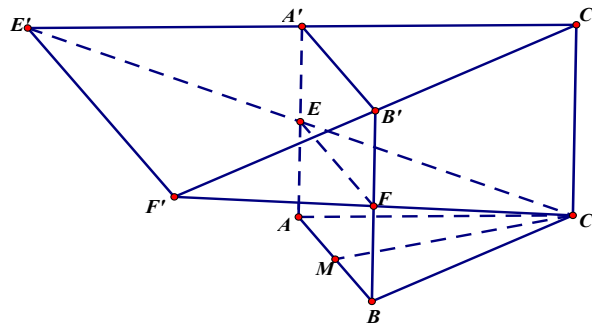
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Thể tích khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Gọi M là trung điểm AB . Suy ra $CM \perp (ABB'A')$ và $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $C.ABFE$ là

$$V_{C.ABFE} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABFE} \cdot CM = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Thể tích khối đa diện $A'B'C'EFC$ là

$$V_{A'B'C'EFC} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.ABFE} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Ta dễ dàng chứng minh được A' và B' lần lượt là trung điểm của $C'E'$ và $C'F'$.

Thể tích khối chóp $C.C'E'F'$ là

$$V_{C.C'E'F'} = \frac{1}{3} \cdot S_{C'E'F'} \cdot CC' = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot S_{C'A'B'} \cdot CC' = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Khi đó, thể tích khối đa diện $EFA'B'E'F'$ là

$$V_{EFA'B'E'F'} = V_{C.C'E'F'} - V_{A'B'C'EFC} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC . Gọi (α) là mặt phẳng chứa AG và song song với BC , chia khối chóp thành hai phần. Tính thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S .

A. $\frac{4a^3}{9}$.

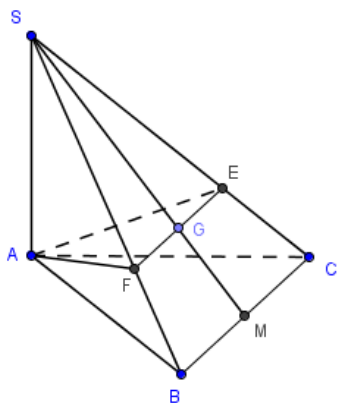
B. $\frac{4a^3}{27}$.

C. $\frac{2a^3}{9}$.

D. $\frac{5a^3}{54}$.

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng (SBC) , qua G kẻ đường thẳng song song với BC , lần lượt cắt SC , SB tại E và F .

Khi đó, khối đa diện không chứa đỉnh S là $ABCEFG$.

Gọi M là trung điểm BC . Vì G là trọng tâm của ΔSBC nên $\frac{SE}{SC} = \frac{SF}{SB} = \frac{SG}{SM} = \frac{2}{3}$.

$$\text{Do đó: } \frac{V_{S.AFE}}{V_{S.ABC}} = \frac{SF}{SB} \cdot \frac{SE}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Hay } V_{S.AFE} = \frac{4}{9} V_{S.ABC} \Rightarrow V_{ABCEFG} = V_{S.ABC} - \frac{4}{9} V_{S.ABC} = \frac{5}{9} V_{S.ABC}.$$

Vì tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$ nên $AB = BC = a$.

$$\text{Mặt khác } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a = \frac{a^3}{6}. \text{ Suy ra } V_{ABCEFG} = \frac{5}{9} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{5a^3}{54}.$$

Câu 24. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M , N lần lượt là trung điểm các cạnh AB , BC . Điểm P là một điểm trên cạnh CD sao cho $PC = 2PD$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh AD tại Q . Thể tích của khối đa diện $BDMNPQ$ bằng:

A. $\frac{11\sqrt{2}}{216}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{27}$.

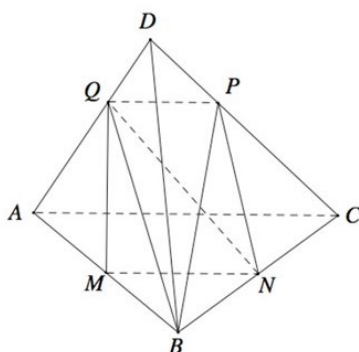
C. $\frac{5\sqrt{2}}{108}$.

D. $\frac{7\sqrt{2}}{216}$.

Lời giải

Chọn D

Vì M , N lần lượt là trung điểm các cạnh AB , BC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC . Khi đó $MN \parallel AC \Rightarrow (MNP) \cap (ACD) = PQ \parallel MN$ với $P \in CD$ và $Q \in AD$.



~ HỌC TOÁN CÙNG THẦY GIANG ~

Thể tích khối tứ diện đều $ABCD$ là $V_0 = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

$$\text{Ta có: } V_{D.BPQ} = \frac{DP}{DC} \cdot \frac{DQ}{DA} \cdot \frac{DB}{DB} \cdot V_{D.CAB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot V_0 = \frac{1}{9} V_0.$$

$$V_{B.MNQ} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BQ}{BQ} \cdot V_{B.ACQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot V_{B.ACQ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{S_{ACQ}}{S_{ACD}} \cdot V_{B.ACD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{AQ}{AD} \cdot V_0 = \frac{1}{6} V_0.$$

$$V_{B.PQN} = \frac{BP}{BP} \cdot \frac{BQ}{BQ} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot V_{B.PQC} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{B.PQC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{PQC}}{S_{ADC}} \cdot V_{B.ADC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} \cdot V_0 = \frac{1}{9} V_0.$$

$$\text{Vậy } V_{BDMNPQ} = V_{D.BPQ} + V_{B.MNQ} + V_{B.PQN} = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \right) \cdot V_0 = \frac{7}{18} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{7\sqrt{2}}{216}.$$

Câu 25. Cho khối lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , $AB = 2a$ và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và BC . Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện. Khối đa diện có thể tích nhỏ hơn bằng

A. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

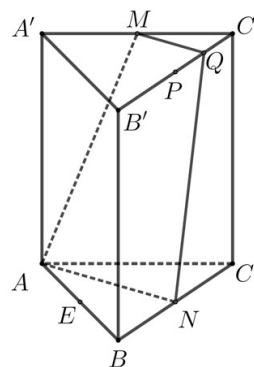
B. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{4}$.

C. $\frac{9\sqrt{3}a^3}{24}$.

D. $\frac{5\sqrt{3}a^3}{32}$.

Lời giải.

Chọn A



Gọi E là trung điểm AB

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp CC' \\ AB \perp CE \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CEC') \Rightarrow \widehat{C'EC} = ((ABC'), (ABC)) = 60^\circ \Rightarrow CC' = CE\sqrt{3} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Vì } (ABC) \parallel (A'B'C') \Rightarrow (AMN) \cap (A'B'C') = MQ \parallel AN.$$

Khối đa diện $ANC \cdot MQC'$ có thể tích nhỏ hơn và là khối chóp cụt có

$$S_1 = S_{ANC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} a^2, S_2 = S_{MQC'} = \frac{1}{4} S_{ANC} = \frac{1}{8} a^2; h = CC' = \sqrt{3}a.$$

~ **HỌC TOÁN CÙNG THẦY GIANG** ~

$$\text{Vì vậy } V_{ANC.MQC'} = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{\sqrt{3}a}{3} \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{8}a^2 + \sqrt{\frac{1}{2}a^2 \frac{1}{8}a^2} \right) = \frac{7\sqrt{3}a^3}{24}.$$

-----**HẾT**-----