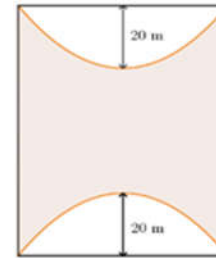


CHỦ ĐỀ 17. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH

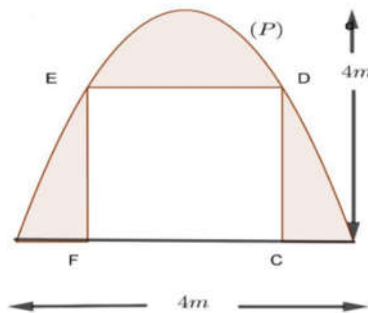
• PHẦN 3. TRẢ LỜI NGẮN

CÂU HỎI (vì là ngân hàng được tách ra từ các trường, cho nên có trùng lặp câu hỏi thì do các trường tham khảo nhau)

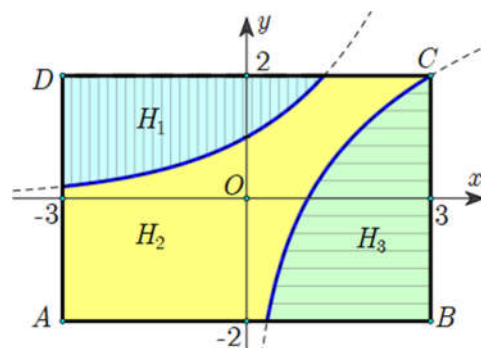
Câu 1. (Đề Tham Khảo 2025) Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là 60m và 80m. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh đó đến trung điểm cạnh tương ứng của hình chữ nhật bằng 20m (xem hình minh họa). Diện tích của phần sân chơi là bao nhiêu mét vuông?



Câu 2. (THPT Hùng Vương - Bình Thuận 2025) Một gia đình thiết kế chiếc cổng có dạng là một parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng chiều rộng của cổng và bằng 4m. Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$ sao cho chiều cao cửa đi là $CD = 2m$, phần còn lại dùng để trang trí. Biết chi phí phần tô đậm là 1,5 triệu đồng/ m^2 . Tính số tiền (triệu đồng) gia đình đó phải trả để trang trí phần tô đậm (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Câu 3. (THPT Nguyễn Khuyến - Lê Thánh Tông 2025) Một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước 6(m), 4(m) được bạn Hà trang trí bằng cách vẽ hai đồ thị $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_b x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = x$ và chia thành ba phần (tham khảo hình vẽ bên). Phần H_1 được sơn màu xanh da trời, phần H_2 được sơn màu vàng, phần H_3 được sơn màu xanh lá cây. Biết rằng mỗi hộp sơn các màu chỉ sơn được 3(m^2) tường, đồng thời giá của hộp sơn màu xanh da trời là 100.000 đồng/hộp, hộp sơn vàng là 140.000 đồng/hộp, hộp sơn xanh lá cây là 130.000 đồng/hộp. Tính giá tiền bạn Hà mua để sơn bức tường này? (đơn vị là triệu đồng và cửa hàng sơn chỉ bán số nguyên của hộp).

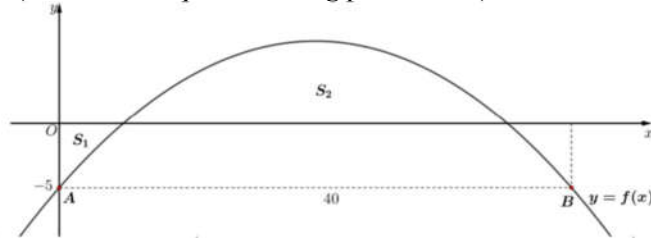


Câu 4. (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025) Một nhóm các kĩ sư muốn xây dựng một cây cầu vòm dân thép với giá đỡ dưới bằng thép cao cấp có hình dáng là một đường cong Parabol nối từ 2 cột trụ

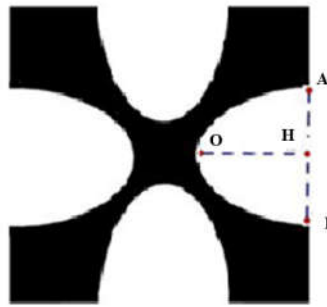
A và B nằm bên dưới cây cầu, biết hai cột trụ cách nhau 400 m , khoảng cách từ trụ A đến cây cầu là 50 m và AB song song với mặt đường.



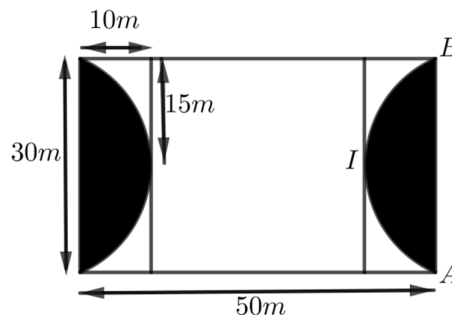
Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào cây cầu với đơn vị trục tọa độ là 10 m . Giá đỡ dưới bằng thép là đường cong Parabol tạo với hai trục tọa độ các hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ bên, biết rằng $S_2 - 2S_1 = \frac{2200}{21}$. Điểm cao nhất của giá đỡ dưới bằng thép cao cấp cách mặt đường cây cầu bao nhiêu mét. (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Câu 5. (THPT Trần Nguyên Hân - Hải Phòng 2025) Một họa viên trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5\text{ cm}$, $OH = 4\text{ cm}$. Tính diện tích bề mặt họa viên đó (kết quả làm tròn đến số thập phân phần mười).

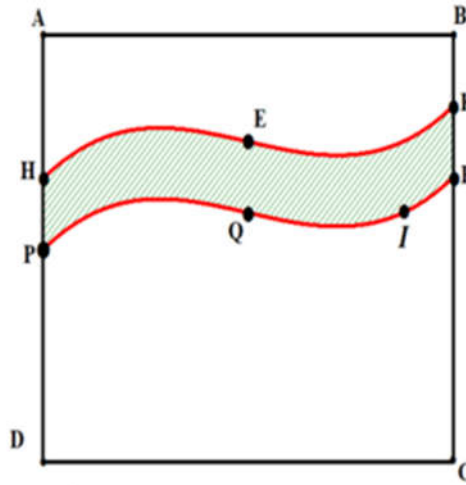


Câu 6. (THPT Trần Phú - Vĩnh Phúc 2025) Ông An xây dựng một sân bóng đá mini hình chữ nhật có chiều rộng 30 m và chiều dài 50 m . Để giảm bớt kinh phí cho việc trồng cỏ nhân tạo, ông An chia sân bóng ra làm hai phần (tô màu và không tô màu) như hình vẽ. Phần tô màu gồm hai miền có diện tích bằng nhau và đường cong AIB là một parabol có đỉnh I . Phần tô màu được trồng cỏ nhân tạo với giá 130 nghìn đồng/ m^2 và phần còn lại trồng cỏ nhân tạo với giá 90 nghìn đồng/ m^2 . Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền (đơn vị: triệu đồng) để trồng cỏ nhân tạo cho sân bóng.



Câu 7. (Cụm trường Hải Dương 2025) Kiến trúc sư thiết kế một con đường để chia khu đất hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 40\text{ m}$,

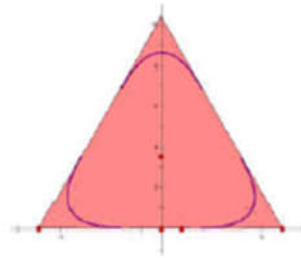
$AD = 60\text{ m}$ thành hai phần (hai lề đường là các đường cong HEK và $PQIR$). Trong đó phần giới hạn bởi đường cong HEK và các đoạn AH, AB, BK là sân chơi, phần giới hạn bởi đường cong $PQIR$ và các đoạn PD, DC, CR để trồng hoa (tham khảo hình vẽ). Nếu gắn một hệ trục tọa độ vuông góc có trục hoành, trục tung lần lượt cùng phương với các đường thẳng AB, AD thì đường cong $PQIR$ là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$. Đường cong HEK nhận được bằng cách tịnh tiến đường cong $PQIR$ theo phương thẳng đứng lên phía trên 10 m . Biết $AP = 30\text{ m}$, $BR = 20\text{ m}$, điểm Q cách các cạnh AB, AD lần lượt 25 m và 20 m , điểm I cách các cạnh AB, AD lần lượt 25 m và 35 m . Gọi S_1 là diện tích phần sân chơi và S_2 là diện tích phần trồng hoa. Tính $\frac{S_1}{S_2}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



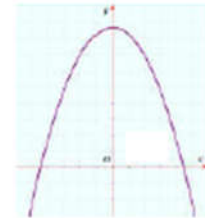
Câu 8. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2025) Một tấm kính làm mặt bàn ($H1$) có dáng hình tam giác đều với 3 đỉnh được làm cong ($H2$). Biết cạnh tam giác ban đầu bằng $16(\text{dm})$. Để cắt góc được đẹp thì người ta dùng đường Parabol (P): $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{15\sqrt{3}}{2}$ ($H3$) có hai nhánh tiếp xúc với hai cạnh của tam giác.



H1



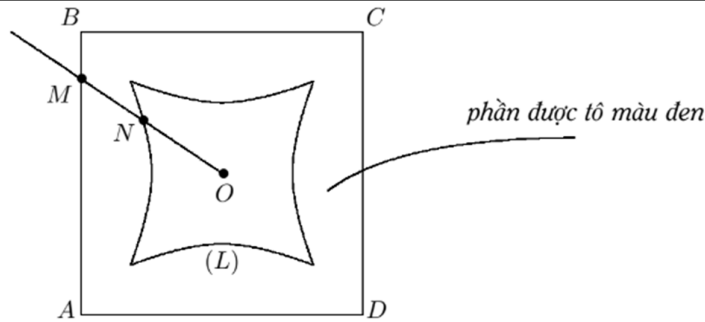
H2



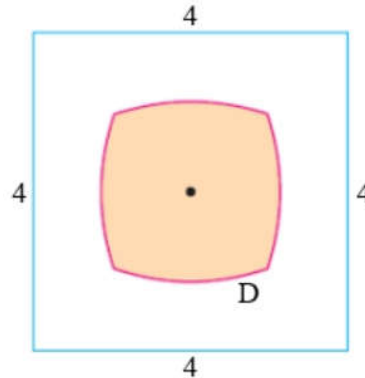
H3

Biết diện tích mặt kính là $a\sqrt{b}(\text{dm}^2)$, (với a là số nguyên dương và b là số nguyên tố). Tính $a+b$

Câu 9. (THPT Lê Thánh Tông - Nguyễn Khuyến HCM 2025) Người nghệ sĩ vẽ một bông hoa không màu trên một miếng bìa hình vuông $ABCD$ tâm O bằng một đường cong kín (L) rồi tô màu đen phần bên ngoài đường cong này của hình vuông (tham khảo hình vẽ). Nếu điểm M thuộc cạnh của hình vuông $ABCD$ và tia OM cắt (L) tại điểm N thì $MN = 2\text{ dm}$. Biết rằng $AB = 8\text{ dm}$, phần được nghệ sĩ tô màu đen có diện tích bằng bao nhiêu centimet vuông? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

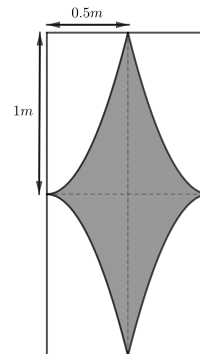


Câu 10. (Sở Bắc Giang 2025) Hình vẽ dưới đây cho biết một miền D (được tô đậm) nằm trong hình vuông cạnh bằng 4, miền D này gồm những điểm có khoảng cách tới tâm hình vuông nhỏ hơn hoặc bằng khoảng cách tới cạnh gần nhất của hình vuông.

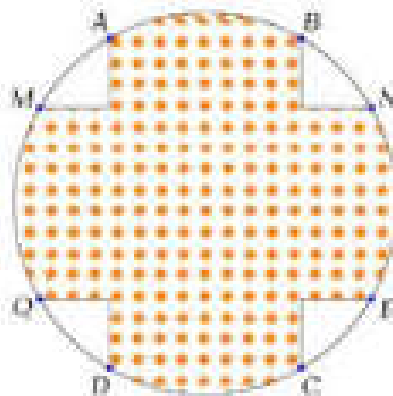


Tính diện tích miền D, với kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.

Câu 11. (Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng 2025) Nhà bác Ba có tất cả 8 cánh cửa sắt hình chữ nhật với chiều dài $2m$ và chiều rộng $1m$. Hai mặt của mỗi cánh cửa được thiết kế như hình vẽ dưới đây. Trong đó, phần được tô đậm được sơn màu xanh, phần còn lại được sơn màu trắng. Mỗi phần sơn màu trắng có đường biên cong là một phần của parabol có đỉnh nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Biết rằng chi phí để sơn màu xanh là 120 nghìn đồng/ m^2 và chi phí sơn màu trắng là 110 nghìn đồng/ m^2 . Hỏi, để sơn toàn bộ số cửa sắt trên, bác Ba phải tốn bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị triệu đồng).



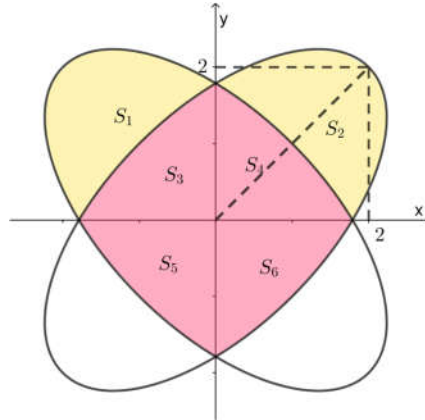
Câu 12. (KHTN Hà Nội 2025) Một mảnh vườn hoa dạng hình tròn có bán kính bằng $6m$. Phần đất trồng hoa là phần tô trong hình vẽ bên. Biết hai hình chữ nhật $ABCD$, $MNPQ$ có $AB = MQ = 6m$ và kinh phí trồng hoa là 100000 đồng/ m^2 . Tính số tiền cần để trồng hoa? (đơn vị: triệu đồng, kết quả là tròn đến hàng phần chục).



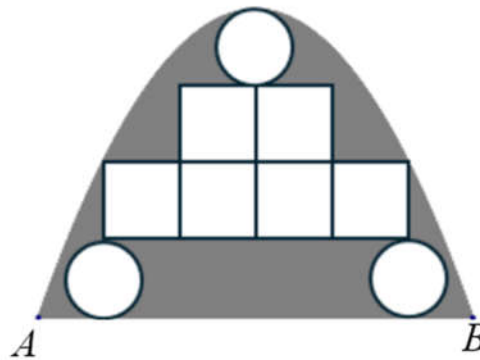
Câu 13. (THPT Lê Thánh Tông - Nguyễn Khuyến 2025) Bạn Hoa vừa mê học toán, vừa mê một bạn nam lớp bên cạnh. Ngày sinh nhật Hoa thì bạn nam ấy đã tặng cho Hoa một tờ giấy, trong đó có vẽ hai hình elip ghép lại tạo ra hình trái tim rất đẹp. Phần hai cánh có diện tích S_1 , S_2 được tô màu vàng, phần có diện tích S_3 , S_4 , S_5 , S_6 được tô màu đỏ. Hoa vui vẻ đón nhận “món quà”

nhưng sau đó lại tỏ ra khó hiểu. Một người bạn đã tư vấn cho Hoa rằng màu đỏ tượng trưng cho tình yêu, màu vàng lại tượng trưng cho tình bạn, bây giờ chỉ còn cách tính tỷ số $\frac{S_3 + S_4 + S_5 + S_6}{S_1 + S_2}$

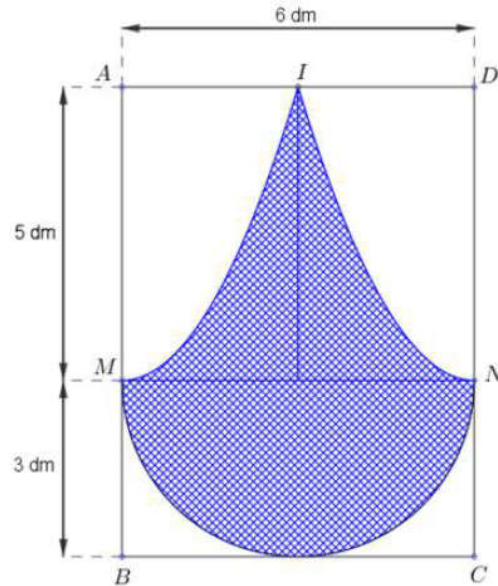
bằng bao nhiêu mới biết Crush thực sự có tình cảm với Hoa hay chỉ xem Hoa là bạn, các em hãy tính giúp bạn Hoa tỷ số trên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm); biết rằng khoảng cách từ điểm O đến giao điểm của hai elip bằng 1,8 cm.



- Câu 14. (Sở Hà Nội 2025)** Một cửa vòm có dạng hình parabol được lắp các tấm kính hình tròn đường kính $1m$ và các tấm kính hình vuông có cạnh $1m$ như hình vẽ. Phần còn lại của cửa được sơn màu trang trí với mức giá $1,2$ triệu đồng / m^2 . Chi phí sơn màu là bao nhiêu triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

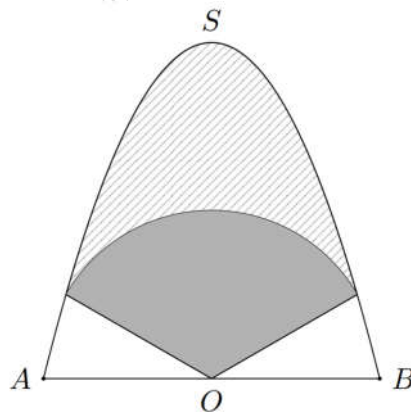


- Câu 15. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ 2025)** Để trang trí một bảng gỗ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 8dm$ và chiều rộng $AD = 6dm$, người ta thiết kế một logo là hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính $MN = 6dm$, tiếp xúc với BC , hai đường cong IM, IN là một phần của các đường parabol có trục đối xứng lần lượt là AB, CD với I là trung điểm của AD (tham khảo hình vẽ).

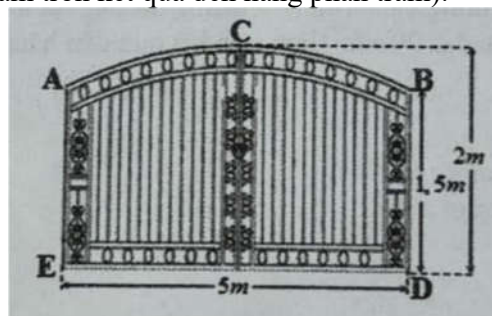


Phần logo được sơn màu xanh với chi phí 50000 đồng/ 1 dm^2 và phần còn lại của bảng gỗ được sơn màu trắng với chi phí 30000 đồng/ 1 dm^2 . Hỏi cần bỏ ra bao nhiêu nghìn đồng để trang trí bảng gỗ trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

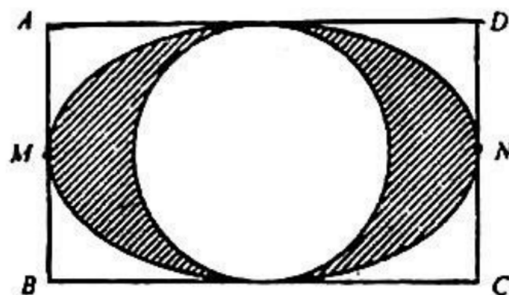
- Câu 16. (Chuyên KHTN Hà Nội 2025)** Đề chuẩn bị quảng bá sản phẩm, người ta trang trí tấm pano dạng parabol như hình vẽ, biết $OS = 8\text{ m}$, $AB = 6\text{ m}$ với O là trung điểm của AB . Tấm pano được chia thành ba phần để trang trí với mức chi phí khác nhau: phần trên là phần kẻ sọc giá 100000 đồng/ m^2 , phần giữa là hình quạt tâm O bán kính 3 m được tô đậm giá 200000 đồng/ m^2 , phần còn lại giá 150000 đồng/ m^2 . Tính tổng chi phí để trang trí tấm pano (đơn vị triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



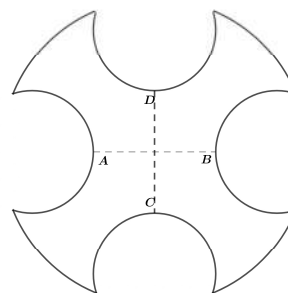
- Câu 17. (Sở Tuyên Quang 2025)** Bác Vinh muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên dưới, biết đường cong phía trên là một parabol, tứ giác ABDE là hình chữ nhật. Giá của cánh cửa sau khi hoàn thành là 700000 đồng/ m^2 . Hỏi bác Vinh phải trả số tiền bao nhiêu triệu đồng để làm một cửa sắt như vậy? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



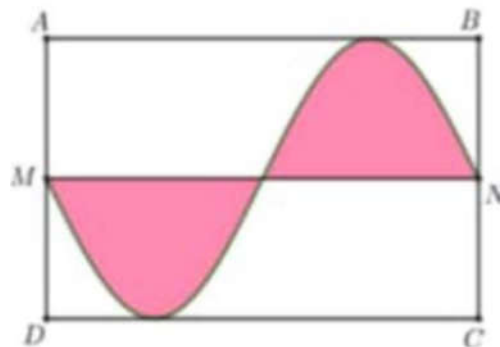
- Câu 18. (Sở Yên Bái 2025)** Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quanh trục MN . Biết rằng $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 6\text{cm}$, $AD = 10\text{cm}$ và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Hai đường cong là đường Elip có hình chữ nhật cơ sở là $ABCD$ và đường tròn tiếp xúc với hai cạnh AD và BC (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích của vật trang trí đó (kết quả làm tròn đến hàng phần chục theo đơn vị cm^3).



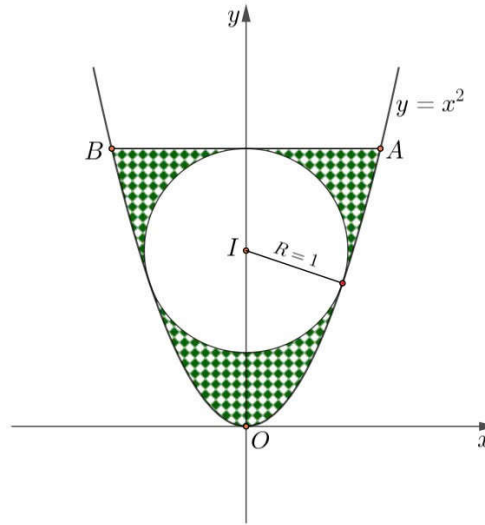
- Câu 19. (Sở Bắc Ninh 2025)** Trong cơ khí chế tạo, một chi tiết máy hình đĩa tròn có dạng như hình vẽ bên, nhận AB và CD làm các trục đối xứng. Người ta cần phủ sơn cả hai mặt của chi tiết. Biết rằng đường tròn lớn có bán kính 5 dm , các đường tròn nhỏ đều có bán kính bằng 2 dm , $AB = CD = 4\text{ dm}$ và chi phí sơn là 103.000 đồng/ m^2 . Chi phí để sơn hoàn thiện chi tiết máy bằng bao nhiêu nghìn đồng (kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị)?



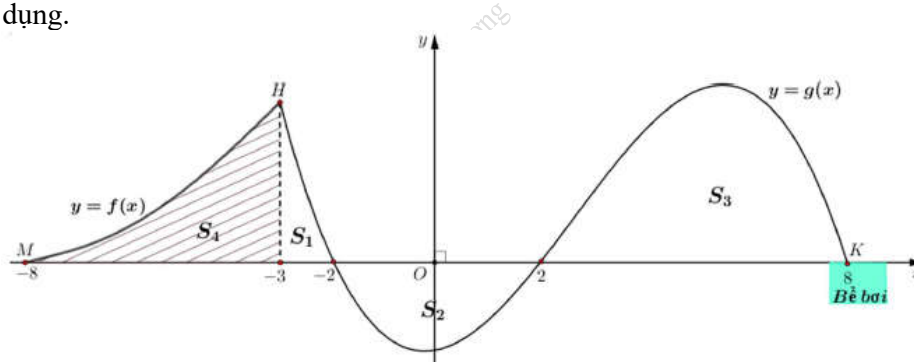
- Câu 20. (THPT Đô Lương 1 - Nghệ An 2025)** Bác Hưng có một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ được quy hoạch như hình bên. Biết đường cong là đường sin của hàm số dạng $y = a \sin(bx)$. Biết $AB = 2\pi(m)$ và $AD = 4(m)$. Phần tô đậm (giới hạn bởi đường cong và đoạn MN) được sử dụng để trồng hoa. Tính diện tích phần còn lại của mảnh vườn (đơn vị m^2 , làm tròn đến hàng phần chục)



- Câu 21. (Sở Bình Phước 2025)** Một khoảng sân của một ngôi nhà có hình dạng là một phần của parabol, nếu chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới thì parabol có phương trình là $y = x^2$. Chủ nhà muốn thiết kế một hồ nuôi cá cảnh có dạng hình tròn bán kính 1 m , hình tròn được thiết kế tiếp xúc với 2 nhánh của parabol, phía trên của hình tròn ngăn bởi một bức tường mỏng tiếp xúc với hình tròn. Phần đất còn lại của khoảng sân giới hạn bởi đường tròn, 2 nhánh của parabol và bức tường được thiết kế trồng hoa (phần gạch sọc trong hình). Tính diện tích mà chủ nhà thiết kế để trồng hoa, biết rằng đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

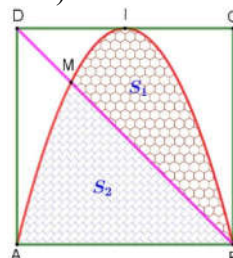


Câu 22. (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025) Nhằm thu hút du khách và khẳng định vị thế dẫn đầu, công viên nước Đầm Sen quyết định đầu tư xây dựng một đường trượt nước độc đáo có mặt cắt được gắn vào hệ trục Oxy (xem trục Ox là mặt đất) với đơn vị mỗi trục là $1m$ như hình vẽ bên. Đường trượt được thiết kế theo hình dạng của một hàm bậc ba $y = g(x)$, với mục tiêu tối ưu hóa trải nghiệm của người dùng, một phần đường trượt được đặt dưới mặt đất để tận dụng địa hình và tạo hiệu ứng bất ngờ. Điểm đầu của đường trượt là $H(-3; a)$ và điểm cuối là $K(8; 0)$ và ngay dưới điểm K là một bể bơi. Để tiếp cận đường trượt, một cầu thang cong có dạng Parabol $y = f(x)$ có đỉnh là điểm $M(-8; 0)$ được xây dựng, đảm bảo độ dốc vừa phải và an toàn cho người sử dụng.



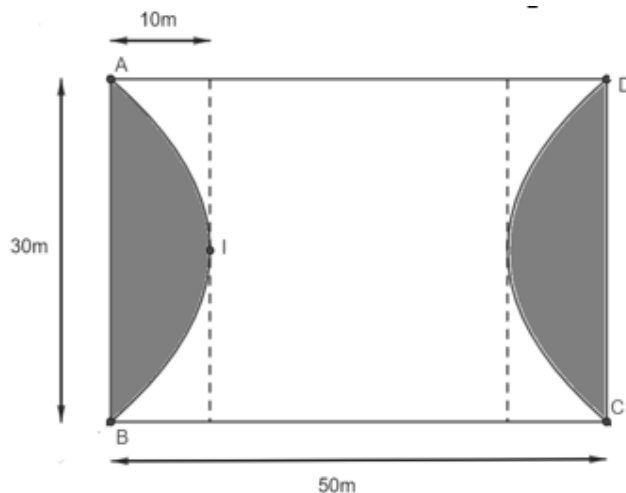
Các diện tích hình phẳng được tạo bởi các đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = -3$ và trục hoành như hình vẽ. Để đảm bảo an toàn tuyệt đối cho người chơi và tính ổn định của công trình, các kỹ sư cần đặc biệt chú trọng đến phần đường trượt nằm dưới lòng đất. Hãy xác định độ cao lớn nhất mà đường trượt chìm xuống so với mặt đất (đơn vị: mét) biết rằng $S_1 + S_3 = S_2 + S_4 + \frac{109}{12}$. (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 23. (Sở Hòa Bình 2025) Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $4m$ và I là trung điểm của đoạn thẳng CD . Trên tấm biển đó có đường parabol đỉnh I đi qua A, B và cắt đường chéo BD tại M (tham khảo hình vẽ).



Chi phí sơn phần tô hình tổ ong (có diện tích S_1) là 200000 đồng/m², chi phí sơn phần tô đậm (có diện tích S_2) là 150000 đồng/m² và phần còn lại là 120000 đồng/m². Số tiền cần chi trả để sơn tấm biển quảng cáo là bao nhiêu nghìn đồng?

- Câu 24. (Sở Sơn La 2025)** Kiến trúc sư thiết kế một khu vui chơi có dạng hình chữ nhật với chiều rộng 30m và chiều dài 50m. Trong đó, phần tô màu đậm trông cỏ nhưng Nhật, phần còn lại trải thảm cỏ nhân tạo. Mỗi phần trông cỏ nhưng Nhật có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh I thuộc trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh I đến trung điểm của cạnh AB bằng 10m (xem hình minh họa). Biết giá cỏ nhưng Nhật là 140000 đồng/m², giá cỏ nhân tạo là 100000 đồng/m². Tính tổng số tiền để trông và trải thảm cỏ hết khu vui chơi theo đơn vị triệu đồng.

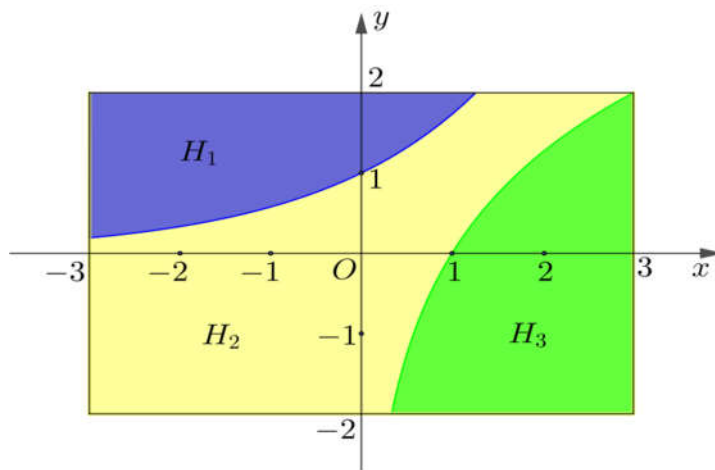


- Câu 25. (THPT Hương Hóa - Quảng Trị 2025)** Tốc độ tăng cân nặng của một bé gái trong độ tuổi từ 0 tháng đến 36 tháng được ước tính bởi hàm số $f'(t) = 0,00093t^2 - 0,04792t + 0,76806$ (kg/tháng), với $f(t)$ là cân nặng của bé gái lúc t tháng tuổi.

(Nguồn: <http://www.vinmec.com>)

Hãy ước tính cân nặng của một bé gái 5 tháng tuổi, biết cân nặng của bé gái đó khi mới sinh là 3,3 kg (đơn vị: kg, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

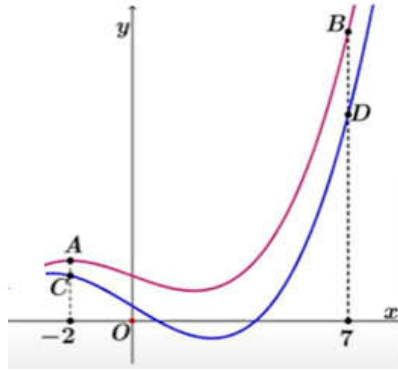
- Câu 26. (Sở Phú Thọ 2025)** Một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước lần lượt là 6 m và 4 m được bạn Minh trang trí bằng cách vẽ hai đồ thị hàm số $f(x) = a^x$ ($0 < a \neq 1$) và $g(x) = \log_b x$ ($0 < b \neq 1$) đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$. Bức tường được chia làm 3 phần (tham khảo hình vẽ).



Phần H_1 được sơn màu xanh da trời, phần H_2 sơn màu vàng và phần H_3 được sơn màu xanh lá cây. Bạn Minh cần mua các hộp sơn mà mỗi hộp chỉ sơn được một màu tương ứng với các màu mà bạn Minh định sơn. Biết rằng mỗi hộp sơn chỉ sơn được tối đa 3 m² tường, giá một hộp sơn màu xanh da trời là 120000 đồng, giá một hộp sơn màu xanh lá cây là 140000 đồng, giá một hộp

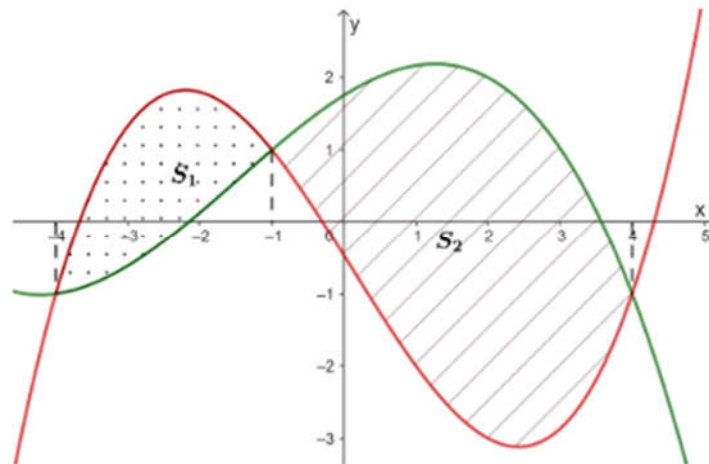
son màu vàng là 160000 đồng. Cửa hàng chỉ bán số các hộp sơn là các số nguyên dương. Bạn Minh cần bao nhiêu triệu đồng để sơn bức tường đó?

- Câu 27. (Sở Bình Thuận 2025)** Hướng ứng chính sách hiện đại hóa nông thôn, người dân ở khu phố A đồng lòng cùng nhau góp tiền để bê tông một đường đi trong khu phố (phần được tô đậm trong hình vẽ).



Biết rằng khi chọn hệ trục tọa độ Oxy với đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 10 m, các đường cong AB, CD là mép đường được cho bởi đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{32}x^3 - \frac{3}{8}x + \frac{3}{2}$ và $g(x) = \frac{1}{32}x^3 - \frac{5}{8}x + \frac{1}{2}$, đồng thời lớp bê tông được đổ dày 16 cm và giá tiền 1m³ bê tông là 1080000 đồng. Tính số tiền (đơn vị triệu đồng) cần dùng để đổ bê tông con đường đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

- Câu 28. (Sở Quảng Nam 2025)** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$ ($a, b, c, d, m, n, p, q \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -4 ; -1 ; 4 và $f(2) = 2$; $g(x) = -3$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$; $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = -4$; $x = -1$. Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$; $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 4$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)



- Câu 29. (Sở Thái Nguyên 2025)**

$B \langle \chi \ B \mid v \eta \ \mu \nu \nabla v \ v \eta$

$\uparrow\uparrow$ τη© τρανγ τρζ μ
 \wedge τ β┐χ τυ↑νγ η┐νη
 χη┐νη↑τ _{ADEF} ω↔ι κζ
 χη τηυ↔χ _{EF = 6m, DE = 3m} σα
 ο χηο χ®ν ξ┐νγ ηαι
 νζ α. Πη♣ν γΥχη χ
 η┐ο λ◇ η┐νη γι↔ι η
 Υν β↓↓ι □υ↑νγ γ∞π κ
 η┐χ _{AFED}
 ω◇ νζ α □υ↑νγ τρ┐ν
 □υ↑νγ κζ νη _{AD}, □υ©

$\chi \tau \eta \nu | \sigma \circ \nu \omega \Leftrightarrow i \square o$

$\nu \gamma i \langle \quad 250000$

$\square \textcircled{C} \nu \gamma \mu \cdot i \mu \lceil \tau \omega \nu | \nu \gamma$

$\cdot \Pi \eta \clubsuit \nu \mu \diamond \nu \tau \rho \downarrow \nu \gamma \gamma$

$i \Leftrightarrow i \eta \Upsilon \nu \beta \Downarrow i \nu \zeta \alpha \square$

$\nu \Uparrow \nu \gamma \tau \rho \lceil \nu \square \nu \Uparrow \nu \gamma \kappa \zeta$

$\nu \eta \quad AD$

$\omega \diamond \mu \wedge \tau \square \nu \Uparrow \nu \gamma \pi \alpha \rho$

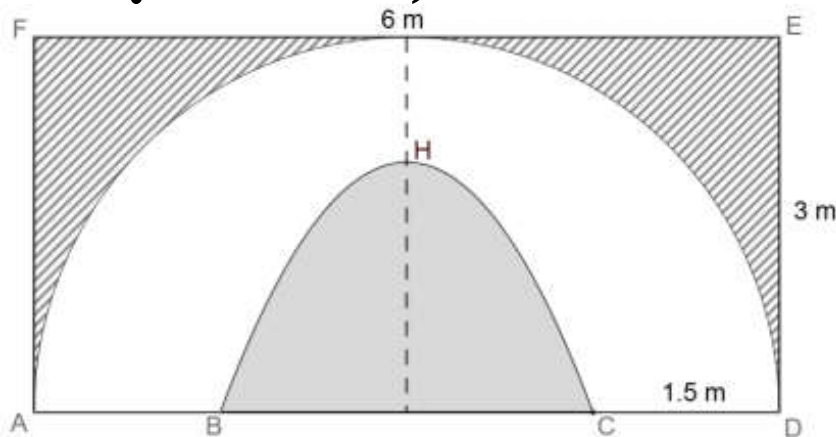
$\alpha \beta \circ \lambda (\chi \lceil \square \supset \nu \eta \quad H$

$\chi \langle \chi \eta \square \nu \Uparrow \nu \gamma \tau \eta \geq \nu \gamma \quad AB$

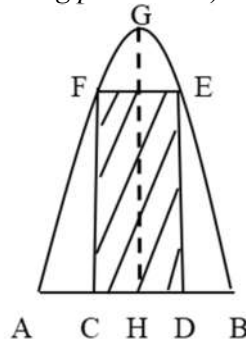
$\mu \wedge \tau \kappa \eta \circ \leq \nu \gamma \beta \pm \nu \gamma \quad 2m$

$\omega \diamond \square_1 \theta \cup \alpha \eta \alpha \iota \square_1 \wp$
 $\mu_{B,C} \nu \pm \mu \tau \rho \mid \nu \chi \Upsilon \nu \eta_{AD}$
 $\tau \eta \notin \alpha \mu \odot \nu_{AB=CD=1,5m}) \square \cup$
 $\odot \chi \tau \eta \cup \mid \tau \rho \alpha \nu \gamma \tau \rho \mid$
 $\beta \pm \nu \gamma \beta \mid \chi \pi \eta \mid \square \mid \cup \square$
 $\downarrow \pi \beta \pm \nu \gamma \xi \iota \mu \odot \nu \gamma \omega$
 $\Leftrightarrow \iota \square \cup \nu \gamma \iota \langle_{1950000}$
 $\square \odot \nu \gamma \mu \cdot \iota \mu \mid \tau \omega \cup \mid \nu \gamma$
 $(\tau \eta \alpha \mu \kappa \eta \leq 0 \eta \mid \nu \eta$
 $\omega \mid). H \notin \iota \beta \langle \chi B \mid \nu \eta$
 $\pi \eta \leq \iota \tau \rho \leq \beta \alpha \cup \nu \eta \mid \cup$

$\tau\rho\iota\omicron\upsilon\ \square\copyright\nu\gamma\ \square\ \wp\ \tau\rho$
 $\alpha\nu\gamma\ \tau\rho\chi\ \beta\lceil\chi\ \tau\upsilon\uparrow\nu\gamma\ \nu$
 $\eta\upsilon\ \wp\uparrow\psi\ (\kappa\lceil\tau\ \theta\upsilon\leq\lambda$
 $\diamond\mu\ \tau\rho\lceil\nu\ \square\lceil\nu\ \eta\diamond\nu\gamma\ \pi$
 $\eta\clubsuit\nu\ \mu\upsilon\uparrow\iota)$



Câu 30. (Sở Long An 2025) Một cổng của một tòa nhà có dạng parabol gồm hai phần: phần hai cánh cửa hình chữ nhật $CDEF$, còn lại là phần xiên hoa trang trí (hình bên dưới). Biết rằng $GH = 16m$, $AB = 8m$ và $AC = BD = 1,7m$. Diện tích phần cổng làm xiên hoa trang trí bằng bao nhiêu mét vuông (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

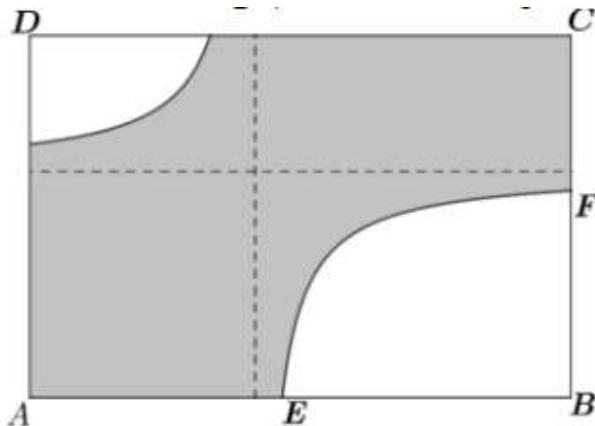


Câu 31. (Sở Quảng Ninh 2025) Một công ti đang thiết kế một bảng quảng cáo hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $AB = 12m$ và $AD = 8m$. Phần trung tâm của bảng sẽ được in nội dung quảng cáo, được mô tả là phần tô đậm (xem hình minh họa). Hai đường cong trong hình là một phần của đồ

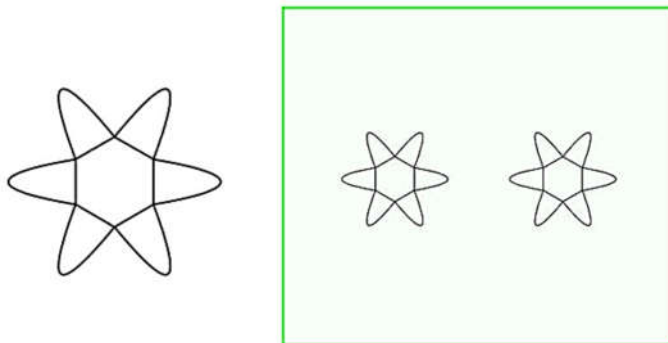
thị hàm số có dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số này đều

cách điểm A một khoảng bằng 5 m. Đồ thị giao với cạnh AB tại điểm E thỏa mãn $\frac{AE}{AB} = \frac{7}{15}$.

Diện tích phần in nội dung quảng cáo là bao nhiêu mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

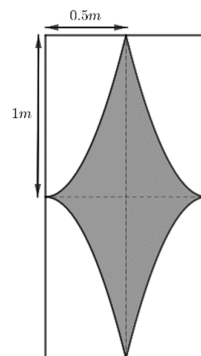


- Câu 32. (Sở Vũng Tàu 2025)** Để trang trí một bức tường hình chữ nhật có kích thước $3m \times 4m$ trong phòng, bạn Hoa vẽ lên tường một hình như sau: Trên mỗi cạnh của một hình lục giác đều có cạnh $2dm$, vẽ một cánh hoa hình parabol. Đỉnh của parabol cách cạnh $3dm$ và nằm phía ngoài hình lục giác đều. Đường parabol đi qua hai đầu mút của mỗi cạnh hình lục giác (tham khảo hình vẽ).

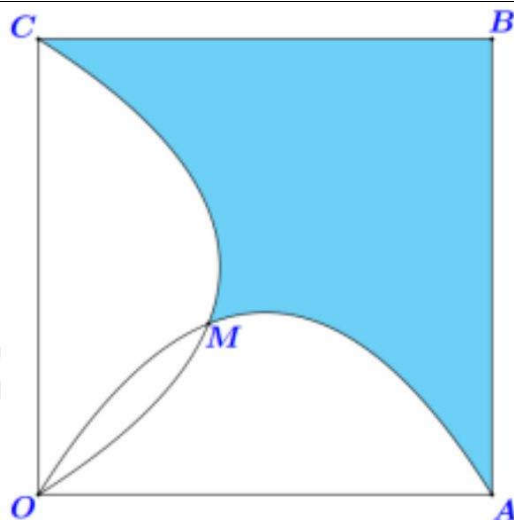


Hỏi bạn Hoa có thể vẽ tối đa bao nhiêu hình có cùng kích thước như vậy lên bức tường cần trang trí?

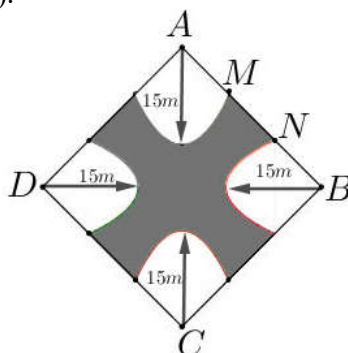
- Câu 33. (Sở Bình Phước 2025)** Nhà bác An có tất cả 8 cánh cửa sắt hình chữ nhật với chiều dài $2m$ và chiều rộng $1m$. Hai mặt của mỗi cánh cửa được thiết kế như hình vẽ dưới đây. Trong đó, phần được tô đậm được sơn màu xanh, phần còn lại được sơn màu trắng. Mỗi phần sơn màu trắng có đường biên cong là một phần của parabol có đỉnh nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Biết rằng chi phí để sơn màu xanh là 120 nghìn đồng/ m^2 và chi phí sơn màu trắng là 110 nghìn đồng/ m^2 . Hỏi để sơn toàn bộ số cửa sắt trên, bác An phải trả bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị triệu đồng).



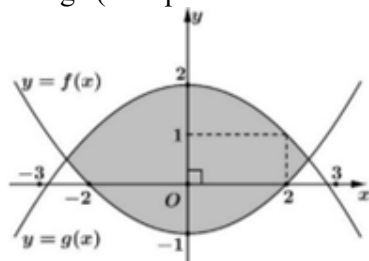
- Câu 34. (Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai 2025)** Cho hình vuông OABC cạnh bằng 8, điểm M nằm trong hình vuông sao cho khoảng cách từ M đến các cạnh OA, OC cùng bằng 3. Parabol (P_1) đi qua các điểm O, A, M, Parabol (P_2) đi qua các điểm O, C, M. Tính diện tích phần tô đậm (hình vẽ bên). (kết quả làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Câu 35. (THPT Lê Quý Đôn - Hà Nội 2025) Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo $AC = 45\text{m}$. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với các đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình vuông, khoảng cách từ đỉnh đó đến đỉnh tương ứng của hình vuông bằng 15m . Bản thiết kế khu sinh hoạt nhận tâm hình vuông $ABCD$ làm tâm đối xứng và trên hình bên ta có $AM = MN = NB$. Để trang trí cho phần sân chơi tốn 500 nghìn đồng / 1m^2 , để trồng hoa tốn 200 nghìn đồng / 1m^2 . Tổng số tiền cần dùng là bao nhiêu triệu đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

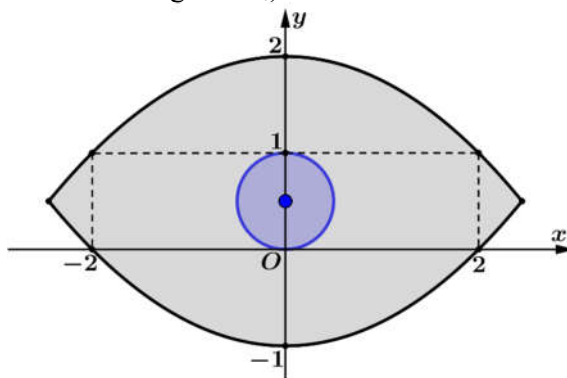


Câu 36. (Sở Hậu Giang 2025) Anh Trí nhận thiết kế một logo hình con mắt (phần được tô đậm) cho một cơ sở y tế: Logo là một hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = f(x)$ và $y = g(x)$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là centimet). Chi phí sản xuất mỗi cm^2 trên logo là 1000 đồng. Chi phí sản xuất mỗi logo là bao nhiêu đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

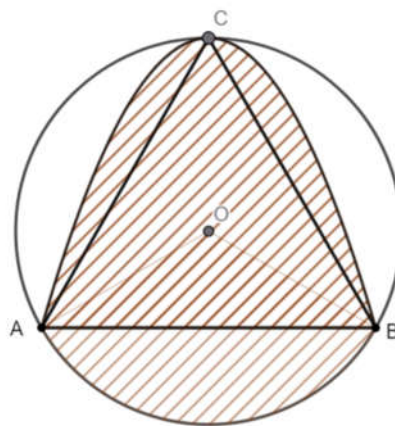


Câu 37. (THPT Nguyễn Quốc Trinh - Hà Nội 2025) Bạn An thực hiện thiết kế một logo hình con mắt cho một phòng khám nhãn khoa. Logo là một hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có các kích thước như hình vẽ dưới đây (phần được tô màu đen) và một hình tròn có bán kính bằng $0,5\text{dm}$ ở giữa là phần con ngươi (phần được tô màu xanh), đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimet. Biết rằng chi phí để sơn phần con ngươi hình tròn màu xanh là 25000 đồng/ dm^2 và

chi phí để sơn phần còn lại màu đen là 20000 đồng/dm². Chi phí để sơn logo trên là bao nhiêu nghìn đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

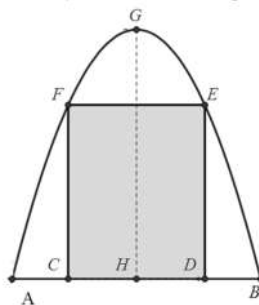


- Câu 38.** (Cụm THPT Hoàn Kiếm - Hai Bà Trưng - Hà Nội 2025) Một hoa văn hình tròn tâm O , ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh $AB = 2\sqrt{3}$ cm. Đường cong qua ba điểm A, B, C là một phần của parabol (xem hình vẽ).



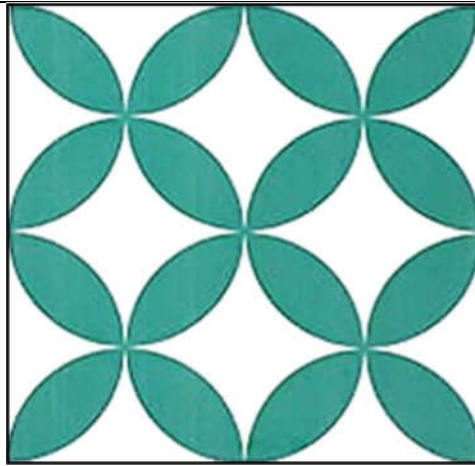
Tính diện tích của phần hình phẳng giới hạn bởi đường tròn và parabol (phần không gạch) theo đơn vị cm^2 (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

- Câu 39.** (THPT Bắc Đông Quan - Thái Bình 2025) Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau:



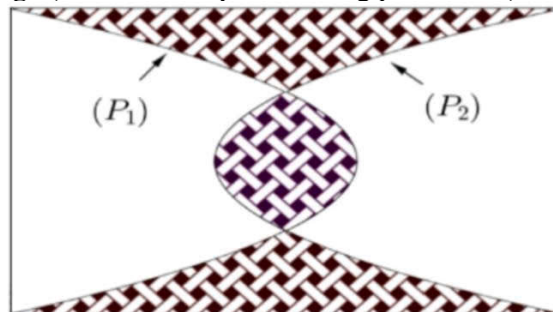
Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng nhựa lõi thép UPVC, khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1500 000 đồng/ m^2 , còn các phần để trồng làm xiên hoa có giá là 1000 000 đồng/ m^2 . Tổng số tiền để làm hai phần nói trên là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

- Câu 40.** (Sở Thái Bình 2025) Viên gạch men dùng để lát nền nhà là một hình vuông có cạnh bằng 80 cm (xem hình bên dưới). Mỗi viên gạch có 4 bông hoa, mỗi bông hoa gồm 4 cánh hoa. Mỗi cánh hoa (phần màu xanh) là phần giao nhau của hai hình tròn có cùng bán kính và khoảng cách giữa hai tâm là $20\sqrt{2}$ cm.

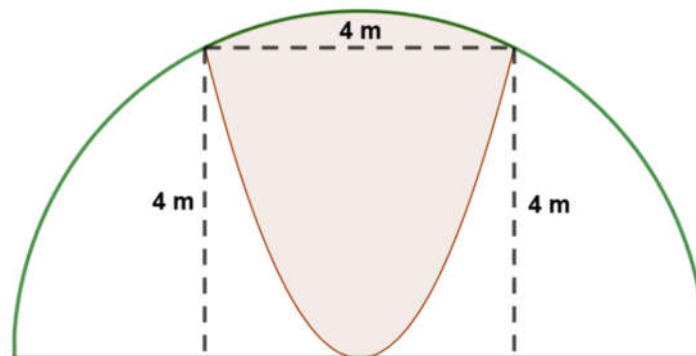


Ước tính ở công đoạn tráng men, phần màu xanh có chi phí 50 nghìn đồng trên một mét vuông, còn phần màu trắng có chi phí 30 nghìn đồng trên một mét vuông. Tính chi phí (đơn vị: tỉ đồng) của công đoạn tráng men này, khi cơ sở dự định sản xuất 100000 viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 41. (Sở Hà Tĩnh 2025) Trang trí một sân hình chữ nhật kích thước 28m x 16m, trong đó hai Parabol (P_1) đối xứng với (P_2) qua đường thẳng đi qua hai trung điểm của chiều dài sân (hình vẽ), khoảng cách giữa hai đỉnh Parabol bằng 4m. Chi phí trang trí cho phần hoa văn là 180 ngàn đồng trên một mét vuông, phần trắng là 160 ngàn đồng trên một mét vuông. Tổng chi phí trang trí cho sân là bao nhiêu **triệu đồng**? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



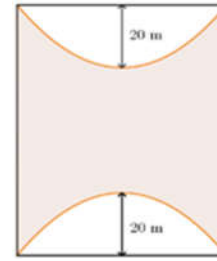
Câu 42. (Sở Lai Châu 2025) Khuôn viên nhà bạn Thùy Dương có dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn và cách nhau một khoảng bằng 4 m. Phần còn lại của khuôn viên dành để trồng cỏ Nhung Nhật. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí trồng hoa và cỏ Nhung Nhật tương ứng là 250.000 đồng/m² và 150.000 đồng/m². Hỏi chi phí để trồng hoa và trồng cỏ Nhung Nhật trong khuôn viên đó hết bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



ĐÁP ÁN THAM KHẢO

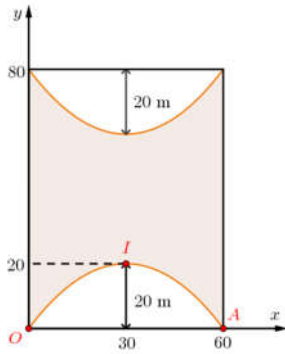
Câu 1. (Đề Tham Khảo 2025) Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là 60m và 80m.

Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh đó đến trung điểm cạnh tương ứng của hình chữ nhật bằng 20m (xem hình minh họa). Diện tích của phần sân chơi là bao nhiêu mét vuông?

**Lời giải**

Đáp án: 3200.

Đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Nhận thấy hai phần trồng hoa dạng đường parabol có diện tích như nhau. Vậy ta xét đường parabol ở bồn hoa phía dưới có dạng $(P): y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Ta có đồ thị (P) đi qua ba điểm là $O(0;0)$, $I(30;20)$ và $A(60;0)$. Thay vào ta thu được hệ phương trình

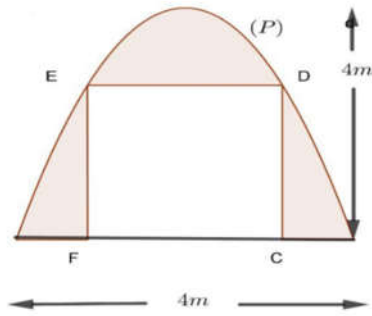
$$\begin{cases} c = 0 \\ 900a + 30b + c = 20 \\ 3600a + 60b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{45} \\ b = \frac{4}{3} \\ c = 0 \end{cases}$$

Như vậy, ta có phương trình parabol đó là $y = -\frac{1}{45}x^2 + \frac{4}{3}x$ và diện tích của phần trồng hoa phía dưới là

$$S_{\text{hoa}} = \int_0^{60} \left| -\frac{1}{45}x^2 + \frac{4}{3}x \right| dx = \int_0^{60} \left(-\frac{1}{45}x^2 + \frac{4}{3}x \right) dx = 800 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Khi đó, diện tích của phần sân chơi là $S = 60 \cdot 80 - 2S_{\text{hoa}} = 3200 \text{ (m}^2\text{)}.$

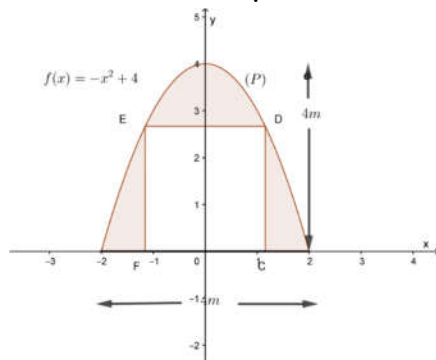
Câu 2. (THPT Hùng Vương - Bình Thuận 2025) Một gia đình thiết kế chiếc cổng có dạng là một parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng chiều rộng của cổng và bằng 4m. Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$ sao cho chiều cao cửa đi là $CD = 2m$, phần còn lại dùng để trang trí. Biết chi phí phần tô đậm là 1,5 triệu đồng/ m^2 . Tính số tiền (triệu đồng) gia đình đó phải trả để trang trí phần tô đậm (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Lời giải

Đáp án: 7,5.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy , như hình vẽ thì phương trình của đường cong (P) cánh cổng là $y = f(x) = -x^2 + 4$.



Từ hình vẽ, ta có parabol (P) có dạng: $y = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Do (P) có đồ thị là parabol có đỉnh $(0; 4)$ và đi qua điểm có tọa độ là $(2; 0)$ nên

$$\begin{cases} b = 0 \\ c = 4 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}.$$

Vậy (P) có phương trình $y = -x^2 + 4$.

Theo giả thiết điểm D thuộc đồ thị (P) có tung độ bằng 2 suy ra hoành độ là nghiệm phương trình $-x^2 + 4 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Theo đồ thị điểm D có hoành độ dương nên $D(\sqrt{2}; 2)$

Chiều rộng của cửa là $CF = 2.OD = 2\sqrt{2}(m)$.

Ta có, diện tích của (P) tạo với trục hoành là: $S = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \frac{32}{3} m^2$.

Diện tích hình chữ nhật $CDEF$ là $S_{CDEF} = 2.2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

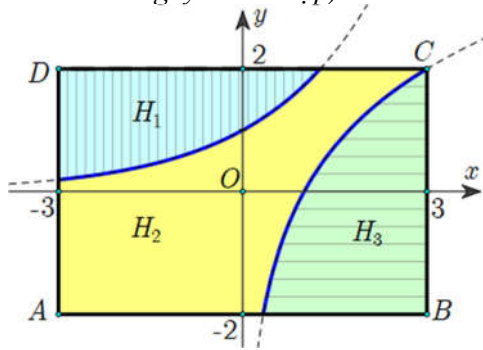
Diện tích cần trang trí là $S_1 = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 4\sqrt{2} = \frac{32 - 12\sqrt{2}}{3}$.

Chi phí để trang trí phần tô đậm là $\left(\frac{32 - 12\sqrt{2}}{3} \right) \cdot 1,5 = 7,514718626$ (đồng)

Số tiền gia đình đó phải trả để trang trí phần tô đậm là 7,5 (triệu đồng)

Câu 3. (THPT Nguyễn Khuyến - Lê Thánh Tông 2025) Một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $6(m)$, $4(m)$ được bạn Hà trang trí bằng cách vẽ hai đồ thị $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_b x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = x$ và chia thành ba phần (tham khảo hình vẽ bên). Phần H_1

được sơn màu xanh da trời, phần H_2 được sơn màu vàng, phần H_3 được sơn màu xanh lá cây. Biết rằng mỗi hộp sơn các màu chỉ sơn được $3(m^2)$ tường, đồng thời giá của hộp sơn màu xanh da trời là 100.000 đồng/hộp, hộp sơn vàng là 140.000 đồng/hộp, hộp sơn xanh lá cây là 130.000 đồng/hộp. Tính giá tiền bạn Hà mua để sơn bức tường này? (đơn vị là triệu đồng và cửa hàng sơn chỉ bán số nguyên của hộp).



Lời giải

Đáp án: 1,15.

Do đồ thị của $f(x) = a^x$ và $g(x) = \log_b x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x \Rightarrow a = b$

Mặt khác đồ thị của $y = \log_b x$ đi qua điểm $C(3;2) \Rightarrow b = \sqrt{3}$.

Hai hàm số là $f(x) = (\sqrt{3})^x$ và $g(x) = \log_{\sqrt{3}} x$

Đồ thị của $f(x)$ cắt $y = 2$ tại điểm $(\log_{\sqrt{3}} 2; 2)$ và đồ thị của $g(x)$ cắt $y = -2$ tại $(\frac{1}{3}; -2)$.

Diện tích của miền H_1 là: $S_1 = \int_{-3}^{\log_{\sqrt{3}} 2} (2 - \sqrt{3}^x) dx \approx 5,233$.

Diện tích của miền H_3 là: $S_3 = \int_{\frac{1}{3}}^3 (\log_{\sqrt{3}} x + 2) dx \approx 7,145$.

Diện tích của miền H_2 là: $S_2 = 6 \times 4 - 5,233 - 7,145 = 11,622$.

Vậy cần dùng 2 hộp sơn màu xanh da trời, 3 hộp sơn màu xanh lá cây và 4 hộp sơn màu vàng.

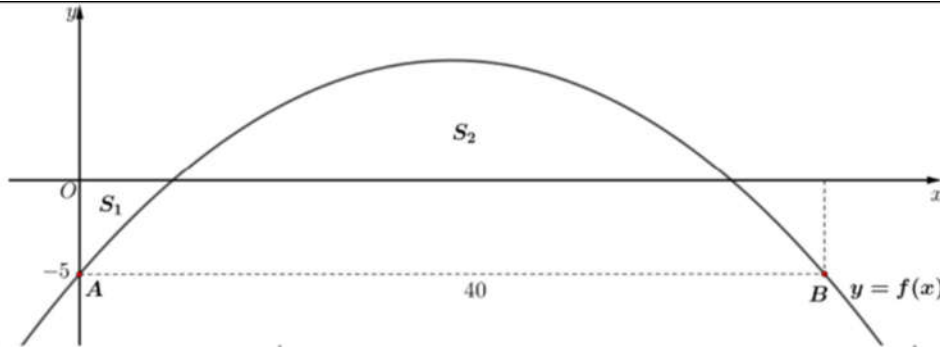
Số tiền bạn Hà cần dùng mua sơn là:

$T = 100.000 \times 2 + 130.000 \times 3 + 140.000 \times 4 = 1.150.000$ (đồng).

Câu 4. (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025) Một nhóm các kĩ sư muốn xây dựng một cây cầu vòm dàn thép với giá đỡ dưới bằng thép cao cấp có hình dáng là một đường cong Parabol nối từ 2 cột trụ A và B nằm bên dưới cây cầu, biết hai cột trụ cách nhau $400m$, khoảng cách từ trụ A đến cây cầu là $50m$ và AB song song với mặt đường.



Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào cây cầu với đơn vị trục tọa độ là $10m$. Giá đỡ dưới bằng thép là đường cong Parabol tạo với hai trục tọa độ các hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ bên, biết rằng $S_2 - 2S_1 = \frac{2200}{21}$. Điểm cao nhất của giá đỡ dưới bằng thép cao cấp cách mặt đường cây cầu bao nhiêu mét. (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Lời giải

Đáp án: 64,3.

+) Gọi Parabol có phương trình $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ với ($a < 0$)

Ta có $f(0) = -5 \Rightarrow c = -5$ nên $y = f(x) = ax^2 + bx - 5$

Mặt khác Parabol đi qua điểm $B(40; -5)$ nên $-5 = 1600a + 40b - 5 \Leftrightarrow b = -40a$

Suy ra $y = f(x) = ax^2 - 40ax - 5$

+) Lại có $S_2 - 2S_1 = \frac{2200}{21} \Leftrightarrow \int_0^{40} f(x) dx = \frac{2200}{21} \Leftrightarrow \int_0^{40} (ax^2 - 40ax - 5) dx = \frac{2200}{21}$

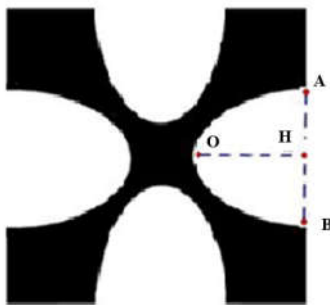
$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{3}x^3 - 20ax^2 - 5x \right) \Big|_0^{40} = \frac{2200}{21} \Leftrightarrow \frac{64000}{3}a - 32000a - 200 = \frac{2200}{21} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{35}$ (thỏa mãn).

Suy ra $y = f(x) = -\frac{1}{35}x^2 + \frac{8}{7}x - 5$.

Ta có $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(20) = \frac{45}{7} \approx 6,43$.

Vậy khoảng cách từ điểm cao nhất của giá đỡ dưới bằng thép cao cấp cách mặt đường cây cầu là 64,3 mét.

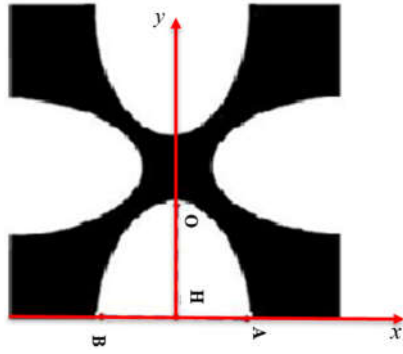
Câu 5. (THPT Trần Nguyên Hãn - Hải Phòng 2025) Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5 \text{ cm}$, $OH = 4 \text{ cm}$. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó (kết quả làm tròn đến số thập phân phần mười).



Lời giải

Đáp án: 46,7.

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ với $H(0;0)$, $A\left(\frac{5}{2}; 0\right)$, $B\left(-\frac{5}{2}; 0\right)$, $O(0;4)$



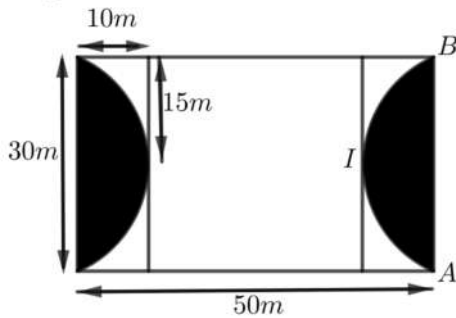
Gọi hàm số dạng $f(x) = ax^2 + b$ có đồ thị là parabol đi qua điểm $A\left(\frac{5}{2}; 0\right)$, $O(0; 4)$ nên ta có

$$\begin{cases} \frac{25}{4}a + b = 0 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{16}{25} \\ b = 4 \end{cases} \text{ Suy ra } f(x) = -\frac{16}{25}x^2 + 4$$

Diện tích bề mặt hoa văn là

$$S = 10^2 - 4 \int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} f(x) dx = 100 - 4 \cdot \int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \left(-\frac{16}{25}x^2 + 4\right) dx = \frac{140}{3} \approx 46,7 \text{ cm}^2$$

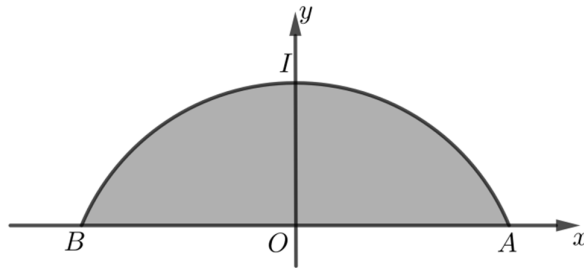
Câu 6. (THPT Trần Phú - Vĩnh Phúc 2025) Ông An xây dựng một sân bóng đá mini hình chữ nhật có chiều rộng 30 m và chiều dài 50 m . Để giảm bớt kinh phí cho việc trồng cỏ nhân tạo, ông An chia sân bóng ra làm hai phần (tô màu và không tô màu) như hình vẽ. Phần tô màu gồm hai miền có diện tích bằng nhau và đường cong AIB là một parabol có đỉnh I . Phần tô màu được trồng cỏ nhân tạo với giá $130 \text{ nghìn đồng/m}^2$ và phần còn lại trồng cỏ nhân tạo với giá $90 \text{ nghìn đồng/m}^2$. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền (đơn vị: triệu đồng) để trồng cỏ nhân tạo cho sân bóng.



Lời giải

Đáp án: 151.

Cách 1. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ



Ta có: $A(15; 0)$, $B(-15; 0)$; $I(0; 10)$.

Phương trình của Parabol là $y = -\frac{2}{45}x^2 + 10$.

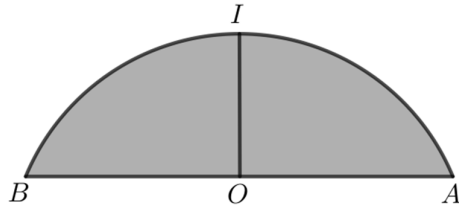
Diện tích của phần Parabol trên là: $S_1 = \int_{-15}^{15} \left(-\frac{2}{45}x^2 + 10 \right) dx = 200$.

Vậy diện tích phần sân được tô màu là $S = 2.S_1 = 400 \text{ m}^2$.

\Rightarrow Diện tích phần còn lại của sân là $50.30 - 400 = 1100 \text{ m}^2$.

Do đó số tiền ông An phải trả để trồng cỏ nhân tạo cho sân bóng là $400.130 + 1100.90 = 151000$ (nghìn đồng) = 151 (triệu đồng).

Cách 2:



Ta có: $OI = 10 \text{ m}$, $AB = 30 \text{ m}$.

\Rightarrow Diện tích phần parabol trên là $S_1 = \frac{2}{3} \cdot OI \cdot AB = \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 30 = 200 \text{ m}^2$.

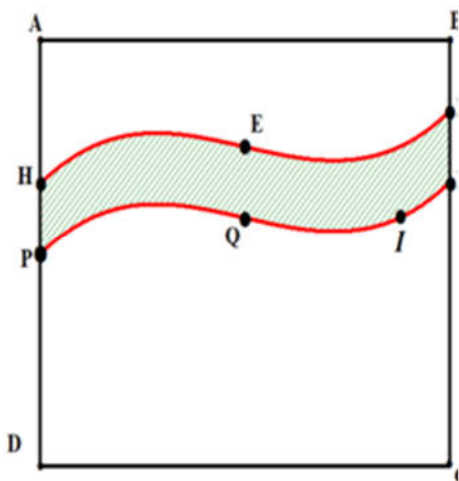
Vậy diện tích phần sân được tô màu là $S = 2.S_1 = 400 \text{ m}^2$.

\Rightarrow Diện tích phần còn lại của sân là $50.30 - 400 = 1100 \text{ m}^2$.

Do đó số tiền ông An phải trả để trồng cỏ nhân tạo cho sân bóng là $400.130 + 1100.90 = 151000$ (nghìn đồng) = 151 (triệu đồng).

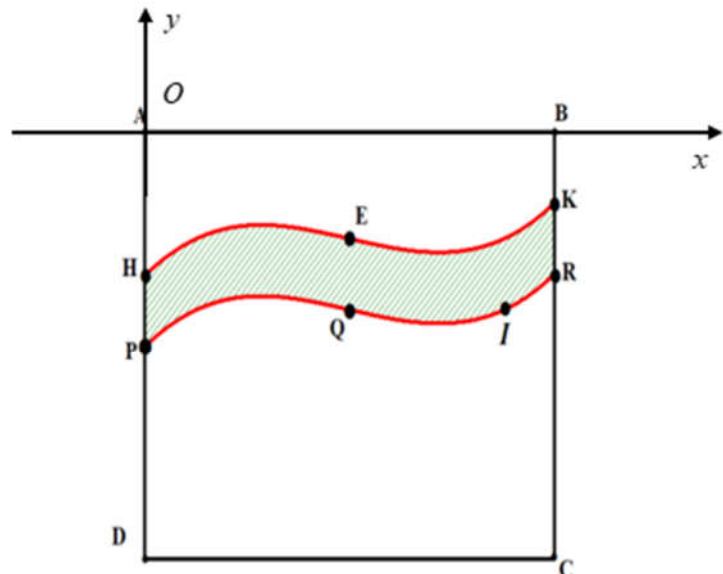
Câu 7. (Cụm trường Hải Dương 2025) Kiến trúc sư thiết kế một con đường để chia khu đất hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 40 \text{ m}$,

$AD = 60 \text{ m}$ thành hai phần (hai lề đường là các đường cong HEK và $PQIR$). Trong đó phần giới hạn bởi đường cong HEK và các đoạn AH, AB, BK là sân chơi, phần giới hạn bởi đường cong $PQIR$ và các đoạn PD, DC, CR để trồng hoa (tham khảo hình vẽ). Nếu gán một hệ trục tọa độ vuông góc có trục hoành, trục tung lần lượt cùng phương với các đường thẳng AB, AD thì đường cong $PQIR$ là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$. Đường cong HEK nhận được bằng cách tịnh tiến đường cong $PQIR$ theo phương thẳng đứng lên phía trên 10 m . Biết $AP = 30 \text{ m}$, $BR = 20 \text{ m}$, điểm Q cách các cạnh AB, AD lần lượt 25 m và 20 m , điểm I cách các cạnh AB, AD lần lượt 25 m và 35 m . Gọi S_1 là diện tích phần sân chơi và S_2 là diện tích phần trồng hoa. Tính $\frac{S_1}{S_2}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 0,43.



Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho trục Ox trùng với cạnh AB , trục Oy trùng với cạnh AD . Khi đó ta có $A(0;0)$, $P(0;-30)$, $Q(20;-25)$, $I(35;-25)$, $R(40;-20)$

Gọi đường cong $PQIR$ có phương trình là $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} d = -30 \\ 8000a + 400b + 20c + d = -25 \\ 42875a + 1225b + 35c + d = -25 \\ 64000a + 1600b + 40c + d = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{700} \\ b = -\frac{3}{35} \\ c = \frac{39}{28} \\ d = -30 \end{cases}$$

Ta suy ra đường cong $PQIR$ là đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{700}x^3 - \frac{3}{35}x^2 + \frac{39}{28}x - 30$

Và đường cong HEK là đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{1}{700}x^3 - \frac{3}{35}x^2 + \frac{39}{28}x - 20$

$$\text{Diện tích phần sân chơi } S_1 = \int_0^{40} [-g(x)] dx = \int_0^{40} \left[-\left(\frac{1}{700}x^3 - \frac{3}{35}x^2 + \frac{39}{28}x - 20 \right) \right] dx = 600 \text{ m}^2$$

Diện tích phần trồng hoa là

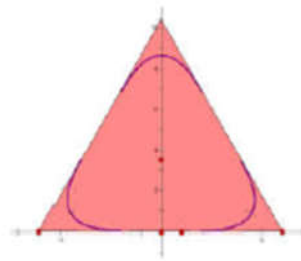
$$S_2 = \int_0^{40} [f(x) + 60] dx = \int_0^{40} \left[\frac{1}{700}x^3 - \frac{3}{35}x^2 + \frac{39}{28}x - 30 + 60 \right] dx = 1400 \text{ m}^2.$$

$$\text{Vậy tỉ số } \frac{S_1}{S_2} = \frac{600}{1400} = \frac{3}{7} \approx 0,43.$$

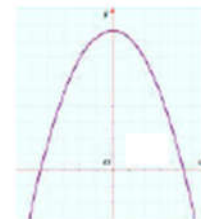
Câu 8. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2025) Một tấm kính làm mặt bàn ($H1$) có dáng hình tam giác đều với 3 đỉnh được làm cong ($H2$). Biết cạnh tam giác ban đầu bằng 16(dm). Để cắt góc được đẹp thì người ta dùng đường Parabol (P): $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{15\sqrt{3}}{2}$ ($H3$) có hai nhánh tiếp xúc với hai cạnh của tam giác.



H1



H2



H3

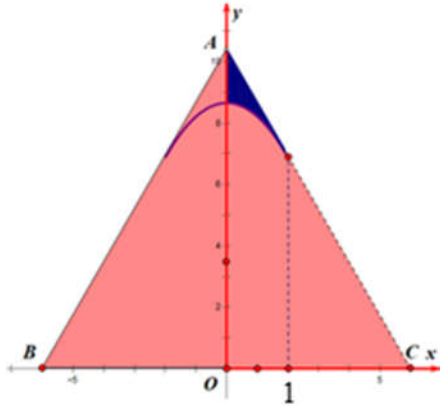
Biết diện tích mặt kính là $a\sqrt{b}$ (dm²), (với a là số nguyên dương và b là số nguyên tố). Tính $a+b$

Lời giải

Đáp án: 66.

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ bằng } S_{\triangle ABC} = 16^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 64\sqrt{3} \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Dựng hệ trục như hình vẽ



Vì tam giác ABC đều cạnh bằng 16 nên $AO = 16 \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$.

Phương trình đường thẳng $AC: \frac{x}{8} + \frac{y}{8\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và đường thẳng AC

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{15\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}x + 8\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

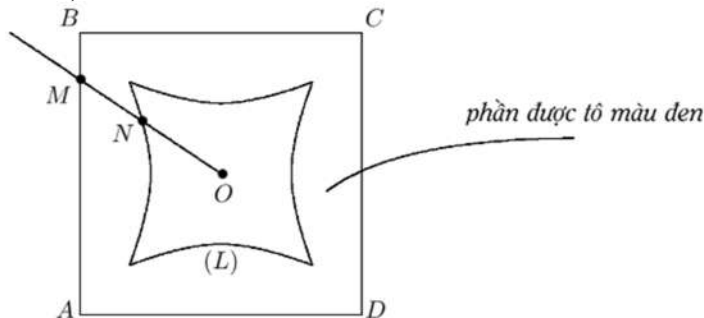
Diện tích phần tô đậm giới hạn bởi (P) , (AC) và trục Oy trong hình bằng

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left[(-\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{15\sqrt{3}}{2} \right) \right] dx = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{3} (x-1)^3 \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Vì mặt bàn đối xứng nên diện tích kính cần tính bằng $S_{\triangle ABC} - 6S = 64\sqrt{3} - \sqrt{3} = 63\sqrt{3} \text{ (dm}^2\text{)}$

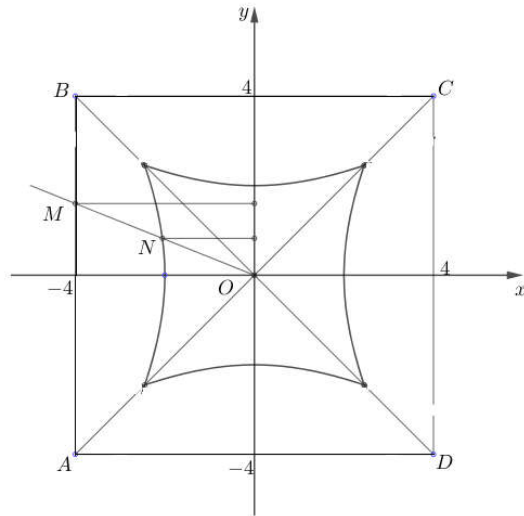
Vậy $a + b = 66$.

Câu 9. (THPT Lê Thánh Tông - Nguyễn Khuyến HCM 2025) Người nghệ sĩ vẽ một bông hoa không màu trên một miếng bìa hình vuông $ABCD$ tâm O bằng một đường cong kín (L) rồi tô màu đen phần bên ngoài đường cong này của hình vuông (tham khảo hình vẽ). Nếu điểm M thuộc cạnh của hình vuông $ABCD$ và tia OM cắt (L) tại điểm N thì $MN = 2 \text{ dm}$. Biết rằng $AB = 8 \text{ dm}$, phần được nghệ sĩ tô màu đen có diện tích bằng bao nhiêu centimet vuông? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp án: 4384.



Chọn hệ trục tọa độ Oxy , sao cho $A(-4;-4), B(-4;4), C(4;4), D(4;-4)$ và $O(0;0)$.

Phương trình cạnh $AB: x = -4$

+) Vì tính đối xứng của $ABCD$ và miền phẳng được giới hạn bởi (L) nên ta chỉ cần xét phần tô màu nằm ở góc phần tư thứ hai, phía dưới đường thẳng $BD: y = -x$.

Gọi điểm $M(-4;m) \in AB$ và $N(x;y)$, với $-4 \leq m \leq 4; -4 < x < 0$ và $0 \leq y < 4$.

$$\Rightarrow ON = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ và } OM = ON + 2 = \sqrt{x^2 + y^2} + 2.$$

$$\text{Lại có } \frac{ON}{OM} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} + 2} = \frac{-x}{4} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{2x}{x+4}.$$

$$\Rightarrow y^2 = \left(-\frac{2x}{x+4}\right)^2 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{4x^2}{(x+4)^2} - x^2}.$$

$$\text{Xét phương trình } \sqrt{\frac{4x^2}{(x+4)^2} - x^2} = -x \Rightarrow x = -4 + \sqrt{2} \quad (\text{vì } -4 < x < 0) \quad \text{và}$$

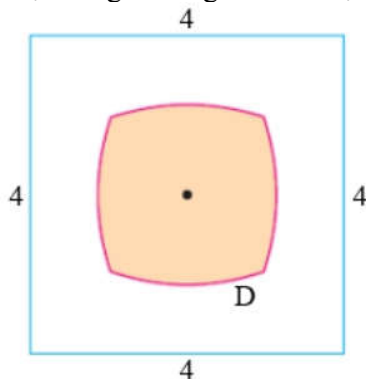
$$\sqrt{\frac{4x^2}{(x+4)^2} - x^2} = 0 \Rightarrow x = -2.$$

$$\text{+) Suy ra diện tích hình phẳng } S_1 = \int_{-4}^{-4+\sqrt{2}} (-x) dx + \int_{-4+\sqrt{2}}^{-2} \left(\sqrt{\frac{4x^2}{(x+4)^2} - x^2} \right) dx \quad (dm^2)$$

Vậy diện tích phần tô màu được tính theo đơn vị centimet vuông (làm tròn đến hàng đơn vị) là:

$$S = 8.S_1.100 \approx 4384 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Câu 10. (Sở Bắc Giang 2025) Hình vẽ dưới đây cho biết một miền D (được tô đậm) nằm trong hình vuông cạnh bằng 4, miền D này gồm những điểm có khoảng cách tới tâm hình vuông nhỏ hơn hoặc bằng khoảng cách tới cạnh gần nhất của hình vuông.

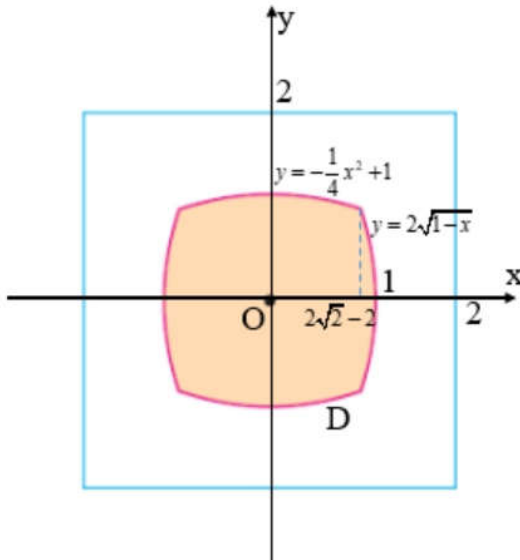


Tính diện tích miền D, với kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.

Lời giải

Đáp án: 3,5.

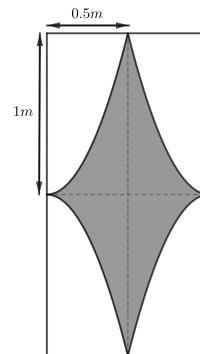
Từ định nghĩa “tập hợp các điểm cách đều 1 điểm và 1 đường thẳng (điểm không thuộc đường thẳng) là một đường parabol”, ta suy ra miền D được giới hạn bởi 4 đường parabol có tiêu điểm là tâm hình vuông và đường chuẩn là cạnh của hình vuông.



Dựng hệ toạ độ như hình vẽ, tìm phương trình các đường parabol rồi dựa vào ứng dụng của tích phân tính được diện tích miền D là:

$$S = 4 \left[\int_0^{2\sqrt{2}-2} \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1 \right) dx + \int_{2\sqrt{2}-2}^1 (2\sqrt{1-x}) dx \right] = \frac{64\sqrt{2}-80}{3} \approx 3,5.$$

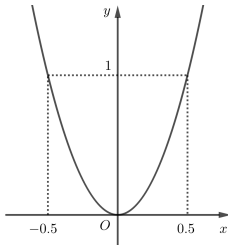
Câu 11. (Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng 2025) Nhà bác Ba có tất cả 8 cánh cửa sắt hình chữ nhật với chiều dài $2m$ và chiều rộng $1m$. Hai mặt của mỗi cánh cửa được thiết kế như hình vẽ dưới đây. Trong đó, phần được tô đậm được sơn màu xanh, phần còn lại được sơn màu trắng. Mỗi phần sơn màu trắng có đường biên cong là một phần của parabol có đỉnh nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Biết rằng chi phí để sơn màu xanh là 120 nghìn đồng/ m^2 và chi phí sơn màu trắng là 110 nghìn đồng/ m^2 . Hỏi, để sơn toàn bộ số cửa sắt trên, bác Ba phải tốn bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị triệu đồng).



Lời giải

Đáp án: 3.63.

Xét đồ thị parabol trên hệ trục tọa độ Oxy như sau:

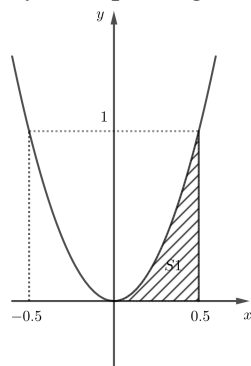


Gọi parabol có phương trình là: $y = ax^2 + bx + c$

Parabol đi qua các điểm có tọa độ $(-0.5; 1), (0.5; 1), (0; 0)$, nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} c = 0 \\ a \cdot 0.5^2 + b \cdot 0.5 = 1 \\ a \cdot (-0.5^2) + b \cdot (-0.5) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = 4 \\ b = 0 \end{cases}$$

Vậy ta có phương trình parabol $y = 4x^2$.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = 4x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 0.5$ là:

$$S_1 = \int_0^{0.5} 4x^2 dx = \frac{1}{6}$$

Diện tích của phần tô đậm được sơn màu xanh của mỗi mặt cánh cửa là $S_2 = 4 \cdot S_1 = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Diện tích của phần không tô đậm tô đậm được sơn màu trắng của mỗi mặt cánh cửa là $S_3 = 1.2 - S_2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Có tất cả 8 cánh cửa sắt hình chữ nhật, mỗi cánh có 2 mặt, vậy có tất cả 16 mặt như hình vẽ.

Vậy tổng diện tích phần tô đậm được sơn màu xanh là: $16S_2 = 16 \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{3} (m^2)$

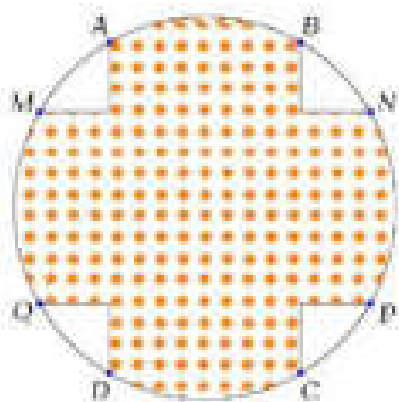
Tổng diện tích phần không tô đậm được sơn màu trắng là: $16S_3 = 16 \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{3} (m^2)$

Tổng chi phí để sơn màu xanh là: $\frac{32}{3} \cdot 120 = 1280$ (nghìn đồng) = 1.28 (triệu đồng)

Tổng chi phí để sơn màu trắng là: $\frac{64}{3} \cdot 110 \approx 2346$ (nghìn đồng) ≈ 2.35 (triệu đồng)

Tổng chi phí sơn là: $1.28 + 2.35 = 3.63$ (triệu đồng).

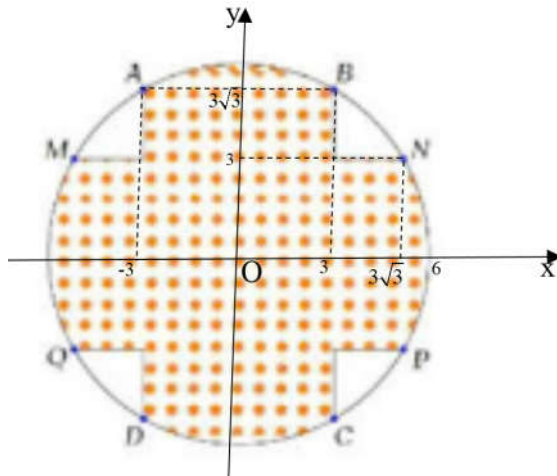
Câu 12. (KHTN Hà Nội 2025) Một mảnh vườn hoa dạng hình tròn có bán kính bằng $6m$. Phần đất trồng hoa là phần tô trong hình vẽ bên. Biết hai hình chữ nhật $ABCD$, $MNPQ$ có $AB = MQ = 6m$ và kinh phí trồng hoa là 100000 đồng/ m^2 . Tính số tiền cần để trồng hoa? (đơn vị: triệu đồng, kết quả là tròn đến hàng phần chục).



Lời giải

Đáp án: 33,1.

Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho như hình vẽ



Khi đó phương trình đường tròn tâm O bán kính bằng 6 là $x^2 + y^2 = 36$

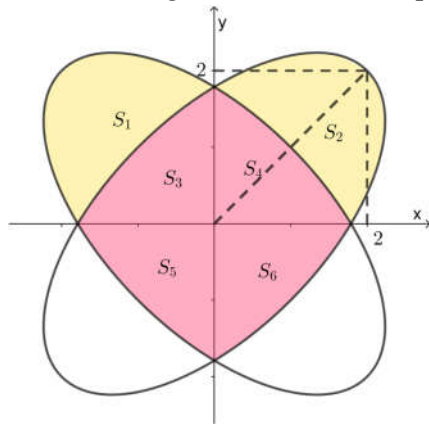
Diện tích phần trồng hoa là

$$S = \pi \cdot 6^2 - 4 \int_3^{3\sqrt{3}} (\sqrt{36 - x^2} - 3) dx \approx 101,75 \text{ (m}^2\text{)}$$

Số tiền cần để trồng hoa là $S \cdot 0,1 \approx 10,2$ (triệu đồng)

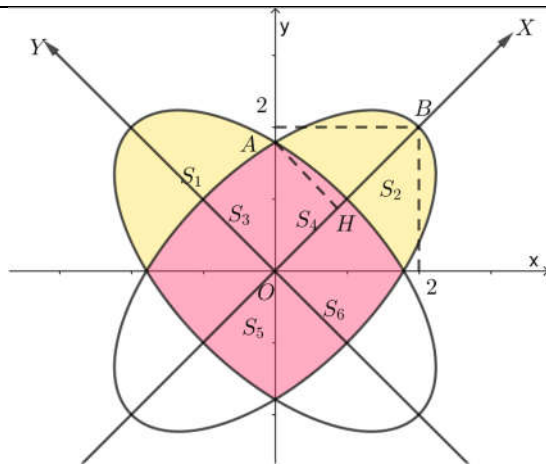
Câu 13. (THPT Lê Thánh Tông - Nguyễn Khuyến 2025) Bạn Hoa vừa mê học toán, vừa mê một bạn nam lớp bên cạnh. Ngày sinh nhật Hoa thì bạn nam ấy đã tặng cho Hoa một tờ giấy, trong đó có vẽ hai hình elip ghép lại tạo ra hình trái tim rất đẹp. Phần hai cánh có diện tích S_1, S_2 được tô màu vàng, phần có diện tích S_3, S_4, S_5, S_6 được tô màu đỏ. Hoa vui vẻ đón nhận “món quà” nhưng sau đó lại tỏ ra khó hiểu. Một người bạn đã tư vấn cho Hoa rằng màu đỏ tượng trưng cho tình yêu, màu vàng lại tượng trưng cho tình bạn, bây giờ chỉ còn cách tính tỷ số $\frac{S_3 + S_4 + S_5 + S_6}{S_1 + S_2}$

bằng bao nhiêu mới biết Crush thực sự có tình cảm với Hoa hay chỉ xem Hoa là bạn, các em hãy tính giúp bạn Hoa tỷ số trên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm); biết rằng khoảng cách từ điểm O đến giao điểm của hai elip bằng 1,8 cm.



Lời giải

Đáp án: 1,46.



Chọn hệ trục OXY như hình vẽ.

Trục OX là tia phân giác của góc phần tư thứ nhất và thứ ba.

Trục OY là tia phân giác của góc phần tư thứ hai và thứ tư.

Suy ra Ox, Oy lần lượt là phân giác các góc $Y'OX, XOY$.

Vì $OA = 1,8$ và $\widehat{AOH} = 45^\circ$ nên ta có $OH = \frac{1,8}{\sqrt{2}}$.

Tương tự, ta suy ra $A\left(\frac{1,8}{\sqrt{2}}; \frac{1,8}{\sqrt{2}}\right)$ và ta cũng có $OB = 2\sqrt{2}$.

Gọi phương trình chính tắc của elip là $\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$. (E)

Vì (E) đi qua điểm $A\left(\frac{1,8}{\sqrt{2}}; \frac{1,8}{\sqrt{2}}\right)$ nên ta có: $\frac{1}{8} \cdot \frac{1,8^2}{2} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1,8^2}{2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{2}{1,8^2} - \frac{1}{8} = \frac{319}{648}.$$

$$\text{Do đó (E): } \frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{\frac{648}{319}} = 1 \Rightarrow Y^2 = \frac{648}{319} \left(1 - \frac{X^2}{8}\right).$$

$$\text{Suy ra } \frac{S_2 + S_4}{2} = \int_0^{\frac{1,8}{\sqrt{2}}} X dX + \int_{\frac{1,8}{\sqrt{2}}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{648}{319} \left(1 - \frac{X^2}{8}\right)} dX \quad (1)$$

$$S_2 + S_4 = A \quad (A \text{ được gán bằng hai lần giá trị của tích phân ở (1)}) \quad (2)$$

Mặt khác, do tính chất đối xứng của hình nên ta có

$$S_2 + 2S_4 = \frac{1}{2} \pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{648}{319}} \rightarrow B$$

$$\text{Hay } S_2 + 2S_4 = B \quad (3)$$

$$\text{Từ (2), (3) ta có hệ phương trình } \begin{cases} S_2 + S_4 = A \\ S_2 + 2S_4 = B \end{cases}$$

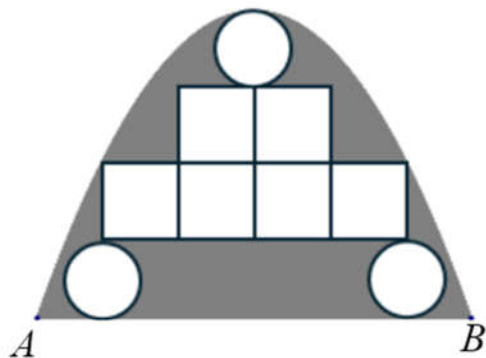
$$\Rightarrow S_2 \approx 2,56896, S_4 \approx 1,8816.$$

Do tính đối xứng của hình nên $S_3 = S_4 = S_5 = S_6 \approx 1,8816$; $S_1 = S_2 \approx 2,56896$.

$$\text{Vậy } \frac{S_3 + S_4 + S_5 + S_6}{S_1 + S_2} \approx 1,46.$$

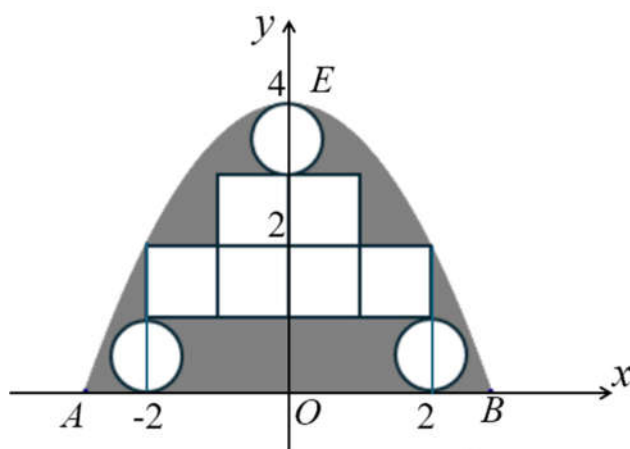
Câu 14. (Sở Hà Nội 2025) Một cửa vòm có dạng hình parabol được lắp các tấm kính hình tròn đường kính $1m$ và các tấm kính hình vuông có cạnh $1m$ như hình vẽ. Phần còn lại của cửa được sơn màu

trang trí với mức giá 1,2 triệu đồng /m². Chi phí sơn màu là bao nhiêu triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?



Lời giải

Đáp án: 8,1.



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Gọi phương trình Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$.

$$\text{Do Parabol qua các điểm } (0; 4); (2; 2) \text{ và } (-2; 2) \text{ nên ta có } \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 2 \\ 4a - 2b + c = 2 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}.$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 4.$$

Parabol cắt trục hoành tại hai điểm A, B có hoành độ là nghiệm của phương trình

$$-\frac{1}{2}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2} \end{cases}.$$

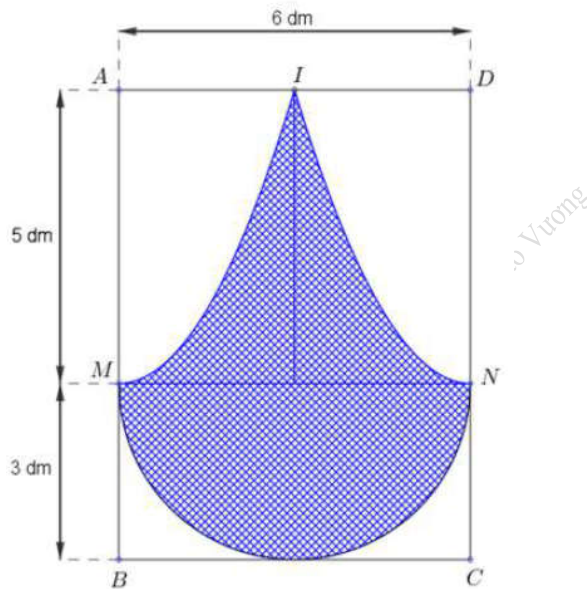
$$\text{Diện tích vòm cửa là } S = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4 \right) dx = \left(\frac{-x^3}{6} + 4x \right) \Big|_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{3}.$$

Diện tích các tấm kính bằng: $6 + 3\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Suy ra diện tích phần còn lại là: $S = \frac{32\sqrt{2}}{3} - 6 - \frac{3\pi}{4}$.

Giá tiền sơn là $\left(\frac{32\sqrt{2}}{3} - 6 - \frac{3\pi}{4}\right)1,2 \approx 8,1$ triệu.

Câu 15. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ 2025) Để trang trí một bảng gỗ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 8\text{ dm}$ và chiều rộng $AD = 6\text{ dm}$, người ta thiết kế một logo là hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính $MN = 6\text{ dm}$, tiếp xúc với BC , hai đường cong IM, IN là một phần của các đường parabol có trục đối xứng lần lượt là AB, CD với I là trung điểm của AD (tham khảo hình vẽ).



Phần logo được sơn màu xanh với chi phí 50000 đồng/ 1 dm^2 và phần còn lại của bảng gỗ được sơn màu trắng với chi phí 30000 đồng/ 1 dm^2 . Hỏi cần bỏ ra bao nhiêu nghìn đồng để trang trí bảng gỗ trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

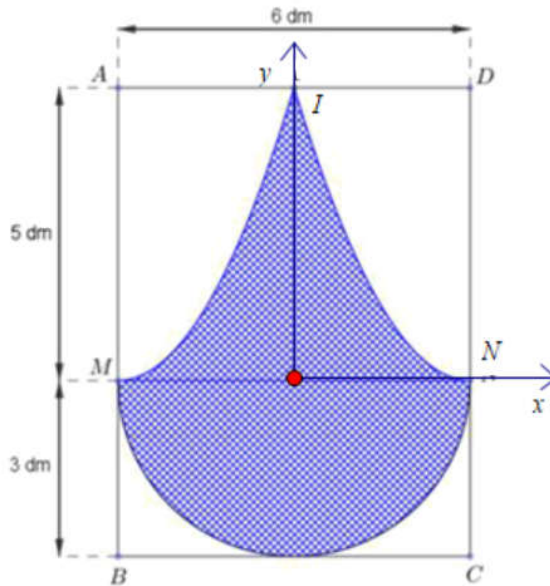
Đáp án: 1923.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng $6.8 = 48\text{ dm}^2$.

Diện tích của nửa đường tròn đường kính MN bằng $S = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi.3^2 = \frac{9}{2}\pi\text{ dm}^2$.

Ta xác định phương trình của parabol.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ:



Gọi phương trình parabol có đỉnh N là $y = ax^2 + bx + c$, theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} y(0) = 5 \\ y(3) = 0 \\ \frac{-b}{2a} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{9} \\ b = -\frac{10}{3} \\ c = 5 \end{cases}$$

Vậy $y = \frac{5}{9}x^2 - \frac{10}{3}x + 5$.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y = \frac{5}{9}x^2 - \frac{10}{3}x + 5$, trục hoành và hai đường thẳng

$$x = 0; x = 3 \text{ bằng: } S_1 = \int_0^3 \left(\frac{5}{9}x^2 - \frac{10}{3}x + 5 \right) dx = 5 (\text{dm}^2).$$

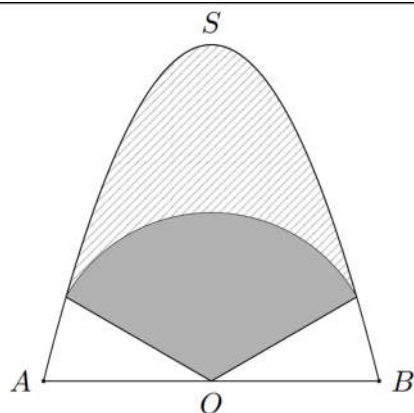
Do tính đối xứng nên hình phẳng giới hạn bởi parabol có đỉnh M , trục đối xứng AB , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0; x = 3$ có diện tích bằng $5 (\text{dm}^2)$.

Tổng diện tích phần bảng gỗ sơn màu xanh là: $\left(\frac{9}{2}\pi + 10 \right) \text{dm}^2$.

Diện tích của phần bảng gỗ sơn màu trắng là: $S' = 48 - \left(\frac{9}{2}\pi + 10 \right) = \left(38 - \frac{9}{2}\pi \right) \text{dm}^2$.

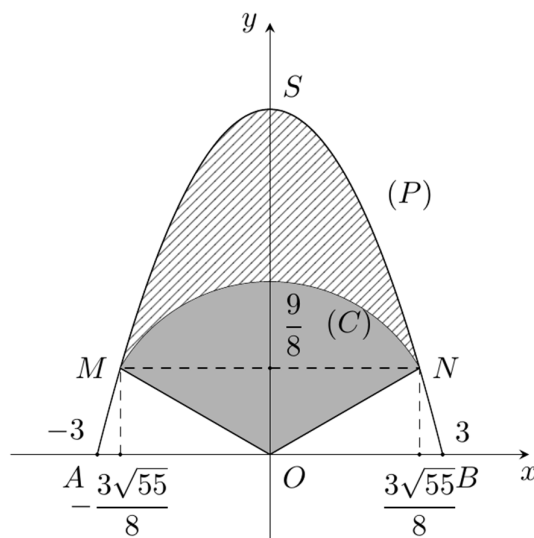
Chi phí cần bỏ ra là: $\left(\frac{9}{2}\pi + 10 \right) \cdot 50000 + \left(38 - \frac{9}{2}\pi \right) \cdot 30000 \approx 1923$ (nghìn đồng).

Câu 16. (Chuyên KHTN Hà Nội 2025) Để chuẩn bị quảng bá sản phẩm, người ta trang trí tấm pano dạng parabol như hình vẽ, biết $OS = 8 \text{ m}$, $AB = 6 \text{ m}$ với O là trung điểm của AB . Tấm pano được chia thành ba phần để trang trí với mức chi phí khác nhau: phần trên là phần kẻ sọc giá 100 000 đồng/ m^2 , phần giữa là hình quạt tâm O bán kính 3 m được tô đậm giá 200 000 đồng/ m^2 , phần còn lại giá 150 000 đồng/ m^2 . Tính tổng chi phí để trang trí tấm pano (đơn vị triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 4,44.



Chọn hệ trục Oxy với tia Ox trùng với tia OB , tia Oy trùng với tia OS như hình vẽ.

Khi đó ta có: $A(-3;0)$, $B(3;0)$, $S(0;8)$.

Suy ra parabol có phương trình là: $y = -\frac{8}{9}x^2 + 8$ (P).

Rìa của hình quạt là cung tròn của đường tròn (C) có phương trình:

$$x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{9-x^2}.$$

Hoành độ điểm N là nghiệm phương trình

$$-\frac{8}{9}x^2 + 8 = \sqrt{9-x^2}, 0 < x < 3$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{55}}{8}.$$

$$\text{Ta có } y_N = -\frac{8}{9}x_N^2 + 8 = \frac{9}{8}.$$

$$\text{Suy ra } N\left(\frac{3\sqrt{55}}{8}; \frac{9}{8}\right).$$

$$\text{Phương trình } ON: y = \frac{3}{\sqrt{55}}x.$$

Vì tâm panno đối xứng qua trục Oy nên ta có:

Diện tích phần kẻ sọc: $S_1 = 2 \cdot \int_0^{\frac{3\sqrt{55}}{8}} \left(-\frac{8}{9}x^2 + 8 - \sqrt{9-x^2} \right) dx \approx 17,94 \text{ m}^2.$

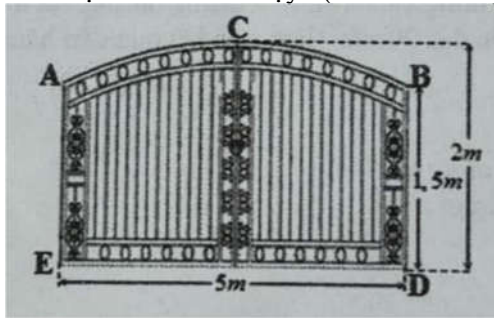
Diện tích phần tô đậm: $S_2 = 2 \cdot \int_0^{\frac{3\sqrt{55}}{8}} \left(\sqrt{9-x^2} - \frac{3}{\sqrt{55}}x \right) dx \approx 10,68 \text{ m}^2.$

Diện tích phần còn lại: $S = \int_{-3}^3 \left(-\frac{8}{9}x^2 + 8 \right) dx - (S_1 + S_2) \approx 3,38 \text{ m}^2.$

Tổng chi phí để trang trí tấm pano là

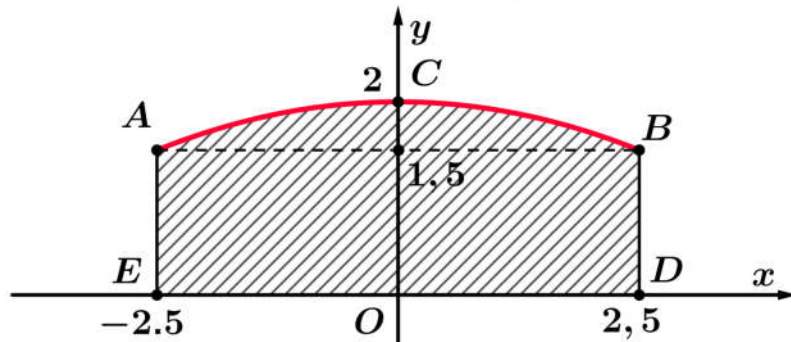
$100S_1 + 200S_2 + 150S \approx 4440$ (nghìn đồng) $\approx 4,44$ (triệu đồng).

Câu 17. (Sở Tuyên Quang 2025) Bác Vinh muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên dưới, biết đường cong phía trên là một parabol, tứ giác ABDE là hình chữ nhật. Giá của cánh cửa sau khi hoàn thành là 700000 đồng/m². Hỏi bác Vinh phải trả số tiền bao nhiêu triệu đồng để làm một cửa sắt như vậy? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 6,42.



- Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ

Với $A(-2,5;1,5), B(2,5;1,5), C(0;2), D(2,5;0), E(-2,5;0)$

Gọi đường cong parabol phía trên có phương trình: $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)

Ta có các điểm thuộc parabol là: $A(-2,5;1,5), B(2,5;1,5), C(0;2)$. Do đó ta có hệ sau:

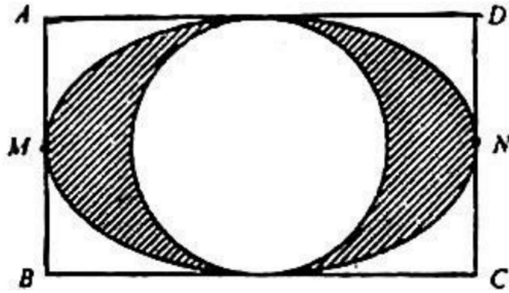
$$\begin{cases} 1,5 = 2,5^2 a + 2,5b + c \\ 1,5 = (-2,5)^2 a - 2,5b + c \\ 2 = 0^2 a + 0b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,5 = 6,25a + 2,5b + c \\ 1,5 = 6,25a - 2,5b + c \\ 2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$$

Diện tích cửa rào sắt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$, $y = 0$ và hai đường thẳng $x = 2,5$; $x = -2,5$ nên ta có

$$S = \int_{-2,5}^{2,5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + 2 \right) dx = \frac{55}{6} (m^2)$$

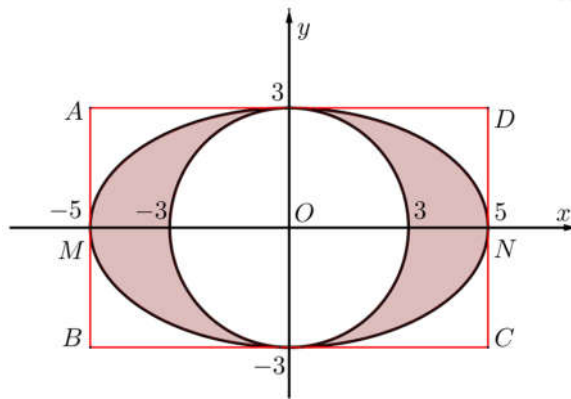
Số tiền ông An phải trả để làm cửa sắt là: $\frac{55}{6} \cdot 0,7 \approx 6,42$ (triệu đồng)

- Câu 18. (Sở Yên Bái 2025)** Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quanh trục MN . Biết rằng $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 6cm, AD = 10cm$ và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Hai đường cong là đường Elip có hình chữ nhật cơ sở là $ABCD$ và đường tròn tiếp xúc với hai cạnh AD và BC (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích của vật trang trí đó (kết quả làm tròn đến hàng phần chục theo đơn vị cm^3).



Lời giải

Đáp án: 75.



Gắn vào hình chữ nhật $ABCD$ hệ trục tọa độ Oxy với gốc O trùng với giao hai đường chéo, các điểm M, N nằm trên Ox (tham khảo hình vẽ).

Do MN là trục đối xứng của miền (R) nên khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) quanh trục MN trùng với khối tròn xoay được tạo thành khi quay phần (R) nằm phía trên MN quanh MN .

Gọi V_1, V_2, V tương ứng là thể tích của các khối tròn xoay được tạo thành khi quay Elips (E) , hình tròn (C) và miền (R) quanh MN (hay quanh Ox), ta có $V = V_1 - V_2$.

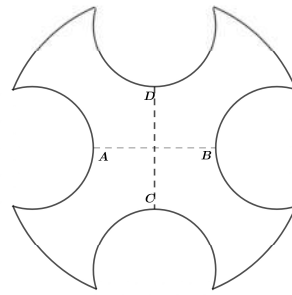
Elip (E) có các bán trục $a = \frac{1}{2}AD = 5, b = \frac{1}{2}AB = 3$ nên có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

$$\text{Ta có } V_1 = \pi \int_{-5}^5 9 \left(1 - \frac{x^2}{25} \right) dx = \pi \left(9x - \frac{9}{25}x^3 \right) \Big|_{-5}^5 = 60\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Hình tròn (C) có tâm tại O , bán kính $R = 3$ khi quay quanh MN tạo thành khối cầu tâm O , bán kính bằng 3. Do đó $V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

Vậy thể tích của vật trang trí đó là: $V = V_1 - V_2 = 24\pi \approx 75 \text{ (cm}^3\text{)}.$

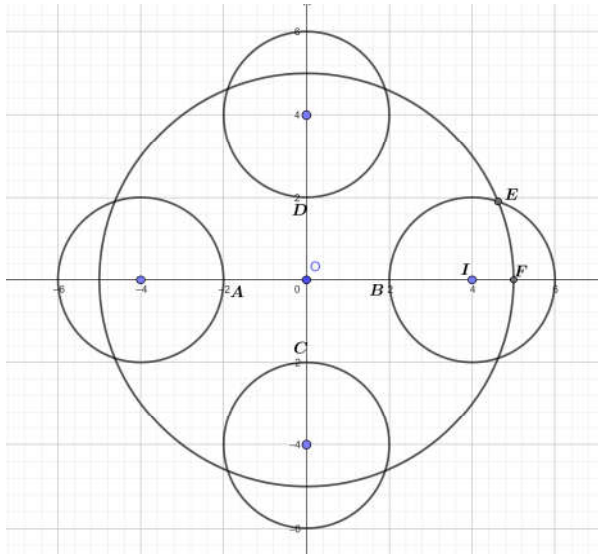
Câu 19. (Sở Bắc Ninh 2025) Trong cơ khí chế tạo, một chi tiết máy hình đĩa tròn có dạng như hình vẽ bên, nhận AB và CD làm các trục đối xứng. Người ta cần phủ sơn cả hai mặt của chi tiết. Biết rằng đường tròn lớn có bán kính 5 dm , các đường tròn nhỏ đều có bán kính bằng 2 dm , $AB = CD = 4\text{ dm}$ và chi phí sơn là 103.000 đồng/ m^2 . Chi phí để sơn hoàn thiện chi tiết máy bằng bao nhiêu nghìn đồng (kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Đáp án: 82.

Dựa vào đề bài ta có hình vẽ như sau với hệ trục Oxy tương ứng:



Như vậy ta cần tính diện tích của hình $(O;5): x^2 + y^2 = 25$ trừ đi diện tích của 4 phần hình tròn nằm trên trong đường tròn.

Ta đi xét một (I, IB) , dễ thấy đường tròn này có tâm $I(4;0)$ và bán kính $R = 2$ và phương trình đường tròn này là $(x-4)^2 + y^2 = 4$

Gọi E và F lần lượt là giao của (O) với (I) và trục Ox (như hình vẽ)

$$\text{Suy ra } E\left(\frac{37}{8}; \sqrt{25 - \left(\frac{37}{8}\right)^2}\right) \text{ và } F(5,0)$$

Diện tích của một nửa phần hình tròn nằm bên trong (O) được giới hạn bởi một phần của

$$(I): y = \sqrt{4 - (x-4)^2}, \text{ một phần của } (O): y = \sqrt{25 - x^2}, \text{ và trục } Ox$$

Suy ra diện tích của 4 phần hình tròn nằm bên trong (O) là:

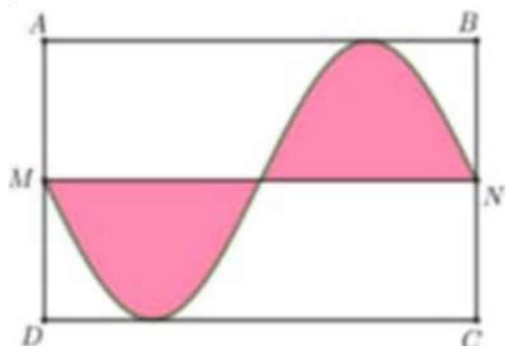
$$M = 4 \cdot \left(2 \cdot \left(\int_2^{\frac{37}{8}} \sqrt{4 - (x-4)^2} dx + \int_{\frac{37}{8}}^5 \sqrt{25 - x^2} dx \right) \right)$$

Diện tích 2 mặt cần sơn của chi tiết máy là: $2 \cdot (\pi \cdot 5^2 - M)$

Vậy chi phí để sơn chi tiết máy là: $1,03.2 \cdot (\pi \cdot 5^2 - M) \approx 82$ (nghìn đồng)

Câu 20. (THPT Đô Lương 1 - Nghệ An 2025) Bác Hưng có một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ được quy hoạch như hình bên. Biết đường cong là đường sin của hàm số dạng $y = a \sin(bx)$. Biết $AB = 2\pi(m)$ và $AD = 4(m)$. Phần tô đậm (giới hạn bởi đường cong và đoạn MN) được sử

dùng để trồng hoa. Tính diện tích phần còn lại của mảnh vườn (đơn vị m^2 , làm tròn đến hàng phần chục)

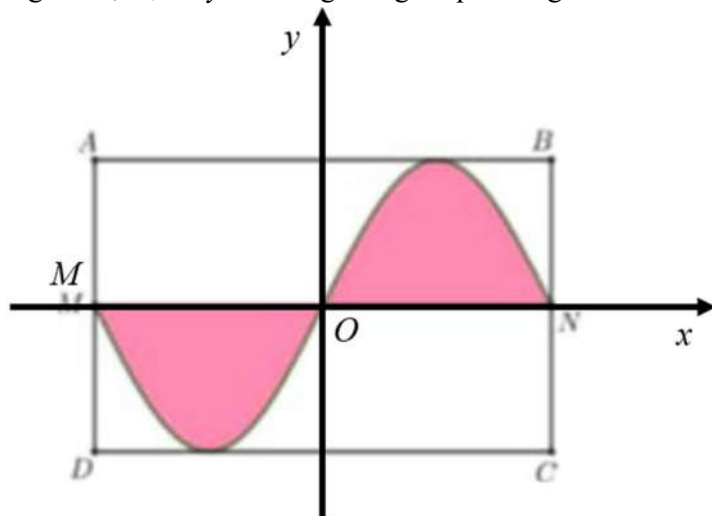


Lời giải

Đáp án: 16.8.

Gọi S là diện tích hình chữ nhật $ABCD$, khi đó $S_0 = S_{ABCD} = AB \cdot AD = 8\pi (m^2)$.

Gọi (Oxy) là mặt phẳng tọa độ chứa hình chữ nhật $ABCD$. Trong đó trục Ox trùng với đoạn thẳng MN , trục Oy là đường thẳng đi qua trung điểm AB và CD .



Từ đồ thị hàm số ta thấy đường cong là hàm số là $y = 2 \sin x$.

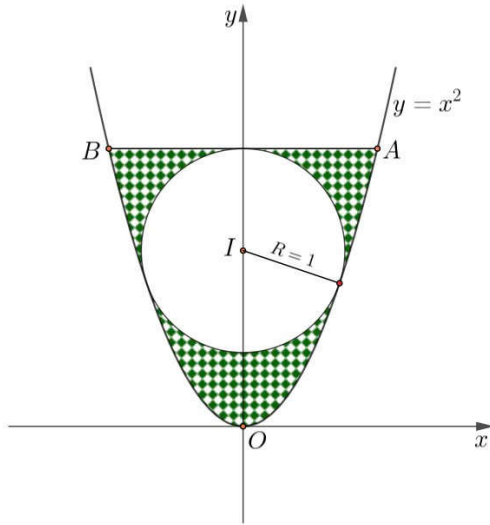
Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y = 2 \sin x$, trục hoành và đường thẳng

$x = -\pi, x = \pi$. Khi đó $S_1 = 2 \int_0^{\pi} 2 \sin x dx = -4 \cos x \Big|_0^{\pi} = 8$.

Gọi S là diện tích phần còn lại của mảnh vườn.

Do đó $S = S_0 - S_1 = 17,1 (m^2)$.

Câu 21. (Sở Bình Phước 2025) Một khoảng sân của một ngôi nhà có hình dạng là một phần của parabol, nếu chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới thì parabol có phương trình là $y = x^2$. Chủ nhà muốn thiết kế một hồ nuôi cá cảnh có dạng hình tròn bán kính $1m$, hình tròn được thiết kế tiếp xúc với 2 nhánh của parabol, phía trên của hình tròn ngăn bởi một bức tường mỏng tiếp xúc với hình tròn. Phần đất còn lại của khoảng sân giới hạn bởi đường tròn, 2 nhánh của parabol và bức tường được thiết kế trồng hoa (phần gạch sọc trong hình). Tính diện tích mà chủ nhà thiết kế để trồng hoa, biết rằng đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

+ Gọi $I(0, y_0)$ suy ra: $(C): x^2 + (y - y_0)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = y_0 + \sqrt{1 - x^2} \\ y = y_0 - \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$

+ Do Parabol luôn tiếp xúc nửa dưới của đường tròn nên ta có

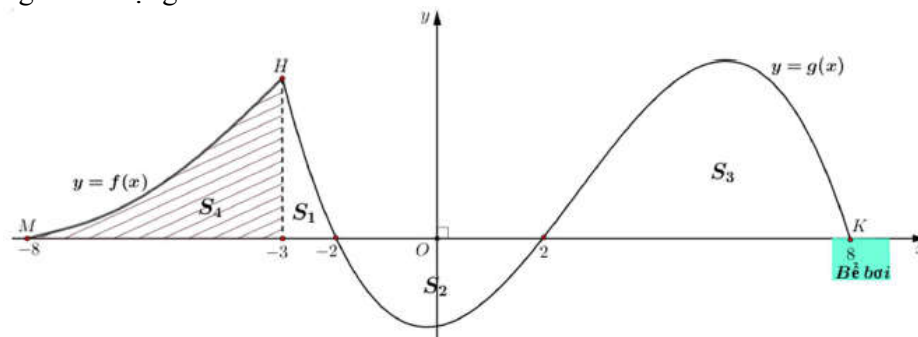
$$\begin{cases} y_0 - \sqrt{1 - x^2} = x^2 \\ (y_0 - \sqrt{1 - x^2})' = (x^2)' \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y_0 = \frac{5}{4}$$

+ (AB) có phương trình: $y = \frac{9}{4}$ và $A\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right), B\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$

Khi đó: Diện tích cần tìm là: $S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{9}{4} - x^2\right) dx - 1^2 \cdot \pi \approx 1,36.$

Đáp số: 1,36.

Câu 22. (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025) Nhằm thu hút du khách và khẳng định vị thế dẫn đầu, công viên nước Dầm Sen quyết định đầu tư xây dựng một đường trượt nước độc đáo có mặt cắt được gắn vào hệ trục Oxy (xem trục Ox là mặt đất) với đơn vị mỗi trục là $1m$ như hình vẽ bên. Đường trượt được thiết kế theo hình dạng của một hàm bậc ba $y = g(x)$, với mục tiêu tối ưu hóa trải nghiệm của người dùng, một phần đường trượt được đặt dưới mặt đất để tận dụng địa hình và tạo hiệu ứng bất ngờ. Điểm đầu của đường trượt là $H(-3; a)$ và điểm cuối là $K(8; 0)$ và ngay dưới điểm K là một bể bơi. Để tiếp cận đường trượt, một cầu thang cong có dạng Parabol $y = f(x)$ có đỉnh là điểm $M(-8; 0)$ được xây dựng, đảm bảo độ dốc vừa phải và an toàn cho người sử dụng.



Các diện tích hình phẳng được tạo bởi các đồ thị $y = f(x), y = g(x), x = -3$ và trục hoành như hình vẽ. Để đảm bảo an toàn tuyệt đối cho người chơi và tính ổn định của công trình, các kỹ sư cần đặc biệt chú trọng đến phần đường trượt nằm dưới lòng đất. Hãy xác định độ cao lớn nhất mà đường trượt chìm xuống so với mặt đất (đơn vị: mét) biết rằng $S_1 + S_3 = S_2 + S_4 + \frac{109}{12}$. (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 2,95m.

+ Parabol $(P): y = f(x)$ có đỉnh là điểm $M(-8;0)$ nên $f(x) = k(x+8)^2, (k \neq 0)$.

$$H(-3;a) \in (P) \text{ nên } 25k = a \Leftrightarrow k = \frac{a}{25} \Rightarrow f(x) = \frac{a}{25}(x+8)^2.$$

+ Đường cong $(C): y = g(x)$ là hàm bậc ba có ba nghiệm $x = \pm 2; x = 8$ nên $g(x) = h(x^2 - 4)(x - 8), (h \neq 0)$.

$$H(-3;a) \in (C) \text{ nên } -55h = a \Leftrightarrow h = -\frac{a}{55}$$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{a}{55}(x^2 - 4)(x - 8) = -\frac{a}{55}(x^3 - 8x^2 - 4x + 32).$$

$$+ \text{ Dựa vào đồ thị, ta có: } S_1 = \int_{-3}^{-2} g(x)dx; S_3 = \int_2^8 g(x)dx; S_2 = -\int_{-2}^2 g(x)dx; S_4 = \int_{-8}^{-3} f(x)dx$$

$$+ S_1 + S_3 = S_2 + S_4 + \frac{109}{12} \Leftrightarrow \int_{-3}^{-2} g(x)dx + \int_2^8 g(x)dx = -\int_{-2}^2 g(x)dx + \int_{-8}^{-3} f(x)dx + \frac{109}{12}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-3}^{-2} g(x)dx + \int_{-2}^2 g(x)dx + \int_2^8 g(x)dx = \int_{-8}^{-3} f(x)dx + \frac{109}{12}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-3}^8 g(x)dx = \int_{-8}^{-3} f(x)dx + \frac{109}{12}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-3}^8 -\frac{a}{55}(x^3 - 8x^2 - 4x + 32)dx = \int_{-8}^{-3} \frac{a}{25}(x+8)^2 dx + \frac{109}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{209}{60} \cdot a = \frac{5}{3} \cdot a + \frac{109}{12} \Leftrightarrow a = 5.$$

$$\text{Suy ra } g(x) = -\frac{1}{11}(x^3 - 8x^2 - 4x + 32)$$

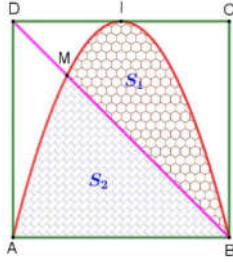
$$g'(x) = -\frac{1}{11}(3x^2 - 16x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8+2\sqrt{19}}{3} \\ x = \frac{8-2\sqrt{19}}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{8-2\sqrt{19}}{3}$	$\frac{8+2\sqrt{19}}{3}$	$+\infty$			
$g'(x)$	-	0	+	0	-		
$g(x)$	$+\infty$	\nearrow	$\approx -2,95$	\nearrow	$\approx 5,97$	\searrow	$-\infty$

Vậy độ cao lớn nhất mà đường trượt chìm xuống so với mặt đất là xấp xỉ 2,95m.

Câu 23. (Sở Hòa Bình 2025) Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 4m và I là trung điểm của đoạn thẳng CD . Trên tấm biển đó có đường parabol đỉnh I đi qua A, B và cắt đường chéo BD tại M (tham khảo hình vẽ).

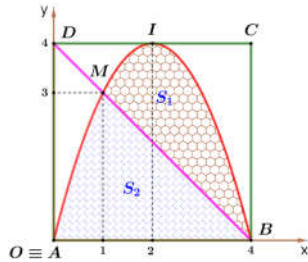


Chi phí sơn phần tô hình tổ ong (có diện tích S_1) là 200000 đồng/ m^2 , chi phí sơn phần tô đậm (có diện tích S_2) là 150000 đồng/ m^2 và phần còn lại là 120000 đồng/ m^2 . Số tiền cần chi trả để sơn tấm biển quảng cáo là bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

Đáp số: 2465 (nghìn đồng)

- Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



- Khi đó $BD: y = -x + 4$ và Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ qua ba điểm $A \equiv O(0;0), B(4;0), I(2;4)$ nên có dạng: $y = -x^2 + 4x$.

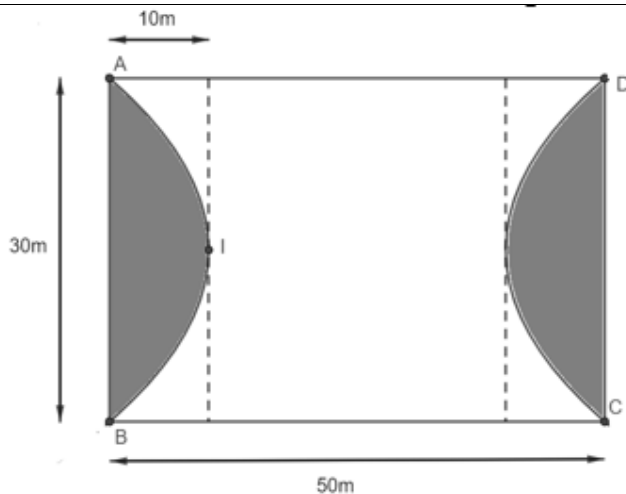
- $M(1;3)$ là giao điểm của BD và (P) .

- Suy ra: $S_1 = \int_1^4 \left| (-x^2 + 4x) - (-x + 4) \right| dx = \frac{9}{2} (m^2)$ và $S_2 = \int_0^1 \left| -x^2 + 4x \right| dx - \frac{9}{2} = \frac{37}{6} (m^2)$.

Diện tích còn phần còn lại là $S_3 = 4^2 - \int_0^4 \left| -x^2 + 4x \right| dx = \frac{16}{3} (m^2)$.

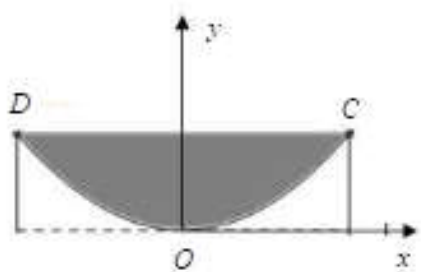
- Số tiền cần chi trả để sơn tấm biển quảng cáo là:
 $200000 \cdot S_1 + 150000 \cdot S_2 + 120000 \cdot S_3 = 200000 \cdot \frac{9}{2} + 150000 \cdot \frac{37}{6} + 120000 \cdot \frac{16}{3} = 2465000$ đồng.

Câu 24. (Sở Sơn La 2025) Kiến trúc sư thiết kế một khu vui chơi có dạng hình chữ nhật với chiều rộng 30m và chiều dài 50m. Trong đó, phần tô màu đậm trồng cỏ nhưng Nhật, phần còn lại trải thảm cỏ nhân tạo. Mỗi phần trồng cỏ nhưng Nhật có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh I thuộc trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh I đến trung điểm của cạnh AB bằng 10m (xem hình minh họa). Biết giá cỏ nhưng Nhật là 140000 đồng/ m^2 , giá cỏ nhân tạo là 100000 đồng/ m^2 . Tính tổng số tiền để trồng và trải thảm cỏ hết khu vui chơi theo đơn vị triệu đồng.



Lời giải

Đáp số: 166.

Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.Gọi phương trình parabol (P) có dạng: $y = ax^2 + bx + c$.Khi đó (P) đi qua gốc O , điểm $C(15;10)$ và $D(-15;10)$.

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} c = 0 \\ 225a + 15b + c = 10 \\ 225a - 15b + c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{45} \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } (P): y = \frac{2}{45}x^2.$$

Khi đó:

$$\text{Diện tích hình chữ nhật là: } S = 50 \cdot 30 = 1500 (m^2).$$

$$\text{Diện tích trồng cỏ nhưng Nhật là: } S_1 = 2 \cdot \int_{-15}^{15} \left(10 - \frac{2}{45}x^2 \right) dx = 400 (m^2).$$

$$\text{Diện tích trải thảm nhân tạo là: } S_2 = S - S_1 = 1500 - 400 = 1100 (m^2).$$

Tổng số tiền để trồng và trải thảm cỏ hết khu vui chơi là:

$$400 \cdot 140000 + 1100 \cdot 100000 = 166000000 \text{ (đồng)} = 166 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 25. (THPT Hương Hóa - Quảng Trị 2025) Tốc độ tăng cân nặng của một bé gái trong độ tuổi từ 0 tháng đến 36 tháng được ước tính bởi hàm số $f'(t) = 0,00093t^2 - 0,04792t + 0,76806$ (kg/tháng), với $f(t)$ là cân nặng của bé gái lúc t tháng tuổi.

(Nguồn: <http://www.vinmec.com>)

Hãy ước tính cân nặng của một bé gái 5 tháng tuổi, biết cân nặng của bé gái đó khi mới sinh là 3,3 kg (đơn vị: kg, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 6,58.

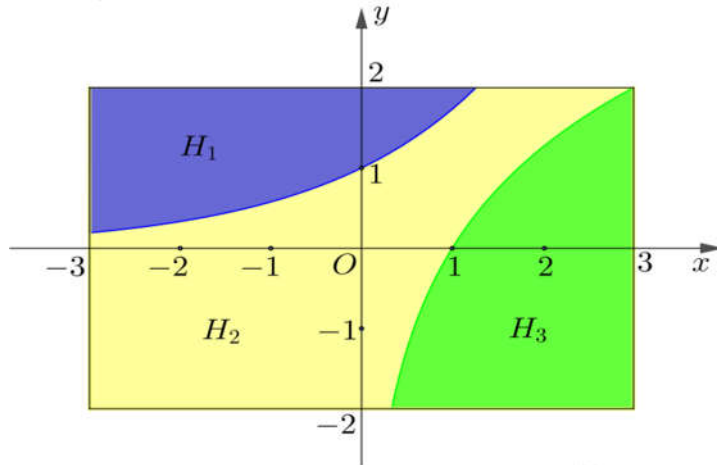
$$f(t) = \int (0,00093t^2 - 0,04792t + 0,76806) dt = 0,00031t^3 - 0,02396t^2 + 0,76806t + C.$$

Cân nặng của bé gái lúc mới sinh là 3,3 kg nên $C = 3,3$

$$\text{Suy ra } f(t) = 0,00031t^3 - 0,02396t^2 + 0,76806t + 3,3.$$

Cân nặng của bé gái lúc 5 tháng tuổi là $f(5) \approx 6,58$.

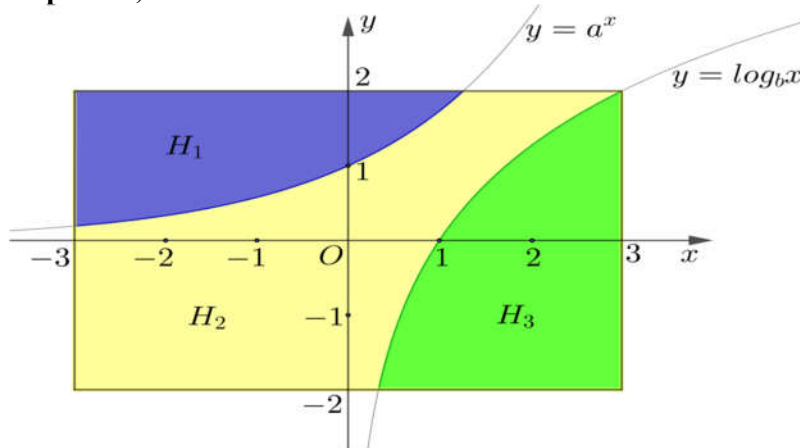
Câu 26. (Sở Phú Thọ 2025) Một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước lần lượt là 6 m và 4m được bạn Minh trang trí bằng cách vẽ hai đồ thị hàm số $f(x) = a^x$ ($0 < a \neq 1$) và $g(x) = \log_b x$ ($0 < b \neq 1$) đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$. Bức tường được chia làm 3 phần (tham khảo hình vẽ).



Phần H_1 được sơn màu xanh da trời, phần H_2 sơn màu vàng và phần H_3 được sơn màu xanh lá cây. Bạn Minh cần mua các hộp sơn mà mỗi hộp chỉ sơn được một màu tương ứng với các màu mà bạn Minh định sơn. Biết rằng mỗi hộp sơn chỉ sơn được tối đa $3 m^2$ tường, giá một hộp sơn màu xanh da trời là 120000 đồng, giá một hộp sơn màu xanh lá cây là 140000 đồng, giá một hộp sơn màu vàng là 160000 đồng. Cửa hàng chỉ bán số các hộp sơn là các số nguyên dương. Bạn Minh cần bao nhiêu triệu đồng để sơn bức tường đó?

Lời giải

Đáp án: 1,3.



Đồ thị hàm số $f(x) = a^x$ ($0 < a \neq 1$) và đồ thị hàm số $g(x) = \log_b x$ ($0 < b \neq 1$) đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$ nên $a = b$.

Ta thấy: Đồ thị hàm số $g(x) = \log_b x$ đi qua điểm $B(3; 2)$ nên suy ra $b = \sqrt{3}$.

Vậy bạn Minh đã vẽ hai đồ thị của hàm số $f(x) = \sqrt{3}^x$ và $g(x) = \log_{\sqrt{3}} x$.

Ta có:

$$\sqrt{3}^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\sqrt{3}} 2 \Rightarrow S_{H_1} = \int_{-3}^{\log_{\sqrt{3}} 2} (2 - \sqrt{3}^x) dx \approx 5,23 \text{ m}^2.$$

Do đó cần mua 2 hộp sơn để sơn phần H_1 với số tiền là $2.0,12 = 0,24$ (triệu đồng).

$$\log_{\sqrt{3}} x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{H_3} = \int_{\frac{1}{3}}^3 (\log_{\sqrt{3}} x + 2) dx \approx 7,15 \text{ m}^2.$$

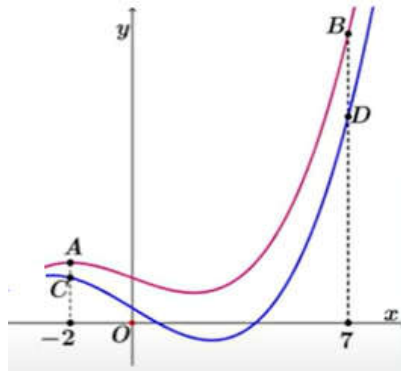
Do đó cần mua 3 hộp sơn để sơn phần H_3 với số tiền là $3.0,14 = 0,42$ (triệu đồng).

$$S_{H_2} = S_{HCN} - S_{H_1} - S_{H_2} \approx 6,4 - 5,23 - 7,15 \Rightarrow S_{H_2} \approx 11,62 \text{ m}^2.$$

Do đó cần mua 4 hộp sơn để sơn phần H_2 với số tiền là $4.0,16 = 0,64$ (triệu đồng).

Vậy số tiền bạn Minh cần dùng để sơn bức tường đó là: $0,24 + 0,42 + 0,64 = 1,3$ (triệu đồng).

- Câu 27. (Sở Bình Thuận 2025)** Hướng ứng chính sách hiện đại hóa nông thôn, người dân ở khu phố A đồng lòng cùng nhau góp tiền để bê tông một đường đi trong khu phố (phần được tô đậm trong hình vẽ).



Biết rằng khi chọn hệ trục tọa độ Oxy với đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 10m, các đường cong AB, CD là mép đường được cho bởi đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{32}x^3 - \frac{3}{8}x + \frac{3}{2}$ và $g(x) = \frac{1}{32}x^3 - \frac{5}{8}x + \frac{1}{2}$, đồng thời lớp bê tông được đổ dày 16cm và giá tiền 1m^3 bê tông là 1080000 đồng. Tính số tiền (đơn vị triệu đồng) cần dùng để đổ bê tông con đường đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp số: 253

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số đã cho là:

$$S = \int_{-2}^7 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^7 \left[\frac{1}{32}x^3 - \frac{3}{8}x + \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{32}x^3 - \frac{5}{8}x + \frac{1}{2} \right) \right] dx = \frac{117}{8} \text{ (đvdt)}.$$

Do đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 10m nên diện tích thực tế của con đường là

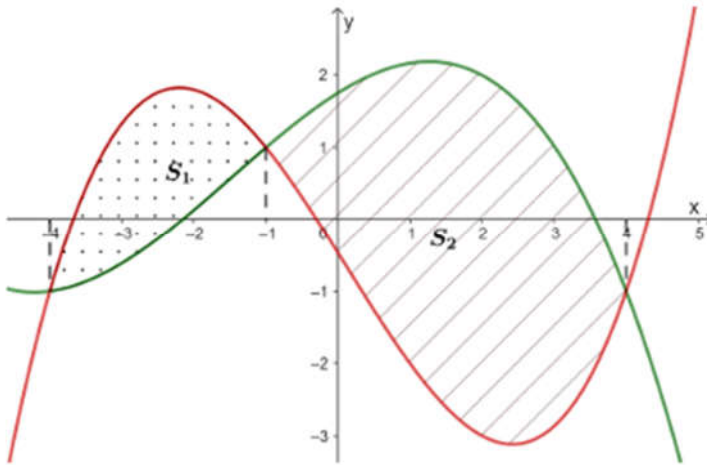
$$S_1 = \frac{117}{8} \cdot 10^2 = \frac{2925}{2} \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$\text{Thể tích khối bê tông cần đổ là: } V = S \cdot h = \frac{2925}{2} \cdot 0,16 = 234 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Số tiền cần dùng để đổ bê tông con đường đó là: $234 \cdot 1,08 \approx 253$ triệu đồng.

- Câu 28. (Sở Quảng Nam 2025)** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$ ($a, b, c, d, m, n, p, q \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -4 ; -1 ; 4 và $f(2) = 2$; $g(x) = -3$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$; $y = g(x)$ và hai đường thẳng

$x = -4$; $x = -1$. Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$; $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 4$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)



Lời giải

Đáp án: 0,3

Vì $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -4 ; -1 ; 4

Nên ta đặt hàm $f(x) - g(x) = k(x+4)(x+1)(x-4)$ (*)

Ta có $f(2) = 2$; $g(2) = -3$

Thay $x = 2$ vào (*) ta được $f(2) - g(2) = k \cdot 6 \cdot 3 \cdot (-2)$

$$\Leftrightarrow 2 - (-3) = k \cdot (-36)$$

$$\Rightarrow k = \frac{-5}{36}$$

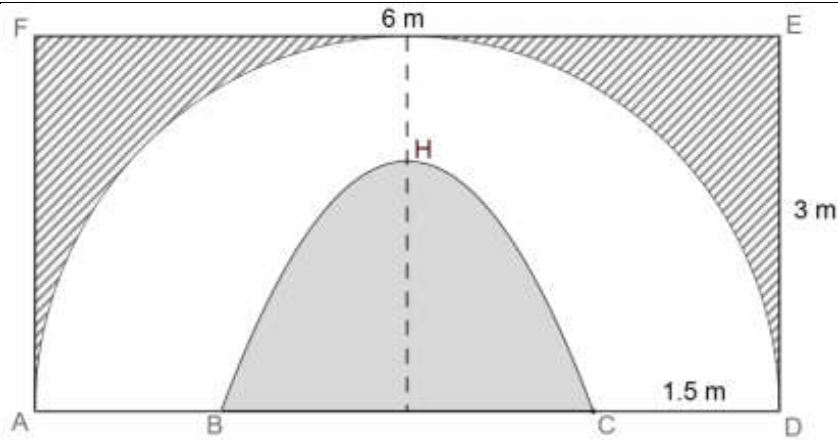
$$\text{Suy ra } f(x) - g(x) = -\frac{5}{36}(x+4)(x+1)(x-4)$$

$$\text{Gọi } S_1 = \int_{-4}^{-1} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-4}^{-1} \left| -\frac{5}{36}(x+4)(x+1)(x-4) \right| dx = \frac{65}{16}$$

$$S_2 = \int_{-1}^4 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^4 \left| -\frac{5}{36}(x+4)(x+1)(x-4) \right| dx = \frac{6875}{432}$$

$$\text{Vậy tỉ số } \frac{S_1}{S_2} = \frac{351}{1375} \approx 0,3.$$

Câu 29. (Sở Thái Nguyên 2025) Bác Bình muốn nhờ thợ trang trí một bức tường hình chữ nhật $ADEF$ với kích thước $EF = 6m$, $DE = 3m$ sao cho cân xứng hai nửa. Phần gạch chéo là hình giới hạn bởi đường gấp khúc $AFED$ và nửa đường tròn đường kính AD , được thuê sơn với đơn giá 250000 đồng mỗi mét vuông. Phần màu trắng giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính AD và một đường parabol (có đỉnh H cách đường thẳng AB một khoảng bằng $2m$ và đi qua hai điểm B, C nằm trên cạnh AD thỏa mãn $AB = CD = 1,5m$) được thuê trang trí bằng bức phù điêu đắp bằng xi măng với đơn giá 1950000 đồng mỗi mét vuông (tham khảo hình vẽ). Hỏi bác Bình phải trả bao nhiêu triệu đồng để trang trí bức tường như vậy (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Đáp án: 20,7.

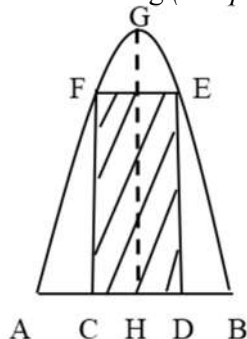
Ta có $S_{ADEF} = 6.3 = 18(m^2)$ Diện tích nửa đường tròn đường kính AD là $S_1 = \frac{1}{2}\pi 3^2 = \frac{9\pi}{2}(m^2)$ Chi phí cho phần gạch chéo là $F_1 = \left(18 - \frac{9\pi}{2}\right).0,25$ (triệu đồng)Xét hệ trục tọa độ Oxy sao cho $D(3;0), E(3;3) \Rightarrow H(0;2), C(1,5;0)$ Parabol nhận đỉnh là H và đi qua B, C có phương trình dạng $y = ax^2 + 2$ thỏa mãn

$$a\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow (P): y = -\frac{8}{9}x^2 + 2$$

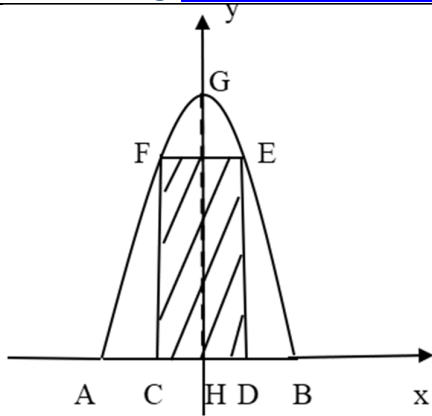
Diện tích phần giới hạn bởi parabol và AD là $S_2 = \int_{-1,5}^{1,5} \left(-\frac{8}{9}x^2 + 2\right) dx = 4(m^2)$ Chi phí cho phần đắp phù điêu là $F_2 = (S_1 - S_2).1,95 = \left(\frac{9\pi}{2} - 4\right).1,95$ (triệu đồng)Vậy tổng chi phí là $F_1 + F_2 = \left(18 - \frac{9\pi}{2}\right).0,25 + \left(\frac{9\pi}{2} - 4\right).1,95 \approx 20,7$ (triệu đồng).

Câu 30. (Sở Long An 2025) Một cổng của một tòa nhà có dạng parabol gồm hai phần: phần hai cánh cửa hình chữ nhật CDEF, còn lại là phần xiên hoa trang trí (hình bên dưới). Biết rằng $GH = 16m$, $AB = 8m$ và $AC = BD = 1,7m$. Diện tích phần cổng làm xiên hoa trang trí bằng bao nhiêu mét vuông (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?



Lời giải

Đáp án: 36,1.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ: Gốc tọa độ trùng điểm H .

Theo giả thiết ta có: $A(-4;0), B(4;0), G(0;16)$.

Phương trình parabol có dạng: $(P): y = ax^2 + c$.

Vì (P) đi qua các điểm A, B, G nên ta có:
$$\begin{cases} 16a + c = 0 \\ c = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = 16 \end{cases}.$$

Suy ra $(P): y = -x^2 + 16$.

Vì $AC = BD = 1,7m$ và $AB = 8m$ nên $CH = HD = \frac{8 - 2 \cdot 1,7}{2} = 2,3$.

Suy ra $E(2,3; y_E)$.

Mà $E(2,3; y_E) \in (P) \Rightarrow y_E = -(2,3)^2 + 16 = 10,71$.

Vậy $E(2,3; 10,71)$.

Suy ra $CD = 4,6; DE = 10,71 \Rightarrow S_{CDEF} = 4,6 \cdot 10,71 = 49,266m^2$.

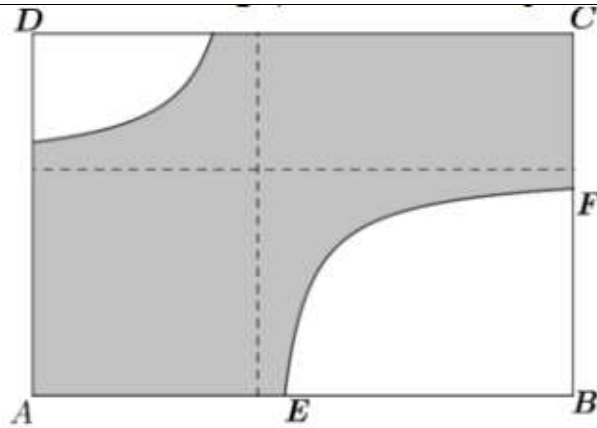
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và trục hoành là $S = \int_{-4}^4 (-x^2 + 16) dx = \frac{256}{3} (m^2)$.

Suy ra diện tích của phần công làm xiên hoa trang trí bằng $\frac{256}{3} - 49,266 = 36,1(m^2)$.

Câu 31. (Sở Quảng Ninh 2025) Một công ti đang thiết kế một bảng quảng cáo hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $AB = 12m$ và $AD = 8m$. Phần trung tâm của bảng sẽ được in nội dung quảng cáo, được mô tả là phần tô đậm (xem hình minh họa). Hai đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số có dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số này đều

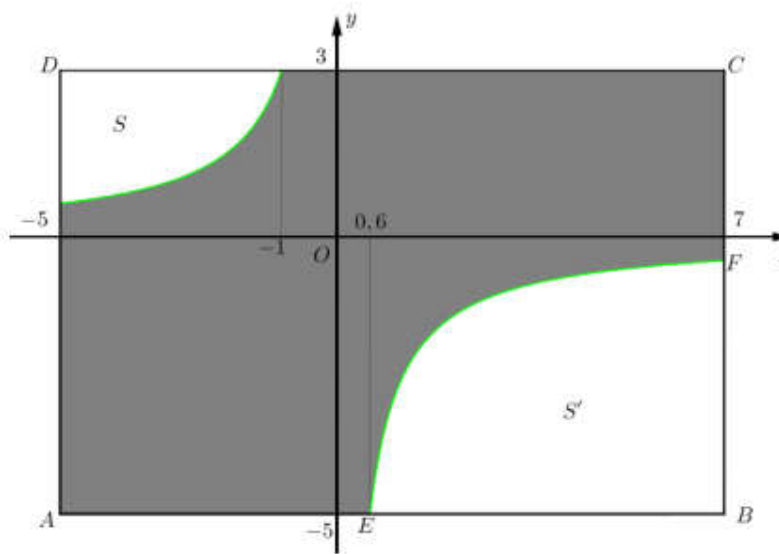
cách điểm A một khoảng bằng 5 m. Đồ thị giao với cạnh AB tại điểm E thỏa mãn $\frac{AE}{AB} = \frac{7}{15}$.

Diện tích phần in nội dung quảng cáo là bao nhiêu mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải

Đáp số: 73,5.



Gán hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Đồ thị hàm số có TCD là: $x = 0$, TCN là: $y = 0$ nên ta có:

$$\begin{cases} d = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{b}{cx}.$$

Ta có: $\frac{AE}{AB} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow AE = \frac{7}{15} \cdot AB = \frac{7}{15} \cdot 12 = 5,6 \Rightarrow E(0,6;-5).$

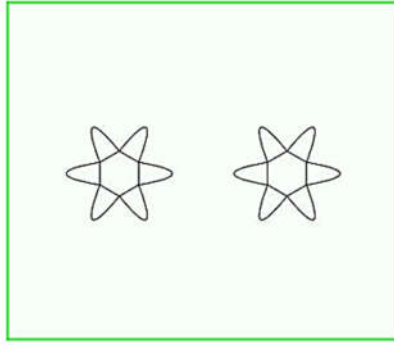
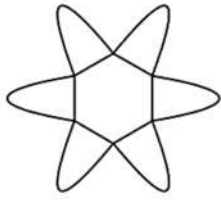
Đồ thị hàm số đi qua điểm $E(0,6;-5)$ nên $-5 = \frac{b}{c \cdot 0,6} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{x}.$

Ta có: $S = \int_{-5}^{-1} \left(5 + \frac{3}{x}\right) dx = 20 - 3 \ln 5, S' = \int_{0,6}^7 \frac{3}{x} dx = 3 \ln \frac{35}{3}.$

Diện tích phần in nội dung quảng cáo bằng:

$$S_{ABCD} - S - S' = 12 \cdot 8 - (20 - 3 \ln 5) - 3 \ln \frac{35}{3} \approx 73,5(dvdt)..$$

Câu 32. (Sở Vũng Tàu 2025) Để trang trí một bức tường hình chữ nhật có kích thước $3m \times 4m$ trong phòng, bạn Hoa vẽ lên tường một hình như sau: Trên mỗi cạnh của một hình lục giác đều có cạnh $2dm$, vẽ một cánh hoa hình parabol. Đỉnh của parabol cách cạnh $3dm$ và nằm phía ngoài hình lục giác đều. Đường parabol đi qua hai đầu mút của mỗi cạnh hình lục giác (tham khảo hình vẽ).



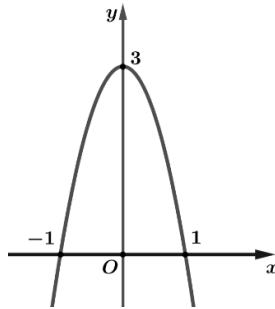
Hỏi bạn Hoa có thể vẽ tối đa bao nhiêu hình có cùng kích thước như vậy lên bức tường cần trang trí?

Lời giải

Đáp án: 34

Diện tích của hình lục giác đều cạnh bằng 2dm là: $6 \cdot \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$.

Gắn trục tọa độ Oxy cho một cánh hoa. Diện tích của một cánh hoa là diện tích phẳng hình phẳng dưới hạn bởi đồ thị đồ thị hàm số $(P): y = ax^2 + bx + c$ sao cho (P) có đỉnh $I(0;3)$ và cắt trục hoành tại hai điểm $(-1;0)$ và $(1;0)$.



Phương trình parabol (P) là: $y = -3x^2 + 3$.

Diện tích một cánh hoa được trang trí là: $S = \int_{-1}^1 |-3x^2 + 3| dx = 4 \text{ dm}^2$.

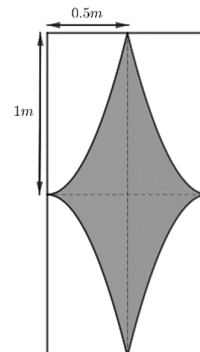
Diện tích của một bông hoa được trang trí là: $6\sqrt{3} + 6 \cdot 4 = 24 + 6\sqrt{3} \text{ dm}^2$

Diện tích bức tường hình chữ nhật có kích thước $3m \times 4m$ là: $3 \cdot 4 = 12 \text{ m}^2 = 1200 \text{ dm}^2$.

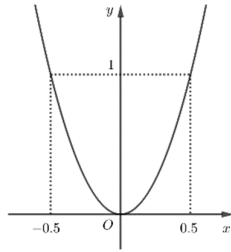
Tỉ lệ diện tích của bức tường hình chữ nhật và diện tích một bông hoa là: $\frac{1200}{24 + 6\sqrt{3}} \approx 34,89$

Vậy bạn Hoa có thể trang trí tối đa 34 hình có cùng kích thước như vậy lên bức tường cần trang trí.

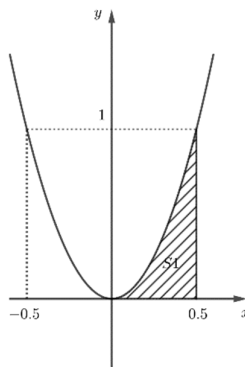
Câu 33. (Sở Bình Phước 2025) Nhà bác An có tất cả 8 cánh cửa sắt hình chữ nhật với chiều dài $2m$ và chiều rộng $1m$. Hai mặt của mỗi cánh cửa được thiết kế như hình vẽ dưới đây. Trong đó, phần được tô đậm được sơn màu xanh, phần còn lại được sơn màu trắng. Mỗi phần sơn màu trắng có đường biên cong là một phần của parabol có đỉnh nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Biết rằng chi phí để sơn màu xanh là 120 nghìn đồng/ m^2 và chi phí sơn màu trắng là 110 nghìn đồng/ m^2 . Hỏi để sơn toàn bộ số cửa sắt trên, bác An phải trả bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị triệu đồng).



Lời giải

Đáp án: 3,63.Xét đồ thị parabol trên hệ trục tọa độ Oxy như sau:Gọi parabol có phương trình là: $y = ax^2 + bx + c$ Parabol đi qua các điểm có tọa độ $(-0.5; 1), (0.5; 1), (0; 0)$, nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} c = 0 \\ a \cdot 0.5^2 + b \cdot 0.5 = 1 \\ a \cdot (-0.5^2) + b \cdot (-0.5) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = 4 \\ b = 0 \end{cases}$$

Vậy ta có phương trình parabol $y = 4x^2$.Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = 4x^2, y = 0, x = 0, x = 0.5$ là:

$$S_1 = \int_0^{0.5} 4x^2 dx = \frac{1}{6}$$

Diện tích của phần tô đậm được sơn màu xanh của mỗi mặt cánh cửa là $S_2 = 4 \cdot S_1 = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.Diện tích của phần không tô đậm được sơn màu trắng của mỗi mặt cánh cửa là $S_3 = 1.2 - S_2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Có tất cả 8 cánh cửa sắt hình chữ nhật, mỗi cánh có 2 mặt, vậy có tất cả 16 mặt như hình vẽ.

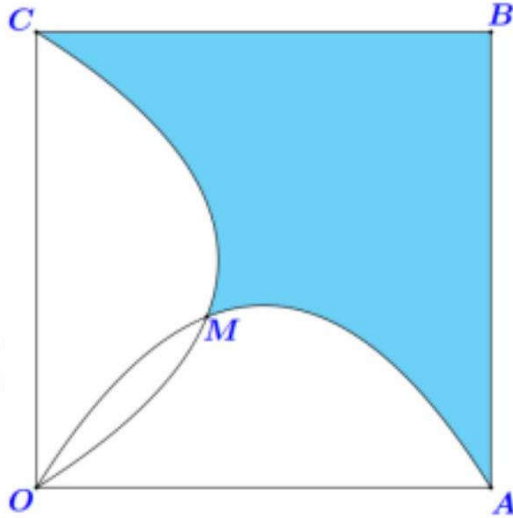
Vậy tổng diện tích phần tô đậm được sơn màu xanh là: $16S_2 = 16 \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{3} (m^2)$ Tổng diện tích phần không tô đậm được sơn màu trắng là: $16S_3 = 16 \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{3} (m^2)$

Tổng chi phí để sơn màu xanh là: $\frac{32}{3} \cdot 120 = 1280$ (nghìn đồng) $= 1.28$ (triệu đồng)

Tổng chi phí để sơn màu trắng là: $\frac{64}{3} \cdot 110 \approx 2346$ (nghìn đồng) ≈ 2.35 (triệu đồng)

Tổng chi phí sơn là: $1.28 + 2.35 = 3.63$ (triệu đồng).

Câu 34. (Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai 2025) Cho hình vuông OABC cạnh bằng 8, điểm M nằm trong hình vuông sao cho khoảng cách từ M đến các cạnh OA, OC cùng bằng 3. Parabol (P_1) đi qua các điểm O, A, M, Parabol (P_2) đi qua các điểm O, C, M. Tính diện tích phần tô đậm (hình vẽ bên). (kết quả làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Cho hệ trục tọa độ Oxy sao cho tia Ox trùng tia OA, tia Oy trùng tia OB.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P_1) , $y = 0$;

S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P_2) , $x = 0$;

S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P_1) và (P_2) .

Từ hình vẽ ta thấy diện tích hình phẳng cần tìm là $S = S_{OABC} - [S_1 + S_2 - S_3]$ (*)

Gọi phương trình (P_1) là $y = ax^2 + bx + c$.

$$\text{Vì } (P_1) \text{ đi qua } O(0;0), M(3;3), A(8;0) \text{ nên } \begin{cases} c = 0 \\ 9a + 3b + c = 3 \\ 64a + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{8}{5} \\ c = 0. \end{cases}$$

Suy ra $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{5}x$.

Ta thấy (P_1) và (P_2) đối xứng qua OM nên

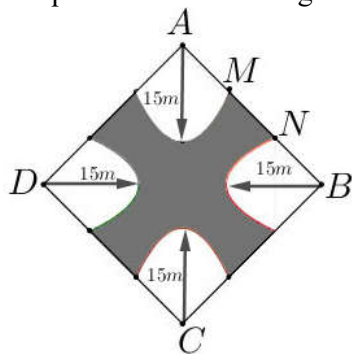
$$S_1 = S_2 = \int_0^8 \left(-\frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{5}x \right) dx = \frac{256}{15}$$

Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P_1) , $OM: y = x$, do tính chất đối xứng nên

$$S_3 = 2S_4 = 2 \int_0^3 \left[\left(-\frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{5}x \right) - x \right] dx = \frac{9}{5}$$

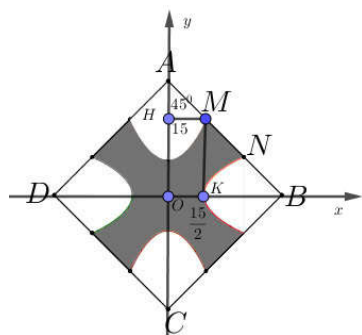
$$\text{Thay vào (*) ta được } S = 64 - \left(\frac{256}{15} + \frac{256}{15} - \frac{9}{5} \right) = \frac{95}{3} \approx 32.$$

Câu 35. (THPT Lê Quý Đôn - Hà Nội 2025) Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo $AC = 45\text{m}$. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với các đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình vuông, khoảng cách từ đỉnh đó đến đỉnh tương ứng của hình vuông bằng 15m . Bản thiết kế khu sinh hoạt nhận tâm hình vuông $ABCD$ làm tâm đối xứng và trên hình bên ta có $AM = MN = NB$. Để trang trí cho phần sân chơi tốn 500 nghìn đồng $/1\text{m}^2$, để trồng hoa tốn 200 nghìn đồng $/1\text{m}^2$. Tổng số tiền cần dùng là bao nhiêu triệu đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp án: 349



Gắn hệ tọa độ Oxy như hình vẽ: $A\left(0; \frac{45}{2}\right), B\left(\frac{45}{2}; 0\right), C\left(0; -\frac{45}{2}\right), D\left(-\frac{45}{2}; 0\right)$.

Do hình vuông $ABCD$ có $AC = 45\text{m}$ nên độ dài cạnh hình vuông là: $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{45}{\sqrt{2}}\text{m}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là: $S_{ABCD} = AB^2 = \frac{45^2}{2} = 1012,5\text{ m}^2$.

Vì $AM = MN = NB$ nên $AM = MN = NB = \frac{AB}{3} = \frac{15\sqrt{2}}{3} \text{ m}$.

Độ dài cạnh $AH = AM \cdot \cos 45^\circ = \frac{15}{2}$, $OH = OA - AH = \frac{45}{2} - \frac{15}{2} = 15$; $HM = AM \cdot \sin 45^\circ = \frac{15}{2}$.

Vậy tọa độ của điểm $M = \left(\frac{15}{2}; 15\right)$.

Parabol đi qua điểm M và có đỉnh là điểm $E\left(0; \frac{15}{2}\right)$ có phương trình dạng: $(P): y = ax^2 + \frac{15}{2}$
(1)

Thay tọa độ điểm $M\left(\frac{15}{2}; 15\right)$ vào (1) ta được: $15 = a \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^2 + \frac{15}{2} \Leftrightarrow a = \frac{2}{15}$.

Vậy phương trình parabol $(P): y = \frac{2}{15}x^2 + \frac{15}{2}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) , đường thẳng $y=15$, trục Oy và đường thẳng $x = \frac{15}{2}$ là:

$$S_1 = \int_0^{\frac{15}{2}} \left[15 - \left(\frac{2}{15}x^2 + \frac{15}{2} \right) \right] dx = \int_0^{\frac{15}{2}} \left[\frac{15}{2} - \frac{2x^2}{15} \right] dx = \frac{15}{2}x \Big|_0^{\frac{15}{2}} - \frac{2x^3}{45} \Big|_0^{\frac{15}{2}} = 37,5 \text{ m}^2.$$

Diện tích tam giác $\triangle AHM$ là: $S_2 = S_{AHM} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot HM = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{15}{2} = 28,125 \text{ m}^2$.

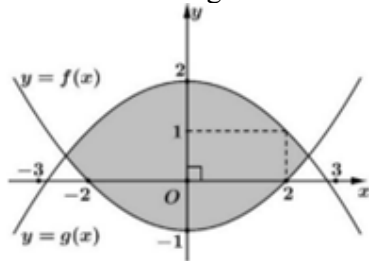
Diện tích trồng hoa là: $S_{HOA} = 8 \cdot (S_1 + S_2) = 8 \cdot (37,5 + 28,125) = 525 \text{ m}^2$

Diện tích sân chơi là: $S_{SAN} = S_{ABCD} - S_{HOA} = 1012,5 - 525 = 487,5 \text{ m}^2$.

Tổng số tiền cần dùng là: $487,5 \cdot 500000 + 525 \cdot 200000 = 348750000 \text{ đ}$

Vậy số tiền cần dùng để trang trí sân và trồng hoa là 349 triệu đồng.

Câu 36. (Sở Hậu Giang 2025) Anh Trí nhận thiết kế một logo hình con mắt (phần được tô đậm) cho một cơ sở y tế: Logo là một hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = f(x)$ và $y = g(x)$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là centimet). Chi phí sản xuất mỗi cm^2 trên logo là 1000 đồng. Chi phí sản xuất mỗi logo là bao nhiêu đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Đáp án: 9798

Gọi phương trình parabol $y = g(x)$ là $g(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ đi qua các điểm có tọa độ lần lượt là $(2;1), (0;2), (-2;1)$.

$$\text{Lập hệ phương trình ba ẩn, từ đó suy ra được } \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} \text{ nên } g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$$

Gọi phương trình parabol $y = f(x)$ là $f(x) = mx^2 + nx + p$ với $m \neq 0$ đi qua các điểm có tọa độ lần lượt là $(-2;0), (0;-1), (2;0)$.

$$\text{Lập hệ phương trình ba ẩn, từ đó suy ra được } \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ n = 0 \\ p = -1 \end{cases} \text{ nên } f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$$

Phương trình hoành độ giao điểm: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - 1 = -\frac{1}{4}x^2 + 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$.

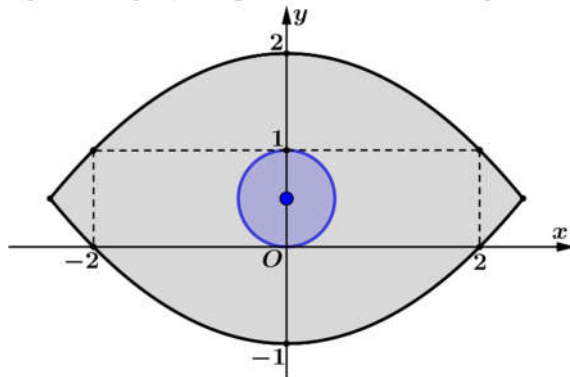
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là:

$$S_2 = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left| \left(-\frac{1}{4}x^2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right) \right| dx$$

Chi phí mỗi logo là:

$$T = 1000 \cdot \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left| \left(-\frac{1}{4}x^2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right) \right| dx \approx 9798 \text{ đồng.}$$

- Câu 37. (THPT Nguyễn Quốc Trinh - Hà Nội 2025)** Bạn An thực hiện thiết kế một logo hình con mắt cho một phòng khám nhãn khoa. Logo là một hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có các kích thước như hình vẽ dưới đây (phần được tô màu đen) và một hình tròn có bán kính bằng 0,5 dm ở giữa là phần con ngươi (phần được tô màu xanh), đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimet. Biết rằng chi phí để sơn phần con ngươi hình tròn màu xanh là 25000 đồng/dm² và chi phí để sơn phần còn lại màu đen là 20000 đồng/dm². Chi phí để sơn logo trên là bao nhiêu nghìn đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Trả lời: 200.

Gọi phương trình parabol $y = f(x)$ là $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ đi qua các điểm có tọa độ lần lượt là $(2;1), (0;2), (-2;1)$.

Lập hệ phương trình ba ẩn, từ đó suy ra được
$$\begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} \text{ nên } f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$$

Gọi phương trình parabol $y = g(x)$ là $g(x) = mx^2 + nx + p$ với $m \neq 0$ đi qua các điểm có tọa độ lần lượt là $(-2;0), (0;-1), (2;0)$.

Lập hệ phương trình ba ẩn, từ đó suy ra được
$$\begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ n = 0 \\ p = -1 \end{cases} \text{ nên } g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$$

Phương trình hoành độ giao điểm: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 2 = \frac{1}{4}x^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$

Diện tích hình tròn được sơn màu xanh là: $S_1 = \pi r^2 = \pi(0,5)^2 = 0,25\pi \text{ (dm}^2\text{)}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là:

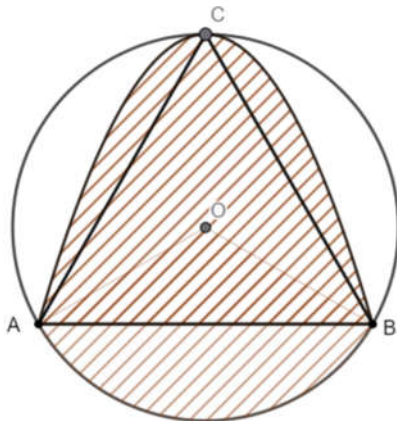
$$S_2 = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left| \left(-\frac{1}{4}x^2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right) \right| dx$$

Diện tích phần sơn được tô màu đen là: $S_3 = S_2 - S_1 = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left| \left(-\frac{1}{4}x^2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right) \right| dx - 0,25\pi$

Chi phí để sơn logo là:

$$T = 0,25\pi \cdot 25000 + \left(\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left| \left(-\frac{1}{4}x^2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right) \right| dx - 0,25\pi \right) \cdot 20000 \approx 249 \text{ nghìn đồng.}$$

Câu 38. (Cụm THPT Hoàn Kiếm - Hai Bà Trưng - Hà Nội 2025) Một hoa văn hình tròn tâm O , ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh $AB = 2\sqrt{3} \text{ cm}$. Đường cong qua ba điểm A, B, C là một phần của parabol (xem hình vẽ).

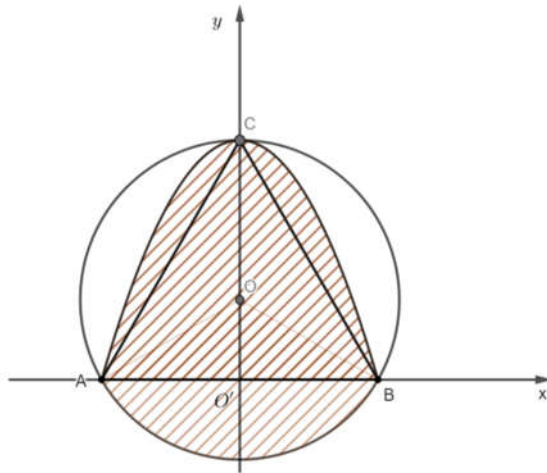


Tính diện tích của phần hình phẳng giới hạn bởi đường tròn và parabol (phần không gạch) theo đơn vị cm^2 (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Đáp án: 3,18

Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Khi đó $A(-\sqrt{3};0), B(\sqrt{3};0), C(0;3)$.

Parabol đi qua ba điểm $A(-\sqrt{3};0), B(\sqrt{3};0), C(0;3)$ nên parabol có phương trình là $y = -x^2 + 3$.

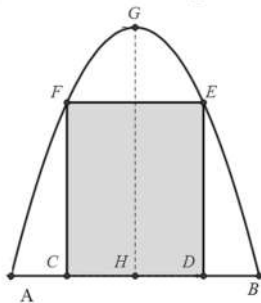
Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $O(0;1)$ và bán kính $R=2$ nên có phương trình là $x^2 + (y-1)^2 = 4$.

Suy ra $y = 1 - \sqrt{4-x^2}$ (Phần nằm dưới trục hoành).

Diện tích phần gạch là $S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (-x^2 + 3 - (1 - \sqrt{4-x^2})) dx$

Do đó diện tích phần không gạch là $S' = \pi \cdot 2^2 - S = 3,18 \text{ (cm}^2\text{)}$.

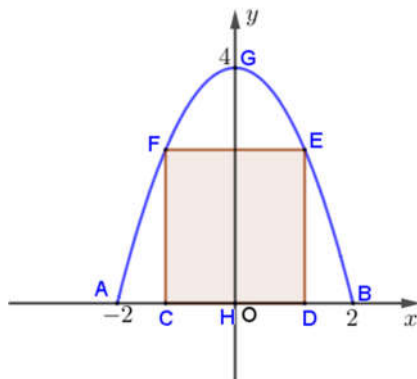
Câu 39. (THPT Bắc Đông Quan - Thái Bình 2025) Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau:



Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng nhựa lõi thép UPVC, khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1500000 đồng/m^2 , còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 1000000 đồng/m^2 . Tổng số tiền để làm hai phần nói trên là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Đáp án: 13,7



Đặt hệ trục Oxy như hình vẽ.

+/- Gọi PT Parabol có dạng: $(P): y = ax^2 + bx + c$.

(P) có đỉnh $G(0; 4)$ và đi qua $B(2; 0)$ suy ra: $a = -1; b = 0; c = 4 \Rightarrow (P): y = -x^2 + 4$

+/- Ta có: $x_E = x_D = 1,1 \Rightarrow y_E = -1,1^2 + 4 = 2,79 \Rightarrow ED = 2,79$.

+/- $S_{CDEF} = CD \cdot DF = 2,2 \cdot 2,79 = 6,138(m^2)$.

+/- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol (P) và trục hoành là

$$S_{(P)} = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) = \frac{32}{3}(m^2)$$

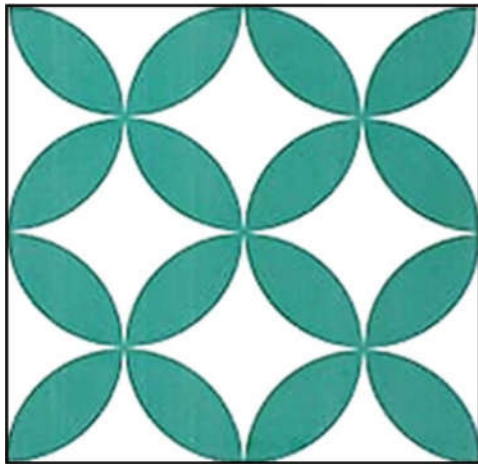
Suy ra diện tích làm xiên hoa là: $S = S_{(P)} - S_{CDEF} = \frac{6793}{1500}(m^2)$.

Đổi đơn vị: $1500000 \text{ đồng}/m^2 = 1,5 \text{ triệu đồng}/m^2$, $1000000 \text{ đồng}/m^2 = 1 \text{ triệu đồng}/m^2$.

Tổng số tiền để làm hai phần nói trên là:

$$T = 6,138 \cdot 1,5 + \frac{6793}{1500} \cdot 1 \approx 13,7 \text{ (triệu đồng)}.$$

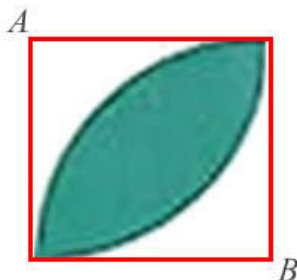
Câu 40. (Sở Thái Bình 2025) Viên gạch men dùng để lát nền nhà là một hình vuông có cạnh bằng 80 cm (xem hình bên dưới). Mỗi viên gạch có 4 bông hoa, mỗi bông hoa gồm 4 cánh hoa. Mỗi cánh hoa (phần màu xanh) là phần giao nhau của hai hình tròn có cùng bán kính và khoảng cách giữa hai tâm là $20\sqrt{2}$ cm.



Ước tính ở công đoạn tráng men, phần màu xanh có chi phí 50 nghìn đồng trên một mét vuông, còn phần màu trắng có chi phí 30 nghìn đồng trên một mét vuông. Tính chi phí (đơn vị: tỉ đồng) của công đoạn tráng men này, khi cơ sở dự định sản xuất 100000 viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp số: 2,65



Xét $\frac{1}{16}$ viên gạch men (vùng hình vuông chứa một cánh hoa).

Vì phần cánh hoa (màu xanh) là phần giao nhau của các đường tròn có khoảng cách giữa các tâm là $20\sqrt{2}$ nên một cánh hoa là phần giao của hai phần tư hình tròn tâm A, B (hình vẽ), có bán kính $r = 20$.

Mỗi phần tư hình tròn tâm A, B có diện tích $S = \frac{1}{4}\pi \cdot 20^2$.

Diện tích hình vuông có AB là đường chéo: $S_v = 20^2$.

Suy ra diện tích của một cánh hoa là $2S - S_v = \frac{1}{2}\pi \cdot 20^2 - 20^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cdot 20^2$.

Do đó

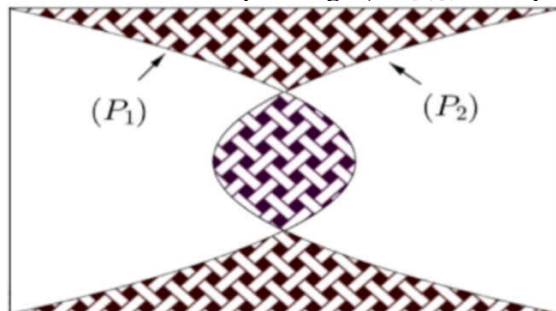
□ Diện tích phần màu xanh là $S_1 = 16\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cdot 20^2$ (cm²).

□ Diện tích phần màu trắng $S_2 = 80^2 - S_1$ (cm²).

Số tiền tráng men một viên gạch là $T = 5S_1 + 3S_2 = 26506,19298$ đồng.

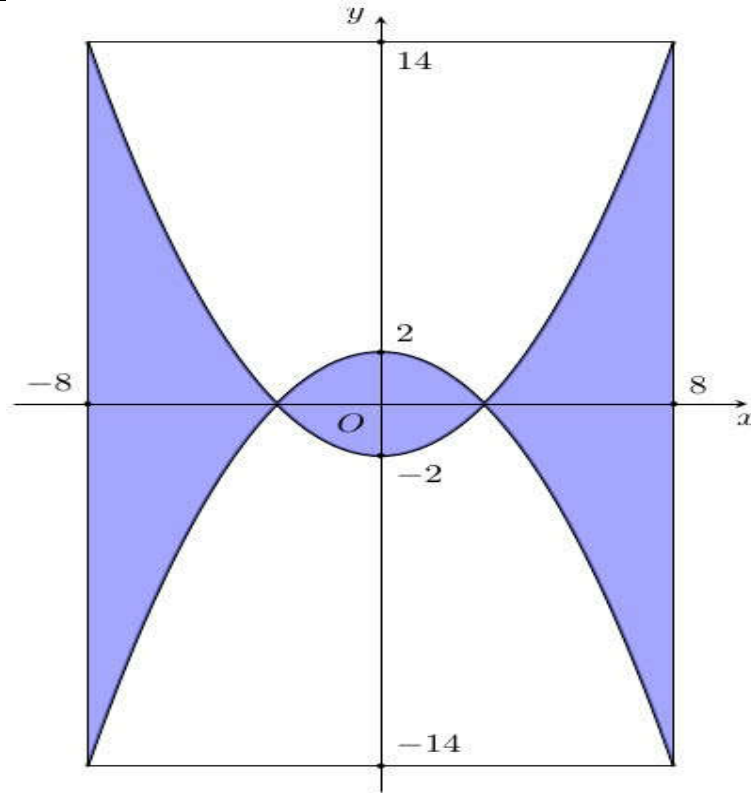
Để sản xuất 100000 viên gạch thì số tiền tráng men là $100000T = 2650619298$ (đồng) $\approx 2,65$ (tỷ đồng).

- Câu 41. (Sở Hà Tĩnh 2025)** Trang trí một sân hình chữ nhật kích thước 28m x 16m, trong đó hai Parabol (P_1) đối xứng với (P_2) qua đường thẳng đi qua hai trung điểm của chiều dài sân (hình vẽ), khoảng cách giữa hai đỉnh Parabol bằng 4m. Chi phí trang trí cho phần hoa văn là 180 ngàn đồng trên một mét vuông, phần trắng là 160 ngàn đồng trên một mét vuông. Tổng chi phí trang trí cho sân là bao nhiêu **triệu đồng**? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Lời giải

Đáp án: 74.4



Đặt hình chữ nhật vào hệ tọa độ Oxy sao cho tâm hình chữ nhật trùng với góc tọa độ, chiều dài của hình chữ nhật vuông góc với trục Ox.

Theo đề bài ta có Parabol (P_1) đi qua các điểm $A(0; -2), B(-8; 14), C(8; 14)$

Từ đây ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} c = -2 \\ 64a - 8b = 16 \\ 64a + 8b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ b = 0 \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Suy ra $(P_1): y = \frac{1}{4}x^2 - 2$

Suy ra $(P_2): y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$

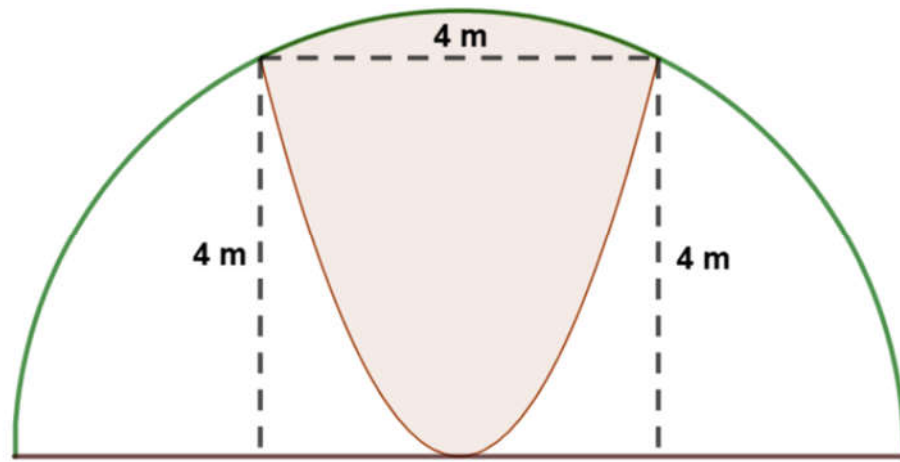
Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích phần hoa văn và diện tích phần trắng

Ta có:
$$S_1 = 2 \int_{-8}^{-2\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}x^2 - 4 \right| dx + \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}x^2 - 4 \right| dx$$

$$S_2 = 16.28 - S_1$$

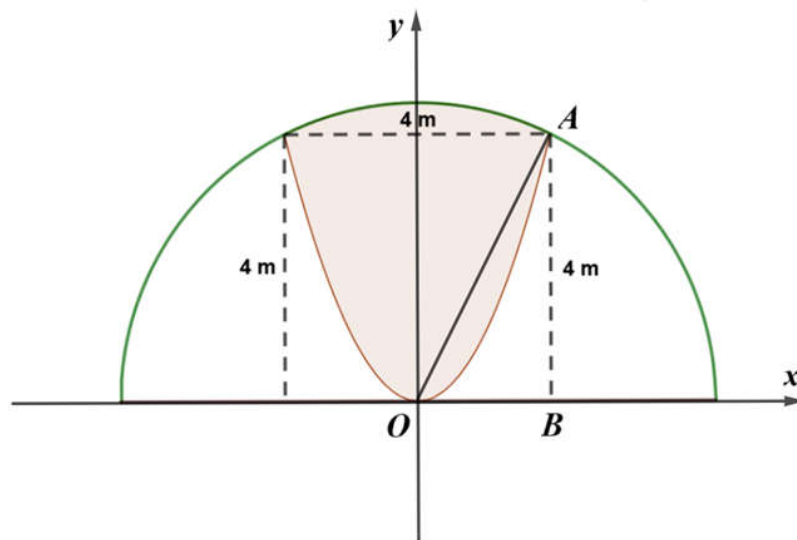
Tổng chi phí trang trí là $180.000S_1 + 160.000S_2 = 74.4$ (triệu đồng)

Câu 42. (Sở Lai Châu 2025) Khuôn viên nhà bạn Thùy Dương có dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phân để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn và cách nhau một khoảng bằng 4 m. Phần còn lại của khuôn viên dành để trồng cỏ Nhung Nhật. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí trồng hoa và cỏ Nhung Nhật tương ứng là 250.000 đồng/m² và 150.000 đồng/m². Hỏi chi phí để trồng hoa và trồng cỏ Nhung Nhật trong khuôn viên đó hết bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



Lời giải

Đáp án: 5,9



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Xét parabol có đỉnh là gốc tọa độ và đi qua điểm $(2; 4)$: Phương trình (P) có dạng: $y = ax^2$

Vì $A(2; 4) \in (P)$ nên $4 = a \cdot 2^2 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow (P): y = x^2$.

Xét $\triangle OAB$ vuông tại B , theo định lý Pythagore ta có:

$$OA^2 = AB^2 + OB^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow R = OA = 2\sqrt{5}$$

Phương trình đường tròn (C) có tâm O , bán kính $R = 2\sqrt{5}$ là: $x^2 + y^2 = 20$.

$$\Rightarrow |y| = \sqrt{20 - x^2}$$

$$\text{Diện tích phần trồng hoa là: } S_1 = \int_{-2}^2 (\sqrt{20 - x^2} - x^2) dx.$$

$$\text{Diện tích trồng cỏ Nhung Nhật là: } S_2 = \frac{\pi R^2}{2} - S_1 = 10\pi - S_1.$$

Tổng chi phí để trồng hoa và trồng cỏ Nhung Nhật trong khuôn viên đó là:

$$250000 \cdot S_1 + 150000 \cdot S_2 = 250000 \cdot S_1 + 150000 \cdot (10\pi - S_1) \approx 5906351 \text{ (đồng)} \approx 5,9 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy chi phí để trồng hoa và trồng cỏ Nhung Nhật trong khuôn viên nhà bạn Thùy Dương gần bằng 5,9 triệu đồng.

Nguyễn Bảo Vương