CHỦ ĐỀ 5. GÓC TRONG KHÔNG GIAN

• PHẦN 3. TRẢ LỜI NGẮN

CÂU HỎI (vì là ngân hàng được tách ra từ các trường, cho nên có trùng lặp câu hỏi thì do các trường tham khảo nhau)

Góc

Câu 1. **(THPT Lê Hồng Phong - Hải Phòng 2025)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AB và AA'. Cho biết $AB=2, BC=\sqrt{13}$, $CC'=4$. Tính số đo độ của góc nhị diện $[A,CE,F]$ (làm tròn đến hàng đơn vị)

Câu 2. **(Sở Hà Nội 2025)** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $AB=1$, $BC=\sqrt{2}$ và $[S,BC,A]=45°$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng bao nhiêu độ?

Câu 3. **(Sở Hòa Bình 2025)** Một hộp bánh có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=10cm, AD=20cm$, $AA'=30cm$. Số đo góc phẳng nhị diện $[A',BD,A]$ bằng bao nhiêu độ? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)*

Câu 4. **(Sở Sơn La 2025)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA\perp(ABCD)$ và

$SA=2$. Tính số đo của góc nhị diện $[S,CD,A]$.

Câu 5. **(Sở Lào Cai 2025)** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=1, AD=\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Số đo góc phẳng nhị diện $[S;BD;C]$ bằng a^0. Tìm giá trị a?

Câu 6. **(Sở Thái Nguyên 2025)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a, SA\perp(ABCD)$ và $SA=4a$. Số đo góc nhị diện $[B.SC,A]$ bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 7. **(Cụm Ninh Giang - Tứ Kỳ - Gia Lộc 2025)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Tính cosin góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 8. **(THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi M là trung điểm của SC. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

Câu 9. **(THPT Diễn Châu 5 - Nghệ An 2025)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính số đo góc nhị diện $[A;BD;M]$ (*tính theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng đơn vị*).

Câu 10. **(THPT Kinh Môn - Hải Dương 2025)** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và CI, với I là trung điểm của AD (làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 11. **(THPT Triệu Sơn 1-Thanh Hóa 2025)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB=AC=a$, $\widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90°$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính $\cos[A,SB,C]$ làm tròn đến hàng phần trăm.

Câu 12. **(THPT Cẩm Xuyên - Hà Tĩnh 2025)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Tính cosin góc giữa đường thẳng DG với đường thẳng SA (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Câu 13. **(Cụm trường Nghệ An 2025)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=6,\ AD=10$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm O của đáy $ABCD$ và chiều cao của hình chóp là $\sqrt{5}$. Tính góc nhị diện $[A,SB,C]$ (làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị đo bằng độ).

Câu 14. **(Cụm trường Hưng Yên 2025)** Cho hình chop đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên $SA=2a$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (SAC) bằng $\sqrt{\frac{b}{c}}$ với phân số $\frac{b}{c}$ tối giản, $b>0$, $c>0$. Tính $T=b+2c$.

Câu 15. **(Sở Bắc Giang 2025)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC, SAB là các tam giác đều và mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy. Gọi α là số đo của góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$. Tính $\cos^2\alpha$.

Câu 16. **(Sở Phú Thọ 2025)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD. Biết $SO=AB=2$. Giá trị sin của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng bao nhiêu? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*)

Câu 17. **(Cụm Chương Mỹ - Thanh Oai 2025)** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, hai đường chéo $AC=2a, BD=2a\sqrt{3}, SO\perp(ABCD)$; cạnh bên $SD=2a$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD). Tính $\sin\varphi$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Câu 18. **(Sở Thái Bình 2025) Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a. Tính côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD)(làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2).**

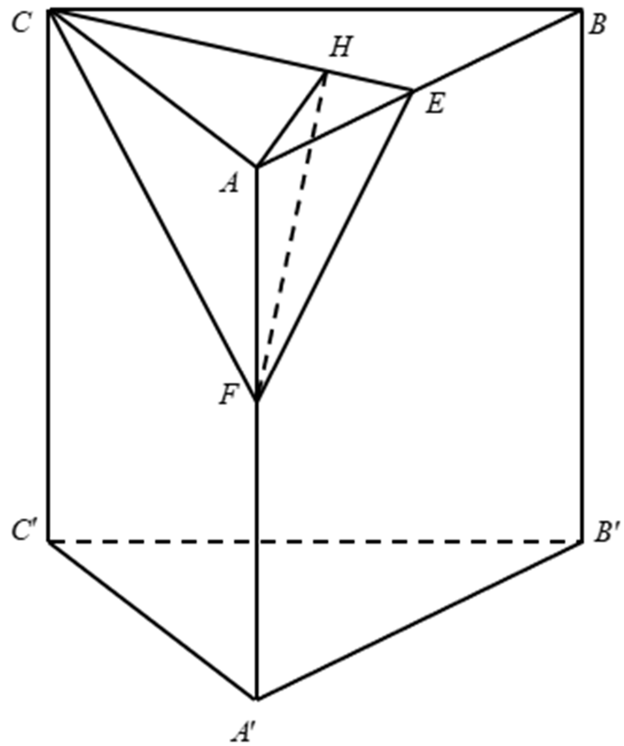
ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Góc

Câu 1. **(THPT Lê Hồng Phong - Hải Phòng 2025)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AB và AA'. Cho biết $AB=2, BC=\sqrt{13}$, $CC'=4$. Tính số đo độ của góc nhị diện $[A,CE,F]$ (làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Đáp án: 65.



Từ điểm A kẻ đường $AH \perp CE$, ta có $CE \perp AH, CE \perp AF$ suy ra $CE \perp (AHF)$ nên góc nhị diện $[A, CE, F]$ có số đo bằng góc $\widehat{AHF}$.

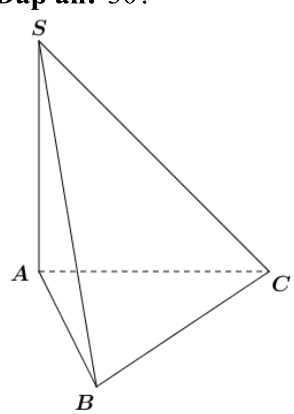
Ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{13-4} = 3$, $AE = 1$ nên $AH = \dfrac{AE.AC}{\sqrt{AE^2 + AC^2}} = \dfrac{3.1}{\sqrt{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $AF = 2$

Xét tam giác AFH vuông tại A ta có $\tan \widehat{AHF} = \dfrac{AF}{AH} = \dfrac{2\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \widehat{AHF} \approx 65^0$.

Câu 2. **(Sở Hà Nội 2025)** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$ và $[S, BC, A] = 45°$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Đáp án: 30.



Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$$

$$\begin{cases} AB \perp BC \\ SB \perp BC \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SBA} = 45°$$

$\Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại A

$\Rightarrow SA = AB = 1$

Xét ΔABC vuông tại B: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3}$

Ta có: $\left(SC,\left(ABC\right)\right) = \left(SC, AC\right) = \widehat{SCA}$

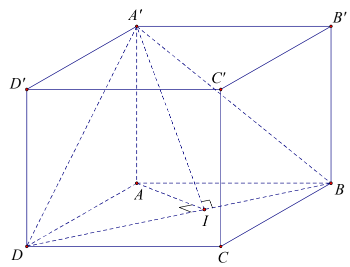
Xét ΔSAC vuông tại A: $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30°$

$\Rightarrow \left(SC,\left(ABC\right)\right) = 30°$.

Câu 3. (Sở Hòa Bình 2025) Một hộp bánh có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 10cm, AD = 20cm$, $AA' = 30cm$. Số đo góc phẳng nhị diện $\left[A', BD, A\right]$ bằng bao nhiêu độ? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)*

Lời giải

Đáp án: 73,4



Dựng $AI \perp BD = I$. Khi đó: $\begin{cases} BD \perp AI \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp \left(AIA'\right) \Rightarrow BD \perp A'I$.

Vậy $\left[A', BD, A\right] = \left(AI, A'I\right) = \widehat{AIA'}$.

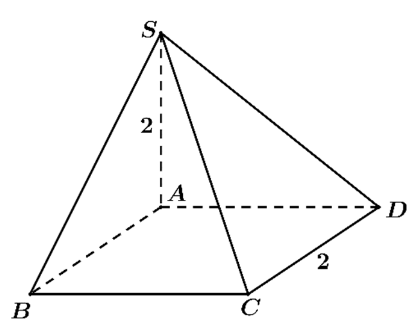
Xét tam giác $AA'I$ vuông tại A có $AA' = 30$, $AI = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = 4\sqrt{5}$.

Khi đó $\tan \widehat{AIA'} = \dfrac{AA'}{AI} = \dfrac{30}{4\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \widehat{AIA'} \approx 73,4°$.

Câu 4. (Sở Sơn La 2025) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA \perp \left(ABCD\right)$ và

$SA = 2$. Tính số đo của góc nhị diện $\left[S, CD, A\right]$.

Lời giải



Đáp án: $45°$.

Vì $SA \perp \left(ABCD\right)$ nên $SA \perp CD$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AD \perp CD$

Ta có: $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp \left(SAD\right)$

Mà $SD \subset \left(SAD\right)$, suy ra $CD \perp SD$

Ta có: $\begin{cases} SD \perp CD \\ AD \perp CD \end{cases}$

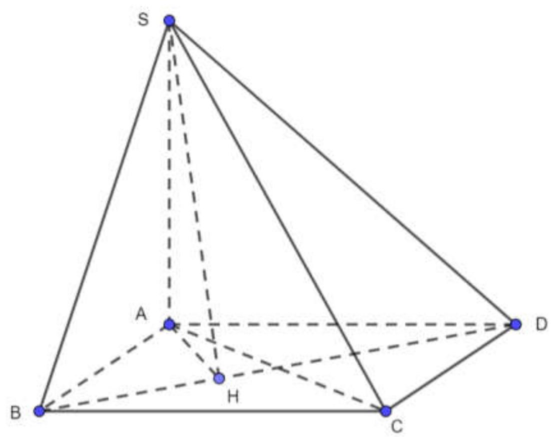
Suy ra $\widehat{SDA}$ là một góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $\left[S, CD, A\right]$.

Tam giác SDA vuông cân tại A, suy ra $\widehat{SDA} = 45^\circ$.

Do đó $\left[S, CD, A\right] = 45^\circ$.

Câu 5. (Sở Lào Cai 2025) Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1, AD = \sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Số đo góc phẳng nhị diện $\left[S; BD; C\right]$ bằng a^0. Tìm giá trị a?

Đáp án: 135



Để tính góc phẳng nhị diện $\left[S; BD; C\right]$, ta đi tính góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (SBD).

Trong $(ABCD)$ kẻ AH vuông góc với BD tại H. Ta có

$\begin{cases} BD \perp AH \\ BD \perp AS \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAH) \Rightarrow BD \perp SH$

Do vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (SBD) là góc $\widehat{SHA}$.

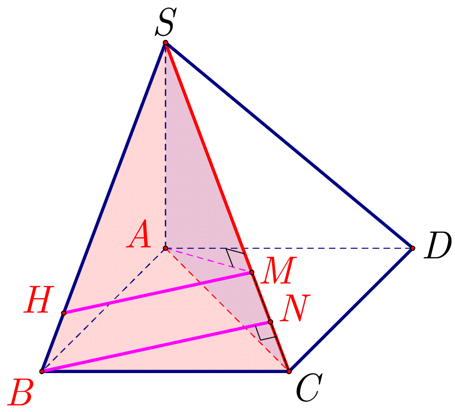
Xét tam giác SHA vuông tại A và có $SA = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $AH = \frac{AB.AD}{BD} = \frac{1.\sqrt{3}}{\sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác SHA vuông cân tại A, suy ra $\widehat{SHA} = 45^0$.

Khi đó $\left[S; BD; C\right] = 180^0 - 45^0 = 135^0$

Câu 6. (Sở Thái Nguyên 2025) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = 4a$. Số đo góc nhị diện $[B.SC, A]$ bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Đáp án: 50,8.



Ta có: $BC \perp AB, BC \perp SA\left(SA \perp (ABCD)\right) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.

$SA = 4a, AB = 2a, AC = 2\sqrt{2}a, SC = 2\sqrt{6}a, SB = 2\sqrt{5}a.$

Xét tam giác vuông SAC có đường cao AM :

$$AC^2 = SC.CM \Leftrightarrow 2AB^2 = \sqrt{SA^2 + AC^2}.CM \Leftrightarrow 8a^2 = 2\sqrt{6}.a.CM \Leftrightarrow CM = \frac{2a\sqrt{6}}{3} = \frac{SC}{3}.$$

$$AM = \frac{SA.AC}{SC} = \frac{4a.2a\sqrt{2}}{2a\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}a.$$

Xét tam giác vuông SBC có đường cao BN :

$$BC^2 = SC.CN \Leftrightarrow 4a^2 = 2\sqrt{6}.a.CN \Leftrightarrow CN = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{SC}{6}.$$

$$BN = \frac{SB.BC}{SC} = \frac{\sqrt{SA^2 + AB^2}.BC}{SC} = \frac{\sqrt{16a^2 + 4a^2}.2a}{2a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

$$\frac{MH}{BN} = \frac{SM}{SN} = \frac{SC - \frac{SC}{3}}{SC - \frac{SC}{6}} = \frac{4}{5} \Rightarrow MH = \frac{4}{5}BN = \frac{4}{5}.\frac{\sqrt{30}}{3} = \frac{4\sqrt{30}}{15}.$$

(với $MH /\!/ BN, H \in SB$)

Suy ra $[B, SC, A] = \widehat{AMH}$

Xét tam giác SBN có: $\frac{SH}{SB} = \frac{SM}{SN} \Leftrightarrow SH = \frac{SM.SB}{SN} = \frac{4}{5}.2\sqrt{5}a = \frac{8\sqrt{5}}{5}a.$

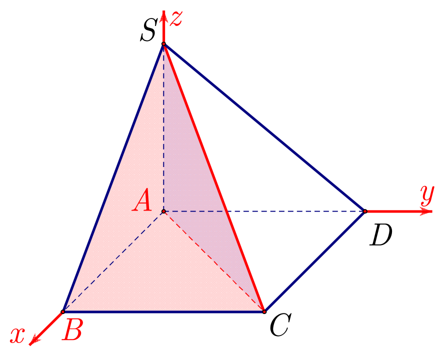
Ta có:

$$AH^2 = SA^2 + SH^2 - 2SA.SH.\cos\widehat{ASH} = SA^2 + SH^2 - 2.SA.SH.\frac{SA}{SB}$$

$$= 16a^2 + \frac{64}{5}a^2 - 2.\frac{8\sqrt{5}}{5}.\frac{16}{2\sqrt{5}} = \frac{16}{5}a^2 \Rightarrow AH = \frac{4\sqrt{5}}{5}a.$$

$$\cos\widehat{AMH} = \frac{MA^2 + MH^2 - AH^2}{2MA.MH} = \frac{\frac{16}{3}a^2 + \frac{32}{15}a^2 - \frac{16}{5}a^2}{2.\frac{4\sqrt{3}}{3}.a.\frac{4\sqrt{30}}{15}a} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{AMH} \approx 50,8°.$$

Cách 2:



Chọn hệ trục tọa độ thỏa

$O\equiv A(0;0;0), B\in Ox\Rightarrow B(2;0;0), D\in Oy\Rightarrow D(0;2;0), S\in Oz\Rightarrow S(0;0;4)$. Suy ra $C(2;2;0)$.

Gọi $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng $(SAC),(SBC)$. Khi đó:

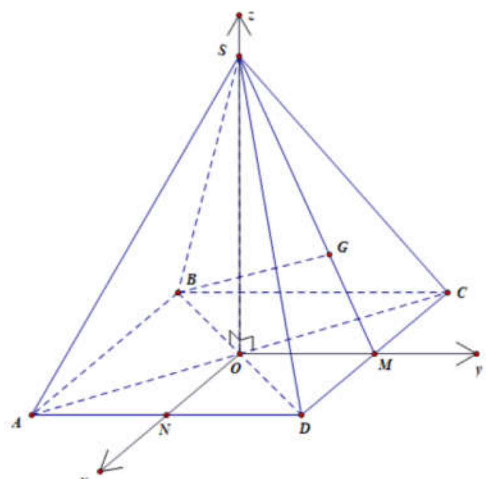
$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}_1=\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AS}\right]=8(1;-1;0)\\ \vec{n}_2=\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BC}\right]=-4(2;0;1)\end{array}\right\}\Rightarrow\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\frac{\sqrt{10}}{5}\Rightarrow(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\approx 50,8°.$$

Suy ra $[B,SC,A]\approx 50,8°$.

Câu 7. (Cụm Ninh Giang - Tứ Kỳ - Gia Lộc 2025) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Tính cosin góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ



Khi đó ta có: $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$, $C\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $D\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

Theo giả thiết: $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{\sqrt{6}}{6}\Rightarrow h=SO=\frac{\sqrt{6}}{2}$. Suy ra $S\left(0;0;\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

G là trọng tâm tam giác SCD nên $G\left(0;\frac{1}{3};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{SA}=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BG}=\left(\frac{1}{2};\frac{5}{6};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

Vậy

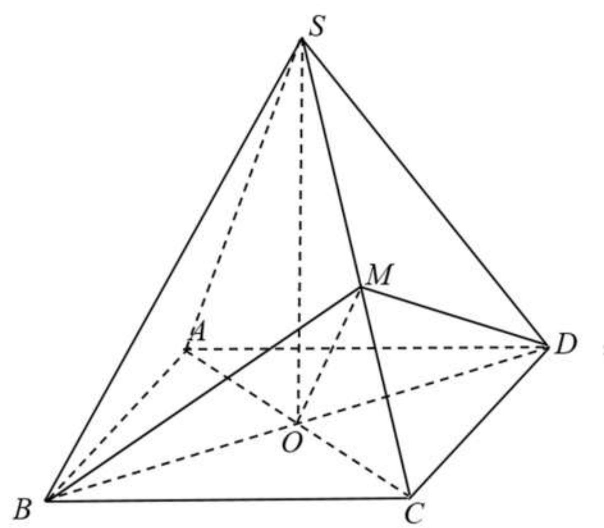
$$\cos(SA,BG)=\left|\cos\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BG}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BG}\right|}{\left|\overrightarrow{SA}\right|\left|\overrightarrow{BG}\right|}=\frac{\left|\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{6}}{2}.\frac{\sqrt{6}}{6}\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}.\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}}$$

$=\frac{\sqrt{5}}{5}\simeq 0,45$.

Câu 8. (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi M là trung điểm của SC. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

Lời giải

Đáp án: 45.



Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABCD)$.

Ta có $(MBD)\cap(ABCD)=BD$ và $(SAC)\perp BD$ nên $((MBD);(ABCD))=(MO;AC)=\varphi$.

Mặt khác $MO\,||\,SA$ nên $\varphi=\widehat{SAC}$.

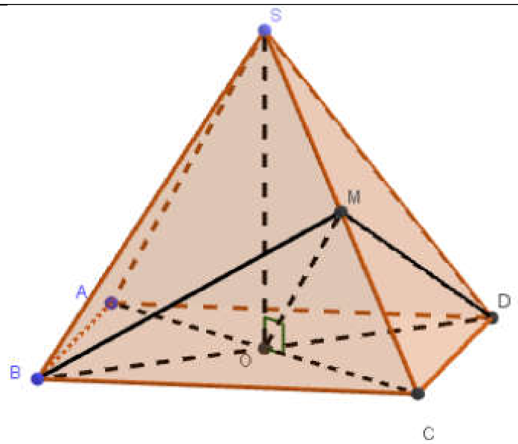
Xét tam giác SAO vuông tại O có $\cos\varphi=\frac{AO}{SA}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=45^0$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ bằng 45^0.

Câu 9. (THPT Diễn Châu 5 - Nghệ An 2025) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính số đo góc nhị diện $[A;BD;M]$ (*tính theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng đơn vị*).

Lời giải

Đáp án 45.



Ta có: $\Delta SBC = \Delta SDC$ (đều cạnh a), BM, DM là hai đường trung tuyến ứng với cạnh SC. Do đó: $BM = DM$.

Suy ra: ΔBMD cân tại M.

Mà O là trung điểm BD nên $MO \perp BD$ tại O.

Ta cũng có: $AC \perp BD$ tại O.

Do đó: góc giữa hai mặt phẳng (BMD) và $(ABCD) =$ góc giữa OM và $OC = \widehat{MOC}$.

Ta lại có: $SO \perp (ABCD)$ nên ΔSOC vuông tại O.

Mặt khác: $OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó, tam giác ΔSOC vuông cân tại O.

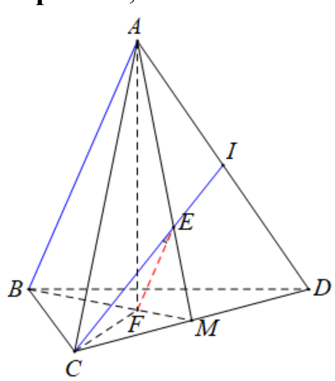
Nên đường trung tuyến OM cũng là đường phân giác.

Do đó: $\widehat{MOC} = 45^\circ$.

Câu 10. **(THPT Kinh Môn - Hải Dương 2025)** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và CI, với I là trung điểm của AD (làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

Đáp án: $0,3$.



Gọi M là trung điểm của CD.

Gọi E và F lần lượt là trọng tâm tam giác ACD và BCD.

Ta có $CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; CE = \dfrac{2}{3}CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; Tương tự $CF = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét ΔAMB có $\dfrac{ME}{MA} = \dfrac{MF}{MB} = \dfrac{1}{3}$.

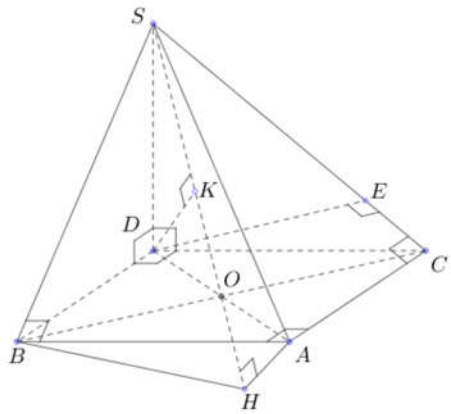
Suy ra $EF // AB \Rightarrow \widehat{(AB, CI)} = \widehat{(EF, CE)} = \widehat{CEF}$ (Do ΔCEF cân tại C).

Trong ΔCEF có $\cos\widehat{CEF} = \dfrac{EC^2 + EF^2 - CF^2}{2 \cdot EC \cdot EF} = \dfrac{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{9} - \dfrac{a^2}{3}}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{a}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \approx 0,3$.

Câu 11. **(THPT Triệu Sơn 1-Thanh Hóa 2025)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = AC = a$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90°$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính $\cos[A, SB, C]$ làm tròn đến hàng phần trăm.

Lời giải

Đáp án: $0,76$.



+) Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow SD \perp (ABC)$

Ta có $SD \perp AB, AB \perp AB \Rightarrow AB \perp DB$

Tương tự $SD \perp AC, SC \perp AC \Rightarrow AC \perp DC$

Suy ra $ABDC$ là hình chữ nhật, mặt khác $AB = AC = a \Rightarrow ABDC$ là hình vuông cạnh a.

+) Trong tam giác SDC, kẻ $DE \perp SC$

Ta có $AC \perp (SDC) \Rightarrow AC \perp DE, SC \perp DE \Rightarrow DE \perp (SAC) \Rightarrow d(D,(SAC)) = DE$

Lại có $BD // AC, AC \subset (SAC) \Rightarrow BD // (SAC)$

$\Rightarrow d(B,(SAC)) = d(D,(SAC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = DE$.

+) Tam giác SDC vuông tại D, có $DE \perp SC$ nên $\dfrac{1}{DE^2} = \dfrac{1}{DC^2} + \dfrac{1}{SD^2}$

$$\Rightarrow SD = \frac{DC.DE}{\sqrt{DC^2 - DE^2}} = \frac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \sqrt{3}a.$$

+) Gọi $O = AC \cap BD$, trong (SDO) kẻ $DK \perp SO$

Ta có $BC \perp AD, BC \perp SD \Rightarrow BC \perp (SDO), DK \subset (SDO) \Rightarrow BC \perp DK$

$\Rightarrow DK \perp (SBC) \Rightarrow d(D,(SBC)) = DK = \dfrac{DO.DS}{\sqrt{DO^2 + DS^2}}$, với $OD = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow DK = \dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

+) Trong mặt phẳng (SAD), kẻ $AH//DK\,(H\in SO)\Rightarrow AH\perp(SBC)$ và $AH=DK=\dfrac{\sqrt{21}a}{7}\Rightarrow AH\perp SB, AB\perp SB\Rightarrow SB\perp BH$

$\Rightarrow \widehat{ABH}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A,SB,C]$.

Tam giác AHB vuông tại $H\Rightarrow BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\dfrac{2\sqrt{7}a}{7}$.

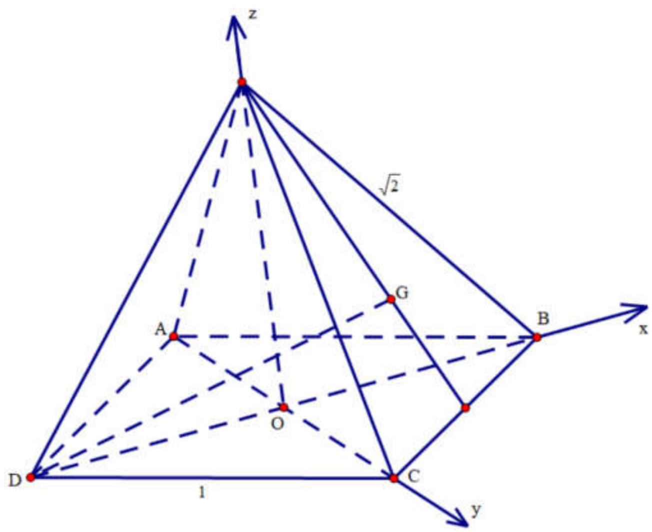
Suy ra $\cos\widehat{ABH}=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\approx 0,76$.

Vậy $\cos[A,SB,C]=0,76$.

Câu 12. **(THPT Cẩm Xuyên - Hà Tĩnh 2025)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Tính cosin góc giữa đường thẳng DG với đường thẳng SA (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Lời giải

Đáp án: $0,48$.



Chọn $a=1$ và chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho điểm O là gốc toạ độ, các điểm B,C,S lần lượt thuộc các tia Ox,Oy,Oz (như hình vẽ).

Khi đó ta có: $OA=OB=OC=OD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $SO^2=SA^2-OA^2=2-\dfrac{2}{4}\Rightarrow SO=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Nên: $S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right);A\left(0;-\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right);D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};0;0\right);B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};0;0\right);C\left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right)$

Suy ra: $G\left(\dfrac{\sqrt{2}}{6};\dfrac{\sqrt{2}}{6};\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$

Từ đó ta có: $\overrightarrow{DG}\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{6};\dfrac{\sqrt{2}}{6};\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$; $\overrightarrow{SA}\left(0;-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

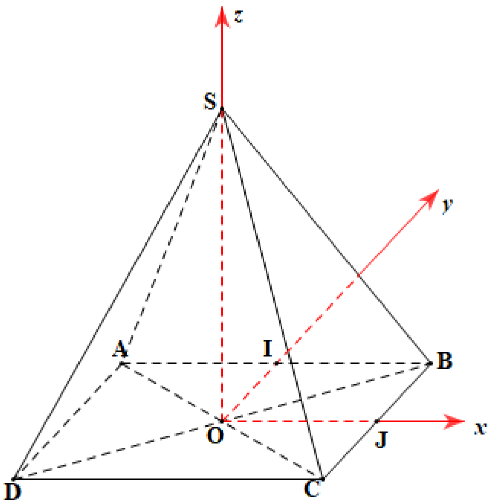
$\Rightarrow \vec{u}\left(4;1;\sqrt{3}\right);\vec{v}\left(0;1;\sqrt{3}\right)$ lần lượt cùng phương với $\overrightarrow{DG};\overrightarrow{SA}$.

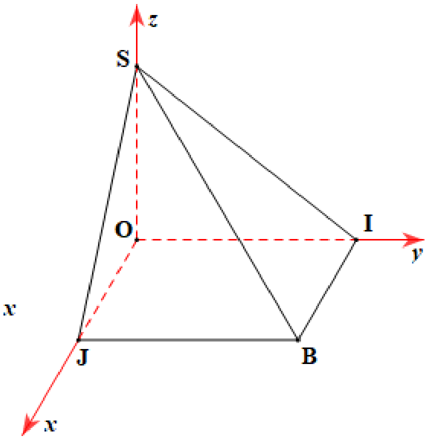
Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng DG và SA.

Khi đó: $\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right|=\dfrac{\left|4.0+1.1+\sqrt{3}.\sqrt{3}\right|}{\sqrt{20}.\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\approx 0,48$.

Câu 13. **(Cụm trường Nghệ An 2025)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=6,\ AD=10$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm O của đáy $ABCD$ và chiều cao của hình chóp là $\sqrt{5}$. Tính góc nhị diện $[A,SB,C]$ (làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị đo bằng độ).

Lời giải





Đáp án: 43°.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC. Khi đó $OIBJ$ là hình chữ nhật.

Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ trên với $O(0;0;0)$, $I(0;5;0)$, $J(3;0;0)$, $B(3;5;0)$, $S(0;0;\sqrt{5})$.

Ta có $[A,SB,C]=[I,SB,J]$.

$\overrightarrow{SI}=(0;5;-\sqrt{5})$, $\overrightarrow{SB}=(3;5;-\sqrt{5})$, $\overrightarrow{SJ}=(3;0;-\sqrt{5})$.

Mặt phẳng (SIB) có VTPT $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{SI},\overrightarrow{SB}\right]=(0;-3\sqrt{5};-15)$.

Mặt phẳng (SJB) có VTPT $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{SJ},\overrightarrow{SB}\right]=(4\sqrt{5};0;12)$.

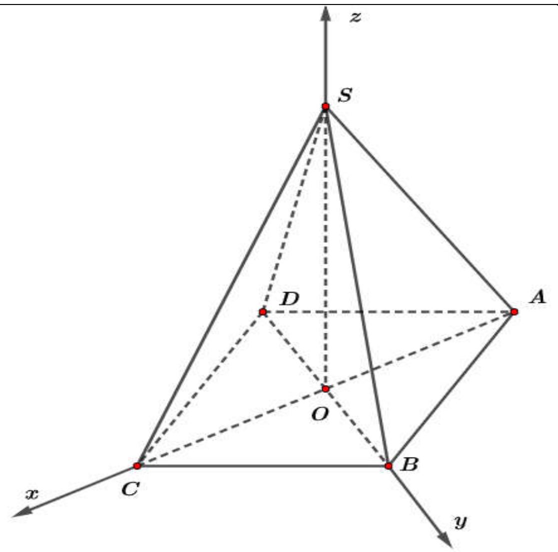
$$\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)=\frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{0.4\sqrt{5}-3\sqrt{5}.0-15.12}{\sqrt{0^2+\left(-3\sqrt{5}\right)^2+(-15)^2}.\sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2+0^2+12^2}}=\frac{-\sqrt{105}}{14}.$$

Vậy $[A,SB,C]\approx 137^\circ$.

Câu 14. **(Cụm trường Hưng Yên 2025)** Cho hình chop đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên $SA=2a$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (SAC) bằng $\sqrt{\frac{b}{c}}$ với phân số $\frac{b}{c}$ tối giản, $b>0$, $c>0$. Tính $T=b+2c$.

Lời giải

Đáp án: 17.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC = AB.\sqrt{2} = 2a \Rightarrow OA = OC = a$

Xét tam giác vuông SAO ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = a\sqrt{3}$.

Khi đó $C(a;0;0)$; $A(-a;0;0)$; $S(0;0;a\sqrt{3})$; $D(0;-a;0)$ ta có:

$\overrightarrow{CA} = (-2a;0;0)$; $\overrightarrow{CS} = (-a;0;a\sqrt{3})$; $\overrightarrow{CD} = (-a;-a;0)$

VTPT của mặt phẳng (SCA) là: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{CS}, \overrightarrow{CA}\right] = (0;2\sqrt{3}a^2;0)$

VTPT của mặt phẳng (SCD) là: $\vec{m} = \left[\overrightarrow{CS}, \overrightarrow{CD}\right] = (\sqrt{3}a^2;-\sqrt{3}a^2;a^2)$

Đặt $\varphi = ((SCA);(SCD))$, ta có:

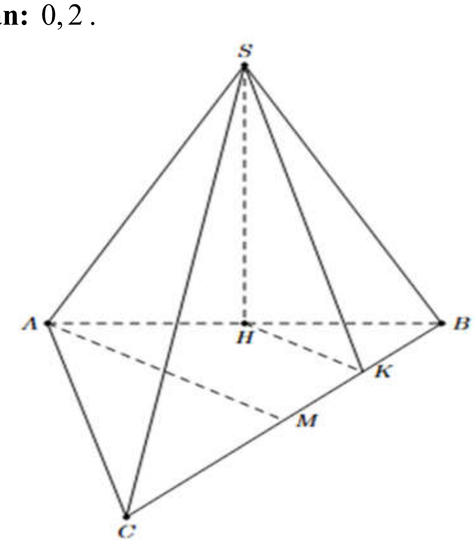
$$\cos\varphi = \left|\cos(\vec{n},\vec{m})\right| = \frac{|6|}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2}.\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$T = 3 + 2.7 = 17$.

Câu 15. **(Sở Bắc Giang 2025)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC, SAB là các tam giác đều và mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy. Gọi α là số đo của góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$. Tính $\cos^2\alpha$.

Lời giải

Đáp án: $0,2$.



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, BC. Khi đó $SH \perp (ABC)$.

Kẻ $HK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHM) \Rightarrow BC \perp SM$.

Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S, BC, A]$ là góc SKH.

Vì ΔSKH vuông tại H nên $\tan\alpha = \frac{SH}{HK}$.

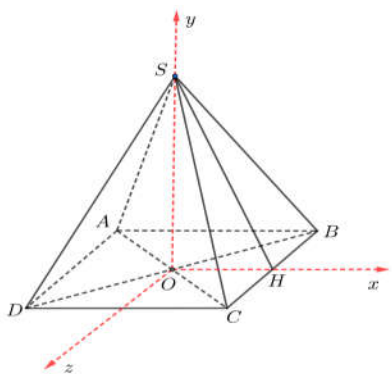
Ta có $HK = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}\cdot\frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{4}; SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $\tan\alpha = \frac{SH}{HK} = 2$.

Do đó $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{5} = 0,2$

Câu 16. **(Sở Phú Thọ 2025)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD. Biết $SO = AB = 2$. Giá trị sin của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng bao nhiêu? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*)

Lời giải

Đáp án: $0,73$.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, tâm O trùng với gốc tọa độ, ta có $SO = AB = 2$
$\Rightarrow AB = CD = BC = AD = 2$

Khi đó, ba điểm $S(0;2;0), C(1;0;1), H(1;0;0)$ cùng thuộc mặt phẳng (SBC)

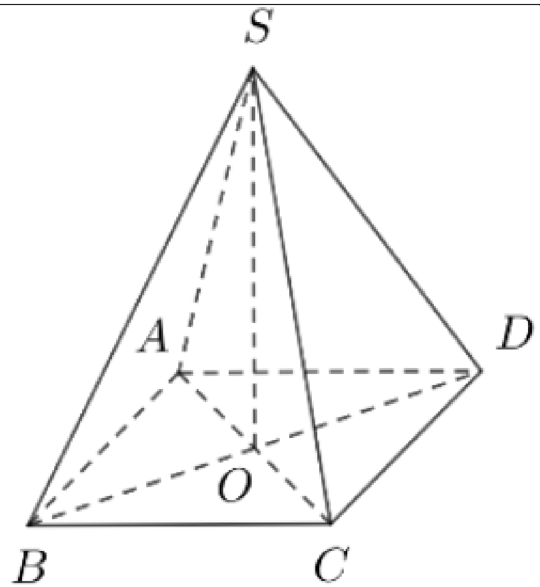
Điểm $A(-1;0;-1)$

Khi đó $\overrightarrow{SC} = (1;-2;-1)$; $\overrightarrow{CH} = (0;0;-1) \Rightarrow \vec{n}_{(SBC)} = \left[\overrightarrow{SC};\overrightarrow{CH}\right] = (2;1;0)$

Ta có $\sin(SA;(SBC)) = \frac{\left|\overrightarrow{SA}.\vec{n}_{(SBC)}\right|}{\left|\overrightarrow{SA}\right|\left|\vec{n}_{(SBC)}\right|} = \frac{|-2-2|}{\sqrt{4+1}.\sqrt{1+4+1}} = \frac{4}{\sqrt{30}} \approx 0,73$.

Câu 17. **(Cụm Chương Mỹ - Thanh Oai 2025)** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, hai đường chéo $AC = 2a, BD = 2a\sqrt{3}, SO \perp (ABCD)$; cạnh bên $SD = 2a$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD). Tính $\sin\varphi$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải



Ta có: $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$

Khi đó $(SB,(SCD)) = (SB, AB) = \angle SBA$

Ta có:

$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a$

$SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a$

$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a$

Lại có: $\cos\angle SBA = \dfrac{SB^2 + AB^2 - SA^2}{2AB.SB} = \dfrac{4a^2 + 4a^2 - 2a^2}{2.2a.2a} = \dfrac{3}{4}$

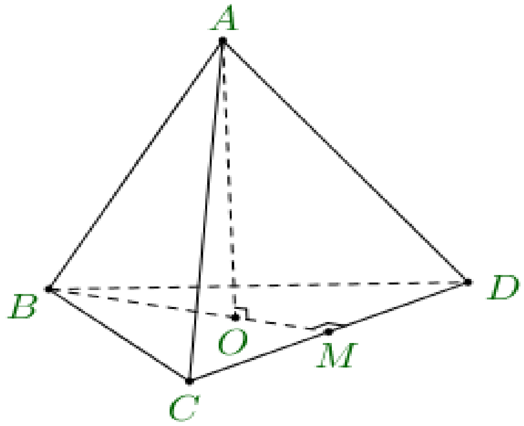
$\Rightarrow \sin\angle SBA = \sqrt{1 - \cos^2\angle SBA} = \sqrt{1 - \dfrac{9}{16}} = \dfrac{\sqrt{7}}{4} \approx 0,66$

Đáp án: 0,663

Câu 18. **(Sở Thái Bình 2025) Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a. Tính côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD)(làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2).**

Lời giải:

Đáp số: 0,58



Ta có $AB = a, a > 0$. Gọi O là tâm của tam giác đều BCD, gọi M là trung điểm của CD.

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên $AO \perp (BCD)$.

$\Rightarrow$ Hình chiếu của AB lên mp(BCD) là $OB \Rightarrow$ Góc giữa AB và mp(BCD) là góc $\widehat{ABO}$.

Ta có $AB = a, BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, BO = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét ΔABO vuông tại O: $\cos\widehat{ABO} = \dfrac{OB}{AB} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$.