IA1 1 NỀN TẢNG VỀ TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

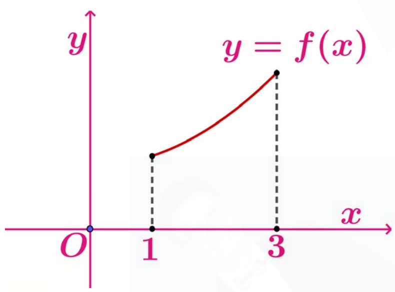
A. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

✪ Định nghĩa

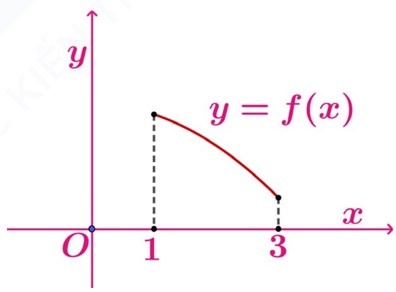
Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K.

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu với mọi x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu với mọi x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị của nó đi lên từ trái sang phải (hình 1)
Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị của nó đi xuống từ trái sang phải (hình 2)



Hình 1



Hình 2

✪ Mối quan hệ với đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K.

Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K.

Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K.

Chú ý: Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà chưa cho khoảng K, ta hiểu xét tính đơn điệu của hàm số đó trên tập xác định của nó.

Các bước xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$:

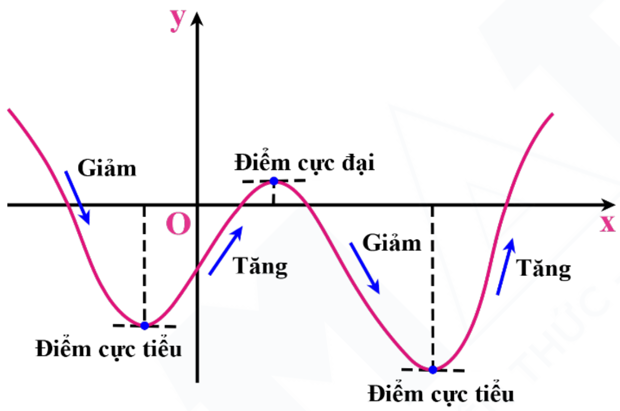
- *Bước 1*. Tìm tập xác định D của hàm số.
- *Bước 2*. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc D mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại đạo hàm.

- *Bước 3.* Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ theo thứ tự tăng dần, xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
- *Bước 4.* Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Chú ý:

a) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K, f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại mội số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K.
b) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K, $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên K.

B. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ



✪ Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và x khác x_0 thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và x khác x_0 thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

Chú ý

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

✪ Định lý

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	

C. BÀI TẬP

1. Lập bảng biến thiên của tất cả các hàm số sau, từ đó chỉ ra khoảng đồng biến, nghịch biến, các điểm cực trị

a) $y = x^2 + 2x + 1$.
b) $y = x^3$.
c) $y = x^3 - 3x$.
d) $y = 1 - 11x$.
e) $y = x^4 + 2x^2 + 1$.
f) $y = x^4 - 2x^2 - 3$.
g) $y = \ln x$.
h) $y = \ln(2 - x) - \frac{1}{x}$.
i) $y = x - \frac{1}{x}$.
j) $y = x + \frac{1}{x}$.
k) $y = \frac{x}{2x-3}$.
l) $y = \frac{x}{1-x}$.
m) $y = \frac{x^2-8x+10}{x-2}$.
n) $y = \sqrt{4 - x^2}$
o) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$.
p) $y = |x|$.
q) $y = x - |x|$.
r) $y = 2x + |x|$.
s) $y = x^2 + 2|x|$.
t) $y = x^2 - 2|x|$.
u) $y = |x|(x + 2)$.
v) $y = |x| + |x - 2|$.
w) $y = x - \sin 2x + 2$.
x) $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$.
y) $y = \sqrt{|x|}$.

2. Xác định các hệ số a, b, c sao cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1; 0)$.

3. Thể tích V của 1 kg nước (tính bằng cm^3) ở nhiệt độ T (đơn vị $°C$) khi T thay đổi từ $0°\text{C}$ đến $30°\text{C}$ được cho xấp xỉ bởi công thức:

$$V = 999{,}87 - 0{,}06426T + 0{,}0085043T^2 - 0{,}0000769T^3$$

(Nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning 8th edition, p.284) Tìm nhiệt độ $T_0 \in (0; 30)$ để kể từ nhiệt độ T_0 trở lên thì thể tích V tăng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

4. Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}04x^2 + 0{,}25x + 0{,}44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến 2017 $(0 \le x \le 7)$.

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

b) Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

5. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \ge 0$. Khi đó $x'(t)$ gọi là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc của chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a) Tìm các hàm $v(t)$ và $a(t)$.

b) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

6. Một vật chuyển động dọc theo một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử vị trí của vật x (mét) từ thời điểm $t = 0$ giây đến thời điểm $t = 5$ giây được cho bởi công thức $x(t) = t^3 - 7t^2 + 11t + 5$.

a) Xác định vận tốc v của vật. Xác định khoảng thời gian vật chuyển động sang phải và khoảng thời gian vật chuyển động sang trái.

b) Tìm tốc độ của vật và thời điểm vật dừng lại. Tính tốc độ cực đại của vật trong khoảng thời gian từ $t = 1$ giây đến $t = 4$ giây.

c) Xác định gia tốc a của vật. Tìm khoảng thời gian vật tăng tốc và khoảng thời gian vật giảm tốc.

7. Một công ty tiến hành khai thác 17 giếng dầu trong khu vực được chỉ định. Trung bình mỗi giếng dầu chiết xuất được 245 thùng dầu mỗi ngày. Công ty có thể khai thác nhiều hơn 17 giếng dầu nhưng cứ khai thác thêm một giếng thì lượng dầu mỗi giếng chiết xuất được hằng ngày sẽ giảm 9 thùng. Để giám đốc công ty có thể quyết định số giếng cần thêm cho phù hợp với tài chính, hãy chỉ ra số giếng công ty có thể khai thác thêm để sản lượng dầu chiết xuất tăng lên.

8. Một nhà phân phối đồ chơi trẻ em xác định hàm chi phí $C(x)$ và hàm doanh thu $R(x)$ (đều tính bằng trăm nghìn đồng) cho một loại đồ chơi như sau:

$$C(x) = 1{,}2x - 0{,}0001x^2, 0 \le x \le 6\,000,$$
$$R(x) = 3{,}6x - 0{,}0005x^2, 0 \le x \le 6\,000,$$

trong đó x là số lượng đồ chơi loại đó được sản xuất và bán ra. Xác định khoảng của x để hàm lợi nhuận $P(x) = R(x) - C(x)$ đồng biến trên khoảng đó. Giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả nhận được.

9. Hàm chi phí và hàm doanh thu (đều tính bằng đồng) của một loại sản phẩm lần lượt là

$$C(x) = 25{,}5x + 1000 \text{ và } R(x) = 75{,}5x,$$

trong đó x là số đơn vị sản phẩm đó được sản xuất và bán ra.

a) Tìm hàm lợi nhuận trung bình

$$\overline{P}(x) = \frac{R(x) - C(x)}{x}.$$

b) Tìm lợi nhuận trung bình khi mức sản xuất x lần lượt là $100, 500$ và $1\,000$ đơn vị sản phẩm.

c) Xét tính đơn điệu của hàm lợi nhuận trung bình $\overline{P}(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ và tính giới hạn của hàm số này khi $x \to +\infty$. Giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả nhận được.

10. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$$

($f(t)$ được tính bằng nghìn người).

a) Tính số dân của thị trấn vào năm 1980 và năm 1995.

b) Xem f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Tìm f' và xét chiều biến thiên của hàm số f trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

c) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm).

- Tính tốc độ tăng dân số vào năm 1990 và năm 2008 của thị trấn.
- Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số xấp xỉ 0,125 nghìn người/năm?

11. Một con lắc lò xo, gồm một vật nặng có khối lượng 1 kg được gắn vào một lò xo cố định một đầu, dao động điều hòa với biên độ $A = 0{,}24$ m và chu kì $T = 4$ giây. Vị trí x (mét) của vật tại thời điểm t được cho bởi $x(t) = A.\cos(\omega t)$, trong đó $\omega = \frac{2\pi}{T}$ là tần số góc và thời gian t tính bằng giây.

a) Tìm vị trí của vật tại thời điểm t và tại thời điểm $t = 0{,}5$ giây.

b) Tìm vận tốc v của vật tại thời điểm t giây và tìm vận tốc của vật khi $t = 0{,}5$ giây.

c) Tìm gia tốc a của vật.

d) Sử dụng định luật thứ hai của Newton $F = ma$, tìm độ lớn và hướng của lực tác dụng lên vật khi $t = 0{,}5$ giây.

e) Tìm thời gian tối thiểu để vật chuyển động từ vị trí ban đầu đến vị trí $x = -0{,}12$ m, tìm vận tốc của vật khi $x = -0{,}12$ m.