

TEMA 3: Aproximació i interpolació

Problema 15 Donada la taula de valors següent:

x_k	3.2	2.7	1
$f(x_k)$	22.0	17.8	14.2

- (a) Trobeu el polinomi interpolador per aquests valors usant el mètode de les diferències dividides i fent els càlculs amb tres decimals.
- (b) Trobeu el polinomi interpolador si a la taula anterior afegim la dada $f(4.8) = 38.3$.

Problema 16 Calculeu $\ln(0.6)$ de les maneres següents:

- (a) Desenvolupant $f(x) = \ln(x)$ per Taylor al voltant de $x_0 = 0.5$ i truncant després de la tercera derivada.
- (b) Utilitzant el polinomi interpolador construït a partir de la taula següent:

x	0.4	0.5	0.7	0.8
$f(x)$	-0.916291	-0.693147	-0.356675	-0.223144

En cada cas, fiteu els errors comesos.

Problema 17 Volem construir una taula de valors de la funció $f(x) = e^{-x} - x$ en punts equidistants dins l'interval $[0, 1]$, $x_k = k/m$ per a $k = 0, 1, \dots, m$. Pretenem usar aquesta taula per aproximar la funció f mitjançant interpolació lineal: donat $z \in [0, 1]$, aproximarem $f(z)$ per $P_1(z)$, on P_1 és el polinomi interpolador (de grau $n = 1$) de f en les dues abscisses de la taula més properes a z .

Trobeu el mínim valor de m que ens assegura que l'error d'interpolació sigui menor que 10^{-8} per a qualsevol $z \in [0, 1]$.

(Indicació: La distància entre dues abscisses consecutives de la taula és $1/m$.)

Problema 18 Considerem una funció f de classe \mathcal{C}^1 a l'interval $[a, b]$ amb $f'(x) \neq 0$, i suposem que existeix $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Per trobar-ne una aproximació triem n punts diferents $x_0 < \dots < x_{n-1}$ dins $[a, b]$ i definim $y_k = f(x_k)$.

- (a) Justifiqueu que si $Q(y)$ és el polinomi interpolador de (y_k, x_k) per $k = 0, 1, \dots, n-1$, llavors $Q(0)$ aproxima c .
- (b) Tenint en compte l'apartat anterior, calculeu aproximadament la solució de l'equació $e^{-x} - x = 0$ a partir de la taula:

x	0.3	0.4	0.5	0.6
$e^{-x} - x$	0.441	0.270	0.107	-0.051

Problema 19 Utilitzant el mètode d'Hermite generalitzat, trobeu un polinomi de grau 4 que interpoli la taula:

x	0	1	2
$f(x)$	2	-4	44
$f'(x)$	-9	4	

Trobeu ara un polinomi de grau 5 que interpoli els valors anteriors i $f(3) = 2$.

Problema 20 Construïu l'spline cúbic natural per a la funció $f(x) = x \ln x$ en els nodes $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ i $x_3 = 2.5$. Useu-lo per aproximar $f(1.35)$ i $f(2.15)$, i compareu el resultat amb els valors exactes.