Introducció a la Computació Científica
Semestre Tardor 2014 - Prova parcial del 7 de novembre

Exercici 1 Respon a **dos dels tres** apartats següents:

(a) Considera el nombre n format amb les dues darreres xifres del DNI.

Treballant amb el format IEEE simple per a la representació de nombres en punt flotant, digues quin nombre representable exactament segueix al nombre $x = 2^n$.

(b) Considera el nombre a format amb les tres darreres xifres del teu DNI.

L'equació de segon grau $x^2 - 2ax + 1 = 0$ té dues solucions que es poden escriure així:

$$x_1 = a + \sqrt{a^2 - 1} \;, \quad x_2 = a - \sqrt{a^2 - 1} \;,$$

o bé així:

$$x_1 = \frac{1}{a - \sqrt{a^2 - 1}} \;, \quad x_2 = \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \;.$$

Calcula x_1 i x_2 amb ambdues fórmules i digues quina expressió és millor per calcular x_1 i quina és millor per calcular x_2, justificant la resposta.

(c) Considera el nombre $\bar{R}$ format per les quatre darreres xifres del teu DNI.

Troba una aproximació de l'àrea $A = \pi R^2$ d'una circumferència de radi R, si usem $\pi = 3.1416 \pm 0.00001$ i $R = \bar{R} \pm 0.5$ i una fita de l'error relatiu comès atenent a les fites indicades dels errors absoluts de π i de R. Escriu el resultat amb les xifres que creus que són correctes.

Idees per a la solució.

(a) El nombre $x = 2^n = 0.1_{2)} \cdot 2^{n+1}$ té com a següent nombre representable

$$x_s = 0.100000000000000000000001_{2)} \cdot 2^{n+1} = (\frac{1}{2} + 2^{-24}) \cdot 2^{n+1} = 2^n + 2^{n-23} \;.$$

(b) Les millors fórmules són les que eviten les cancel·lacions:

$$x_1 = a + \sqrt{a^2 - 1} \;, \quad x_2 = \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \;.$$

(c) Una aproximació de l'àrea és $\bar{A} = 3.1416\bar{R}^2$.

Una fita aproximada de l'error absolut comès ve donada per la fórmula de propagació de l'error en vàries variables:

$$\epsilon_a(A) \approx \bar{R}^2 \epsilon_a(\pi) + 2 \cdot 3.1416 \epsilon_a(R) = 0.00001\bar{R}^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 3.1416\bar{R} \;.$$

Una fita aproximada de l'error relatiu es pot trobar a partir de l'expressió anterior o directament a partir de la fita de l'error relatiu del producte (veure el Corol.lari 2 dels apunts de teoria en l'apartat de propagació de l'error en vàries variables):

$$\epsilon_r(A) \approx \epsilon_r(\pi) + 2\epsilon_r(R) = \frac{0.00001}{3.1416} + 2\frac{0.5}{\bar{R}} \;.$$

Exercici 2 El polinomi interpolador $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ de grau més petit o igual que 2 a la funció $f(x)$ en les abscisses x_k $(k = 0, 1, 2)$ es pot trobar resolent el sistema d'equacions lineal en els coeficients a_0, a_1, a_2:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & + & x_0 a_1 & + & x_0^2 a_2 & = & f(x_0) \\ a_0 & + & x_1 a_1 & + & x_1^2 a_2 & = & f(x_1) \\ a_0 & + & x_2 a_1 & + & x_2^2 a_2 & = & f(x_2) \end{array}$$

o bé, mitjançant el mètode de les diferències dividides.

Considera la darrera xifra N del teu DNI i la funció $f(x) = x^{N+3}$ corresponent en les abscisses $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$.

(a) Escriu el sistema d'equacions lineals associat en els coeficients, troba'n la solució pel mètode de Gauss i escriu el polinomi interpolador.

(b) Escriu les iteracions a realitzar pel mètode de Jacobi aplicat al sistema anterior i analitza la seva convergència.

(c) Troba el polinomi interpolador pel mètode de les diferències dividides de Newton i comprova si és idèntic a l'anterior.

Idees per a la solució.

(a) El sistema lineal resultant s'expressa en la matriu ampliada següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2^{N+3} \end{array}\right)$$

Aplicant el mètode de Gauss, es troben els sistemes lineals equivalents:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2^{N+3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2^{N+3} - 2 \end{array}\right)$$

La solució del sistema lineal triangular superior resultant es troba per substitució endarrera:

$$a_2 = 2^{N+2} - 1 \ , \quad a_1 = -(2^{N+2} - 2) \ , \quad a_0 = 0 \ .$$

El polinomi interpolador és doncs:

$$p_2(x) = (2^{N+2} - 1)x^2 - (2^{N+2} - 2)x \ ,$$

Per a $N = 0$: $p_2(x) = 3x^2 - 2x$.
Per a $N = 1$: $p_2(x) = 7x^2 - 6x$.
Per a $N = 2$: $p_2(x) = 15x^2 - 14x$.

(b) Les iteracions del mètode iteratiu s'escriuen matricialment així:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2^{N+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^{(k)} .$$

El polinomi característic de la matriu d'iteració és $p_3(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda$ i té totes les arrels amb mòdul més petit que 1. Per tant, el mètode iteratiu de Jacobi és convergent en la resolució del sistema lineal.

(c) La taula de diferències dividides associada a la interpolació de $f(x) = x^{N+3}$ en $0, 1, 2$ és:

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$
0	0		
		1	
1	1		$2^{N+2} - 1$
		$2^{N+3} - 1$	
2	2^{N+3}		

El polinomi interpolador és llavors:

$$p_2(x) = x + (2^{N+2} - 1)x(x-1) = (2^{N+2} - 1)x^2 - (2^{N+2} - 2)x \ ,$$

coincident amb el trobat en l'apartat (a).