

TEMA 4: Derivació i integració numèriques.

Problema 21 Els temps i les velocitats corresponents a un mòbil vénen donats per la taula:

| | | | | | | |
|-----|-----|--------|--------|--------|--------|--------|
| t | 0 | 60 | 120 | 180 | 240 | 300 |
| v | 0.0 | 0.0824 | 0.2747 | 0.6502 | 1.3851 | 3.2229 |

Calculeu valors aproximats de l'acceleració en els instants $t = 0$, $t = 120$ i $t = 300$.

Problema 22 Considereu la taula següent corresponent a la funció $f(x) = xe^x$:

| | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x | 1.00 | 1.01 | 1.02 | 1.03 | 1.04 | 1.05 | 1.06 |
| $f(x)$ | 2.7182 | 2.7730 | 2.8286 | 2.8850 | 2.9423 | 3.0005 | 3.0595 |

Aproximeu els valors de $f'(1.0)$, $f'(1.03)$ i $f'(1.06)$ emprant fórmules progressives, centrades i regressives de 3 punts.

Problema 23 La taula següent es construeix a partir de la funció $f(x) = xe^x$:

| | | | | | |
|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| x | 1.8 | 1.9 | 2.0 | 2.1 | 2.2 |
| $f(x)$ | 10.8894 | 12.7032 | 14.7781 | 17.1490 | 19.8550 |

Aproximeu $f'(2)$ utilitzant diferències progressives, amb dos i tres punts, i fiteu els errors absoluts de les aproximacions obtingudes. Contrasteu les aproximacions amb el valor exacte.

Problema 24 Sigui $f(x) = x^2 - e^x + e^{-x}$, es vol aproximar $f'(0.7)$.

- Treballant amb 8 decimals, useu la fórmula de les diferències finites centrada de primer ordre per aproximar $f'(0.7)$ amb $h = 10^{-i}$ per a $i = 1, 2, \dots, 5$.
- Si $F(h)$ és la fórmula anterior, es pot veure que

$$F(h) = f'(a) + a_2 h^2 + a_4 h^4 + \dots + a_{2n} h^{2n} + \dots$$

Tenint en compte això i els resultats de l'apartat a), useu el mètode d'extrapolació de Richardson per obtenir una millor aproximació de $f'(0.7)$. Doneu els errors absoluts comparant amb el valor exacte de la derivada.

Problema 25 Es disposa de la taula de la funció \sqrt{x} amb 5 xifres decimals correctes:

| | | | | | | | |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| x | 1.00 | 1.05 | 1.10 | 1.15 | 1.20 | 1.25 | 1.30 |
| \sqrt{x} | 1.00000 | 1.02470 | 1.04881 | 1.07238 | 1.09544 | 1.11803 | 1.14017 |

Utilitzeu aquesta informació per calcular $\int_{1.00}^{1.30} \sqrt{x} dx$ mitjançant les regles compostes dels trapezis i de Simpson. Constrasteu les aproximacions amb el valor exacte de la integral.

Problema 26 Mitjançant la fórmula composta dels trapezis $T(h)$ volem calcular una aproximació de la integral

$$\int_{1.8}^{3.4} e^x dx$$

amb cinc xifres decimals correctes. Quin valor d' h triaríeu?
