Prova A: Introducció a la Computació Científica

Grau d'Enginyeria Informàtica

4 de Novembre de 2013

Exercici: Contesteu als següents apartats:

(a) *(40 punts)* Volem calcular ξ^4 on $\xi = \left(19 - 6\sqrt{10}\right)$. Si considerem que $\sqrt{10} = 3.162$, argumenteu quina de les següents expressions equivalents dóna una millor aproximació de ξ^4?

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{\left(19 + 6\sqrt{10}\right)^4} \qquad \text{(b)} \quad \frac{1}{\left(721 + 228\sqrt{10}\right)^2}$$

(b) *(40 punts)* Fent servir Gauss i explicitant tot els passos, calculeu $A^{-1}b$ si

$$A = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.1 & 1.0 \\ 1.0 & -1.1 & 0.0 \\ 0.0 & -2.4 & 1.1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

(c) *(20 punts)* Sabem que el polinomi

$$p(x) = 3 - (x+1) + 2(x+1)x + \frac{1}{4}(x+1)x(x-1)$$

interpola les dades de la taula següent

x	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	5	b

Determineu el valor del paràmetre b.

Solució:

(a) Per veure quina de les dues expressions equivalents és millor numèricament per calcular ξ^4 *el que farem és considerar les funcions*

$$f_1(x) = (19 + 6x)^{-4} \quad \text{i} \quad f_2(x) = (721 + 228x)^{-2}$$

i avaluar la derivada en el punt $x = 3.162$. *Observem que* $f_j\left(\sqrt{10}\right) = \xi^4$, $j = 1, 2$ *per tant sabem que de les dues expressions la més precisa* *és la que ens dóna una derivada en valor absolut en el punt $x = 3.162$ més petita.*

$$f_1'(x) = -24(19+6x)^{-5} \to |f_1'(3.162)| = 3.0 \times 10^{-7}$$
$$f_2'(x) = -456(721+228x)^{-3} \to |f_2'(3.162)| = 1.5 \times 10^{-7}$$

Per tant la segona expressió és millor. De fet

$$f_1(3.162) = 4.810011461 \times 10^{-7}$$
$$f_2(3.162) = 4.809589718 \times 10^{-7}$$
$$\xi^4 = 4.80916743\ldots \times 10^{-7}$$

(b) Volem calcular x on $x = A^{-1}b$. Multiplicant a ambdoś costats per A resulta que $Ax = b$. Així que per trobar x hem de resoldre el sistema. Donem les matrius del procés de Gauss. La quarta columna consta dels termes independents b:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.1 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & -1.1 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & -2.4 & 1.1 & 1.0 \end{pmatrix} \to A_2 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.1 & 1.0 & 1.0 \\ 0.0 & -1.2 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.4 & 1.1 & 1.0 \end{pmatrix} \to$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.1 & 1.0 & 1.0 \\ 0.0 & -1.2 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 3.1 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Així tenim (donem 4 xifres) que $(x_1, x_2, x_3) = (0.7043, -0.2688, 0.3226)$.

(c) Es podia fer usant diferències dividides de Newton però de fet usant que coneixem el polinomi interpolador s'ha de complir que $P(2) = b$. Per tant

$$P(2) = \frac{27}{2} \to b = \frac{27}{2}$$

Prova B: Introducció a la Computació Científica

Grau d'Enginyeria Informàtica

4 de Novembre de 2013

Exercici: Contesteu als següents apartats:

(a) *(40 punts)* Volem calcular ξ^4 on $\xi = \left(29 - 13\sqrt{5}\right)$. Si considerem que $\sqrt{10} = 2.236$, argumenteu quina de les següents expressions equivalents dóna una millor aproximació de ξ^4?

$$\text{(a)} \quad \frac{16}{\left(29 + 13\sqrt{5}\right)^4} \qquad \text{(b)} \quad \frac{16}{\left(1686 + 754\sqrt{5}\right)^2}$$

(b) *(40 punts)* Fent servir Gauss i explicitant tot els passos, calculeu $A^{-1}b$ si

$$A = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.1 & 1.0 \\ 0.0 & -2.4 & 1.1 \\ 1.0 & -1.1 & 0.0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1.0 \\ 1.0 \\ -1.0 \end{pmatrix}$$

(c) *(20 punts)* Sabem que el polinomi

$$p(x) = 3 - (x+1) + 2(x+1)x - \frac{7}{3}(x+1)x(x-1)$$

interpola les dades de la taula següent

x	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	a	-2

Determineu el valor del paràmetre a.

Solució:

(a) Procés calcat a l'apartat (a) de la prova A.

(b) Procés calcat a l'apartat (b) de la prova A.

(c) Procés calcat a l'apartat (c) de la prova A ($p(1) = a \to a = 5$).

Prova C: Introducció a la Computació Científica

Grau d'Enginyeria Informt̀ica

4 de Novembre de 2013

Exercici: Contesteu als següents apartats:

(a) *(40 punts)* Tenim $x_1 = 2.332$ i $x_2 = 0.011$ dues aproximacions dels valors exactes corresponents. Considerem les expressions $y = x_1^2 + \cos(x_2)$ i $z = \sin(x_1) - \ln(x_2)$. Estimeu els errors absoluts propagats en el càlcul de y i z i digueu en quin dels dos casos aquest és major.

(b) *(40 punts)* Doneu la descomposició LU de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.1 & 1.0 \\ 0.0 & -2.4 & 1.1 \\ 1.0 & -1.1 & 0.0 \end{pmatrix}$$

i feu-la servir per resoldre el sistema $Ax = b$ on $b^T = (1.0, -1.0, 1.0)$.

(c) *(20 punts)* Sabem que el polinomi

$$p(x) = 1 + x + 3x(x-1) - 4x(x-1)(x-2)$$

interpola les dades de la taula següent

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	a	-2

Determineu el valor del paràmetre a.

Solució:

(a) Observem que $\bar{x_1} = 0.2332 \times 10^1$ *i* $\bar{x_2} = 0.11 \times 10^{-1}$. *Per tant podem concloure que*

$$\varepsilon_a(\bar{x_1}, x_1) = \varepsilon_a(\bar{x_2}, x_2) = 0.5 \times 10^{-3}$$

Per calcular $\varepsilon_a(\bar{y}, y)$, *usarem la fórmula de la propagació de l'error absolut*

$$\varepsilon_a(\bar{y}, y) = |\frac{\partial y}{\partial x_1}(\bar{x_1}, \bar{x_2})|\varepsilon_a(\bar{x_1}, x_1) + |\frac{\partial y}{\partial x_2}(\bar{x_1}, \bar{x_2})|\varepsilon_a(\bar{x_2}, x_2)$$

En aquest cas ens dóna:

$$\varepsilon_a(\bar{y}, y) = 2 \times 2.332 \times 0.5 \times 10^{-3} + 0.011 \times 0.5 \times 10^{-3} = 2.3 \times 10^{-3}$$

(noteu que $\sin(0.011) \approx 0.011$*).*

Per calcular $\varepsilon_a(\bar{z}, z)$*, usarem la fórmula de la propagació de l'error absolut*

$$\varepsilon_a(\bar{z}, z) = |\frac{\partial z}{\partial x_1}(\bar{x_1}, \bar{x_2})|\varepsilon_a(\bar{x_1}, x_1) + |\frac{\partial z}{\partial x_2}(\bar{x_1}, \bar{x_2})|\varepsilon_a(\bar{x_2}, x_2)$$

En aquest cas ens dóna:

$$\varepsilon_a(\bar{z}, z) = 0.69 \times 0.5 \times 10^{-3} + 90.9 \times 0.5 \times 10^{-3} = 0.046$$

(b) Fent el procés de Gauss s'obté

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.1 & 1.0 \\ 0.0 & -2.4 & 1.1 \\ 1.0 & -1.1 & 0.0 \end{pmatrix} \to A_2 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.1 & 1.0 \\ 0.0 & -2.4 & 1.1 \\ 0.0 & -1.2 & -1.0 \end{pmatrix} \to$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.1 & 1.0 \\ 0.0 & -2.4 & 1.1 \\ 0.0 & 0.0 & -1.55 \end{pmatrix}$$

on els multiplicadors són $m_{21} = 0$*,* $m_{31} = 1$ *i* $m_{32} = 0.5$*. Així doncs*

$$L = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.1 & 1.0 \\ 0.0 & -2.4 & 1.1 \\ 0.0 & 0.0 & -1.55 \end{pmatrix}$$

Per resoldre $Ax = b$ *amb* $b^T = (1.0, -1.0, 1.0)$ *primer resolem el sistema triangular* $Ly = b$ *que ens dóna* $(y_1, y_2, y_3) = (1, -1, 0.5)$*. Ara resolem* $Ux = y$ *i ens dóna* $(x_1, x_2, x_3) = (1.2957, 0.2688, -0.3226)$

(c) Procés calcat a l'apartat (c) de les altre proves (observeu però que a l'examen hi havia un error a la taula de forma que ara el valor en $x = 3$ *és* $y = -2$*. No afectava formalment al càlcul del paràmetre* $a = 9$*).*

Prova D: Introducció a la Computació Científica

Grau d'Enginyeria Informtica

4 de Novembre de 2013

Exercici: Contesteu als següents apartats:

(a) *(40 punts)* Tenim $x_1 = 2.332$ i $x_2 = -0.0099$ aproximacions dels valors exactes corresponents. Considerem les expressions

$$y = \exp(x_1) + \exp(2x_2) \quad \text{i} \quad z = x_1^3 x_2.$$

Estimeu els errors absoluts propagats en el càlcul de y i z i digueu en quin dels dos casos aquest és major.

(b) *(40 punts)* Doneu la descomposició LU de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.1 & 1.0 \\ 1.0 & -1.1 & 0.0 \\ 0.0 & -2.4 & 1.1 \end{pmatrix}$$

i feu-la servir per resoldre el sistema $Ax = b$ on $b^T = (0.0, -1.0, 0.0)$.

(c) *(20 punts)* Sabem que el polinomi

$$p(x) = 1 + x + 3x(x-1) - \frac{5}{2}x(x-1)(x-2)$$

interpola les dades de la taula següent

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	9	b

Determineu el valor del paràmetre b.

Solució:

(a) Procés calcat a l'apartat (a) de la prova C.

(b) Procés calcat a l'apartat (b) de la prova C.

(c) Procés calcat a l'apartat (c) de la prova C ($p(3) = b \to b = 7$).