Prova A: Introducció a la Computació Científica

GRAU D'ENGINYERIA INFORMÀTICA (16/12/13)

Exercici: Contesteu als següents apartats:

(a) Considereu la taula de valors (per a la funció $f(x) = xe^x$)

x	0.9	0.95	1	1.05	1.1
$f(x)$	2.2136	2.4564	2.7183	3.0005	3.3046

(a.1) *(35 punts)* Calculeu numèricament, usant la fórmula de derivació centrada, el valor de $f'(1)$ per $h = 0.1$ i $h = 0.1/2 = 0.05$.

(a.2) *(15 punts)* Useu els càlculs de l'apartat anterior i extrapolació de Richardson per trobar una millor aproximació de $f'(1)$.

(b) Responeu a cadascuna de les següents preguntes (són preguntes independents)

(b.1) *(20 punts)* Considereu la funció $f(x) = \ln(x) - e^x$. Justifiqueu que f té un únic màxim (que s'assoleix, òbviament, en un punt $x_M > 0$), i trobeu un interval (a, b) tal que $x_M \in (a, b)$ amb $|b - a| < 2$.

(b.2) *(30 punts)* Sabem que la funció $g(x) = \dfrac{3}{x} - 2e^x$ té un únic zero a l'interval $[0.5, 2]$. Si prenem $x_0 = 0.5$ i $x_1 = 2$ calculeu x_2 i x_3 fent servir el mètode de la secant (treballeu amb 5 xifres significatives).

Prova A: Introducció a la Computació Científica

GRAU D'ENGINYERIA INFORMÀTICA (16/12/13)

Exercici: Contesteu als següents apartats:

(a) Considereu la taula de valors (per a la funció $f(x) = xe^x$)

x	0.9	0.95	1	1.05	1.1
$f(x)$	2.2136	2.4564	2.7183	3.0005	3.3046

(a.1) *(35 punts)* Calculeu numèricament, usant la fórmula de derivació centrada, el valor de $f'(1)$ per $h = 0.1$ i $h = 0.1/2 = 0.05$.

(a.2) *(15 punts)* Useu els càlculs de l'apartat anterior i extrapolació de Richardson per trobar una millor aproximació de $f'(1)$.

(b) Responeu a cadascuna de les següents preguntes (són preguntes independents)

(b.1) *(20 punts)* Considereu la funció $f(x) = \ln(x) - e^x$. Justifiqueu que f té un únic màxim (que s'assoleix, òbviament, en un punt $x_M > 0$), i trobeu un interval (a, b) tal que $x_M \in (a, b)$ amb $|b - a| < 2$.

(b.2) *(30 punts)* Sabem que la funció $g(x) = \dfrac{3}{x} - 2e^x$ té un únic zero a l'interval $[0.5, 2]$. Si prenem $x_0 = 0.5$ i $x_1 = 2$ calculeu x_2 i x_3 fent servir el mètode de la secant (treballeu amb 5 xifres significatives).

Solucions:

(a.1) La fórmula de derivació numèrica centrada ens dóna:

$$f'(1) \approx F(h) := \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h}.$$

Substituint en la taula de valors, si avaluem en $h = 0.1$ obtenim $f'(1) = 5.455$ i si avaluem en $h = 0.05$ obtenim $f'(1) = 5.441$.

(a.2) Les fórmules d'extrapolació de Richardson per derivació numèrica centrada ens donen (veure llistes de problemes)

$$\begin{aligned} &F_1(h) = F(h) \\ &F_{j+1}(h) = F_j(h) + \frac{F_j(h) - F_j(h/2)}{(1/2)^{2j} - 1}, \ j = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Com només disposem de dades per $h = 0.1$ i $h/2 = 0.05$ aplicarem la fórmula per $j = 1$ i $h = 0.1$. S'obté

$$f'(1) \approx F_2(0.1) = 5.455 + \frac{5.455 - 5.441}{-0.75} = 5.4363$$

(observem que $f'(1) = 5.43656365691809$)

(b.1) Com f és una funció derivable en el seu domini (és a dir $\mathbb{R}^+$), per calcular els màxims (i mínims) de f haurem de buscar els zeros de la derivada

$$f'(x) = \frac{1}{x} - e^x \ \rightarrow \frac{1}{x} - e^x = 0 \rightarrow \frac{1}{x} = e^x$$

Si dibuixem les gràfiques de les funcions $\frac{1}{x}$ i e^x observem que només es tallen un cop i el punt on es tallen és l'únic candidat a ser el màxim de f. Més concretament, si derivem altre cop obtenim

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - e^x < 0$$

i deduim que $f'(x)$ és sempre decreixent (per tant f' té com a molt un zero). Finalment com

$$\begin{aligned} &f'(0.5) = 2 - \sqrt{e} > 0 \\ &f'(2) = 0.5 - e^2 < 0 \end{aligned}$$

el Teorema de Bolzono ens assegura que a l'interval $[0.5, 2]$ hi ha l'únic zero de f'. Finalment com $f''(x) < 0$ per a tot $x > 0$ deduim que aquest zero x_M és un màxim de f.

(b.2) Prenem la funció $g(x) = \frac{3}{x} - 2e^x$ i $x_0 = 0.5$ i $x_1 = 2$. El mètode de la secant és

$$\begin{aligned} &x_0 = 0.5 \ x_1 = 2 \\ &x_{n+1} = x_n + \frac{x_n - x_{n-1}}{g(x_n) - g(x_{n-1})}, \ n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Així

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - g(x_1)\frac{x_1 - x_0}{g(x_1) - g(x_0)} = 2 - (-13.278)\frac{1.5}{-13.278 - 2.7026} = 0.7537 \\ x_3 &= x_2 - g(x_2)\frac{x_2 - x_1}{g(x_2) - g(x_1)} = 0.7537 - (-0.2693)\frac{-1.2463}{-0.2693 - (-13.278)} = 0.728 \end{aligned}$$

Prova B: Introducció a la Computació Científica

Grau d'Enginyeria Informàtica (16/12/13)

Exercici: Contesteu als següents apartats:

(a) Considereu la taula de valors (per a la funció $f(x) = xe^x$)

x	0.8	1.0	1.2
$f(x)$	1.7804	2.7183	3.9841

(a.1) *(35 punts)* Calculeu numèricament, usant la fórmula dels trapèzis composta amb $h = 0.4$ ($N = 1$) i $h = 0.2$ ($N = 2$), el valor de

$$\int_{0.8}^{1.2} f(x)\ \mathrm{dx} \tag{1}$$

(a.2) *(15 punts)* Useu els càlculs de l'apartat anterior i extrapolació de Romberg per trobar una millor aproximació de (**??**).

(b) Responeu a cadascuna de les següents preguntes (són preguntes independents)

(b.1) *(20 punts)* Considereu la funció $f(x) = 2x^2 - 3\sin(x)$. Justifiqueu que f té un únic mínim (que s'assoleix en un punt $x_m > 0$), i trobeu un interval (a, b) tal que $x_m \in (a, b)$ amb $|b - a| < 2$.

(b.2) *(30 punts)* Sabem que la funció $g(x) = 4x - 3\cos(x)$ té un únic zero. Si prenem $x_0 = 0$ calculeu x_1 i x_2 fent servir el mètode de Newton.

Prova B: Introducció a la Computació Científica

Grau d'Enginyeria Informàtica (16/12/13)

Exercici: Contesteu als següents apartats:

(a) Considereu la taula de valors (per a la funció $f(x) = xe^x$)

x	0.8	1.0	1.2
$f(x)$	1.7804	2.7183	3.9841

(a.1) *(35 punts)* Calculeu numèricament, usant la fórmula dels trapèzis composta amb $h = 0.4$ ($N = 1$) i $h = 0.2$ ($N = 2$), el valor de

$$\int_{0.8}^{1.2} f(x)\ \mathrm{dx} \tag{2}$$

(a.2) *(15 punts)* Useu els càlculs de l'apartat anterior i extrapolació de Romberg per trobar una millor aproximació de (**??**).

(b) Responeu a cadascuna de les següents preguntes (són preguntes independents)

(b.1) *(20 punts)* Considereu la funció $f(x) = 2x^2 - 3\sin(x)$. Justifiqueu que f té un únic mínim (que s'assoleix en un punt $x_m > 0$), i trobeu un interval (a, b) tal que $x_m \in (a, b)$ amb $|b - a| < 2$.

(b.2) *(30 punts)* Sabem que la funció $g(x) = 4x - 3\cos(x)$ té un únic zero. Si prenem $x_0 = 0$ calculeu x_1 i x_2 fent servir el mètode de Newton.

Solucions:

(a.1) Les fórmules compostes de Trapezis amb $N = 1$ i $N = 2$ són

$$T_1(f(x) = xe^x, a = 0.8, b = 1.2) = \frac{0.4}{2 \times 1}(1.7804 + 3.9841) = 1.1529$$
$$T_2(f(x) = xe^x, a = 0.8, b = 1.2) = \frac{0.4}{2 \times 2}(1.7804 + 2 \times 2.7183 + 3.9841) = 1.12011$$

(a.2) Les fórmules d'extrapolació de Richardson per derivació numèrica centrada ens donen

$$F_1(h) = F(h)$$
$$F_{j+1}(h) = F_j(h) + \frac{F_j(h) - F_j(h/2)}{(1/2)^{2j} - 1}, \ j = 1, 2, \ldots$$

Com només disposem de dades per $h = 0.4$ i $h/2 = 0.2$ aplicarem la fórmula per $j = 1$. S'obté

$$\int_{0.8}^{1.2} f(x)\mathrm{dx} \approx F_2(0.4) = 1.1529 + \frac{1.1529 - 1.12011}{-0.75} = 1.10917$$

(observem que $\displaystyle\int_{0.8}^{1.2} f(x)\mathrm{dx} = 1.1091315702458027$)

(b.1) Com f és una funció derivable al seu domini $\mathbb{R}^+$, per calcular els màxims (i mínims) de f haurem de buscar els zeros de la derivada.

$$f'(x) = \rightarrow 4x - \cos(x) = 0 \rightarrow 4x = \cos(x)$$

Si dibuixem les gràfiques de les funcions $4x$ i $\cos(x)$ observem que només es tallen un cop (en un valor de x positiu) i el punt on es tallen és l'únic candidat a ser el mínim de f. Més concretament, si derivem altre cop obtenim

$$f''(x) = 4 + 3\sin(x) > 0$$

per tant $f''(x) > 0$ i deduim que $f'(x)$ és sempre creixent. Finalment com

$$f'(0) = -3 < 0$$
$$f'(\pi/4) = \pi - 3\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

deduim que a l'interval $[0, \pi/4]$ ha d'haver l'únic possible mínim x_m de f. Finalment com $f''(x) > 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$ deduim que x_m és un mínim.

(b.2) Prenem la funció $g(x) = 4x - 3\cos(x)$ i $x_0 = 0$. El mètode de Newton és

$$x_0 = 0$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \ n = 1, 2, \ldots$$

Així

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 0 - \frac{-3}{4} = 0.75$$
$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = 0.75 - \frac{0.8049}{6.04492} = 0.616847$$

De fet el zero de g viu a $\alpha = 0.6133103527035523$.

Prova C: Introducció a la Computació Científica

Grau d'Enginyeria Informàtica (16/12/13)

Exercici: Contesteu als següents apartats:

(a) Considereu la taula de valors (per a la funció $f(x) = xe^x$)

x	3.2	3.25	3.3	3.35	3.4
$f(x)$	78.504	83.819	89.472	95.484	101.88

(a.1) *(35 punts)* Calculeu numèricament, usant la fórmula de derivació centrada, el valor de $f'(3.3)$ per $h = 0.1$ i $h = 0.1/2 = 0.05$.

(a.2) *(15 punts)* Useu els càlculs de l'apartat anterior i extrapolació de Richardson per trobar una millor aproximació de $f'(3.3)$.

(b) Responeu a cadascuna de les següents preguntes (són preguntes independents)

(b.1) *(20 punts)* Considereu la funció $f(x) = x^4 + e^x$. Justifiqueu que f té un únic mínim (que s'assoleix en un punt $x_m < 0$), i trobeu un interval (a, b) tal que $x_m \in (a, b)$ amb $|b - a| < 2$.

(b.2) *(30 punts)* Sabem que la funció $g(x) = 8x^3 + 2e^x$ té un únic zero a l'interval $[-1, 0]$. Si prenem $x_0 = -1$ i $x_1 = 0$ calculeu x_2 i x_3 fent servir el mètode de la secant.

Prova C: Introducció a la Computació Científica

Grau d'Enginyeria Informàtica (16/12/13)

Exercici: Contesteu als següents apartats:

(a) Considereu la taula de valors (per a la funció $f(x) = xe^x$)

x	3.2	3.25	3.3	3.35	3.4
$f(x)$	78.504	83.819	89.472	95.484	101.88

(a.1) *(35 punts)* Calculeu numèricament, usant la fórmula de derivació centrada, el valor de $f'(3.3)$ per $h = 0.1$ i $h = 0.1/2 = 0.05$.

(a.2) *(15 punts)* Useu els càlculs de l'apartat anterior i extrapolació de Richardson per trobar una millor aproximació de $f'(3.3)$.

(b) Responeu a cadascuna de les següents preguntes (són preguntes independents)

(b.1) *(20 punts)* Considereu la funció $f(x) = x^4 + e^x$. Justifiqueu que f té un únic mínim (que s'assoleix en un punt $x_m < 0$), i trobeu un interval (a, b) tal que $x_m \in (a, b)$ amb $|b - a| < 2$.

(b.2) *(30 punts)* Sabem que la funció $g(x) = 8x^3 + 2e^x$ té un únic zero a l'interval $[-1, 0]$. Si prenem $x_0 = -1$ i $x_1 = 0$ calculeu x_2 i x_3 fent servir el mètode de la secant.

Solucions:

(a.1) La fórmula de derivació numèrica centrada ens dóna:

$$f'(3.3) \approx F(h) := \frac{f(3.3+h) - f(3.3-h)}{2h}.$$

Substituint en la taula de valors, si avaluem en $h = 0.1$ obtenim $f'(3.3) = 116.88$ i si avaluem en $h = 0.05$ obtenim $f'(1) = 116.65$.

(a.2) Les fórmules d'extrapolació de Richardson per derivació numèrica centrada ens donen (veure llistes de problemes)

$$\begin{aligned} F_1(h) &= F(h) \\ F_{j+1}(h) &= F_j(h) + \frac{F_j(h) - F_j(h/2)}{(1/2)^{2j} - 1}, \ j = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Com només disposem de dades per $h = 0.1$ i $h/2 = 0.05$ aplicarem la fórmula per $j = 1$ i $h = 0.1$. S'obté

$$f'(1) \approx F_2(0.1) = 116.88 + \frac{116.88 - 116.65}{-0.75} = 116.573$$

(observem que $f'(3.3) = 116.5843473588$)

(b.1) Com f és una funció derivable en el seu domini (és a dir $\mathbb{R}^+$), per calcular els màxims (i mínims) de f haurem de buscar els zeros de la derivada.

$$f'(x) = 4x^3 + e^x \ \rightarrow 4x^3 + e^x = 0 \rightarrow 4x^3 = -e^x$$

Si dibuixem les gràfiques de les funcions $4x^3$ i $-e^x$ observem que només es tallen un cop i el punt on es tallen és l'únic candidat a ser el màxim (o mínim) de f. De fet, si derivem altre cop obtenim

$$f''(x) = 12x^2 + e^x > 0$$

i deduim que $f'(x)$ és sempre creixent (per tant f' té com a molt un zero). Finalment com

$$\begin{aligned} f'(-1) &= -4 + e^{-1} < 0 \\ f'(0) &= 1 > 0 \end{aligned}$$

el Teorema de Bolzano ens assegura que a l'interval $[-1, 0]$ hi ha l'únic zero de f' que és un mínim x_m de f.

(b.2) Prenem la funció $g(x) = 8x^3 + 2e^x$ i $x_0 = -1$ i $x_1 = 0$. El mètode de la secant és

$$\begin{aligned} x_0 &= -1 \ x_1 = 0 \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{x_n - x_{n-1}}{g(x_n) - g(x_{n-1})}, \ n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Així

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - g(x_1)\frac{x_1 - x_0}{g(x_1) - g(x_0)} = 0 - 2\frac{0 - (-1)}{2 - (-7.2642)} = -0.21588 \\ x_3 &= x_2 - g(x_2)\frac{x_2 - x_1}{g(x_2) - g(x_1)} = -0.21588 - (1.5312)\frac{-0.21588}{1.5312 - 2} = -0.921 \end{aligned}$$

Prova D: Introducció a la Computació Científica

GRAU D'ENGINYERIA INFORMÀTICA (16/12/13)

Exercici: Contesteu als següents apartats:

(a) Considereu la taula de valors (per a la funció $f(x) = xe^x$)

x	3.2	3.4	3.6
$f(x)$	78.504	101.88	131.75

(a.1) *(35 punts)* Calculeu numèricament, usant la fórmula dels trapèzis composta amb $h = 0.4$ ($N = 1$) i $h = 0.2$ ($N = 2$), el valor de

$$\int_{3.2}^{3.6} f(x)\ \mathrm{dx} \tag{3}$$

(a.2) *(15 punts)* Useu els càlculs de l'apartat anterior i extrapolació de Romberg per trobar una millor aproximació de (**??**).

(b) Responeu a cadascuna de les següents preguntes (són preguntes independents)

(b.1) *(20 punts)* Considereu la funció $f(x) = x - (x-1)\ln(x)$. Justifiqueu que f té un únic màxim (que, òviament, s'assoleix en un punt $x_M > 0$), i trobeu un interval (a, b) tal que $x_M \in (a, b)$ amb $|b - a| < 2$.

(b.2) *(30 punts)* Sabem que la funció $g(x) = 3\ln(x) - \dfrac{1}{2x}$ té un únic zero. Si prenem $x_0 = 1$ calculeu x_1 i x_2 fent servir el mètode de Newton.

Prova D: Introducció a la Computació Científica

GRAU D'ENGINYERIA INFORMÀTICA (16/12/13)

Exercici: Contesteu als següents apartats:

(a) Considereu la taula de valors (per a la funció $f(x) = xe^x$)

x	3.2	3.4	3.6
$f(x)$	78.504	101.88	131.75

(a.1) *(35 punts)* Calculeu numèricament, usant la fórmula dels trapèzis composta amb $h = 0.4$ ($N = 1$) i $h = 0.2$ ($N = 2$), el valor de

$$\int_{3.2}^{3.6} f(x)\ \mathrm{dx} \tag{4}$$

(a.2) *(15 punts)* Useu els càlculs de l'apartat anterior i extrapolació de Romberg per trobar una millor aproximació de (**??**).

(b) Responeu a cadascuna de les següents preguntes (són preguntes independents)

(b.1) *(20 punts)* Considereu la funció $f(x) = x - (x-1)\ln(x)$. Justifiqueu que f té un únic màxim (que, òviament, s'assoleix en un punt $x_M > 0$), i trobeu un interval (a, b) tal que $x_M \in (a, b)$ amb $|b - a| < 2$.

(b.2) *(30 punts)* Sabem que la funció $g(x) = 3\ln(x) - \dfrac{1}{2x}$ té un únic zero. Si prenem $x_0 = 1$ calculeu x_1 i x_2 fent servir el mètode de Newton.

Solucions:

(a.1) Les fórmules compostes de Trapezis amb $N = 1$ i $N = 2$ són

$$T_1(f(x) = xe^x, a = 3.2, b = 3.6) = \frac{0.4}{2 \times 1}(78.504 + 131.75) = 42.051$$
$$T_2(f(x) = xe^x, a = 3.2, b = 3.6) = \frac{0.4}{2 \times 2}(78.504 + 2 \times 101.88 + 131.75) = 41.401$$

(a.2) Les fórmules d'extrapolació de Richardson per derivació numèrica centrada ens donen

$$F_1(h) = F(h)$$
$$F_{j+1}(h) = F_j(h) + \frac{F_j(h) - F_j(h/2)}{(1/2)^{2j} - 1}, \ j = 1, 2, \ldots$$

Com només disposem de dades per $h = 0.4$ i $h/2 = 0.2$ aplicarem la fórmula per $j = 1$. S'obté

$$\int_{3.2}^{3.6} f(x)\mathrm{dx} \approx F_2(0.4) = 42.051 + \frac{42.051 - 41.401}{-0.75} = 41.1843$$

(b.1) Com f és una funció derivable a tot $\mathbb{R}$, per calcular els màxims (i mínims) de f haurem de buscar els zeros de la derivada.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \ln(x) \ \rightarrow \frac{1}{x} - \ln(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{x} = \ln(x)$$

Si dibuixem les gràfiques de les funcions $\frac{1}{x}$ i $\ln(x)$ observem que només es tallen un cop (en un valor de x positiu) i el punt on es tallen és l'únic candidat a ser el màxim de f. Més concretament, si derivem altre cop obtenim

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$$

per a tot $x > 0$. Per tant $f'(x)$ és sempre decreixent i com a molt pot tenir un zero. Com

$$f'(1) = 1 > 0$$
$$f'(2) = 0.5 - \ln(2) < 0$$

deduim pel Teorema de Bolzano que a l'interval $[1, 2]$ ha d'haver l'únic possible zero de f'. Finalment com $f''(x) > 0$ per a tot $x > 0$ deduim que x_M és un màxim.

(b.2) Prenem la funció $g(x) = 3\ln(x) - \frac{1}{2x}$ i $x_0 = 1$. El mètode de Newton és

$$x_0 = 1$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \ n = 1, 2, \ldots$$

Així

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 1 - \frac{-0.5}{3.5} = 1.1429$$
$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = 1.1429 - \frac{-0.0368}{3.0077} = 1.1551$$

De fet el zero de g viu a $\alpha = 1.1552$.