Algebra (EI)

Notas de Teoría

28/09/12

`Matriz Inversa - Rango`

La clase pasada vimos un ejemplo de una matriz que no era invertible, veamos ahora una que sí que lo es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que la inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar esta afirmación, hacemos los productos

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot A.$$

Uno podría preguntarse si tiene sentido hablar de "la" inversa de una matriz cuadrada M. Es decir, si es única (así como los inversos de los números reales no nulos). El resultado siguiente nos dice que, efectivamente, eso es así

Proposición 0.1. *Si una matriz cuadrada M admite una inversa M^{-1}, entonces esta inversa es única. Es más, si existe una matriz M' tal que $M' \cdot M = I$, entonces M' es* la *inversa de M.*

La última parte de la proposición dice que no hay que ocuparse de verificar que los dos productos $M \cdot M'$ y $M' \cdot M$ den la identidad, alcanza con verificar uno de ellos.

Veamos ahora un método sencillo para decidir si una matriz tiene inversa y, si la tuviera, calcularla.

Proposición 0.2. *Si haciendo operaciones elementales en las filas de una matriz M se consigue transformarla en la matriz identidad, entonces las mismas operaciones elementales realizadas sobre la matriz identidad la transformarán en M^{-1}.*

Demostración. Hemos visto que hacer operaciones elementales en las filas de una matriz consiste en multiplicarla (a izquierda) por una matriz cuadrada elemental. Llamemos $M_1, M_2, \ldots, M_k$ a estas operaciones elementales, y M' al producto $M_k \cdot M_{k-1} \ldots \cdot M_2 \cdot M_1$. Entonces se tendrá

$$M' \cdot M = M_k \cdot M_{k-1} \ldots \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot M = I,$$

así que la matriz M' es la inversa de M, por lo visto en la Proposición 0.2. Por otro lado, claramente se tiene

$$M' = M' \cdot I = M_k \cdot M_{k-1} \ldots \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot I,$$

con lo cual resulta que M' se consigue aplicando las mismas operaciones elementales en las filas realizadas sobre M, pero aplicadas a la matriz identidad I. $\square$

Ejemplo 0.3. Consideremos la matriz A del principio. Para llevarla a la matriz identidad, tuvimos que haber hecho la siguiente operación sobre las filas de A: $F1 - F_3 \mapsto F_1$. Haciendo la misma operación sobre la matriz identidad obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que es precisamente A^{-1}.

Ejemplo 0.4. Sea

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veamos cuáles son las operaciones elementales que tenemos que realizar sobre las filas B para conseguir la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $F_3 - 2 \cdot F_1 \mapsto F_3$
- $-\frac{1}{2} \cdot F_3 \mapsto F_3$
- $F_2 - F_3 \mapsto F_2$
- $F_1 - F_3 \mapsto F_1$

Realizamos las mismas operaciones sobre la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

con lo cual concluimos que $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, y verificamos

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

El criterio que nos da la Proposición 0.2 esútil para calcular la inversa cuando la matriz es invertible. ¿Pero qué pasa cuando no lo es? Uno siempre puede hacer operaciones elementales sobre las filas de la matriz en cuestión. Si consigue transformarla en la matriz identidad, habrá encontrado la inversa. ¿En qué casos no podrá transformarla en la matriz identidad?

Consideremos por ejemplo esta matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si hacemos eliminación de Gauss sobre las filas de C nunca desaparecerá la última fila de ceros, luego no conseguiremos nunca, siguiendo este procedimiento, la matriz identidad. Por otro lado, el hecho de que C tenga una fila de ceros implica que no tendrá inversa, ya que -por ejemplo en este caso- si realizamos el producto $C \cdot C'$ con cualquier otra matriz C', la última fila del producto también será una fila *nula* (todos sus elementos serán cero), así que nunca se podrá conseguir una igualdad del tipo $C \cdot C' = I$.

Y no es ésta la única situación en la cual no habrá inversa, ya que hemos visto en la clase pasada que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no es invertible, y no tiene ninguna fila nula. Aquí lo que ocurre es que si hacemos el proceso de eliminación de Gauss sobre esta matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

obtenemos una fila de ceros luego del primer paso del proceso. En general, si uno obtiene una fila de ceros durante el proceso de eliminación de Gauss de la matriz, no podrá calcular la inversa según el procedimiento explicado en la Proposición 0.2. Interesantemente, esta es la única obstrucción a la existencia de la matriz inversa.

Proposición 0.5. *Una matriz cuadrada es invertible si y solamente si si la matriz resultante luego del proceso de eliminación de Gauss no tiene ninguna fila nula.*

Motivados por este resultado, damos la siguiente definición

Definition 0.6. Sea M una matriz de n filas y m columnas (no necesariamente cuadrada). El rango de M se define como el número de filas no nulas que tiene la matriz que resulta de aplicar el proceso de eliminación de Gauss a M.

Ejemplo 0.7. Como hemos visto anteriormente, $\text{rango}(A) = 2$, $\text{rango}(B) = 3$,

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Corollary 0.8. *Si M es una matriz cuadrada, entonces M es invertible si y solamente si el rango de M es igual al número de filas de M.*