Algebra (EI)

Notas de Teoria

20/11/12

1. Números complejos

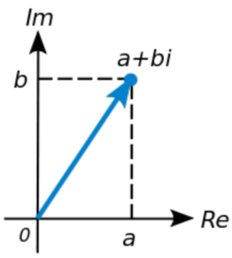
El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos es

$$\mathbb{C} = \{a + b\,i,\ a,\ b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}.$$

Cuando expresamos a un número complejo z en la forma $z = a + b\,i$ diremos que z está en *forma binómica*.

La *parte real* de z es $\mathrm{Re}(z) = a$.

La *parte imaginaria* de z es $\mathrm{Im}(z) = b$.



A diferencia de los números reales que pueden representarse en una recta, los números complejos suelen representarse en el plano haciendo la identificación del número i con el punto $(0, 1)$. De esta manera, el número complejo $a + b\,i$ se corresponde con el punto del plano (a, b). Si $z = a + b\,i$ y $w = c + d\,i$, entonces

- su suma es $z + w = (a + c) + (b + d)\,i$
- su producto es $z\,w = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$

Notar que en la interpretación geométrica de números complejos con el plano $\mathbb{R}^2$, la suma de números complejos se corresponde con la suma de vectores de $\mathbb{R}^2$. Si $z = a + b\,i$ llamaremos *conjugado* de z a $\overline{z} = a - b\,i$. Esta operación se corresponde -geométricamente- con la "simetría" respecto de la recta $y = 0$ en el plano.

El *módulo* de z es el número real no negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Este número no es otra cosa que la longitud o el módulo del vector (a, b).

Propiedades:

- $|z| = z\,\overline{z}$
- Si $z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z\,w} = \overline{z}\,\overline{w}$
- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$

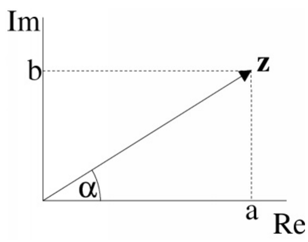
- $|z\,w| = |z|\,|w|$
- $|z| = |\overline{z}| = |-z|$

2. Forma polar de un número complejo

Si $z = a + b\,i$ no es el número $0 + 0\,i$, llamaremos *argumento* de z al único número real α que verifica simultáneamente

$$0 \leq \alpha < 2\,\pi, \quad \cos\alpha = \frac{a}{|z|}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{|z|}.$$

Geométricamente, el argumento de z es el ángulo determinado entre la semi-



rrecta que pasa por el origen del plano complejo y el punto z, y la semirrecta positiva horizontal. Lo denotaremos con $\arg(z) = \alpha$. Notar que vale siempre la igualdad

$$z = |z|\big(\cos\arg(z) + i\sin\arg(z)\big).$$

Esta representación se denomina *forma polar* del número complejo z, y se denota como $|z|_{\arg(z)}$.

Ejemplo 2.1.

a) El número complejo que se escribe en forma binómica como $z = 1 + i$, tiene como forma polar a $\sqrt{2}_{\pi/4}$, ya que se tiene $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, y el cociente $\frac{1}{\sqrt{2}}$ es al mismo tiempo el seno y el coseno del ángulo de 45 grados $(\frac{\pi}{4})$.

b) El número complejo que en forma polar se representa como $2_{\frac{\pi}{3}}$, en forma binómica es

$$2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}\,i.$$

3. Fórmulas de De Moivre

El producto y el cociente de números complejos se puede realizar de manera relativamente sencilla en forma polar. De hecho, se tienen las siguientes fórmulas:

$$|z|_{\arg z}\,|w|_{\arg w} = \big(|z|\,|w|\big)_{\arg z + \arg w},$$

y

$$\frac{|z|_{\arg z}}{|w|_{\arg w}} = \left(\frac{|z|}{|w|}\right)_{\arg z - \arg w}$$

donde los números $\arg z + \arg w$ y $\arg z - \arg w$ ha de escogerse módulo 2π.

Ejemplo 3.1. Si queremos multiplicar los números 2_π y $5_{\frac{\pi}{2}}$, el resultado en forma polar será

$$2 \cdot 5_{\pi+\frac{\pi}{2}} = 10_{\frac{3}{2}\pi}.$$

Si deseamos dividirlos, en forma polar tenemos su representación de manera inmediata:

$$\frac{2_\pi}{5_{\frac{i}{2}}} = \frac{2}{5}_{\pi-\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5}_{\frac{\pi}{2}}$$

Por otro lado, al multiplicar $3_{\frac{4}{3}\pi}$ y $7_{\frac{3}{2}\pi}$, tendremos como resultado

$$3 \cdot 7_{\frac{4}{3}\pi+\frac{3}{2}\pi} = 21_{\frac{17}{6}\pi} = 21_{\frac{5}{6}\pi},$$

ya que $\frac{17}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi = 2\pi$. Y al dividirlos, queda

$$\frac{3_{\frac{4}{3}\pi}}{7_{\frac{3}{2}\pi}} = \left(\frac{3}{7}\right)_{\frac{4}{3}\pi-\frac{3}{2}\pi} = \left(\frac{3}{7}\right)_{-\frac{1}{6}\pi} = \left(\frac{3}{7}\right)_{\frac{11}{6}\pi},$$

ya que $\frac{11}{6}\pi - \big(-\frac{1}{6}\pi\big) = 2\pi$.

4. Raíces n-ésimas de un número complejo

Una consecuencia inmediata de las fórmulas de De Moivre es que para todo $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ y cualquier entero positivo n, existen exactamente n raíces n-ésimas de w.

Definition 4.1. Una raiz n-ésima de $w \in \mathbb{C}$ es un número $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^n = w$.

Proposición 4.2. *Si z es una raiz n-ésima de w, entonces*

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}, \quad arg\, z = \frac{arg\, w + 2\,k\,\pi}{n},$$

con $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ejemplo 4.3.

- Calculemos las raices cúbicas del número complejo $8_{\frac{3}{4}\pi} = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i$. En este caso, se tiene $n = 3$, y la fórmula que nos da la proposición 4.2 dice que tendremos tres raíces complejas z_0, z_1 y z_2 que serán de la forma siguiente:
  - $|z_0| = \sqrt[3]{8} = 2$, $\arg z_0 = \frac{\frac{3}{4}\pi}{3} = \frac{1}{4}\pi$. Luego,
  $$z_0 = 2_{\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i.$$
  - $|z_1| = \sqrt[3]{8} = 2$, $\arg z_1 = \frac{\frac{3}{4}\pi+2\pi}{3} = \frac{11}{12}\pi$. Luego,
  $$z_1 = 2_{\frac{11}{12}\pi} \approx -1,931851653 + 0,5176380900\,i.$$
  - $|z_2| = \sqrt[3]{8} = 2$, $\arg z_2 = \frac{\frac{3}{4}\pi+2\cdot 2\pi}{3} = \frac{19}{12}\pi$. Entonces se tiene
  $$z_2 = 2_{\frac{19}{12}\pi} \approx 0,5176380900 - 1,931851653\,i.$$

- Calculemos las raíces cuartas del número $16 = 16_0$. Aquí $n = 4$, y tendremos cuatro raíces complejas z_0, z_1, z_2 y z_3 que serán
    - $|z_0| = \sqrt[4]{16} = 2$, $\arg z_0 = \frac{0}{4} = 0$. Luego, $z_0 = 2_0 = 2 + 0\,i = 2$.
    - $|z_1| = \sqrt[4]{16} = 2$, $\arg z_1 = \frac{0+2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Luego, $z_1 = 2_{\frac{\pi}{2}} = 0 + 2\,i = 2\,i$.
    - $|z_2| = \sqrt[4]{16} = 2$, $\arg z_2 = \frac{0+2\cdot 2\pi}{4} = \pi$. Luego, $z_2 = 2_\pi = -2 + 0\,i = -2$.
    - $|z_3| = \sqrt[4]{16} = 2$, $\arg z_3 = \frac{0+2\cdot 3\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi$. Luego, $z_0 = 2_{\frac{3}{2}\pi} = 0-2\,i = -2i$.