Algebra (EI)

Notas de Teoría

22/10/12

Subespacios ortogonales

Comenzaremos con un resultado general denominado *extensión de bases* de subespacios.

Proposición 0.1. *Si $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ es una base de un subespacio $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$, y la dimensión de $\mathbb{V}$ es finita, entonces existe una base $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{V}$ tal que*

$$\mathcal{B}_0 = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_t\}.$$

Es decir, hay una base de todo el espacio $\mathbb{V}$ que "extiende" a la base de $\mathbb{S}$

Demostración. Supongamos que $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$. Entonces realizamos el siguiente "algoritmo":

1. $\mathcal{B}_0 := \mathcal{B}$.
2. $j = 1$.
3. Si $\mathcal{B}_0 \cup \{\boldsymbol{w}_j\}$ es linealmente independiente, entonces $\mathcal{B}_0 \cup \{\boldsymbol{w}_j\} \mapsto \mathcal{B}_0$.
4. $j = j + 1$
5. Volver al punto **3**. hasta $j = n$.

Afirmamos que el resultado de este ' 'algoritmo" nos proporciona una base del espacio $\mathbb{V}$ que cumple con lo que pide la proposición:

- El conjunto $\mathbb{B}_0$ es linealmente independiente (esto sale esencialmente de **3.**
- $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$, es consecuencia de los puntos **1.** y **3.**
- $\mathcal{B}_0$ genera $\mathbb{V}$, ya que cada uno de los $\boldsymbol{w}_j$ o bien está en $\mathcal{B}_0$ o bien es combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}_0$, asi que entonces se tiene que

  $$\mathbb{V} = \langle \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \rangle \subset \langle \mathcal{B}_0 \rangle \subset \mathbb{V}.$$

  Y de aquí deducimos entonces que $\langle \mathcal{B}_0 \rangle = \mathbb{V}$, y luego $\mathcal{B}_0$ es base de $\mathbb{V}$ ya que genera este espacio y es linealmente independiente.

$\square$

Ejemplo 0.2. Sea $\mathbb{S}_1$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ tiene por base $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1),\ (2, 0, 1)\}$. Queremos extender $\mathcal{B}$ a otra base de todo el espacio $\mathbb{R}^3$. Para ello comenzamos con una base cualquiera de $\mathbb{R}^3$. Elegimos la base canónica $\{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$, y comenzamos a ejecutar el algoritmo de la demostración de la proposición 0.1:

1. $\mathcal{B}_0 := \mathcal{B} = \{(1, 0, -1),\ (2, 0, 1)\}$.
2. El conjunto $\{(1, 0, -1),\ (2, 0, 1),\ (1, 0, 0)\}$ **no** es linealmente independiente ya que $(1, 0, 0) = \frac{1}{3}(1, 0, -1) + \frac{1}{3}(2, 0, 1)$, así que en el paso **3.** del algoritmo, no modificamos $\mathcal{B}_0$.

3. El conjunto $\{(1,0,-1),\,(2,0,1),\,(0,1,0)\}$ es linealmente independiente, así que redefinimos $\mathcal{B}_0 := \{(1,0,-1),\,(2,0,1),\,(0,1,0)\}$.
4. El conjunto $\{(1,0,-1),\,(2,0,1),\,(0,1,0),\,(0,0,1)\}$ **no** es linealmente independiente ya que
$$(0,0,1) = -\frac{2}{3}(1,0,-1) + \frac{1}{3}(2,0,1) + 0\cdot(0,1,0).$$
Luego, no modificamos $\mathcal{B}_0$.

Al final nos queda $\mathcal{B}_0 := \{(1,0,-1),\,(2,0,1),\,(0,1,0)\}$, que es -efectivamente- una base de $\mathbb{R}^3$ que extiende a $\mathcal{B}_0$.

Definición 0.3. *Sea $\mathbb{S}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Definimos el* subespacio ortogonal *a $\mathbb{S}$ como*
$$\mathbb{S}^\perp = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 0,\ \forall \boldsymbol{w} \in \mathbb{S}\}.$$

Proposición 0.4.
1. *$\mathbb{S}^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Si $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{v}_k\}$ es una base de $\mathbb{S}$, entonces*

$$\mathbb{S}^\perp = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_1 = 0,\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_2 = 0, \ldots,\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_k = 0\}. \tag{1}$$

3. *Si $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{S}$ y $\mathcal{B}_0 = \{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{v}'_1,\ldots,\boldsymbol{v}'_t\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ que extiende a $\mathcal{B}$ (que se puede conseguir utilizando el proceso de Gram-Schmidt a la base que produce el algoritmo de la proposición 0.1, entonces $\{\boldsymbol{v}'_1,\ldots,\boldsymbol{v}'_t\}$ es una base de $\mathbb{S}^\perp$.*
4. *$\dim(\mathbb{S}\cap\mathbb{S}^\perp) = 0$, y $\dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{S}^\perp) = n$.*
5. *$\left(\mathbb{S}^\perp\right)^\perp = \mathbb{S}$.*

Demostración.
1. Claramente el vector nulo $\mathbf{0}$ es un elemento de $\mathbb{S}^\perp$ ya que $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ para todo $\boldsymbol{w} \in \mathbb{S}$. Por otro lado, si $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ son elementos de $\mathbb{S}^\perp$, entonces $\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{w} = 0$ y $\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{w} = 0$ para todo $\boldsymbol{w}\in\mathbb{S}$, y de aquí deducimos que
$$(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{w} = 0\ \ \forall\boldsymbol{w}\in\mathbb{S}.$$
Luego, $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\in\mathbb{S}^\perp$.
Por otro lado, si $\boldsymbol{v}\in\mathbb{S}^\perp$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, entonces
$$(\lambda\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}) = \lambda(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}) = \lambda\cdot 0 = 0,$$
así que también $\lambda\boldsymbol{v}\in\mathbb{S}^\perp$. Estas tres propiedades demuestran que $\mathbb{S}^\perp$ es un subespacio.
2. Si $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{v}_k\}$ es una base de este subespacio, entonces si $\boldsymbol{v}\in\mathbb{S}^\perp$ tendremos $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_1 = 0,\ldots,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_k = 0$ ya que los vectores $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ son elementos de $\mathbb{S}$. Por otro lado, cualquier $\boldsymbol{w}\in\mathbb{S}$ se escribe como
$$\boldsymbol{w} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k,$$
ya que los elementos de la base generan al subespacio. Si sabemos que $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_1 = 0,\ldots,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_k = 0$, entonces también tendremos que
$$\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v} + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{v} = 0,$$

y esto muestra que $\mathbb{S}^\perp$ también se puede representar como (1).

3. Es de inmediata verificación que $\boldsymbol{v}'_1 \in \mathbb{S}^\perp, \ldots, \boldsymbol{v}'_t \in \mathbb{S}^\perp$, luego

$$\langle \boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_t \rangle \subset \mathbb{S}^\perp. \tag{2}$$

Supongamos que $\mathbb{S}^\perp$ fuera más grande que el subespacio generado por estos vectores. Entonces habría un vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{S}^\perp$ que cuando lo escribimos como combinación lineal de los elementos de la base $\mathcal{B}_0$, tendría que ser de la forma

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k + \lambda'_1 \boldsymbol{v}'_1 + \ldots + \lambda'_t \boldsymbol{v}'_t,$$

con alguno de los primeros λ_1, λ_2, ..., λ_k distinto de cero, digamos que es el $\lambda_1 \neq 0$. Pero entonces, tendríamos

$$0 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_1 = (\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k + \lambda'_1 \boldsymbol{v}'_1 + \ldots + \lambda'_t \boldsymbol{v}'_t,) \cdot \boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \|\boldsymbol{v}_1\|^2,$$

como $\boldsymbol{v}_1 \neq 0$, se deduciría entonces que $\lambda_1 = 0$, lo cual contradice lo que estamos suponiendo. Luego, vale la igualdad en (2), y como el conjunto $\{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_t\}$ es linealmente independiente, es entonces una base de $\mathbb{S}^\perp$.

4. Usando la notación del apartado anterior, se ve inmediatamente que

$$\mathbb{S} + \mathbb{S}^\perp = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle + \langle \boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_t \rangle = \mathbb{R}^n.$$

Por otro lado, por la fórmula de Grassman, tenemos

$$\dim \left(\mathbb{S} \cap \mathbb{S}^\perp\right) = (k+s) - k - s = 0.$$

5. Supongamos que $\mathcal{B}_0 = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_t\}$ es una base ortogonal que extiende a la base ortogonal de $\mathbb{S}$, entonces por el apartado 3. sabemos que $\{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_t\}$ es una base de $\mathbb{S}^\perp$, y no es difícil ver que

$$\{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_t, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$$

es una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ que extiende a la base de $\mathbb{S}^\perp$. Entonces, por el mismo apartado 3., tendremos que $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ es también una base de $\left(\mathbb{S}^\perp\right)^\perp$. Como una base determina al subespacio (ya que el subespacio es el conjunto de elementos generados linealmente por la base), tenemos que $\mathbb{S} = \left(\mathbb{S}^\perp\right)^\perp$.

□

Ejemplo 0.5. Consideremos nuevamente el subespacio $\mathbb{S}_1$ del ejemplo 0.2, Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_1^\perp &= \{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \, (x_1, x_2, x_3) \cdot (1, 0, -1) = 0,\, (x_1, x_2, x_3) \cdot (2, 0, 1) = 0\} \\ &= \{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \, x_1 - x_3 = 0,\, 2x_1 + x_3 = 0\}, \end{aligned}$$

con lo cual se puede ver que es relativamente fácil pasar de generadores de $\mathbb{S}_1$ a ecuaciones de $\mathbb{S}_1^\perp$. Por otro lado, si uno quiere calcular una base de $\mathbb{S}_1^\perp$, primero hemos de aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base de $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B}_0 = \{(1, 0, -1),\, (2, 0, 1),\, (0, 1, 0)\}$, para conseguir una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Se tendrá

$$\mathcal{B}''_0 = \left\{(1, 0, -1),\, \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right),\, (0, 1, 0)\right\},$$

de lo cual deducimos que $\{(0,1,0)\}$ es una base de $\mathbb{S}_1^{\perp}$.

Ejemplo 0.6. Sea $\mathbb{S}_2 = \langle (1,0,1,0),\, (1,1,0,0)\rangle$ Consideramos la base $\mathcal{B} = \{(1,0,1,0),\, (1,1,0,0)\}$ de $\mathbb{S}_2$ y la extendemos a una base de $\mathbb{R}^4$ utilizando la base canónica de este espacio:

$$\{(1,0,0,0),\, (0,1,0,0),\, (0,0,1,0),\, (0,0,0,1)\},$$

y obtenemos $\mathcal{B}_0 = \{(1,0,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$. Luego aplicamos el proceso de Gram-Schmidt a esta base y obtenemos la siguiente base ortogonal de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B}_0'' = \{(1,0,1,0),(1,2,-1,0),(1,-1,-1,0),(0,0,0,1)\}.$$

De aquí obtenemos que $\mathbb{S}_2^{\perp} = \langle (0,0,0,1)\rangle$. Notar que de esta manera también podemos calcular ecuaciones para $\mathbb{S}_2$, utilizando que

$$\mathbb{S}_2 = \left(\mathbb{S}_2^{\perp}\right)^{\perp} = \langle (0,0,0,1)\rangle^{\perp} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \, x_4 = 0\}.$$

Proposición 0.7. *Sea $\mathbb{S}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$, y $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\boldsymbol{v}$ se escribe de manera única como $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ con $\boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{S}$ y $\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{S}^{\perp}$. El vector $\boldsymbol{v}_1$ cumple con la propiedad de que es el vector de $\mathbb{S}$ más próximo a $\boldsymbol{v}$; es decir*

$$\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1\| \leq \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\| \quad \forall \boldsymbol{w} \in \mathbb{S}.$$

Demostración. Del apartado 4 de la proposición 0.4, tenemos que como $\mathbb{S}+\mathbb{S}^{\perp} = \mathbb{R}^n$, entonces todo vector $\boldsymbol{v}$ se puede escribir $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ con $\boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{S}$ y $\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{S}^{\perp}$. Si hubiera otra escritura, digamos $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_2'$ con $\boldsymbol{v}_1' \in \mathbb{S}$ y $\boldsymbol{v}_2' \in \mathbb{S}^{\perp}$, entonces tendríamos

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_2.$$

El miembro izquierdo es un elemento de $\mathbb{S}$ y el izquierdo pertenece a $\mathbb{S}^{\perp}$. Como la intersección entre estos subespacios es 0 (es lo que dice también el apartado 4 de la proposición 0.4), entonces se tiene

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1', \quad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2',$$

es decir que la escritura es única.

Nos falta todavía demostrar la desigualdad del enunciado. Notar que para cualquier $\boldsymbol{w}_1 \in \mathbb{S}$ y cualquier $\boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{S}^{\perp}$, entonces se cumple

$$\|\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2\|^2 = (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) \cdot (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \|\boldsymbol{w}_1\|^2 + \|\boldsymbol{w}_2\|^2 \tag{3}$$

ya que $\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_2 = 0$.

Con esta información demostraremos la desigualdad. Por un lado, de $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ tenemos que $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1\|^2 = \|\boldsymbol{v}_2\|^2$. Por otro lado, si $\boldsymbol{w} \in \mathbb{S}$, entonces tenemos que $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{v}_2$, con $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{w} \in \mathbb{S}$ y $\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{S}^{\perp}$. Utilizando ahora la identidad (3), tenemos

$$\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{w}\|^2 + \|\boldsymbol{v}_2\|^2 = \|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{w}_1\|^2 + \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1\|^2 \geq \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1\|^2,$$

y la igualdad vale justamente cuando $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w}$. $\square$

Ejemplo 0.8. Calculemos la distancia de $\boldsymbol{v} = (2,5,2)$ al subespacio $\mathbb{S}_3 = \langle(1,0,1),\ (1,1,0)\rangle$.

- Extendemos la base $\mathcal{B} = \{(1,0,1),\ (1,1,0)\}$ a una base de todo $\mathbb{R}^3$ utilizando la base canónica de este espacio $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$, y obtenemos
$$\mathcal{B}_0 = \{(1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0)\}.$$
- Calculamos una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ utilizando Gram-Schmidt sobre la base $\mathcal{B}_0$, y queda
$$\mathcal{B}_0'' = \{(1,0,1),\ (1,2,-1),\ (1,-1,-1)\}.$$
Luego, $\mathcal{B}_0''$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, $\{(1,0,1),\ (1,2,-1)\}$ es una base (ortogonal) de $\mathbb{S}_3$ y $\{(1,-1,-1)\}$ es una base de $\mathbb{S}_3^{\perp}$.
- Escribimos a $\boldsymbol{v}$ como $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, con $\boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{S}_3$ y $\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{S}_3^{\perp}$, para ello utilizamos la base $\mathcal{B}_0''$:
$$(2,5,2) = 2(1,0,1) + \frac{5}{3}(1,2,-1) - \frac{5}{3}(1,-1,-1).$$
Luego, $\boldsymbol{v}_1 = 2(1,0,1) + \frac{5}{3}(1,2,-1) = \left(\frac{11}{3}, \frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right)$, y $\boldsymbol{v}_2 = \left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$. La distancia de $\boldsymbol{v}$ a $\mathbb{S}_3$ viene entonces dada por
$$\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1\| = \left\|\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)\right\| = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$