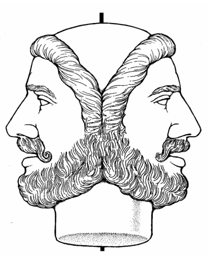
DISCUSIÓN RANGO DE UNA MATRIZ

Discute el rango de la matriz A, según los parámetros a y b:

$$A=\begin{pmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN



Dos ideas generales:
(1): La discusión se basa en fijar el valor de un parámetros según valores y discutir las posibilidades del otro.
(2): Observar la matriz. Y tras la observación se ve que si se suman todas las columnas, se genera una de valor 4a+b, lo que ofrece la posibilidad de sacar ese factor quedando "unos" para luego buscar ceros.

Por lo tanto, sumamos las columnas 2, 3 y 4 a la 1 y calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 4a+b & a & a & a \\ 4a+b & a+b & a & a \\ 4a+b & a & a+b & a \\ 4a+b & a & a & a+b \end{vmatrix}=(4a+b)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & a+b & a & a \\ 1 & a & a+b & a \\ 1 & a & a & a+b \end{vmatrix}=(4a+b)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}=$$

El factor (4a+b) se encuentra en todos los elementos de una línea, luego se puede "sacar" como factor. (propiedad de determinante)

Restamos a las filas 2, 3 y 4 la primera fila. Luego desarrollaremos el determinante por lo elementos de la primera columna.

$$=(4a+b)\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}=(4a+b)\cdot b^3\rightarrow=0\rightarrow\begin{cases} b=0 \\ 4a+b=0\rightarrow a=-\dfrac{b}{4} \end{cases}$$

DISCUSIÓN

Caso 1
Si b = 0 R(A) = 1 (todos los elementos de A son iguales)

Caso 2
Si b $\rightarrow \neq 0$

Caso 2.1: Si $a = -\frac{b}{4}$, entonces R(A) = 1

Caso 2.2: Si $a \neq -\frac{b}{4}$, entonces R(A) = 4