

Apèndix A

Introducció al *Mathematica*

El *Mathematica* és un programa informàtic per fer matemàtiques. Té moltes possibilitats però nosaltres el farem servir només per fer càlculs numèrics i simbòlics amb vectors i matrius. En aquest apèndix fem una introducció general al programa; a cada un dels capítols hi ha les comandes específiques de la matèria del capítol.

A.1 Els documents notebook

Engueu l'ordinador i col·loqueu el ratolí sobre la icona del *Mathematica* . Feu doble-clic. Dalt de tot apareix el nom del programa, el document actiu en cada moment i la barra amb els menús. A sota el document amb el que anem a treballar i que es diu un **notebook**. Ara està en blanc i, com que encara no l'hem salvat, posa: Untitled-1*.

Cliqueu en la barra de menús **Windows/Show Toolbar** per tal que aparegui aquesta barra.

Tot el contingut d'un notebook està distribuït en *cel·les* de diferents tipus, marcades amb unes línies blaves a la dreta. El tipus de cel·la és la primera informació que ens dona la barra superior i, per defecte és una cel·la **Input**. Aquestes són les cel·les on s'escriuen les operacions que volem que faci el programa i les que apareixen automàticament quan comencem a escriure si no ens hem col·locat abans dins una altra cel·la.

Escriviu, per exemple, $2+2$, i demaneu al *Mathematica* que executi l'operació.

Perquè el *Mathematica* executi una comanda heu de prémer, simultàniament, **Ma-júscules+Enter**, o bé l'**Intro** del teclat numèric.

Observeu les cel·les que s'han creat: La cel·la en la què hem escrit és una cel·la **Input** i el *Mathematica* ha escrit **In[1]:=** davant la nostra comanda. La cel·la en què el *Mathematica* escriu el resultat és una cel·la **Output** i el *Mathematica* escriu **Out[1]=** davant del resultat. Les dues cel·les són dins d'una tercera cel·la, marcada amb una altra línia blava a la dreta. En general, una cel·la en pot contenir moltes altres formant *grups* de cel·les. Observeu les diferències entre les línies blaves que les marquen.

Per a crear una nova cel·la, situeu el cursor just sota d'alguna cel·la ja creada; veureu que apareix una línia horitzontal i el cursor pren la forma d'un segment horitzontal parpellejant. Premeu "Enter" o comenceu a escriure i es crearà una nova cel·la.

Per esborrar una cel·la, seleccioneu-la fent clic amb el ratolí a la seva línia blava de la dreta. A continuació premeu la tecla "Supr" (Delete).

Les parelles de cel·les Input-Output queden numerades per l'ordre en que s'executen. Si tornem amb el cursor a una cel·la Input i modifiquem el contingut, aleshores el prefix In[k]:= desapareix. Si la tornem a executar, ella i la corresponent cel·la Output prenen el número següent a l'últim executat (que pot estar en el notebook molt més avall).

En el nostre document volem que no només hi hagi una llista d'ordres donades al programa i el seus resultats, sinó incloure explicacions i distribuir-lo en seccions i apartats. Per això escollim a la barra superior altres tipus de cel·les: Title, Section, Text, etc. En cada cas es formaran els corresponents grups de cel·les que contindran les que anem creant dins. Podem canviar la mida de la lletra, font, color etc. amb el menú **Format**. El menú **Palettes** permet augmentar les opcions del teclat.

Podem ocultar un grup de cel·les fent un doble clic sobre la seva línia blava de la dreta. D'aquesta forma veurem només la primera cel·la del grup. Per tornar-lo a obrir, només cal doble clic sobre la seva línia blava.

Per guardar un **notebook** cliqueu la corresponent icona de la barra superior o el menú **File/Save As** . Quedarà guardat on escolliu amb el sufix .nb. És convenient salvar el fitxer de tant en tant durant la sessió de treball perquè un accident no ens faci perdre tot el que hem anat fent.

A l'hora d'imprimir el document podem escollir que s'imprimeixen o no les ratlles de la dreta que indiquen les cel·les, i els prefixos In[n]:=, Out[n]:=, a **File/PrintingSettings/PrintingOptions**.

A.2 Nombres i operacions aritmètiques.

Mathematica treballa amb quatre tipus de números: enters, racionals, reals i complexos. La unitat complexa s'escriu **I**.

Les operacions aritmètiques entre números s'indiquen per:

a+b	suma	a-b	resta
a*b ó a_b	producte	a/b	divisió
a^b	potència	Sqrt[a]	arrel quadrada

El signe _ indica que s'ha de deixar un espai.

El *Mathematica* interpreta tots els números com exactes, llevat dels decimals que els interpreta com aproximació d'un real. La part entera i la part decimal d'un número estan separades per un punt (no per una coma). Un enter seguit d'un punt és interpretat com a decimal. Amb dades exactes, el *Mathematica* produeix resultats exactes; amb dades decimals, resultats aproximats.

Exemple A.2.1 Executeu les següents operacions:

$\frac{3}{4}$ 3./4 $\frac{3}{4} + \frac{5}{4}$ $\frac{2}{4} + \frac{3}{5}$ $(1+3 I)/(2 - I)$ $(1.+3 I)/(2 - I)$
 1.3^2 (13/10)^2 10^1.2 10^(6/5) Sqrt[2] Sqrt[2.]

Podem fer servir parèntesis per fixar l'ordre en que volem efectuar les operacions.

El *Mathematica* té un ordre per defecte que podeu observar fent, per exemple,

$2 + 6 / 3 + 3^2$ $(2+6)/3+3^2$ $(2+6/3+3)^2$...

Les següents comandes són útils per operar amb complexos:

Re[z]	part real de z
Im[z]	part imaginària de z
Conjugate[z]	conjugat de z
Abs[z]	mòdul de z
Arg[z]	argument de z
ComplexExpand[<i>expr</i>]	desenvolupa <i>expr</i>

Exemple A.2.2 Calculeu el número complex

$$\frac{(1 - i)^{13}(2 + 2i)}{(\sqrt{3} - i)^6}.$$

Observeu el resultat obtingut. Apliqueu-li ComplexExpand:

ComplexExpand[(1 - I)^13*(2 + 2*I)/(Sqrt[3] - I)^6]

Pi	π ;	E	e ;	Degree	$\pi/180$
----	---------	---	-------	--------	-----------

Exemple A.2.3 Executeu: Pi; 2*Pi; 2.*Pi, i observeu les diferències.

Per obtenir un valor aproximat d'una expressió *expr* cal escriure

<i>expr</i> //N	o	N[<i>expr</i>]	amb la precisió per defecte
		N[<i>expr</i> , n]	amb una precisió de n dígit

Exemple A.2.4 Executeu les comandes següents:

2^100	1/3 + 2/7	462/62	N[Pi]
2^100 //N	1/3 + 2/7 //N	462/62 //N	N[Pi,40]
20 Degree	20 Degree //N	N[462/62, 20]	N[Sqrt[2]]

A.3 Utilització de resultats anteriors

%	últim resultat generat
%%	penúltim resultat generat
%%...% (k vegades)	k-èsim resultat generat prèviament
%n	resultat en Out[n]

Exemple A.3.1 Executeu successivament:

7^2 ; $\% + 1$; $3\% + \%^2 + \%\%$; $\%2 + \%3$.

A.4 Variables

Una variable és un *nom* que se li assigna a un valor (numèric o simbòlic); aquest *nom* pot tenir una o diverses lletres i/o nombres. S'introdueix amb el signe igual

In[1]:= $x=4$ In[2]:= $\text{pi}=\text{N}[\text{Pi},10]$
 Out[1]= 4 Out[2]= 3.141592654

A partir de la seva introducció, sempre que escrivim x , el *Mathematica* llegirà 4 i sempre que escrivim pi el *Mathematica* entendre la seva aproximació de 10 dígit. Si assignem a x un nou valor (per exemple $x = 4.6$), l'antic queda oblidat. Si volem eliminar una variable x posem:

Clear[x]

També podem assignar a una variable una *llista* de valors. Qualsevol operació que s'aplica a una llista, el *Mathematica* l'executa amb cadascun un dels valors de la llista.

In[1]:= $a=\{3, \text{Sqrt}[5], 3.01, 1+3\text{I}\}$
 Out[1]= $\{3, \sqrt{5}, 3.01, 1+3i\}$
 In[2]:= a^2+1
 Out[2]= $\{10, 6, 10.0601, -7+6\text{I}\}$

Important. Els noms de funcions o unitats pròpies del *Mathematica* estan protegits i, si intentem fer-los servir, obtindrem un missatge d'avertència. Entre ells les lletres C i D. Donat que totes les funcions del *Mathematica* comencen per majúscula, convé que tots els noms de variable o funcions que definim comencin per minúscula.

A.5 Algunes funcions del *Mathematica*

Sqrt[x]	\sqrt{x}	Exp[x]	e^x	n!	$n!$
Sin[x]	$\sin x$	Cos[x]	$\cos x$	Tan[x]	$\tan x$

Important. En funcions amb diferents valors, tals com Sqrt, ArcSin, ...etc, el *Mathematica* dóna només *un* valor. Per exemple, a la comanda Sqrt[4] el *Mathematica* respon 2, encara que -2 també és una arrel quadrada de 2.

Es pot demanar al *Mathematica* informació sobre una funció escrivint el nom de la funció i clicant F1 (s'obre una pantalla d'ajuda). També és possible obtenir informació sobre una funció o sobre un grup de funcions de la següent manera

?Nom	informació sobre la funció <i>Nom</i>
??Nom	més informació sobre <i>Nom</i>
?Aaaa*	informació sobre les funcions que comencen per Aaaa
?*aaa	informació sobre les que acaben en aaa

Exemple A.5.1 Demaneu informació sobre:

Factor*, GCD, LCM, Mod, Divisors, Quotient, PrimeQ,

A.6 Avaluació

El *Mathematica* treballa també amb expressions algebraiques. En particular pot avaluar una expressió *expr* substituint un dels símbols de *expr* per un cert *valor*. Procedirem de la següent forma:

$expr /. x \rightarrow val$	sustitueix x per <i>val</i> a <i>expr</i>
$expr /. \{x \rightarrow xval, y \rightarrow yval\}$	sustitueix x per <i>xval</i> i y per <i>yval</i> a <i>expr</i>

Exemple A.6.1 Suposem que volem avaluar l'expressió $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ per diferents valors de x . El que resulta més còmode és assignar una variable a aquest polinomi:

```
In[1]:= p=x^3 - 6 x^2 + 11 x - 6
Out[1]= -6 + 11x - 6x^2 + x^3
In[2]:= p /. x -> 0.5
Out[2]= -1.875
```

A.7 Càlcul simbòlic

Les transformacions de les expressions algebraiques es fan amb les següents comandes:

<code>Expand[expr]</code>	multiplica productes i potències
<code>ExpandAll[expr]</code>	aplica <code>Expand</code> a tot arreu
<code>Factor[expr]</code>	redueix a producte de factors
<code>Together[expr]</code>	escriu com una única fracció
<code>Apart[expr]</code>	separa amb termes amb denominadors simples
<code>Cancel[expr]</code>	elimina factors comuns de numerador i denominador
<code>Simplify[expr]</code>	intenta escriure <code>expr</code> de la forma més curta
<code>Collect[expr, x]</code>	agrupa per potències de x

Exemple A.7.1 Apliqueu aquestes funcions a les expressions algebraiques

$$(x^3 - 2x)(x^2 + x + 2) + (-x^3 + x + 2), \quad x(x-1)(x^2 + x + 1) + x(x+1) + 1,$$

$$\frac{(-1+x)^2(2+x)}{(2+x)^2(1+x)},$$

$$\frac{(-1+x)^2(2+x)}{(-3+x)^2(1+x)}$$

Observeu que el *Mathematica* no dona cap factorització del primer polinomi però sí factoritza el segon. Pregunteu-li perquè (`?Factor`).

A.8 Resolució d'equacions

Dues expressions separades per un doble signe igual, $expr1 == expr2$, representa una equació pel *Mathematica* . La comanda

<code>Solve[$expr1 == expr2$, x]</code>	troba les solucions per x
--	---------------------------

Exemple A.8.1 Resoleu les equacions

$$\begin{array}{lll} x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0, & x^2 + 2x - 7 = 0, & x^4 - 5x^2 - 3 = 0, \\ x^5 - 4x + 2 = 0, & x^6 = 1, & \sin x = 1. \end{array}$$

Observeu els resultats. Recordeu que el *Mathematica* sempre dona resultats exactes, això justifica alguns dels resultats obtinguts. Per tal d'obtenir resultats aproximats, podeu fer servir **NSolve** o expressar els coeficients com a decimals (afegint un punt). En el cas de l'equació $x^6 = 1$ demaneu l'argument de les solucions (abans haureu de substituir $(-1)^{\frac{1}{2}}$ per I). En el cas de l'última equació, el *Mathematica* us adverteix que possiblement no us està donant totes les solucions.

El *Mathematica* també resol varies equacions, respecte a varies variables.

`Solve[{expr1 == expr2, expr3 == expr4,... }, {x1,x2,... }]`

Exemple A.8.2 Resoleu els següents sistemes d'equacions respecte les variables x, y :

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} ax + y = 0 \\ 2x + (1 - a)y = 0 \end{array} \right. , & \left\{ \begin{array}{l} ax + y = 0 \\ 2x + (3 - a)y = 0 \end{array} \right. , \\ \left\{ \begin{array}{l} x + y = a \\ ax - y = 0 \end{array} \right. , & \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x + 3y = 0 \end{array} \right. . \end{array}$$

Observeu que el *Mathematica* considera els paràmetres com valors generals i no té en compte el comportament de valors particulars.