Algebra (EI)

Notas de Teoría

21/09/12

Matrices

Cuando trabajamos sistemáticamente con sistemas lineales de ecuaciones, una manera de "ahorrar" notación es evitar los signos " =" y las variables $x_1, \dots, x_n$. Por ejemplo, uno podría reconstruir el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & = & 1 \\ 4x_1 & +4x_2 & = & 20 \end{cases}$$

si le dieran solamente esta información

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Definición 0.1. *Una* matriz *es una tabla (rectangular) de números.*
Las filas *de una matriz son los niveles horizontales de estos números, y las* columnas *de la matriz son los niveles verticales de la misma.*

Por ejemplo, la matriz que figura aquí arriba tiene 2 filas y 3 columnas. Las filas son

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 & 20 \end{pmatrix},$$

y las columnas son

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Definición 0.2. *Una matriz se dice* cuadrada *si tiene la misma cantidad de filas que de columnas.*

Un ejemplo de matriz cuadrada es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

que -recordemos- representa al sistema lineal

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 & +x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & = & 4 \\ -x_1 & & = & 1 \end{cases}.$$

El *método de Gauss* se traduce de manera simple a operaciones con matrices. Se trata de "escalonar" una matriz dada a partir de las siguientes operaciones:

1. Intercambiar dos filas cualesquiera de la matriz;
2. multiplicar una fila de la matriz por un número real distinto de cero;
3. sumarle a una fila de la matriz un múltiplo cualquiera de otra.

Por ejemplo, si aplicamos el método de Gauss a la matriz A, nos queda lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

donde las operaciones que hemos realizado (en este orden) son:

1. a la segunda fila de A, le sumamos -2 veces la primer fila;
2. a la tercer, le sumamos la primer fila;
3. intercambiamos las filas 2 y 3.

Al acabar este proceso, deducimos que el sistema de ecuaciones lineales que codifica A es incompatible, ya que es equivalente a

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & = & 1 \\ & x_2 & = & 2 \\ & 0 & = & 2 \end{cases}.$$

Suma y producto de matrices por un escalar

Para que dos matrices se puedan sumar, tienen que tener el mismo número de filas y el mismo número de columnas. La suma se realiza "componente a componente". Por ejemplo, si tenemos

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

entonces se tiene

$$C + D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, multiplicar una matriz por un escalar es relativamente sencillo: hay que multiplicar cada número de la matriz por este escalar. Por ejemplo:

$$3 \cdot C = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad -5 \cdot C = \begin{pmatrix} -15 & -5 & 0 \\ 10 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices

Uno podría escribir un sistema de ecuaciones utilizando matrices y sus operaciones elementales de otra manera. Lo hacemos para el sistema de ecuaciones (**??**):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El miembro de la derecha es lo que llamaremos el *producto* entre las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. O sea

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Definición 0.3. *El producto de una fila de una matriz* $\mathtt{F} = (a_1, \ldots, a_n)$ *por el de una columna de otra matriz* $\mathtt{C} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *es una matriz de* 1 *fila y* 1 *columna (un número) igual a*

$$\mathtt{F} \cdot \mathtt{C} = \big(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\big).$$

Notar que la cantidad de elementos en la fila y en la columna tiene que ser la misma.

Definición 0.4. *Si una matriz* M_1 *tiene la misma cantidad de columnas que el número de filas de una matriz* M_2 *y* $M_1 = \begin{pmatrix} \mathtt{F}_1 \\ \vdots \\ \mathtt{F}_n \end{pmatrix}$ *y* $M_2 = \big(\mathtt{C}_1 \ \ldots \ \mathtt{C}_m\big)$, *entonces se define el producto entre* M_1 *y* M_2 *como*

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} \mathtt{F}_1 \cdot \mathtt{C}_1 & \mathtt{F}_1 \cdot \mathtt{C}_2 & \ldots & \mathtt{F}_1 \cdot \mathtt{C}_m \\ \mathtt{F}_2 \cdot \mathtt{C}_1 & \mathtt{F}_2 \cdot \mathtt{C}_2 & \ldots & \mathtt{F}_2 \cdot \mathtt{C}_m \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \mathtt{F}_n \cdot \mathtt{C}_1 & \mathtt{F}_n \cdot \mathtt{C}_2 & \ldots & \mathtt{F}_n \cdot \mathtt{C}_m \end{pmatrix}.$$

Notar que

- el número de filas de $M_1 \cdot M_2$ es igual al número de filas de M_1.
- el número de columnas de $M_1 \cdot M_2$ es igual al número de columnas de M_2.
- El producto **NO** necesariamente es conmutativo. De hecho, ni siquiera se puede garantizar que exista $M_2 \cdot M_1$.

Ejemplo 0.5. De las matrices definidas anteriormente, notar que es posible hacer $C \cdot A$ ya que C tiene 3 columnas, y A la misma cantidad de filas. Pero NO es posible hacer $A \cdot C$ ya que el número de columnas de A es 3, y el número de filas de C es 2. Operando, se tiene

$$\begin{aligned} C \cdot A &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & -2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & -2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$