ÀLGEBRA (EI)
Curs 2012-2013
Aplicacions lineals

1. Decidiu si les aplicacions següents són lineals.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, x_1 + x_2 - 1)$.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 3x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, x_1 + x_2, x_1x_2)$.

(d) $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $f(A) = A - 2A^T$.

2. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació donada per $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$.

(a) Demostreu que és una aplicació lineal.

(b) Doneu la matriu de f en la base canònica.

(c) Calculeu $\mathrm{Im}(f)$ i $\mathrm{Ker}(f)$.

3. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'aplicació definida per

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2, x_2, x_1 + x_2 + x_3).$$

(a) Proveu que f és una aplicació lineal.

(b) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$.

(c) Trobeu $\mathrm{Ker}(f)$ i $\mathrm{Im}(f)$, així com també les dimensions i bases respectives.

4. Sigui f l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ donada per

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 4x_4, -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, 2x_2 - 2x_4, x_3 - x_4).$$

Calculeu bases i equacions dels subespais $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$ i $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$.

5. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicació lineal. Pot ser un monomorfisme? Pot ser un epimorfisme?

6. Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfisme. Demostreu que f és injectiu si i només si és exhaustiu.

7. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfisme

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 3x_2 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2 - 3x_3).$$

Sigui $\mathbb{S} = \langle (1, 1, -1) \rangle$ i $\mathbb{T} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$. Calculeu els subespais $f(\mathbb{S})$, $f^{-1}(\mathbb{S})$, $f(\mathbb{T})$ i $f^{-1}(\mathbb{T})$.

8. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal que té com a matriu en la base canònica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la matriu de $f \circ f$ en la base canònica.

(b) Calculeu la matriu de $f \circ f$ en la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

9. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal tal que la seva matriu en la base canònica és

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculeu les dimensions de $\mathrm{Im}(f \circ f)$ i $\mathrm{Ker}(f \circ f)$.

10. Siguin $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ les aplicacions lineals donades per

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (3x_1 - 3x_2, 3x_2 + 3x_3, -x_1 + 2x_2 + 3x_3) \\ g(x_1, x_2, x_3) &= (-3x_3, 3x_3, -x_1 + 2x_2). \end{aligned}$$

Calculeu $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)$ i $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$

11. La matriu d'una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ en la base canònica és

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Quina és la matriu de f en la base $\mathcal{B} = \{(0, 1), (1, 0)\}$?

12. Sigui $\mathbb{V}$ un espai vectorial de dimensió 4, $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una base de $\mathbb{V}$, i siguin

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \qquad & \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4, \qquad & \mathbf{u}_4 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4. \end{aligned}$$

Demostreu que $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ és una base de $\mathbb{V}$ i calculeu les matrius de canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, i de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

13. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_1 + 3x_2 + 7x_3, -x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_2 + 2x_3).$$

(a) Doneu la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$.

(b) Determineu les dimensions del nucli i de la imatge de f. És f injectiva? I exhaustiva?

(c) Pertany el vector $(1, 0, -1)$ al nucli de f? És el vector $(1, 3, 1, 1)$ de la imatge de f?

14. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal definida per:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3).$$

(a) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$.

(b) Calculeu la dimensió de $\mathrm{Ker}(f)$. És f injectiva?

(c) Trobeu una base de $\mathrm{Im}(f)$.

(d) Siguin $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{u}_2 := (0, 2, 1)$ i $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 0)$ tres vectors de $\mathbb{R}^3$. Demostreu que $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$ i doneu la matriu de f en la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ i la base canònica de $\mathbb{R}^4$.