Matrius

Al Mathematica un vector s'ha d'introduir com una llista i una matriu com una llista de llistes.

$\{a,\, b,\, c\}$	vector (a, b, c)
$\{\{a,\, b,\, c\}, \{d,\, e,\, f\}\}$	matriu $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

Si volem que, en les cel·les Out: les matrius estiguin escrites rectangularment hem d'escollir l'opció **Cell/DefaultOutputForm/TraditionalForm**. Si tenim escollida la opció **StandardForm** el Mathematica ens donarà les matrius com les hem de introduïr, és a dir, com la llista de les llista-fila. La forma tradicional és més visual, però ocupa més espai. Per tal que els resultats ja obtinguts no desapareguin rapidament de la pantalla, és millor acostumar-se a la forma estàndard.

Si teniu una matriu escrita en forma estàndard i, puntualment, voleu veure-la en la forma tradicional, podeu fer servir la comanda **MatrixForm**[*list*].

El Mathematica:
Suma (+) i multiplica ($*$ ó espai) llistes, de la mateixa mida, element a element.
Fa el producte d'un número o símbol per una llista, multiplicant tots els elements.
Aplica qualsevol funció a una llista element a element.

Exemple. Introduïu els vectors i les matrius (variables que representen vectors i matrius!)

$$u = (1, 2, 3, 4),\ v = (1, 0, 2, 3),\ A = \{\{0,\ 3,\ 3,\ 1\}, \{-9,\ 3,\ 2,\ 0\}\}, \quad B = \{\{1,\ 6,\ 10,\ 7\}, \{a,\ -1,\ 5,\ -1\}\}$$

i calculeu $u + v,\ u * v,\ A + B,\ A * B,\ 7 * A,\ 5 * B,\ A * A,\ A^2,$ **Sqrt**$[A]$.

Aquesta regla implica, en particular, que podem multiplicar un vector $(v^1, \ldots, v^n)$ per una matriu amb n files i obtenim (escrit en forma tradicional per tal que quedi més clar)

$$(v^1, \ldots, v^n) * \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_k^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 a_1^1 & v^1 a_2^1 & \ldots & v^1 a_k^1 \\ v^2 a_1^2 & v^2 a_2^2 & \ldots & v^2 a_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v^n a_1^n & v^n a_2^n & \ldots & v^n a_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_k^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_k^n \end{pmatrix} * (v^1, \ldots, v^n)$$

Observeu que el Mathematica no fa cap distinció entre un vector-fila i un vector-columna, tots dos són una llista.

El Mathematica també sap multiplicar matrius (de mides convenients) però s'indica amb un punt.

$A.B$	producte de matrius
MatrixPower[A, n]	petència n-èsima de A
Inverse[A]	inversa de A
Transpose[A]	transposada de A
IdentityMatrix[n]	genera la matriu identitat $n \times n$
DiagonalMatrix[*list*]	genera una matriu quadrada diagonal, amb *list* en la diagonal
Det[A]	determinant de A
Minors[A, k]	una matriu dels menors d'ordre k de A

La funció **RowReduce** redueix una matriu M mitjançant l'algorisme de Gauss aplicat *a les files*, és a dir, multiplicant M per una matriu invertible convenient P per l'esquerra: $R = \textbf{RowReduce}[\mathbf{M}] = P.M$.

Sistemes d'equacions linels

Solve[A.{x1,...,xn}==b, {x1,...,xn}]

dóna la solució general del sistema d'equacions lineals $Ax = b$.

NullSpace[A]	dóna una base del sistema homogeni $Ax = 0$
LinearSolve[A, b]	dóna *una* solució del sistema $Ax = b$

Exemple. Discussió i resolució del sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} 2x + y - z & = 3 \\ x + my + z & = 3 \\ 3x + y - mz & = 4 \end{array}\right\}$$

Per valors generals de m podem fer:

$$\begin{array}{rl} Int[-]: & A = \{\{2,1,-1\},\{1,m,1\},\{3,1,-m\}\} \\ Out[-]: & \{\{2,1,-1\},\{1,m,1\},\{3,1,-m\}\} \\ Int[-]: & \text{NullSpace}[A] \\ Out[-]: & \{\ \} \\ Int[-]: & \text{LinearSolve}[A, \{3,3,4\}] \\ Out[-]: & \{\frac{-1+3}{m}, \frac{3}{2m}, \frac{1}{2m}\} \end{array}$$

També podem fer:

$$\begin{array}{rl} Int[-]: & \text{Solve}[A.\{x,y,z\} == \{3,3,4\}, \{x,y,z\}] \\ Out[-]: & \{\{x \to -\frac{1-3m}{2m}, y \to \frac{3}{2m}, z \to \frac{1}{2m} \end{array}$$

Clarament, aquesta soluci no val si m=0. Per aquest valor tenim:

$$\begin{array}{rl} Int[-]: & A0 = \{\{2,1,-1\},\{1,0,1\},\{3,1,0\}\} \\ Out[-]: & \{\{2,1,-1\},\{1,0,1\},\{3,1,0\}\} \\ Int[-]: & \text{NullSpace}[A0] \\ Out[-]: & \{\{-1,3,1\}\} \\ Int[-]: & \text{LinearSolve}[A0, \{3,3,4\}] \\ Out[-]: & \text{LinearSolve}[\{\{2,1,-1\},\{1,0,1\},\{3,1,0\}\},\{3,3,4\}] \end{array}$$

Aquesta última línia vol dir que no ha trobat cap solució. També podem fer

$$\begin{array}{rl} Int[-]: & \text{Solve}[A0.\{x,y,z\} == \{3,3,4\}, \{x,y,z\}] \\ Out[-]: & \{\ \} \end{array}$$

Per tant, per m=0, el sistema és incompatible.

Cal ara estudiar tots els valors de m que fan, o no, el sistema compatible:

$$\begin{array}{rl} Int[-]: & \text{Det}[A] \\ Out[-]: & 4m - 2m^2 \\ Int[-]: & \text{Factor}[\%] \\ Out[-]: & -2(-2+m)m \end{array}$$

Cal veure que passa pel valor m=2. Tenim:

$$\begin{array}{ll} Int[-]: & A2 = \{\{2,1,-1\},\{1,2,1\},\{3,1,-2\}\} \\ Out[-]: & \{\{2,1,-1\},\{1,2,1\},\{3,1,-2\}\} \\ Int[-]: & \text{NullSpace}[A2] \\ Out[-]: & \{\{1,-1,1\}\} \\ Int[-]: & \text{LinearSolve}[A2,\{3,3,4\}] \\ Out[-]: & \{1,1,0\} \end{array}$$

O també

$$\begin{array}{ll} Int[-]: & \text{Solve}[A2.\{x,y,z\} == \{3,3,4\},\{x,y,z\}] \\ Out[-]: & \{\{x \to 1+z,\ y \to\ 1-z\}\} \end{array}$$

Per $m = 2$ el sistema és compatible indeterminat i podem escollir z com a variable arbitraria. Això acaba la discusió del sistema.

Dependència i independència lineal

Siguin vi= $\{v_i^1,\ldots,v_i^n\}$, $i = 1,\ldots,k$, les coordenades dels vectors $v_1,\ldots v_k$. Sigui

A=Transpose[{v1, ..., vk}]

Donat un vector u

LinearSolve[A, u]

ens dóna els coeficients de $u = \sum_{i=1}^{k} \lambda^i v_i$. Si no hi ha solució, u és linealment independent de $v_1,\ldots,v_k$.

Equacions d'un subespai vectorial

Considerem un subespai $F =< v_1,\ldots,v_k >$. Els vectors de F són de la forma

$$x = (x^1,\ldots,x^n) = a^1 v_1 + \cdots + a^k v_k$$

on $a^1,\ldots,a^k$ són paràmetres. Eliminant aquests paràmetres obtenim unes equacions lineals que relacionen les coordenades $x^1,\ldots,x^n$ i que són unes equacions de F. Per això està indicada la següent funció del Mathematica.

Solve[*eqns*, *vars*, *elims*]	troba les solucions de les equacions *eqns* per les variable *vars* eliminant les variable *elims*.

Exemple. Introduïm al Mathematica els vectors

$$v1 = \{5,-7,15,14\},\quad v2 = \{2,-1,6,2\},\quad v3 = \{0,-1,0,2\},\quad v4 = \{1,0,3,0\}$$

Per trobar unes equacions del subespai que generen escrivim

Solve[a*v1+b*v2+c*v3+d*v4=={x,y,z,t}, {x,y,z,t}, {a,b,c,d}]

Obtenim

Out[]:{x -> z/3, y -> -(t/2)}

És a dir $F = \{(x,y,z,t)\ x = \frac{z}{3},\ y = -\frac{t}{2}\}$.