Algebra (EI)

Notas de Teoria

06/11/12

1. Aplicaciones lineales

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales. Una aplicación $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se dice *lineal* si

- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)\ \forall v_1,\, v_2 \in \mathbb{V}$;
- $f(\lambda v) = \lambda\, f(v)\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\, v \in \mathbb{V}$.

Ejemplo 1.1.

1. La rotación de 90 grados en el plano se modela como la aplicación lineal siguiente
$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & (-x_2, x_1) \end{array}$$
2. La simetría respecto del plano "xy'' es la aplicación lineal siguiente:
$$\begin{array}{rccc} f_2 & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_1, x_2, -x_3). \end{array}$$
3. La transposición de matrices es también una aplicación lineal:
$$\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

2. Matriz asociada a una aplicación lineal

Notar que la aplicación lineal f_1 se puede también calcular asi:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$
En general, cualquier matrix $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ define una aplicación lineal $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dada por
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$
Y toda aplicación lineal $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ viene dada de esta forma. La matriz A se denomina *la matriz de f en las bases canónicas*. Para calcularla se ha de evaluar f en los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo 2.1. Consideremos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_2 - x_1, x_1 + x_2)$. Para encontrar la matriz de f en la base canónica, primero calculamos

- $f(1, 0) = (2, -1, 1)$,

- $f(0,1)=(-1,1,1)$,

Luego, se tiene

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

y efectivamente se cumple que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_1-x_2\\ -x_1+x_2\\ x_1+x_2\end{pmatrix}=\text{“}f(x_1,x_2)''.$$

En general, dada una aplicación lineal $f:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$, fijadas bases $\mathcal{B}_{\mathbb{V}}=\{v_1,\ldots,v_n\}$ y $\mathcal{B}_{\mathbb{W}}$ de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respectivamente, se puede definir la matriz de f en las bases $\mathcal{B}_{\mathbb{V}}$ y $\mathcal{B}_W$ como aquella que tiene por columnas las coordenadas de $f(v_1),\ldots,f(v_n)$ en la base $\mathcal{B}_{\mathbb{W}}$.

Ejemplo 2.2. Consideremos la aplicación lineal

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})\\ & \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a & c\\ b & d\\ a-d & b-c\end{pmatrix}\end{array}.$$

Si fijamos las bases $\mathcal{B}_1=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ y $\mathcal{B}_2=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

Calculamos

- $f\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,
- $f\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,
- $f\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$,
- $f\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Luego, la matriz de f en las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$