Algebra (EI)

Notas de Teoría

09/10/12

Combinaciones lineales de vectores - Generadores

Hasta ahora hemos presentado espacios vectoriales mediante ecuaciones que deben cumplir sus elementos. Veamos otra manera de hacerlo, que nos será de utilidad a la hora de operar con estos subespacios más adelante.

Por ejemplo, consideremos el subespacio

$$\mathbb{S}_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \, x_1 = 3x_3, \, x_2 = -x_3\}.$$

Geométricamente, este subespacio es la "recta" en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen $(0, 0, 0)$ y también por el vector $(3, -1, 1)$. Sus elementos son todos múltiplos escalares del vector $(3, -1, 1)$, por lo que podríamos describirlo también así:

$$\mathbb{S}_1 = \{\lambda \cdot (3, -1, 1), \, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Notemos otra cosa más, si $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ es otro subespacio que contiene al $(3, -1, 1)$, entonces también ha de contener a todo el conjunto de vectores de $\mathbb{S}_1$, ya que en la definición de subespacio hemos visto que si un vector pertenece al mismo, todos sus múltiplos también están allí. De alguna manera, $\mathbb{S}_1$ es el subespacio "más chico" que contiene al vector $(3, -1, 1)$ y por ello diremos que es el subespacio "generado" por este vector. Más en general:

Definición 0.1. *Sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vectores de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, denotaremos por $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ y lo llamaremos* el subespacio generado por $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ *al conjunto*

$$\mathbb{S} = \{\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k, \, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 0.2. *Un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ se dice que es* combinación lineal *de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{V}$, si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k.$$

Dicho de otra manera, el subespacio generado por$\mathbf{v}_1, \ldots, \cdot \mathbf{v}_k$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores. De alguna manera, con finita información (los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$) estamos "generando" un conjunto infinito, el de todas sus combinaciones lineales.

Ejemplo 0.3. Por lo que hemos visto al principio $\langle (3, -1, 1) \rangle = \mathbb{S}_1$, la recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el $(0, 0, 0)$ y el punto $(3, -1, 1)$.

Ejemplo 0.4. $\mathbb{S}_2 = \langle (1, 0, 0), \, (0, 1, 0) \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, z = 0\}$.

El motivo por el cual llamamos a $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ "subespacio generado" es por lo siguiente:

Proposición 0.5. *Sean* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ *vectores de un espacio vectorial* $\mathbb{V}$*, entonces* $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ *es siempre un subespacio de* $\mathbb{V}$*. Si* $\mathbb{S}$ *es otro subespacio de* $\mathbb{V}$ *que contiene a* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$*, entonces*

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle \subset \mathbb{S}.$$

Demostración. Recordemos que para demostrar que un subconjunto cualquiera $\mathbb{S}_0$ de $\mathbb{V}$ es un subespacio hemos de verificar tres condiciones:

1. $\mathbb{S}_0 \neq \emptyset$
2. Si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{S}_0$, entonces $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathbb{S}_0$
3. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{S}_0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{S}_0$.

Veamos paso por paso que cada una de estas condiciones se cumple para $\mathbb{S}_0 = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$:

1. haciendo $\lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$, se tiene que el vector nulo

   $$\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_k$$

   es un elemento de $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$, con lo cual deducimos que no puede ser este conjunto vacío, ya que al menos contiene al vector nulo.
2. Dos elementos del espacio $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ de $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ se escriben de la manera siguiente

   $$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k \\ \mathbf{w} &= \mu_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \ldots + \mu_k \cdot \mathbf{v}_k, \end{aligned}$$

   con $\lambda_1, \ldots, \lambda_k\, \mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$. Haciendo la suma entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, y utilizando las propiedades conmutativas y distributivas de las operaciones en el espacio vectorial $\mathbb{V}$, se tiene

   $$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\lambda_1 + \mu_1) \cdot \mathbf{v}_1 + \ldots + (\lambda_k + \mu_k) \cdot \mathbf{v}_k.$$

   De aquí concluimos que $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$, ya que se puede escribir como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Los escalar ahora serán, respectivamente, $\lambda_1 + \mu_1$, $\lambda_2 + \mu_2, \ldots, \lambda_k + \mu_k$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y -como antes- $\mathbf{v} = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k$, entonces

   $$\lambda \cdot \mathbf{v} = \lambda\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda\lambda_k \cdot \mathbf{v}_k,$$

   que es nuevamente una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k$. Luego, se tiene $\lambda \cdot \mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$.

Como hemos probado las 3 propiedades que definen a un subespacio, concluimos que $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{V}$. Sea ahora otro subespacio $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ tal que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{S}$. Entonces, cualesquiera sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tendremos:

- $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 \in \mathbb{S}$, $\lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 \in \mathbb{S}, \ldots \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k \in \mathbb{S}$, ya que $\mathbb{S}$ es un subespacio, luego los múltiplos escalares de los vectores pertenecen también a ese conjunto;
- Si sumamos ahora todos los vectores que nos hemos construido en el punto anterior, tendremos que $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k$ también tiene que ser un elemento de $\mathbb{S}$ ya que al ser subespacio, la suma de vectores de $\mathbb{S}$ tiene que pertenecer a ese conjunto.

En conclusión, *cualquier combinación lineal de los vectores* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ *tiene que ser un elemento de* $\mathbb{S}$, y esto demuestra que $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle \subset \mathbb{S}$, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Generadores vs ecuaciones

En algunas ocasiones necesitaremos representar subespacios por medio de ecuaciones entre sus coordenadas (representación implícita) o por medio de sus generadores (representación paramétrica). La primera escritura es útil por ejemplo para decidir si un punto pertenece al subespacio o no, mientras que la segunda nos permite generar puntos del conjunto de manera relativamente elemental.

Veamos ahora con varios ejemplos cómo pasar de una presentación a la otra. Nuevamente en el camino volveremos a encontrarnos con sistemas de ecuaciones y parámetros.

De ecuaciones a generadores. Supongamos que queremos encontrar generadores del subespacio vectorial

$$\mathbb{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + d = b + c \right\},$$

el subespacio de matrices cuadradas 2×2 tales que la suma de sus diagonales coincide. Veamos cómo encontrar generadores para este subespacio: todo elemento de este conjunto cumple con la condición siguiente: el valor de la coordenada $(1, 1)$ es igual a la suma de los elementos que figuran en la segunda diagonal, menos el elemento $(2, 2)$. En símbolos: $a = b + c - d$, luego, una matriz de $\mathbb{S}_3$ es de la forma $\begin{pmatrix} b + c - d & b \\ c & d \end{pmatrix}$, donde b, c y d pueden ser cualquier número real. Descomponemos nuestra matriz así:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \begin{pmatrix} b + c - d & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Y esto nos dice que

$$\mathbb{S}_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

En efecto, cada una de las tres matrices que aparecen a la derecha pertenecen a $\mathbb{S}_3$ ya que la suma de sus diagonales coincide. Por otro lado, de la formula que obtuvimos en (1) se deduce que cualquier combinación lineal de estas tres matrices (recordar que b, c y d podían ser *cualquier* número real) es un elemento de $\mathbb{S}_3$, y recíprocamente: todo elemento de $\mathbb{S}_3$ se escribe como combinación lineal de estas tres matrices.

Veamos otro ejemplo. Consideremos el subespacio de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{S}_4 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 = x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Este subespacio es el conjunto de soluciones de un sistema *homogéneo*, y luego utilizamos eliminación de Gauss para resolverlo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{F_2 - F_1 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mirando el sistema simplificado luego de aplicar eliminación de Gauss, deducimos que se trata de un sistema compatible indeterminado, y sus soluciones son de la forma $(-\frac{1}{2}x_3, -\frac{1}{2}x_3, x_3)$, con $x_3 \in \mathbb{R}$. Luego, escribimos a la solución genérica de esta manera

$$(-\frac{1}{2}x_3, -\frac{1}{2}x_3, x_3) = x_3(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1),$$

y concluimos que

$$\mathbb{S}_4 = \big\langle(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)\big\rangle.$$

La demostración de que esta igualdad es realmente cierta es análoga a lo que hicimos en el caso anterior.

En general **para pasar de ecuaciones a generadores hay que resolver un sistema lineal homogéneo de ecuaciones.**

De generadores a ecuaciones

Veamos un par de ejemplos, como en el caso anterior.

$$\mathbb{S}_5 = \langle(1, 0, -1, 0), (1, 1, 0, 1)\rangle.$$

Dado $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}_5$, queremos encontrar ecuaciones entre sus coordenadas. Para ello utilicemos la definición de este subespacio: si $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}_5$, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1(1, 0, -1, 0), (1, 1, 0, 1) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2, -\lambda_1, \lambda_2).$$

Planteamos ahora un sistema de ecuaciones donde las λ's son las incógnitas y las x's los parámetros:

$$\left\{\begin{array}{rrcl} \lambda_1 & +\lambda_2 & = & x_1 \\ & \lambda_2 & = & x_2 \\ -\lambda_1 & & = & x_3 \\ & \lambda_2 & = & x_4. \end{array}\right.$$

Al hacer eliminación de Gauss (sobre las λ's), resulta el siguiente sistema equivalente:

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{rrcc} \lambda_1 & +\lambda_2 & = & x_1 \\ & \lambda_2 & = & x_2 \\ & 0 & = & x_1 - x_2 + x_3 \\ & 0 & = & x_4 - x_2 \end{array}\right.$$

Este sistema será compatible si y solamente si $x_4 - x_2 = x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Afirmo entonces que

$$\mathbb{S}_5 = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \, x_1 - x_2 + x_3 = 0 = x_4 - x_2\big\}.$$

En efecto, los generadores de $\mathbb{S}_5$ cumplen con estas ecuaciones, es fácil de verificar esto. Por otro lado, si tenemos un vector que cumple con estas igualdades, el sistema (2) será compatible, y haciendo $\lambda_2 = x_2$ y $\lambda_1 = x_1 - x_2$, se tendrá que (x_1, x_2, x_3, x_4) se escribe como una combinación lineal de $(1, 0, -1, 0)$ y $(1, 1, 0, 1)$. Luego, es un elemento del espacio generado por estos vectores.

Veamos otro ejemplo: encontrar ecuaciones para las coordenadas del subespacio

$$\mathbb{S}_6 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Una matriz general de $\mathbb{S}_6$ será de la forma

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Volvemos a plantear el sistema donde las incógnitas son λ_1 y λ_2 :

$$\begin{cases} \lambda_1 & & = & x_{11} \\ & \lambda_2 & = & x_{12} \\ & \lambda_2 & = & x_{21} \\ \lambda_1 & & = & x_{22}, \end{cases}$$

y haciendo eliminación de Gauss sobre las incógnitas (los λ's), resulta:

$$\begin{cases} \lambda_1 & & = & x_{11} \\ & \lambda_2 & = & x_{12} \\ & 0 & = & x_{21} - x_{12} \\ & 0 & = & x_{22} - x_{11}, \end{cases}$$

Luego, para que el sistema sea compatible, se tiene que las dos últimas expresiones tienen que ser iguales a cero y recíprocamente, si las dos últimas expresiones son nulas, el sistema tendrá solución única. De aquí deducimos:

$$\mathbb{S}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, x_{21} - x_{12} = 0 = x_{22} - x_{11} \right\}.$$

En general, **para pasar de generadores a ecuaciones hay que plantear un sistema lineal general involucrando parámetros (los λ's) y coordenadas (las x's), y hacer eliminación de Gauss sobre los parámetros.**