

Introducció al *Mathematica*

1 Els fitxers

El *Mathematica* és un programa informàtic per fer matemàtiques. Té moltes possibilitats però, en aquesta assignatura, el farem servir només per fer càlculs, numèrics i simbòlics, i per començar a familiaritzar-nos amb aquest tipus d'eines. No és un programa gratuït i no disposem de llicència pel seu ús fora de la UB. Hi ha altres programes semblants en el mercat (Maple,...) amb un funcionament i possibilitats semblants.

Les instruccions que segueixen suposen que us trobeu davant d'un ordinador de la UB.

Engueu l'ordinador i col·loqueu el ratolí sobre la icona del Mathematica 4.0. Feu doble-clic. El fitxer que acabeu d'obrir és un **notebook** del Mathematica 4.0. Ara està en blanc.

Al començar a escriure en el notebook veureu que apareixen unes línies blaves a la dreta de la pantalla. Això vol dir que s'ha creat una **cel·la**. Tot el contingut d'un notebook estarà dins de cel·les.

•Escriviu, per exemple, $2+2$. Ara demaneu al Mathematica que executi l'operació.

Per tal que el Mathematica executi una comanda heu de prémer, simultàneament, **Majúscules+Enter**.

Observeu les cel·les que s'han creat: La cel·la en la que hem escrit és una cel·la **Input** i el Mathematica ha escrit **In[1]:=** davant la nostra comanda. La cel·la en la que el Mathematica escriu el resultat és una cel·la **Output** i el Mathematica escriu **Out[1]:=** davant del resultat. Les dues cel·les són dins d'una tercera cel·la. Observeu les diferències entre les línies blaves que les marquen.

Per *crear una nova cel·la* situeu el ratolí just sota de la cel·la que teniu creada; veureu que el cursor canvia a posició horitzontal i apareix una línia. Premeu "Enter" i es crearà una nova cel·la.

Per *esborrar una cel·la* seleccioneu-la fent clic amb el ratolí a la seva línia blava. A continuació premeu la tecla "Delete" (Supr).

Les parelles de cel·les Input-Output queden numerades per l'ordre en que s'executen. Si tornem amb el cursor a una cel·la Input i modifiquem el contingut, aleshores el prefix *In[k]:=* desapareix. Si la tornem a executar, ella i la corresponent cel·la Output prenen el número següent a l'últim executat (que pot estar en el notebook molt més avall).

També podeu escriure qualsevol text en una cel·la i no demanar al Mathematica que executi res. Això es fa, per exemple, quan es volen incloure enunciats, comentaris etc.. Aleshores, convé obrir cel·les de text en els llocs adequats. Per fer-ho seleccioneu la cel·la on voleu escriure un text clicant amb el ratolí en les ratlletes blaves de la dreta i, a continuació, cliqueu en **Format/Style** de la barra superior. Les cel·les quan s'obren són, per defecte, cel·les **Input**. Escolliu ara **Text**. Observeu que les ratlletes blaves de la dreta canvien d'aspecte. Ara podeu escollir les fonts que vulgueu servir, dins de **Format**, les opcions **Font, Face, Size,...**. Fent servir **File/Palettes** es poden ampliar les possibilitats del teclat amb símbols, lletres gregues, super- i subíndexs, etc.

Observeu que passa quan escrivim la paraula Mathematica en una cel·la Text.

En **Format** hi ha també la possibilitat d'obrir una **barra d'eines**. En aquesta barra podeu escollir directament el tipus de cel·la i tindreu icones per guardar, imprimir, etc..

Per guardar un **notebook** cliqueu **File/Save As** i, quan sorti la finestra de diàleg, lo guardeu en

un disquet vostre amb el *nom* que vulgueu. Quedarà guardat amb el sufix .nb, és a dir : *nom.nb* . De fet seria bo haver guardat el fitxer al començar la sessió i anar guardant lo que es va fent, de tant en tant (a **File/Save** o amb la icona de la barra d'eines).

Per imprimir el fitxer cliquem a **File/Print** o a la icona corresponent de la barra d'eines.

A **File/PrintingSettings/PrintingOptions**, podem escollir que s'imprimeixen o no les ratlles de la dreta que indiquen les cel·les, i els `Int[n]:=`, `Out[n]:=` .

2 Operacions aritmètiques.

Les operacions aritmètiques entre números s'indiquen per:

$a+b$		suma	$a-b$	resta
$a*b$ ó $a _ b$		producte	a/b	divisió
a^b		potència	<code>Sqrt[a]</code>	arrel quadrada

El signe `_` indica que s'ha de deixar un espai.

- Efectueu diferents operacions amb números concrets. Per exemple:
 $2 + 6 / 3 + 3^2$; $(2+6)/3+3^2$; $(2+6/3+3)^2 \dots$ etc.
 Esbrineu en quin ordre de preferència es realitzen les operacions.

3 Algunes funcions del Mathematica

<code>Sqrt[x]</code>	\sqrt{x}	<code>Exp[x]</code>	e^x	$n!$	$n!$
<code>Sin[x]</code>	$\sin x$	<code>Cos[x]</code>	$\cos x$	<code>Tan[x]</code>	$\tan x$

Important. En funcions amb diferents valors, tals com `Sqrt`, `ArcSin`, ...etc, el Mathematica dona només *un* valor. Per exemple, a la comanda `Sqrt[4]` el Mathematica respon 2, encara que -2 també és una arrel quadrada de 2.

Es pot demanar al Mathematica informació sobre una funció, o sobre un grup de funcions de la següent manera

<code>?Nom</code>	informació sobre la funció <i>Nom</i>
<code>??Nom</code>	més informació sobre <i>Nom</i>
<code>?Aaaa*</code>	informació sobre les funcions que comencen pre Aaaa
<code>?*aaa</code>	informació sobre les que acaben en aaa, ...etc.

- Demaneu informació sobre:
`Factor*`, `GCD`, `LCM`, `Mod`, `Divisors`, `Quotient`, `PrimeQ`, .

4 Tipus de números. Aproximacions

El Mathematica treballa amb quatre tipus de números: enters, racionals, reals i complexos. El nom d'alguns números habituals és:

Pi	π	E	e
Degree	$\pi/180$	I	$i = \sqrt{-1}$

El Mathematica interpreta tots els números com exactes, llevat dels decimals que els interpreta com aproximació d'un real. La part entera i la part decimal d'un número estan separades per un punt (no per una coma). Un enter seguit d'un punt, per exemple 4., és interpretat com a decimal. Amb dades exactes, el Mathematica produeix resultats exactes; amb dades decimals, resultats aproximats.

- Executeu les comandes següents i observeu com treballa el Mathematica:

5/6	50/60	5./6	Pi^2
1/3 + 7/8 I	1/3 + 7./8 I	1./3 + 7/8 I	1./3 + 7./8 I
Sin[Pi/5]	Sin[Pi/5.]	Sqrt[3]	Sqrt[3.]

Per obtenir un valor aproximat d'una expressió *expr* cal escriure

<i>expr</i> //N	ó	N[<i>expr</i>]	amb la precisió per defecte
N[<i>expr</i> , n]			amb una precisió de n dígitos

- Executeu les comandes següents:

2^100	1/3 + 2/7	462/62	N[Pi]
2^100 //N	1/3 + 2/7 //N	462/62 //N	N[Pi,40]
20 Degree	20 Degree //N	N[462/62, 20]	Sin[Pi/2]

Per els complexos tenim:

Re[z]	part real de z
Im[z]	part imaginària de z
Conjugate[z]	conjugat de z
Abs[z]	mòdul de z
Arg[z]	argument de z
ComplexExpand[<i>expr</i>]	desenvolupa <i>expr</i>

- Calculeu el número complex

$$\frac{(1-i)^{13}(2+2i)}{(\sqrt{3}-i)^6}.$$

Observeu el resultat obtingut. Apliqueu-li ComplexExpand.

- Feu servir el Mathematica per a calcular $\cos 5\alpha$ i $\sin 5\alpha$ en funció de $\cos \alpha$ i $\sin \alpha$. [Indicació: Calculeu $(a+bi)^5$.]

5 Utilització de resultats anteriors

	%	últim resultat generat
	%%	penúltim resultat generat
%%...%	(k vegades)	k-èsim resultat generat previamente
	%n	resultat en Out[n]

•Executeu successivament:

```
7^2 ;      % + 1 ;      3 % + %^2 + %% ;      %2 + %3 .
```

6 Variables

Una variable és un *nom* que se li assigna a un valor (numèric o simbòlic); aquest *nom* pot tenir una o varies lletres i/o números. S'introdueix amb el signe igual

```
Int[1] := x = 4          Int[2] := pi = N[Pi, 10]
Out[1] := 4              Out[2] := 3.1415926535897932385
```

A partir de la seva introducció, sempre que escrivim x , el Mathematica llegirà 4 i sempre que escrivim pi el Mathematica entendre la seva aproximació de 10 dígits. Si assignem a x un nou valor (per exemple $x = 4.6$), l'antic queda oblidat. Si volem eliminar una variable x posem

$x = .$ ó Clear[x]

També podem assignar a una variable una *llista* de valors. Qualsevol operació que s'aplica a una llista, el Mathematica la executa amb cada un dels valors de la llista.

```
Int[1] := a = {3, Sqrt[5], 3.01, 1 + 3 I}
Out[1] := {3, Sqrt[5], 3.01, 1 + 3 I}
Int[2] := a^2 + 1
Out[2] := {10, 6, 10.0601, -7 + 6 I}
```

Important. Els noms de funcions o unitats propies del Mathematica estan protegits i, si intenten fer-los servir, obtindrem un missatge d'advertència. Entre ells les lletres C i D. Donat que totes les funcions del Mathematica comencen per majúscula, convé que tots els noms de variable o funcions que definim comencin per minúscula.

7 Avaluació

El Mathematica treballa també amb expressions algebraiques. En particular pot avaluar una expressió *expr* substituint un dels símbols de *expr* per un cert *valor*. Procedirem de la següent forma:

<i>expr</i> /. $x \rightarrow val$	sustitueix x per <i>val</i> a <i>expr</i>
<i>expr</i> /. $x \rightarrow xval, y \rightarrow yval$	sustitueix x per <i>xval</i> i y per <i>yval</i> a <i>expr</i>

Exemple. Suposem que volem avaluar l'expressió $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ per diferents valors de x . Lo més còmode és assignar una variable a aquest polinomi:

```

Int[1]:= p=x^3 - 6 x^2 + 11 x - 6
Out[1]:= -6 + 11x - 6x^2 + x^3
Int[2]:= p /. x -> 0.5
Out[2]:= -1.875

```

- (i) Trobeu el valor de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ per $x = 1.5, 2.5, 3.5$.
- (ii) Trobeu el valor de l'expressió $(x + y)(x - y)^2$ quan $x = 3$ i $y = 1 - a$.

8 Resolució d'equacions

Dues expressions separades per un doble signe igual, $expr1 == expr2$, representa una equació pel Mathematica. La comanda

Solve[$expr1 == expr2, x$]	troba les solucions per x
------------------------------	---------------------------

- Resoleu les equacions

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0, \quad x^2 + 2x - 7 = 0, \quad x^4 - 5x^2 - 3 = 0, \quad x^5 - 4x + 2, \quad x^6 = 1, \quad \sin x = 1.$$

Observeu els resultats. Recordeu que el Mathematica sempre dona resultats exactes, això justifica alguns dels resultats obtinguts. Per tal d'obtenir resultats aproximats podeu fer servir **NSolve** o expressar els coeficients com a decimals (afegint un punt). En el cas de l'equació $x^6 = 1$ demaneu l'argument de les solucions (abans haureu de substituir $(-1)^{\frac{1}{2}}$ per I). En el cas de l'última equació, el Mathematica us adverteix de que possiblement no us està donant totes les solucions.

El Mathematica també resol varies equacions, respecte a varies variable.

Solve[{ $expr1 == expr2, expr3 == expr4, \dots$ }, { x_1, x_2, \dots }]

- Resoleu els següents sistemes d'equacions respecte les variable x, y :

$$\left. \begin{array}{l} ax + y = 0 \\ 2x + (1 - a)y = 0 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} ax + y = 0 \\ 2x + (3 - a)y = 0 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} x + y = a \\ ax - y = 0 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x + 3y = 0 \end{array} \right\}$$

Observeu que el Mathematica considera els paràmetres com valors generals i no considera el comportament de valors particulars.

9 Divisibilitat a \mathbb{Z}

Les següents funcions són útils en problemes de divisibilitat a \mathbb{Z} :

Quotient	GCD	LCM
Mod	ExtendedGCD	FactorInteger

Si alguna no la coneixeu encara, demaneu-li al Mathematica que fa.

Observeu que **Quotient[a,b]** i **Mod[a,b]** no sempre coincideixen amb el quocient i la resta de la divisió entera de a per b . Compareu, per exemple, el valor d'aquestes funcions pels parells de números: (7,5), (-7,5), (7,-5) i (-7,-5), i les respectives divisions enteres.

10 Divisibilitat de polinomis

Les següents funcions són útils en divisibilitat de polinomis:

PolynomialQuotient	PolynomialGCD	Factor
PolynomialRemainder	PolynomialLCM	

Si alguna no la coneixeu encara, demaneu-li al Mathematica que fa.

La funció **Factor** fa la descomposició sobre els enters, però calcula factors amb coeficients enters de polinomis a coeficients no enters. Per exemple, demaneu la factorització de $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{243}$.