Algebra (EI)

Notas de Teoría

16/10/12

Independencia Lineal

Hemos visto que un subespacio vectorial $\mathbb{S}$ puede tener una cantidad enorme de generadores. Por ejemplo,

$$\langle (1,0,0),(0,1,0)\rangle = \langle (1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\rangle = \langle (1,0,0),(0,1,0),(1,1,0),(1,-1,0)\rangle \ldots$$

En general nos interesa quedarnos con la menor información necesaria para generar el subespacio, y eso nos lleva al concepto de *dependencia lineal.*

Definición 0.1. *Un conjunto de vectores* $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ *en un espacio vectorial* $\mathbb{V}$ *se dice* linealmente dependiente *si existe un vector* $\boldsymbol{v}_j$ *entre ellos tal que*

$$\langle \boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\rangle = \langle \boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{j-1},\boldsymbol{v}_{j+1},\ldots,\boldsymbol{v}_n\rangle.$$

Ejemplo 0.2. Los conjuntos $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$ y $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0),(1,-1,0)\}$ son linealmente dependientes ya que -como vimos recién-

$$\langle (1,1,0),\ (0,1,0)\rangle = \langle (1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\rangle = \langle (1,0,0),(0,1,0),(1,1,0),(1,-1,0)\rangle.$$

De la definición que hemos dado se desprende inmediatamente lo siguiente.

Proposición 0.3. *Si* $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ *es un conjunto linealmente dependiente entonces existe un vector* $\boldsymbol{v}_j$ *que es combinación lineal de* $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{j-1},\boldsymbol{v}_{j+1},\ldots,\boldsymbol{v}_n$.

En el caso del ejemplo 0.2, se tiene

$$(1,1,0) = 1\cdot(1,0,0)+1\cdot(0,1,0),\ \ (1,-1,0) = 1\cdot(1,0,0)+(-1)\cdot(0,1,0).$$

Definición 0.4. *Un conjunto de vectores* $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ *se dice* linealmente independiente *si no es linealmente dependiente. O sea, ningún vector en esa familia es combinación lineal de los otros.*

A los efectos prácticos de decidir si una familia es linealmente dependiente o no, tenemos la siguiente

Proposición 0.5. *Una familia de vectores* $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\mathbf{v_n}\}$ *en un espacio vectorial* $\mathbb{V}$ *es linealmente independiente si y solo si la única solución de la ecuación*

$$\alpha_1\cdot\boldsymbol{v}_1+\ldots+\alpha_n\cdot\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

es $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$.

Ejemplo 0.6. La familia $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$ NO es linealmente independiente ya que haciendo $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_3 = -1$ se tiene

$$1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + (-1) \cdot (1,1,0) = (0,0,0).$$

Por otro lado, el conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ sí que es linealmente independiente, ya que si planteamos la ecuación

$$\alpha_1 \cdot (1,0,0) + \alpha_2 \cdot (0,1,0) = (0,0,0),$$

obtenemos que necesariamente $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Por la proposición 0.5, concluimos que estos vectores son linealmente independientes.

Ejemplo 0.7. Tenemos que decidir si el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente independiente o no. Planteamos

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y encontramos que el sistema de ecuaciones es compatible indeterminado. Todas sus soluciones son de la forma $(-\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3)$, con $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Así que concluimos que el sistema es linealmente dependiente, ya que podemos encontrar una combinación lineal no trivial (por ejemplo haciendo $\lambda_3 = 1$ que nos da el vector nulo.

Bases y dimensión

Siempre podemos conseguir lo siguiente:

Proposición 0.8. *De todo conjunto finito de vectores, se puede extraer un subconjunto linealmente independiente que genera el mismo subespacio que los anteriores.*

Demostración. Si el conjunto ya es linealmente independiente, no hay nada que demostrar. Si no, llamemos $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ a este conjunto. El hecho de que sea linealmente dependiente implica -por la definición- que hay un $\boldsymbol{v}_j$ tal que

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1}, \boldsymbol{v}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle.$$

Así que cambiamos la familia $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ por $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1}, \boldsymbol{v}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, y volvemos a repetir el razonamiento del principio. Como hay una cantidad finita de vectores, el proceso se tiene que acabar en finitos pasos, y tendremos nuestra familia de vectores linealmente independiente. □

Definición 0.9. *Sea $\mathcal{B}$ un conjunto finito ordenado de vectores. $\mathcal{B}$ se dice una* base *de un subespacio $\mathbb{S}$ si*

- *$\mathcal{B}$ genera $\mathbb{S}$*
- *$\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente.*

Ejemplo 0.10. El conjunto $\mathcal{B} = \{(1,0),\ (0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. En efecto:

- generan $\mathbb{R}^2$: ya que todo vector (y_1, y_2) se escribe como combinación lineal de $(1,0)$ y $(0,1)$:

$$(y_1, y_2) = y_1(1,0) + y_2(0,1);$$

- son linealmente independientes: ya que si planteamos la ecuación

$$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0),$$

obtenemos como única solución $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

En general, de la misma manera que como hemos hecho en el ejemplo 0.10, es fácil mostrar que $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, que $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^4$... Esta base tiene un nombre especial:

Definición 0.11. *La* base canónica *de* $\mathbb{R}^n$ *es aquella formada por los vectores*

$$(1,0,0,\dots,0),\ (0,1,0,\dots,0),\ \dots,(0,0,\dots,0,1).$$

Ejemplo 0.12. Sea $\mathbb{S}_1$ el subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ formado por las matrices simétrices, es decir

$$\mathbb{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{S}_1$. En efecto,

- $\mathcal{B}_1$ genera $\mathbb{S}_1$: cualquier matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_1$ tiene que verificar $b = c$, o sea

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir que toda matriz simétrica se escribe como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}_1$.

- $\mathcal{B}_1$ es linealmente independiente: planteamos la ecuación de independencia lineal:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y obtenemos como única solución $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Notar que un subespacio vectorial puede tener bases distintas. Por ejemplo, el conjunto $\{(1,1),\ (1,-1)\}$ también es una base de $\mathbb{R}^2$ ya que

- generan $\mathbb{R}^2$: ya que se tiene

$$(y_1, y_2) = \frac{y_1 + y_2}{2}(1,1) + \frac{y_1 - y_2}{2}(1,-1).$$

- <u>son linealmente independientes:</u> ya que al plantear la ecuación de la independencia lineal
$$\alpha_1(1,1)+\alpha_2(1,-1)=(0,0)$$
obtendremos $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_1-\alpha_2=0$. La única solución de este sistema es $\alpha_1=\alpha_2=0$.

Lo que sí podemos afirmar es que si dos conjuntos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de un subespacio $\mathbb{S}$, entonces tienen la misma cantidad de elementos.

Proposición-Definición 0.13. *Si dos conjuntos finitos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de vectores en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ son base del mismo subespacio $\mathbb{S}$, entonces*
$$\#(\mathcal{B})=\#(\mathcal{B}').$$
Este número -la cantidad de vectores de cualquier base- se llama la dimensión *de $\mathbb{S}$.*

Si $\dim(\mathbb{S})=1$, diremos que $\mathbb{S}$ es una *recta.*
Si $\dim(\mathbb{S})=2$, diremos que $\mathbb{S}$ es un *plano.*
$\dim(\mathbb{R}^n)=n$.
La dimensión del subespacio vectorial de las matrices de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ simétricas es 3, ya que hemos visto en el ejemplo 0.12 que hay una base de este subespacio con 3 elementos.

Proposición 0.14. *Todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ o de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tiene una base de finitos elementos. Si $\mathbb{S}\subset\mathbb{T}$, entonces* $\dim(\mathbb{S})\leq\dim(\mathbb{T})$.

<u>Coordenadas</u>

En lenguaje coloquial, uno dice que *las coordenadas* del vector $(1,2,3)$ son los números 1, 2 y 3. Vamos a dar un poco más de precisión a este hecho.

Proposición-Definición 0.15. *Sean $\mathbb{S}$ un subespacio de $\mathbb{V}$ y $\mathcal{B}=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ una base de $\mathbb{S}$. Todo vector $\mathbf{v}\in\mathbb{S}$ se escribe de manera* **única** *como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$, es decir existen únicos $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ tal que*
$$\boldsymbol{v}=\alpha_1\cdot\boldsymbol{v}_1+\ldots+\alpha_n\cdot\boldsymbol{v}_n.$$
Los números (ordenados) $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ se dicen las coordenadas *de $\boldsymbol{v}$ en la base $\mathcal{B}$.*

Ejemplo 0.16. Las coordenadas del vector (2,1) en la base canónica $\{(1,0),\ (0,1)\}$ son 2, 1. Las coordenadas del mismo vector en la base $\{(1,1),(1,-1)\}$ son $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$.

Ejemplo 0.17. La matriz simétrica $\begin{pmatrix}2&5\\5&-1\end{pmatrix}$ se descompone como
$$\begin{pmatrix}2&5\\5&-1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$
Luego, sus coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}_1$ dada en el ejemplo 0.12 son $2,\ 5,\ -1$.