ÀLGEBRA (EI)
Curs 2012-2013
Espais vectorials

1. Quins dels subconjunts següents són subespais vectorials de l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ corresponent?

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,4)\}$

(b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = x\}$

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

(d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$

(e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 2\}$

(f) $\{(x,0,0,t) \in \mathbb{R}^4 : 3x + t = 0\}$

(g) $\{(x,0,0,t) \in \mathbb{R}^4 : 3x + t = 0, x + t = 0\}$

(h) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = \sqrt{2}\,x\}$

2. Sigui $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespai vectorial generat pels vectors $u_1 = (1,3,-2)$ i $u_2 = (4,0,1)$. Decidiu si el vector $v = (2,-6,5)$ pertany a $\mathbb{F}$ i, en cas afirmatiu, escriviu-lo com a combinació lineal de u_1 i u_2.

3. Determineu els valors del paràmetre a que fan que el vector $v = (2,a,-8)$ pertanyi al subespai vectorial $\langle (1,1,3),(5,2,1) \rangle$ de $\mathbb{R}^3$.

4. Sigui $E = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el conjunt de les matrius reals 2×2.

(a) Demostreu que E és un espai vectorial.

(b) Trobeu una base de E i calculeu la seva dimensió.

(c) Demostreu que el conjunt de les matrius antisimètriques de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ és un subespai vectorial. Doneu vectors generadors d'aquest subespai i equacions que el defineixin.

5. Considerem els vectors $u = (1,2,1)$, $v = (3,0,-3)$, $w = (1,1,0)$, $z = (0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Descriviu el subespai $\langle u, v \rangle$ en forma paramètrica i, també, per mitjà d'equacions.

(b) Demostreu que els vectors v, w, z formen una base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Trobeu les coordenades del vector u en la base $\{v, w, z\}$ i calculeu la dimensió del subespai $\langle u, v, w, z \rangle$.

6. Doneu una base de cadascun dels subespais vectorials $\mathbb{F} = \langle (1,3,1),(4,-2,3),(-1,2,1) \rangle$ i $\mathbb{G} = \langle (1,2,1),(-1,2,3),(1,10,9) \rangle$ de $\mathbb{R}^3$.

7. Sigui $\mathbb{S} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$. Trobeu un subespai $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^4$ que verifiqui simultàniament $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \langle (1,0,1,1) \rangle$ i $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^4$. Justifiqueu els vostres raonaments.

8. Sigui $\mathbb{S}_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$. Trobeu un subespai $\mathbb{S}_2 \subset \mathbb{R}^4$ de dimensió 2 tal que $\dim(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2) = 1$. Justifiqueu els vostres raonaments.

9.

i) Considerem els subespais vectorials $\mathbb{F}_1 = \langle (1,2,1),(-1,0,3),(3,4,-1) \rangle$ i $\mathbb{F}_2 = \langle (1,4,1) \rangle$ de $\mathbb{R}^3$. Doneu una base de cadascun dels subespais $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$, i calculeu-ne les dimensions.

ii) Feu el mateix que en i) amb els subespais de $\mathbb{R}^4$ $\mathbb{F}_1 = \langle(1,-1,1,-1),(1,2,3,-1)\rangle$, i $\mathbb{F}_2 = \langle(1,1,1,1),(2,1,4,-2)\rangle$.

10. Demostreu que el conjunt $\mathbb{F} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+2y-3t = 0, x+y+z-t = 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ i doneu-ne una base.

11. Considereu els subespais vectorials $\mathbb{F} = \langle(1,1,-1,1),(2,0,0,1),(-1,1,-1,0)\rangle$ i $\mathbb{G} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2y+z = 0, -x+2y+2t = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.

(a) Trobeu equacions per a $\mathbb{F}$ i calculeu $\dim \mathbb{F}$.

(b) Doneu una base i la dimensió de $\mathbb{G}$.

(c) Calculeu les dimensions de $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ i de $\mathbb{F} + \mathbb{G}$.

12. Considerem els subespais vectorials $\mathbb{F} = \{(x,y,z,t) : x+y-t = y+z+2t = 0\}$, $\mathbb{G} = \{(x,y,z,t) : 2x+y = x+z-3t = 0\}$ i $\mathbb{H} = \langle(1,0,1,0),(-1,0,2,1)\rangle$ de $\mathbb{R}^4$. Calculeu una base de $\mathbb{F} \cap (\mathbb{G} + \mathbb{H})$.

13. Considereu els subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{F} = \langle(1,-2,0,3),(2,1,-2,4),(0,2,-1,1)\rangle$ i $\mathbb{G} = \langle(1,0,2,-1),(1,0,-1,4)\rangle$. Doneu la dimensió i una base dels subespais $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{F} + \mathbb{G}$ i $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$.

14. Considerem els vectors $u = (1,0,0)$, $v = (0,2,1)$, $w = (-3,3,-1)$, $t = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$. Definim $\mathbb{U}$ i $\mathbb{V}$ com els subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$ donats per $\mathbb{U} = \langle u, v\rangle$ i $\mathbb{V} = \langle w, t\rangle$. Doneu bases dels subespais $\mathbb{U} + \mathbb{V}$ i $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$.

15. Siguin $\mathbb{V}$ i $\mathbb{W}$ els subespais de $\mathbb{R}^4$ definits com $\mathbb{V} = \langle(1,0,1,0),\ (0,1,0,-1)\rangle$ i $\mathbb{W} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_3-x_4 = 0\}$. Calculeu una base de $\mathbb{V} \cap \mathbb{W}$.

16. Siguin $\mathbb{S} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1-x_2+x_3 = 0\}$ i $\mathbb{T} = \langle(4,0,-2);\ (2,0,-1)\rangle$. Calculeu bases de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ i de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$.