Algebra (EI)

Notas de Teoría

05/10/12

`Espacios vectoriales`

El concepto de vector aparece asociado naturalmente a una “fuerza” en el sentido de la física. De esta manera, los vectores “actúan” sobre un mismo objeto, y naturalmente aparecen los conceptos de “suma” de vectores (aplicar varias fuerzas simultáneamente), y producto de vector por un escalar (“duplicar” el esfuerzo, o reducirlo).

Estas operaciones que suponemos conocidas, aparecen esquematizadas en la figura 1.

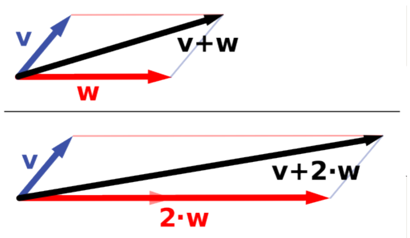

Figura 1. Operaciones con vectores

Vectores en el plano y el espacio

Todo vector plano que se aplica sobre un punto específico que denominaremos *origen* se puede representar con dos números reales, sus proyecciones sobre un par de ejes ortogonales prefijados que se cortan en el origen, así como en la figura 2.

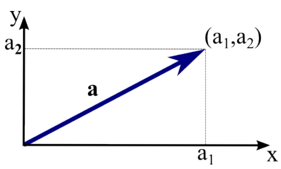

Figura 2. Componentes de vectores en el plano

De esta manera definimos el “plano cartesiano real” $\mathbb{R}^2$ como

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y),\ x\, y \in \mathbb{R}\}.$$

La suma de vectores en $\mathbb{R}^2$ ahora tiene una interpretación aritmética relativamente sencilla: si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, y λ es un número real cualquiera, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ \lambda \cdot \mathbf{a} &= (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2). \end{aligned}$$

Notar que los resultados de aplicar estas operaciones con los pares ordenados son consistentes con la "ley del paralelogramo" que se utiliza para sumar vectores como en la figura 1.

No necesariamente los vectores han de ser "coplanares", también es posible tener vectores actuando en el espacio físico donde nos movemos que no es "plano". La misma idea que utilizamos para vectores en el plano se aplica en este caso, solo que ahora hay que añadir un tercer parámetro a tener en cuenta, como se ve en la figura 3. Esto nos motiva a definir el "espacio real" $\mathbb{R}^3$ como

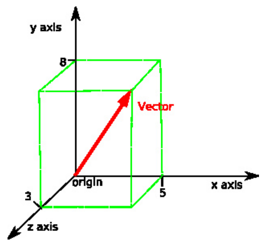

FIGURA 3. Vector en el espacio

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z),\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\}.$$

La suma y el producto por un escalar se definen de manera análoga a la situación de $\mathbb{R}^2$: para $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tendrá

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ \lambda \cdot \mathbf{a} &= (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \lambda \cdot a_3). \end{aligned}$$

El espacio $\mathbb{R}^n$

De la misma manera en que hemos "convertido" vectores geométricos o físicos en el plano y/o el espacio a pares o ternas ordenadas de números reales, nada nos impide continuar con esta generalización. Definimos el espacio real $\mathbb{R}^n$ como

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_1,\ \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

En este espacio definimos una suma de vectores y un producto por un escalar, tal como lo habíamos hecho antes: si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \\ \lambda \cdot \mathbf{a} &= (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \ldots, \lambda \cdot a_n). \end{aligned}$$

Para $n = 1$, podemos de hecho identificar el espacio $\mathbb{R}^1$ con la "recta" real $\mathbb{R}$.

Espacios vectoriales

En todos estos casos que hemos visto anteriormente, las operaciones que hemos definido de suma de vectores y de producto de un vector por un número escalar nos vuelve a producir un nuevo vector del conjunto correspondiente.

Además, estas operaciones cumplen con las siguientes propiedades:

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

b) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
c) hay un único vector $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ que satisface $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ cualquiera sera $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
d) Cada $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tiene un "opuesto"$-\mathbf{a} = (-a_1, \ldots, -a_n)$ tal que $\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
e) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$
f) $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \mathbf{a} = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \mathbf{a})$
g) $\lambda \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \cdot \mathbf{a} + \lambda \cdot \mathbf{b}$
h) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \mathbf{a} = \lambda_1 \cdot \mathbf{a} + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}$

Definición 0.1. *Un espacio vectorial (real) es un conjunto $\mathbb{V}$ junto con un par de operaciones internas "$+$" y "$\cdot$" que llamaremos "suma" y "producto" de vectores de $\mathbb{V}$ que cumplen con las 8 propiedades enunciadas anteriormente.*

A menudo denotaremos así: $(\mathbb{V}, +, \cdot)$, para dejar en claro que un espacio vectorial no es solamente un conjunto de vectores, sino también un par de operaciones entre esos vectores que cumplen ciertas reglas.

Ejemplo 0.2.

- Obviamente todos los espacios $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ son espacios vectoriales.
- $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, el conjunto de matrices de 2 filas y 3 columnas, con las operaciones de suma de matrices y producto de matrices por un escalar, es un espacio vectorial real.
- $\mathbb{R}[x]$, el conjunto de polinomios a coeficientes reales, es un espacio vectorial con las operaciones de suma de polinomios y producto de un polinomio por un número real.

Subespacios

A veces los espacios vectoriales que consideramos "viven" adentro de un espacio más grande. Por ejemplo, se puede mostrar que el conjunto

$$\{(x, y, 0),\ x,\ y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3,$$

con la suma de vectores de $\mathbb{R}^3$ y el producto por un escalar, cumple con las propiedades que definen a un espacio vectorial. Lo importante aquí es poder "garantizar" que si sumo dos elementos del conjunto, el resultado pertenece a ese conjunto, y también si multiplico un vector de ese conjunto por cualquier escalar, el resultado sigue estando en el mismo conjunto. Esto motiva la siguiente

Definición 0.3. *Un* subespacio *de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es un conjunto no vacío $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ que cumple con las siguientes propiedades:*
i) *Si $\mathbf{a} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{S}$ entonces $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbb{S}$;*
ii) *Cualquiera sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} \in \mathbb{S}$, se tiene que $\lambda \cdot \mathbf{a} \in \mathbb{S}$.*

El motivo de llamarlo "subespacio" es por lo siguiente:

Proposición 0.4. *Si $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$, entonces -utilizando las operaciones de suma y producto definidas en $\mathbb{V}$- se tiene que $(\mathbb{S}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.*

Demostración. Las 8 propiedades que definen a un espacio vectorial se cumplen en $\mathbb{S}$ pues se cumplen en $\mathbb{V}$, lo único que necesitamos es que tanto la suma de vectores de $\mathbb{S}$ como el producto de un vector de $\mathbb{S}$ por un escalar sean elementos de $\mathbb{S}$, y esto lo garantiza la definición de subespacio que acabamos de dar. $\square$

Ejemplo 0.5. Consideremos $\mathbb{S}_1 \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Afirmamos que $\mathbb{S}_1$ es un subespacio. Notar que los elementos de $\mathbb{S}$ son matrices que tienen el elemento $(2,1)$ igual a cero.

i) Sumemos dos elementos cualesquiera de $\mathbb{S}_1$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & c+c' \end{pmatrix},$$

El resultado nuevamente tiene el coeficiente $(2,1)$ igual a cero, luego pertenece a $\mathbb{S}_1$.

ii) Multipliquemos ahora una matriz de $\mathbb{S}_1$ por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a & \lambda\, b \\ 0 & \lambda\, c \end{pmatrix}.$$

La matriz de la derecha nuevamente tiene su elemento $(2,1)$ igual a cero. Luego, pertenece a $\mathbb{S}_1$.

Ejemplo 0.6. Sea $\mathbb{S}_2 \subset \mathbb{R}^4$ definida como

$$\mathbb{S}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

Afirmamos que $\mathbb{S}_2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

1. Si (x_1, x_2, x_3, x_4) y (y_1, y_2, y_3, y_4) son elementos de $\mathbb{S}_2$, entonces se tiene que cumplir que

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ y_1 - y_2 + y_3 &= 0. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que las coordenadas del vector suma $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$ cumplen

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 - x_2 + x_3) + (y_1 - y_2 + y_3) = 0 + 0 = 0,$$

o sea $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) \in \mathbb{S}_2$.

2. Por otro lado, cualquiera sea $\lambda \in \mathbb{R}$, si (x_1, x_2, x_3, x_4) satisface $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ entonces las coordenadas de $\lambda\cdot(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$ también cumplen

$$\lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda(x_1 - x_2 + x_3) = 0.$$

No todo subconjunto no vacío de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ será un subespacio, ya que tienen que cumplirse las condiciones i) y ii) de la definición. Por ejemplo, el conjunto de todas las matrices de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con todos sus coeficientes positivos no cumple con ii), ya que al multiplicar alguna de estas matrices por $\lambda = -1$, consigo una matriz que tiene todos sus coeficientes negativos.