Algebra (EI)

Notas de Teoria

09/11/12

1. Núcleo e Imagen de una Aplicación lineal

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales, y $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una aplicación lineal. Se define el *núcleo* de f y se denota por $\mathrm{Ker}(f)$ (del ingés, "kernel") al conjunto

$$\mathrm{Ker}(f) = \{v \in \mathbb{V} : \ f(v) = 0\}.$$

Se define la *imagen* de f y se denote por $\mathrm{Im}(f)$ al conjunto

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(v), \, v \in \mathbb{V}\}.$$

Notar que $\mathrm{Ker}(f)$ es un subconjunto de $\mathbb{V}$ e $\mathrm{Im}(f)$ es un subconjunto de $\mathbb{W}$.

Proposición 1.1.

- *Ker*(f) *es un subespacio de* $\mathbb{V}$.
- *Im*(f) *es un subespacio de* $\mathbb{W}$.
- *Si* $\dim(\mathbb{V})$ *es finita, entonces*

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim\big(\mathit{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathit{Im}(f)\big).$$

Ejemplo 1.2. Consideremos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$. Se tiene que $\mathrm{Ker}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 - x_2 = x_3 = -x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, que resulta ser el subespacio generado por el vector $(1, 1, 0)$, es decir $\mathrm{Ker}(f) = \langle(1, 1, 0)\rangle$ y luego $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 1$. Por otro lado, se tiene que

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f(1, 0), \, f(0, 1)\rangle = \langle(1, 0, -1), (-1, 0, 1)\rangle.$$

Como los vectores $(1, 0, -1)$ y $(-1, 0, 1)$ son linealmente independientes, entonces $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ y se cumple que

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = 1 + 2 = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big).$$

En general, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.3. *Dados subespacios* $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ *y* $\mathbb{T} \subset \mathbb{W}$, *los conjuntos*

$$\begin{array}{rcl} f(\mathbb{S}) & = & \{f(v), \, v \in \mathbb{S}\}, \\ f^{-1}(\mathbb{T}) & = & \{v \in \mathbb{V}, \, f(v) \in \mathbb{T}\} \end{array}$$

son subespacios de $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$ *respectivamente. Es más, si* $\mathbb{S} = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\rangle$, *entonces* $f(\mathbb{S}) = \langle f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_k)\rangle$.

El caso $\mathbb{S} = \mathbb{V}$ corresponde al subespacio $\mathrm{Im}(f)$ y el caso $\mathbb{T} = \{\mathbf{0}\}$ corresponde a $\mathrm{Ker}(f)$.

Ejemplo 1.4. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4),$$

y consideremos $\mathbb{S} = \langle (1, 0, -1, 0),\ (0, 2, 0, 1)\rangle$ y $\mathbb{T} = \langle (1, 1, 1)\rangle$. Hemos de calcular bases de $f(\mathbb{S})$ y de $f^{-1}(\mathbb{T})$. Entonces

$$f(\mathbb{S}) = \langle f(1, 0, -1, 0),\ f(0, 2, 0, 1)\rangle = \langle (1, -1, -1),\ (2, 2, 1)\rangle.$$

Como el conjunto $\mathcal{B}_1 = \{(1, -1, 1),\ (2, 2, 1)\}$ es linealmente independiente, entonces es una base de $f(\mathbb{S})$.

Para calcular ahora una base de $f^{-1}(\mathbb{T})$ procedemos como sigue: un elemento (x_1, x_2, x_3, x_4) pertenece a este espacio si y solamente si $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{T}$, o sea

$$(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4) = \lambda\,(1, 1, 1)$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Eliminamos λ de esta identidad y nos queda

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 & = & x_3 + x_4. \end{array} \right.$$

De aquí se deduce inmediatamente $x_1 = x_3$ y $x_2 = x_4$, o sea que

$$\begin{array}{rcl} (x_1, x_2, x_3, x_4) & = & (x_1, x_2, x_1, x_2) \\ & = & x_1(1, 0, 1, 0) + x_2(0, 1, 0, 1), \end{array}$$

y esto nos dice que $\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, 1, 0),\ (0, 1, 0, 1)\}$ es un conjunto de generadores de $f^{-1}(\mathbb{T})$. Como se trata de dos vectores ninguno de ellos múltiplo del otro, es además un conjunto linealmente independiente, y concluimos que $\mathcal{B}_2$ es una base de $f^{-1}(\mathbb{T})$.

2. Monomorfismos, epimorfismos, isomorfismos

Una aplicación lineal $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se dice

- *monomorfismo* si es inyectiva.
- *epimorfismo* si es exhaustiva.
- *isomorfismo* si es biyectiva (monomorfismo+epimorfismo)
- *endomorfismo* si $\mathbb{V} = \mathbb{W}$.

Proposición 2.1. *Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una aplicación lineal.*

1. *f es monomorfismo si y solamente si $Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.*
2. *f es epimorfismo si y solamente si $Im(f) = \mathbb{W}$.*

3. Isometrías

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal, entonces f se dice una *isometría* (lineal) si para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ $\|f(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$. Es decir, f preserva las longitudes.

Ejemplo 3.1. Las siguientes aplicaciones son claramente isometrías:

- $$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1, x_2, 0) \end{array}$$

  "la inclusión del plano $\mathbb{R}^2$ en el espacio $\mathbb{R}^3$"

- $$\begin{array}{rccc} f_2: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & (-x_2, x_1) \end{array}$$
  "la rotación de 90 grados en el plano"
- $$\begin{array}{rccc} f_1: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_1, x_2, -x_3) \end{array}$$
  "la simetría en el espacio $\mathbb{R}^3$ con respecto al plano horizontal"

Proposición 3.2. *Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal, y $A_f \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Entonces f es una isometría lineal si y solamente si*

$$A_f^{\mathbf{t}} \cdot A_f = \mathbb{I}_n,$$

donde $\mathbb{I}_n$ es la matriz identidad de tamaño n.

Ejemplo 3.3. Verifiquemos que las matrices de f_1, f_2 y f_3 cumplen con el enunciado de la proposición 3.2:

- $$A_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; A_{f_1}^{\mathbf{t}} \cdot A_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$
- $$A_{f_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; A_{f_1}^{\mathbf{t}} \cdot A_{f_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$
- $$A_{f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; A_{f_1}^{\mathbf{t}} \cdot A_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$