Algebra (EI)

Notas de Teoria

23/11/12

1. Polinomios

Los polinomios se pueden definir sobre diferentes conjuntos de números. En lo que sigue, $\mathbb{K}$ será o bien $\mathbb{Q}$ (los números racionales), o bien $\mathbb{R}$ (los números reales) o bien $\mathbb{C}$ (los números complejos).

Definición 1.1. *Un polinomio $p(x)$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

con $n \in \mathbb{N}$, y a_0, a_1, $\ldots, a_n \in \mathbb{K}$. El conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ se denota con $\mathbb{K}[x]$.

Ejemplo 1.2.

- $p_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}x + x^2 - \frac{4}{9}x^3 \in \mathbb{Q}[x]$.
- $p_2(x) = x - \sqrt{2}x^3 - \pi\, x^4 + x^5 \in \mathbb{R}[x]$.
- $p_3(x) = 1 + i - (3 - 5i)x - 8ix^2 \in \mathbb{C}[x]$.

En $\mathbb{K}[x]$ hay una suma y un producto que se definen de manera elemental: para sumar $q_1(x) = -1 + 2x - x^2$ y $q_2 = 2 - 2x + 3x^2 - x^3$ hacemos

$$q_1(x) + q_2(x) = (-1+2) + (2-2)x + (-1+3)x^2 + (0-1)x^3 = 2 + 2x^2 - x^3,$$

y para multiplicarlos, utilizamos la propiedad distributiva de la suma respecto del producto:

$$\begin{aligned} q_1(x) \cdot q_2(x) &= (-1 + 2x - x^2)(2 - 2x + 3x^2 - x^3) \\ &= -2 + 2x - 3x^2 + x^3 + 4x - 4x^2 + 6x^3 - 2x^4 - 5x^2 + 5x^3 - 3x^4 + x^5 \\ &= -2 + 6x - 9x^2 + 9x^3 - 6x^4 + x^5. \end{aligned}$$

Definición 1.3. *Si $p(x) \neq 0$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, entonces el grado de $p(x)$ se define como*

$$gr(p(x)) = n.$$

Ejemplo 1.4. En los ejemplos anteriores, se tiene $\mathrm{gr}(p_1(x)) = 3$, $\mathrm{gr}(p_2(x)) = 5$, $\mathrm{gr}(p_3(x)) = 2$, $\mathrm{gr}(q_1(x)) = 2$ y $\mathrm{gr}(q_2(x)) = 3$.

Proposición 1.5. *Si $p(x) \neq 0$, $q(x) \neq 0$ y también $p(x) + q(x) \neq 0$, entonces*

- $gr\big(p(x) \cdot q(x)\big) = gr(p(x)) + gr(q(x))$.
- $gr\big(p(x) + q(x)\big) \leq \text{máx}\{gr(p(x)), gr(q(x))\}$. *Si $gr(p(x)) \neq gr(q(x))$, vale la igualdad.*

2. Algoritmo de la división

Para polinomios también existe un algoritmo de división, análogo a la división de números enteros.

Proposición 2.1. *Dados $p(x)$ y $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ con $q(x) \neq 0$, existen únicos $c(x)$, $r(x) \in \mathbb{K}[x]$ con*

$$p(x) = c(x)q(x) + r(x),$$

y $r(x) = 0$ o $gr(r(x)) < gr(q(x))$.

Ejemplo 2.2. Hagamos la división entre $q_2(x)$ y $q_1(x)$, se tiene:

- $c(x) = -1 + x$,
- $r(x) = 1 + x$.

Verificamos

$$\begin{aligned} q_1(x) \cdot c(x) + r(x) &= (-1 + 2x - x^2)(-1 + x) + (1 + x) \\ &= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 + (1 + x) \\ &= 2 - 2x + 3x^2 - x^3 \\ &= q_2(x). \end{aligned}$$

Definición 2.3. *Se dice que un polinomo $q(x)$ divide a $p(x)$ si el resto de la división entre $p(x)$ y $q(x)$ es cero, es decir si $p(x) = q(x) \cdot c(x)$.*

Ejemplo 2.4. el polinomio $q_3(x) = x - 1$ divide a $q_1(x)$. En efecto, cuando hacemos la división entre $q_1(x)$ y $q_3(x)$ se tiene:

- $c(x) = 1 - x$,
- $r(x) = 0$.

Luego, $q_1(x) = (x - 1)(1 - x) = -(1 - x)^2$.

3. Especialización y raíces

Definición 3.1. *Dados $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{K}[x]$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Llamaremos* especialización de $p(x)$ en λ *al número*

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n \in \mathbb{K}.$$

Si $p(\lambda) = 0$, diremos que λ es una raiz *de $p(x)$.*

Ejemplo 3.2.

- $q_1(1+i) = -1+2(1+i)-(1+i)^2 = -1+2+2i-(1+2i-1) = 1+0\cdot i. = 1.$
- $q_1(1) = -1 + 2 \cdot 1 - 1^2 = -1 + 2 - 1 = 0$, o sea que 1 es una raiz de $q_1(x)$.

Teorema 3.3 (Teorema del resto)**.** *Si $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces el resto de dividir $p(x)$ por $x - \lambda$ es igual a $p(\lambda)$.*

Ejemplo 3.4. Calculemos el resto de dividir $q_1(x)$ por $x - (1 + i)$:

- $c(x) = 1 - i - x$,
- $r(x) = 1 = q_1(1 + i)$.

Corolario 3.5. *$\lambda \in \mathbb{K}$ es una raiz de $p(x)$ si y solamente si $x - \lambda$ divide a $p(x)$.*