Algebra (EI)

Notas de Teoría

02/10/12

Determinantes

Para una matriz cuadrada de 2×2, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, su determinante se define como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Si la matriz es de 3×3, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, la función determinante es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{12} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}. \end{array}$$

Notar que se tiene esta relación entre el determinate de una matriz de 3×3 con respecto a determinantes de submatrices de 2×2:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Este tipo de relaciones nos ayudará a definir *recursivamente* el determinante de una matriz cuadrada de cualquier dimensión.

Definición 0.1. *Sea $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada. El* cofactor *i, j de M se define como $(-1)^{i+j}$ por el determinante de la matriz cuadrada de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ que resulta de eliminar la fila i y la columna j de la matriz M.*

Ejemplo 0.2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, entonces

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -(18 - 24) = 6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$$

Definición 0.3. *Sea* $M = \big(m_{ij}\big)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *una matriz cuadrada. Su* determinante *se define recursivamente como*

- *Si* $M = (m_{11}) \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{R})$, *entonces* $|M| = m_{11}$,
- *Si* $n > 1$, *entonces*

$$|M| = m_{11} \cdot M_{11} + m_{21} \cdot M_{21} + \ldots + m_{n1} \cdot M_{n1}.$$

Ejemplo 0.4. El caso $n = 2$ se deduce rápidamente de la definición:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|a_{22}| + a_{21}\big(- |a_{12}|\big) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}.$$

Ejemplo 0.5. Para la matriz A del ejemplo 0.2, se tiene

$$|A| = 1 \times A_{11} + 4 \times A_{21} + 7 \times A_{31} = -3 + 24 - 21 = 0$$

De la definición de determinante se deduce inmediatamente lo siguiente

Proposición 0.6. *Si* $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *es una matriz que tiene ceros debajo de la diagonal, entonces*

$$|M| = m_{11} \cdot m_{22} \cdot \ldots \cdot m_{nn}.$$

Demostración. Como M tiene ceros por debajo de la diagonal, entonces $m_{21} = m_{31} = \ldots = m_{n1} = 0$, y entonces

$$|M| = m_{11}M_{11} + 0 \cdot M_{21} + \ldots + 0 \cdot M_{n1} = m_{11}M_{11}.$$

Es fácil notar que la matriz cuyo determinante define a M_{11} también tiene ceros debajo de la diagonal, así que la misma recursión se podrá aplicar a ella. Inductivamente, se tiene el resultado deseado. □

En general, calcular el determinante de una matriz cuadrada lleva muchas operaciones, cuanto más grande la matriz más operaciones hay que hacer. Para simplificar este cálculo, se lleva la matriz por medio de operaciones elementales en sus filas a una situación *triangular* (con ceros por debajo de la diagonal) y se hace el cálculo del determinante de la matriz resultante, utilizando la Proposición 0.6. Para ello, previamente debemos saber cómo se modifica el determinante de una matriz luego de haberle realizado alguna operación elemental.

<u>Operaciones elementales que no cambian el valor del determinante:</u>

- A una fila dada, sumarle un múltiplo de otra

<u>Operaciones elementales que cambian el valor del determinante:</u>

- intercambiar filas (el determinante se multiplica por -1),
- multiplicar una fila por un número distinto de cero (el determinante se multiplica por este número)

Ejemplo 0.7. Veamos cómo utilizar este hecho para calcular de otra manera el determinante de la matriz A del ejemplo 0.2. Hacemos eliminación de Gauss en esa matriz y obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \underset{F_2-4F_1\to F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \underset{F_3-7F_1\to F_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix}$$

$$\underset{F_3-2F_2\to F_3}{\longrightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 0 = 0.$$

Ejemplo 0.8. Calculemos un determinante de una matriz de 4×4 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \underset{F_3-2F_1\to F_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \underset{F_4-3F_1\to F_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{F_3-5F2\to F_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_4-7F2\to F_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix}$$

$$\underset{F_4-2F3\to F_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-16)\cdot 10 = 160.$$

Más propiedades del determinante

1. Para cualquier columna j de la matriz M se tiene
$$|M| = m_{1j}M_{1j} + m_{2j}M_{2j} + \ldots + m_{nj}M_{nj}.$$
2. $|M| = |M^T|$. Luego, también vale
$$|M| = m_{i1}M_{i1} + m_{i2}M_{i2} + \ldots + m_{in}M_{in}.$$
3. Si M tiene una fila o columna nula, entonces $|M| = 0$.
4. Si M tiene dos filas iguales o dos columnas iguales, entonces $|M| = 0$.
5. Si M_1 y M_2 son matrices cuadradas del mismo tamaño, entonces
$$|M_1\cdot M_2| = |M_1|\cdot|M_2.|$$
6. M es invertible si y solamente si $|M| \neq 0$, y en ese caso,

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} & \ldots & M_{n1} \\ M_{12} & M_{22} & \ldots & M_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ M_{1n} & M_{2n} & \ldots & M_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ejemplo 0.9. Sea $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Como $|C| = -2$, entonces de la propiedad 6) deducimos C es invertible. Calculamos los cofactores de C :

$$C_{11} = -1,\ C_{12} = -1,\ C_{21} = -1,\ C_{22} = 1.$$

Luego, se tiene

$$C^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Definición 0.10. *La matriz* $\begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} & \dots & M_{n1} \\ M_{12} & M_{22} & \dots & M_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{1n} & M_{2n} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}$ *se denomina la* adjunta *de M, y la denotaremos con $Adj(M)$.*

Luego, la igualdad (2) también se escribe así:

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot \mathrm{Adj}(M).$$

Regla de Cramer

Los determinantes pueden ser de utilidad para resolver sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. En este caso, es altamente probable que el sistema sea *compatible determinado* (es decir, que exista solución única). Si es así, los determinantes nos ayudarán también a resolver el sistema.

Teorema 0.11. *Consideremos un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \mathbf{b}_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \mathbf{b}_n \end{cases}$$

Entonces

1. *El sistema tiene única solución si y solamente si*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

2. (**Regla de Cramer:**) *Si hay solución única, entonces se puede calcular así:*

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \mathbf{b}_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{b}_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{b}_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{b}_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \mathbf{b}_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \dots x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \mathbf{b}_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \mathbf{b}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \mathbf{b}_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$