Algebra (EI)

Notas de Teoria

12/11/12

1. Composición de aplicaciones lineales

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ y $\mathbb{U}$ espacios vectoriales. Consideremos aplicaciones $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $g : \mathbb{W} \to \mathbb{U}$. Entonces se puede definir una nueva aplicación $g \circ f : \mathbb{V} \to \mathbb{U}$ dada como

$$g \circ f(v) = g\big(f(v)\big), \ \forall v \in \mathbb{V}.$$

Proposición 1.1.

(1) *Si f y g son aplicaciones lineales, entonces $g \circ f$ es una aplicación lineal.*

(2) *Sean $\mathbb{B}_\mathbb{V}$, $\mathbb{B}_\mathbb{W}$ y $\mathbb{B}_\mathbb{U}$ bases de $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ y $\mathbb{U}$ respectivamente, y*
- *$M_{\mathbb{B}_\mathbb{V},\mathbb{B}_\mathbb{W}}(f)$ la matriz de f en las bases $\mathbb{B}_\mathbb{V}$ y $\mathbb{B}_\mathbb{W}$;*
- *$M_{\mathbb{B}_\mathbb{W},\mathbb{B}_\mathbb{U}}(g)$ la matriz de g en las bases $\mathbb{B}_\mathbb{W}$ y $\mathbb{B}_\mathbb{U}$;*
- *$M_{\mathbb{B}_\mathbb{V},\mathbb{B}_\mathbb{U}}(g \circ f)$ la matriz de $g \circ f$ en las bases $\mathbb{B}_\mathbb{V}$ y $\mathbb{B}_\mathbb{U}$.*

Entonces

$$M_{\mathbb{B}_\mathbb{V},\mathbb{B}_\mathbb{U}}(g \circ f) = M_{\mathbb{B}_\mathbb{W},\mathbb{B}_\mathbb{U}}(g) \cdot M_{\mathbb{B}_\mathbb{V},\mathbb{B}_\mathbb{W}}(f).$$

Ejemplo 1.2. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ las aplicaciones lineales

$$\begin{array}{lcl} f(x_1, x_2, x_3) & = & (x_1 + x_2, x_2 - x_3) \\ g(y_1, y_2) & = & (y_1, y_1 + y_2, y_1 - y_2, y_2), \end{array}$$

La composición $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ viene dada por la fórmula

$$g \circ f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1 + x_2, x_2 - x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_3).$$

En las bases canónicas $\mathbb{B}_\mathbb{V} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $\mathbb{B}_\mathbb{W} = \{(1,0), (0,1)\}$ y $\mathbb{B}_\mathbb{U} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente, se tienen:

$$\begin{array}{rcl} M_{\mathbb{B}_\mathbb{V},\mathbb{B}_\mathbb{W}}(f) & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ M_{\mathbb{B}_\mathbb{W},\mathbb{B}_\mathbb{U}}(g) & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ M_{\mathbb{B}_\mathbb{V},\mathbb{B}_\mathbb{U}}(g \circ f) & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Y se verifica que

$$M_{\mathbb{B}_\mathbb{V},\mathbb{B}_\mathbb{U}}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = M_{\mathbb{B}_\mathbb{W},\mathbb{B}_\mathbb{U}}(g) \cdot M_{\mathbb{B}_\mathbb{V},\mathbb{B}_\mathbb{W}}(f).$$

2. Matrices de cambio de base

En el caso en que $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ sea la aplicación identidad $f(v) = v \quad \forall v \in \mathbb{V}$ (`ejercicio: demostrar que es una aplicación lineal`), Fijadas bases $\mathbb{B}$ y $\mathbb{B}'$ en $\mathbb{V}$, la matriz $M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f)$ se denomina *la matriz de cambio de base* de $\mathbb{B}$ a $\mathbb{B}'$. Es una matriz cuadrada cuyas columnas contienen las coordenadas de los vectores de $\mathbb{B}$ en las base $\mathbb{B}'$. La denotaremos como $C(\mathbb{B}, \mathbb{B}')$.

Ejemplo 2.1. Consideremos en $\mathbb{V} = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad w_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Definimos $\mathbb{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $\mathbb{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Entonces, tanto $\mathbb{B}$ como $\mathbb{B}'$ son bases de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (`ejercicio: demostrar que son bases`), y de las identidades

$$\begin{aligned} v_1 &= 1.w_1 + (-1).w_2 + 1.w_3 + 0.w_4 \\ v_2 &= 0.w_1 + 0.w_2 + 0.w_3 + 1.w_4 \\ v_3 &= 0.w_1 + 1.w_2 + 0.w_3 + 0.w_4 \\ v_4 &= 1.w_1 + 0.w_2 + (-1).w_3 + (-1).w_4, \end{aligned}$$

podemos calcular la matriz de cambio de base.

$$C(\mathbb{B}, \mathbb{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.2.

(1) *Cualquiera sea la base* $\mathbb{B}$, $C(\mathbb{B}, \mathbb{B}) = \mathbb{I}$, *la matriz identidad.*
(2) $C(\mathbb{B}, \mathbb{B}')$ *es siempre una matriz invertible, y* $C(\mathbb{B}, \mathbb{B}')^{-1} = C(\mathbb{B}', \mathbb{B})$.

Ejemplo 2.3. Continuando con el ejemplo anterior, se tiene

$$\begin{aligned} w_1 &= \tfrac{1}{2}.v_1 + \tfrac{1}{2}.v_2 + \tfrac{1}{2}.v_3 + \tfrac{1}{2}.v_4 \\ w_2 &= 0.v_1 + 0.v_2 + 1.v_3 + 0.v_4 \\ w_3 &= \tfrac{1}{2}.v_1 + (-\tfrac{1}{2}).v_2 + \tfrac{1}{2}.v_3 + (-\tfrac{1}{2}).v_4 \\ w_4 &= 0.v_1 + 1.v_2 + 0.v_3 + 0.v_4. \end{aligned}$$

Luego,

$$C(\mathbb{B}', \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

y verificamos que

$$C(\mathbb{B}, \mathbb{B}') \cdot C(\mathbb{B}', \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

o sea, se cumple la propiedad de que la inversa de $C(\mathbb{B}, \mathbb{B}')$ es $C(\mathbb{B}', \mathbb{B})$.