Àlgebra(EI):Examen Final

30 de gener de 2012

RESOLEU CADA PROBLEMA EN UN FULL SEPARAT I POSEU EL NOM EN TOTS ELS FULLS

1. **(2 pts)** Determineu tots els $z \in \mathbb{C}$ tals que
$$z^8 = \frac{2}{1+i}.$$

2. **(2 pts)** Trobeu tots els valors de $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ pels quals el sistema d'equacions següent sigui compatible. Resoleu el sistema en els casos en què això sigui possible.
$$\left\{\begin{array}{cccc} x & +\mathbf{a}\,y & -z & = & 1 \\ -\mathbf{a}\,x & -y & +(2+\mathbf{a})\,z & = & 2-\mathbf{a} \\ -x & -\mathbf{a}\,y & -\mathbf{a}\,z & = & \mathbf{b}. \end{array}\right.$$

3. **(2 pts)** Sigui $\mathbb{S} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$. Trobeu un subespai $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^4$ que verifiqui simultàniament $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \langle (1, 0, 1, 1)$ i $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^4$. Justifiqueu els vostres raonaments.

4. **(2 pts)** Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal tal que la seva matriu en la base canònica és
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calculeu les dimensions de $\mathrm{Im}(f \circ f)$ i $\mathrm{Ker}(f \circ f)$.

5. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (-2x + 2z, -7x - 3y + z, \mathbf{k}\,x + 4z)$.
   (a) **(1 pt)** Trobeu $\mathbf{k}$ si es sap que $\lambda = 0$ és valor propi de f.
   (b) **(1 pt)** Pel valor de $\mathbf{k}$ trobat en (a), estudieu si f és diagonalitzable o no.