4

# Sistemas lineales con parámetros

Álgebra

## Introducción

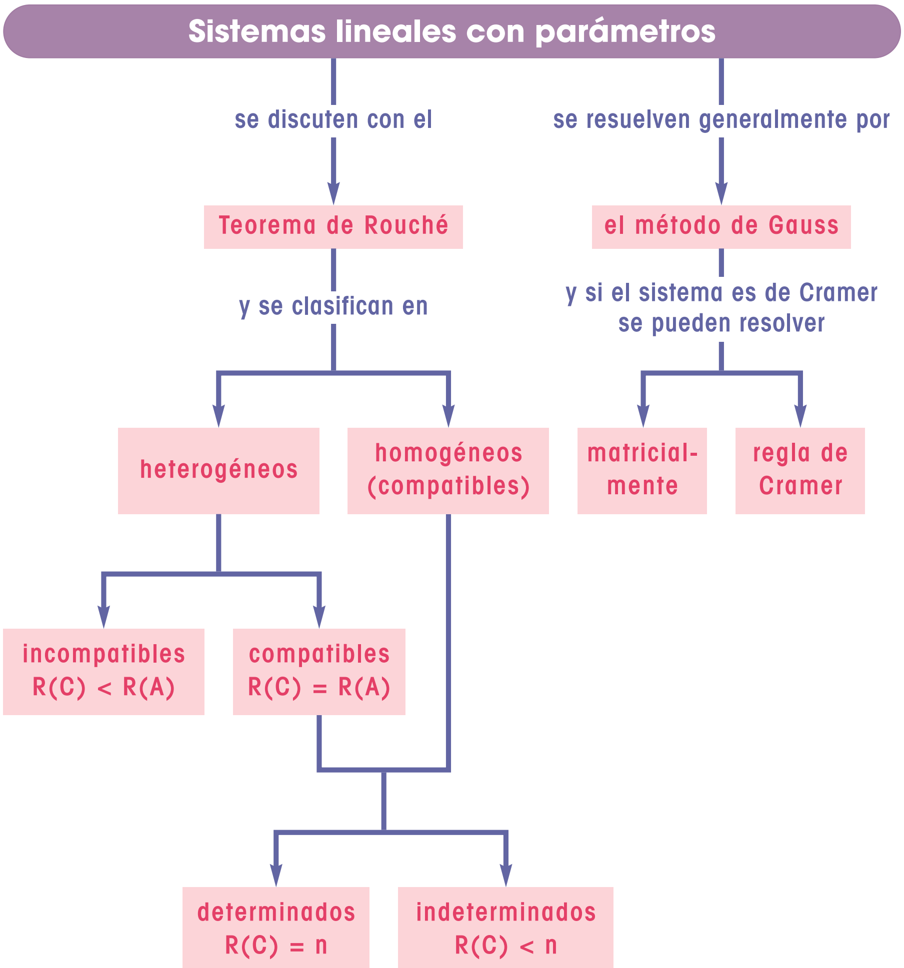
En este tema se reúnen los conceptos y procedimientos básicos de los temas anteriores de resolución de sistemas lineales, matrices y determinantes. Verás que las matrices y los determinantes son una herramienta poderosa y cómoda para discutir y resolver un sistema.

El tema comienza enseñando cómo se expresan los sistemas lineales en forma matricial y estudiando el teorema de Rouché, que proporciona una método rápido y fácil para discutir un sistema lineal de ecuaciones.

Se cierra el tema con la discusión de sistemas con parámetros, que es un problema clásico en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

Hoy en día existe una creciente preocupación por el consumo energético y el medio ambiente. Aunque la utilización de las energías renovables y no contaminentes, como, por ejemplo, las obtenidas de los cursos de los ríos, las mareas, el viento, el sol, etc., se han incrementado notablemente en los últimos tiempos, ya desde la antigüedad se usaba este tipo de energía en norias, molinos, etc. La energía generada por estos inventos se puede calcular mediante la resolución de sistemas de ecuaciones.

## Organiza tus ideas



# 1. Teorema de Rouché

## Piensa y calcula

Dado el siguiente sistema en forma matricial, escribe sus ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## 1.1. Matrices de un sistema lineal

**Expresión matricial de un sistema**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

En un sistema de **n** ecuaciones lineales con **p** incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right\}$$

se distinguen las siguientes matrices:

| De los coeficientes | De las incógnitas | De los términos independientes | De los coeficientes ampliada con los términos independientes |
|---|---|---|---|
| $C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ | $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix}$ | $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ | $A = \left(\begin{array}{cccc\|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$ |

En la matriz ampliada se separa con una barra vertical la columna de términos independientes.

**Ejemplo**

$$\left.\begin{array}{r} 2x + \phantom{4}y - 3z = \phantom{-}2 \\ x - 4y + 5z = -3 \end{array}\right\} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

cuyas matrices son:

| De los coeficientes | De las incógnitas | De los términos independientes | De los coeficientes ampliada con los términos independientes |
|---|---|---|---|
| $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ | $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ | $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ | $A = \left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 5 & -3 \end{array}\right)$ |

## 1.2. Teorema de Rouché

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y solo si el rango de la matriz de los coeficientes, **C,** es igual al rango de la matriz ampliada con los términos independientes, **A.**

**Sistema compatible $\iff$ R(C) = R(A)**

► *Demostración en detalle en la página 94*

## 1.3. Discutir un sistema

**Discutir o estudiar un sistema** consiste en clasificarlo sin resolverlo aplicando el teorema de Rouché. Para ello, se calcula el rango de la matriz de los coeficientes, **C,** y el rango de la matriz ampliada con los términos independientes, **A,** y se sigue el esquema. La letra **n** es el número de incógnitas:

$$\text{Sistema}\begin{cases}\text{Heterogéneo}\begin{cases}\begin{array}{l}\text{Compatible}\\ R(C)=R(A)\end{array}\begin{cases}\text{Determinado: } R(C)=R(A)=n\\ \text{Indeterminado: } R(C)=R(A)<n\end{cases}\\ \text{Incompatible: } R(C)<R(A)\end{cases}\\ \begin{array}{l}\text{Homogéneo}\\ \text{(Compatible)}\end{array}\begin{cases}\text{Determinado: } R(C)=n\\ \text{Indeterminado: } R(C)<n\end{cases}\end{cases}$$

### Estrategia para discutir o estudiar un sistema

Si el número de ecuaciones coincide con el de incógnitas, se halla el determinante de la matriz de los coeficientes, y si es:

a) Distinto de cero, el sistema es compatible determinado.

b) Igual a cero, se calcula el rango de la matriz ampliada por Gauss.

**Relación entre rangos**

La matriz ampliada, **A,** se forma añadiendo una columna a la matriz de los coeficientes, **C.** Por lo tanto, siempre se verifica:

$$R(C) \le R(A)$$

**1 Ejercicio resuelto**

Discute el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r}x+2y+\ \ z=1\\ 3x+\ \ y+4z=5\\ 2x-\ \ y+3z=4\end{array}\right\}$

Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante de **C** es cero, se halla el rango de **A** y **C** por Gauss:

$$R\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 3 & 4\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ 3\cdot 1^a-2^a\\ 2\cdot 1^a-3^a\end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 5 & -1 & -2\\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{-1} & \cancel{-2}\end{array}\right) = R\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 5 & -1 & -2\end{array}\right)$$

Se elimina la 3ª fila porque es igual que la 2ª

Se tiene que $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema heterogéneo compatible indeterminado.

## Aplica la teoría

**1.** Escribe los siguientes sistemas en forma matricial:

a) $\left.\begin{array}{r}x-y\qquad\ \ =2\\ 2x+y+2z=0\\ x-y+2z=1\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}2x+y-\ \ z=2\\ x+y+2z=5\\ -x\qquad+5z=3\end{array}\right\}$

**2.** Escribe en forma ordinaria el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$$

**3.** Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r}3x-\ \ y+2z=\ \ 1\\ x+4y+\ \ z=\ \ 0\\ 2x-5y\qquad=-2\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}3x+2y+2z=15\\ 3x-2y-2z=-1\\ -x+3y+3z=\ \ 3\end{array}\right\}$

**4.** Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r}2x+y-z=0\\ x+y\qquad=1\\ -x\qquad+z=1\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}x+2y+\ \ z=1\\ 2x+3y+2z=0\\ x+\ \ y+2z=3\end{array}\right\}$

# 2. Regla de Cramer y forma matricial

## Piensa y calcula

Dado el siguiente sistema, resuélvelo matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## 2.1. Regla de Cramer

Un **sistema es de Cramer** si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero, es decir, el sistema es compatible determinado.

En un **sistema de Cramer,** cada incógnita es el cociente de dos determinantes:

a) El determinante del **denominador** es el de la matriz de los coeficientes.

b) El determinante del **numerador** es el que resulta de sustituir, en el determinante de los coeficientes, la columna correspondiente a los coeficientes de la incógnita que se despeja, por los términos independientes.

► *Demostración en detalle en la página 95*

**2 Ejercicio resuelto**

Resuelve por Cramer el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = -8 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{array}\right\}$$

Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -8 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{24} = -\frac{72}{24} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -8 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{24} = \frac{96}{24} = 4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{24} = \frac{48}{24} = 2$$

## 2.2. Resolución de un sistema matricialmente

Para resolver un sistema matricialmente se escribe la matriz de los coeficientes, **C,** la matriz columna de las incógnitas, **X,** y de los términos independientes, **B,** y se escribe el sistema en forma matricial:

$$CX = B \Rightarrow X = C^{-1}B$$

**3 Ejercicio resuelto**

Resuelve matricialmente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 5y &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Se escribe el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Se calcula la inversa de la matriz de los coeficientes:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando, se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución es: **$x = -3, y = 2, z = 1$**

## Aplica la teoría

**5.** Resuelve por Cramer:

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ x + 3z &= 16 \\ 5y - z &= 10 \end{aligned}\right\}$   b) $\left.\begin{aligned} x + y - 2z &= 6 \\ 2x + 3y - 7z &= 16 \\ 5x + 2y + z &= 16 \end{aligned}\right\}$

**6.** Resuelve por Cramer en función del parámetro **a:**

$$\left.\begin{aligned} x + y &= a \\ x + z &= 0 \\ x + 2y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

**7.** Resuelve por Cramer:

$$\left.\begin{aligned} 4x + 4y + 5z + 5t &= 0 \\ 2x + 3z - t &= 10 \\ x + y - 5z &= -10 \\ 3y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

**8.** Resuelve matricialmente el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 5 \\ 2x - y + z &= 6 \\ x + 5y &= -3 \end{aligned}\right\}$$

**9.** Resuelve matricialmente el sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

**10.** Resuelve matricialmente el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -7 \\ x + 4y + 2z &= -1 \\ x - 4y &= -5 \end{aligned}\right\}$$

## 3. Resolución de sistemas de cuatro ecuaciones

### Piensa y calcula

Resuelve mentalmente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + y &= 1 \\ 3x + 2y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

### 3.1. Resolución de un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas

Para resolver un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, se calcula:

a) el determinante de la matriz de los coeficientes para ver si el sistema es de Cramer. Si lo es, se puede resolver por Cramer, aunque por Gauss es más sencillo.

b) Si no es de Cramer, se resuelve por Gauss.

**4 Ejercicio resuelto**

Resuelve el siguiente sistema:
$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z - 3t &= 2 \\ 2x + 5y + 3z - 8t &= 4 \\ x + 2y + 2z - 4t &= 3 \\ 3x + 6y + 5z - 11t &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 3 & -8 \\ 1 & 2 & 2 & -4 \\ 3 & 6 & 5 & -11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 4^a = 2 \cdot 3^a \end{matrix} = 0$$

El sistema no es de Cramer porque $|C| = 0$; se resuelve por Gauss.

$$R\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -4 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & -11 & 8 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{matrix} = R\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) =$$

Se elimina la 4ª fila porque es igual que: 2 · 3ª

$$= R\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$R(C) = R(A) = 3 <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. El sistema es equivalente a:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z - 3t &= 2 \\ y + z - 2t &= 0 \\ z - t &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 + 3t \\ y + z &= 2t \\ z &= 1 + t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= -1 + t \\ z &= 1 + t \end{aligned}\right\}$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= -1 + \lambda \\ z &= 1 + \lambda \\ t &= \lambda \end{aligned}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

## 3.2. Resolución de un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas

Como un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas no puede ser de Cramer, se estudia la compatibilidad del sistema calculando los rangos de la matriz ampliada y de los coeficientes, y, si es compatible, se resuelve aplicando Gauss.

**5 Ejercicio resuelto**

Clasifica el siguiente sistema y, si es compatible, resuélvelo:

$$\left.\begin{aligned} x + y \phantom{{}+z} &= 1 \\ y + z &= 2 \\ x \phantom{{}+y} - z &= -1 \\ 3x - y + z &= 10 \end{aligned}\right\}$$

No es un sistema de Cramer porque no tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

$$R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 1^a - 3^a \\ 3 \cdot 1^a - 4^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 0 & 4 & -1 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ 4 \cdot 2^a - 4^a \end{array} =$$

$$= R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 3^a/5 \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es heterogéneo compatible determinado.

El sistema es equivalente a:

$$\left.\begin{aligned} x + y \phantom{{}+z} &= 1 \\ y + z &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}\right\} z = 3 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + 3 &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}\right\} y = -1 \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x - 1 &= 1 \\ y &= -1 \\ z &= 3 \end{aligned}\right\} x = 2$$

La solución del sistema es: **$x = 2, y = -1, z = 3$**

## Aplica la teoría

**11.** Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y \phantom{{}+z} + 2t &= 3 \\ 3x - y + z - t &= 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t &= -1 \\ 2x + y + z + t &= 2 \end{aligned}\right\}$$

**12.** Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x \phantom{{}+y} + z + t &= 1 \\ y + z - t &= 1 \\ y + z - 2t &= 2 \\ z - t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

**13.** Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x - y + z &= 1 \\ 3x - y - z &= 1 \\ 6x - y + z &= 6 \end{aligned}\right\}$$

**14.** Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 5 \\ 2x + y - 4z &= 1 \\ x + y - z &= 2 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

# 4. Discusión de sistemas con parámetros

## Piensa y calcula

Discute, según los valores de **k,** el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} x + \ \ y = 3 \\ 2x + 2y = k \end{array}\right\}$

**Discutir un sistema en función de un parámetro** consiste en clasificar el sistema en función de los valores del parámetro.

## 4.1. Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas

La mejor estrategia para discutir estos sistemas es:

a) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes y se hallan sus raíces. Para aquellos valores para los que no se anule el determinante, se tendrá que R(C) = R(A) = 3, y el sistema será compatible determinado.

b) Para los valores que son raíces del determinante de la matriz de los coeficientes, se estudia el sistema por Gauss.

### 6 Ejercicio resuelto

Discute, según los valores del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} (1-k)x + y + z = 0 \\ x + (1-k)y + z = k \\ x + y + (1-k)z = k^2 \end{array}\right\}$$

a) Se calcula: $|C| = \begin{vmatrix} 1-k & 1 & 1 \\ 1 & 1-k & 1 \\ 1 & 1 & 1-k \end{vmatrix} = 3k^2 - k^3$

$$3k^2 - k^3 = 0 \Rightarrow k^2(3-k) = 0 \Rightarrow k = 0,\ k = 3$$

- Para todo valor de $k \neq 0$ y $k \neq 3$, se verifica que:

  R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

b) Se estudian los valores que son raíces de $|C| = 0$

- Para k = 0 se tiene el sistema: $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ \cancel{x + y + z = 0} \\ \cancel{x + y + z = 0} \end{array}\right\} \Rightarrow x + y + z = 0$

  Se tiene que R(C) = R(A) = 1 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Para k = 3 se tiene el sistema: $\left.\begin{array}{r} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 3 \\ x + y - 2z = 9 \end{array}\right\}$

$$R\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 1^a + 2 \cdot 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} = R\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2^a : (-3) = \\ 2^a + 3^a \end{array}$$

$$= R\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

Se tiene que R(C) = 2 ≠ R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

## 4.2. Sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas

La mejor estrategia para discutir estos sistemas es:

a) Se calcula el determinante de la matriz ampliada y se hallan sus raíces. Para aquellos valores para los que no se anule el determinante, se tendrá que:

$$R(C) \le 2 \text{ y } R(A) = 3, \text{ y el sistema será incompatible.}$$

b) Para los valores que son raíces del determinante de la matriz ampliada, se estudia el sistema por Gauss.

**7 Ejercicio resuelto**

Discute, según los valores del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} kx + \phantom{(k+1)}y &= 1 \\ x + (k+1)y &= 1 \\ x + \phantom{(k+1)}ky &= 1 \end{aligned}\right\}$$

a) Se calcula: $|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = k - 1$

$$k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$$

- Para todo valor de $k \neq 1$, se verifica que:

  $R(C) < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Se estudian los valores que son raíces de $|A| = 0$

- Para $k = 1$ se tiene:

$$R\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = R\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

  Se tiene que $R(C) = R(A) = 2$ = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

## Aplica la teoría

**15.** Discute, según los valores del parámetro **a,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} (a+1)x + y + z &= 0 \\ x + (a+1)y + z &= 0 \\ x + y + (a+1)z &= 0 \end{aligned}\right\}$

**16.** Discute, según los valores del parámetro **k,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} kx + y + z &= 4 \\ x + y + z &= k \\ x - y + kz &= 2 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ kx + 2z &= 0 \\ 2x - y + kz &= 0 \end{aligned}\right\}$

**17.** Discute, según los valores del parámetro **a,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 10y &= -4 \\ ax + y &= 1 \\ x + 3y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

**18.** Discute, según los valores del parámetro **m,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ mx + z &= 0 \\ x + (1+m)y + mz &= m+1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} (2m+2)x + my + 2z &= 2m-2 \\ 2x + (2-m)y &= 0 \\ (m+1)x + (m+1)z &= m-1 \end{aligned}\right\}$

# Profundización: demostraciones

## 1.2. Teorema de Rouché

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y solo si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada con los términos independientes.

**Sistema compatible ⇔ R(C) = R(A)**

### Demostración

La demostración se hará representando el sistema en forma vectorial, que consiste en poner el sistema como una combinación lineal de los vectores columna de la matriz de los coeficientes, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{n2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \ldots \\ a_{np} \end{pmatrix} x_p = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si se llama $C_1, C_2, \ldots, C_p$ a las columnas de la matriz de los coeficientes, el sistema se expresa de forma reducida:

$$C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_px_p = B$$

El teorema es una equivalencia o doble implicación; por lo tanto, la demostración tiene dos partes:

**a) Si el sistema es compatible ⇒ R(C) = R(A)**

Si el sistema es compatible, tiene solución; es decir, existen $s_1, s_2, \ldots, s_p$ tales que:

$$C_1s_1 + C_2s_2 + \ldots + C_ps_p = B$$

Luego el vector columna B es combinación lineal de los vectores columna: $C_1, C_2, \ldots, C_p$, es decir, si a la matriz de los coeficientes C se le añade un vector columna que es combinación lineal de los vectores columna de C, el rango no varía.

Por lo tanto:

$$R(C_1, C_2, \ldots, C_p) = R(C_1, C_2, \ldots, C_p, B)$$
$$R(C) = R(A)$$

**b) Si R(C) = R(A )⇒ el sistema es compatible**

Si se tiene que:

$$R(C) = R(A)$$

se verifica:

$$R(C_1, C_2, \ldots, C_p) = R(C_1, C_2, \ldots, C_p, B)$$

Por lo tanto, el vector B es combinación lineal de los vectores: $C_1, C_2, \ldots, C_p$

y entonces existen unos números: $s_1, s_2, \ldots, s_p$ tales que:

$$C_1s_1 + C_2s_2 + \ldots + C_ps_p = B$$

De lo que se deduce que $s_1, s_2, \ldots, s_p$ es una solución del sistema; luego el sistema es compatible.

## 2.1. Regla de Cramer

En un sistema de Cramer, cada incógnita es el cociente de dos determinantes:

a) El determinante del **denominador** es el de la matriz de los coeficientes.

b) El determinante del **numerador** es el que resulta de sustituir, en el determinante de los coeficientes, la columna correspondiente a los coeficientes de la incógnita que se despeja, por los términos independientes.

### Demostración

Dado el sistema de Cramer:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

el sistema se puede escribir de forma abreviada: $CX = B$

Como el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero, la matriz **C** de los coeficientes es regular y tiene inversa; por lo tanto, se tiene:

$$X = C^{-1} \cdot B$$

Escribiendo las matrices, se tiene:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_p \end{pmatrix} = \frac{1}{|C|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Se despeja cada incógnita y se utiliza el desarrollo de un determinante por los elementos de una columna escritos en forma inversa.

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$x_2 = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2}}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \frac{b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn}}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}}{|C|}$$

# Ejercicios y problemas resueltos

## Discutir un sistema 3 × 3 con un parámetro y resolver por Cramer

**8.** Resuelve las cuestiones:

a) Clasifica el sistema siguiente según los valores del parámetro **k**

$$\left.\begin{aligned} kx + y - 2z &= 0\\ -x - y + kz &= 1\\ x + y + \phantom{k}z &= k\end{aligned}\right\}$$

b) Resuelve por Cramer para k = 2

a) Clasificación:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & -2\\ -1 & -1 & k\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = -k^2 + 1 \Rightarrow -k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = 1, k = -1$$

Para $k \neq 1$, $k \neq -1$, R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas, sistema heterogéneo compatible determinado.

Para k = 1

$$R\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ 1^a + 2^a\\ 2^a + 3^a\end{array} = R\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ 2 \cdot 2^a + 3^a\end{array} =$$

$$= R\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right)$$

R(C) = 2 ≠ R(A) = 3, sistema heterogéneo incompatible.

Para k = –1

$$R\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ 1^a - 2^a\\ 2^a + 3^a\end{array} = R\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas, sistema heterogéneo compatible indeterminado.

b) Resolución por Cramer para k = 2

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 0\\ -x - y + 2z &= 1\\ x + y + \phantom{2}z &= 2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = -3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}}{-3} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

Solución: **x = 1, y = 0, z = 1**

## Resolver un sistema 3 × 3 aplicando la matriz inversa

**9.** Resuelve las cuestiones:

a) Calcula la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Escribe de forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz $A^{-1}$, hallada en el apartado anterior:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + z &= -2 \\ x + z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

a) Matriz inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $\mathbf{x = 3, y = -2, z = 0}$

## Resolver un sistema 4 × 4 heterogéneo

**10.** Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z - 3v &= -4 \\ x + 2y + z + 3v &= 4 \\ 2x - 4y + 2z - 6v &= -8 \\ 2x \quad\quad + 2z \quad\quad &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Eliminamos la 3ª porque es el doble de la 1ª

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z - 3v &= -4 \\ x + 2y + z + 3v &= 4 \\ 2x \quad + 2z \quad &= 0 \end{aligned}\right\}\begin{matrix} \\ 2^a - 1^a \\ 3^a/2 \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x - 2y + z - 3v &= -4 \\ 4y \quad + 6v &= 8 \\ x \quad + z \quad &= 0 \end{aligned}\right\}\begin{matrix} \\ 3^a/2 \\ z = -x \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z - 3v &= -4 \\ 2y \quad + 3v &= 4 \\ z &= -x \end{aligned}\right\} 3v = 4 - 2y \Rightarrow \left.\begin{aligned} x - 2y - x - 4 + 2y &= -4 \\ v &= \frac{4 - 2y}{3} \\ z &= -x \end{aligned}\right\}$$

Solución general: $\mathbf{z = -x,\ v = \frac{4 - 2y}{3}}$

Soluciones paramétricas: $\mathbf{x = \lambda, y = \mu, z = -\lambda, v = \frac{4 - 2\mu}{3}}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

## Discutir y resolver un sistema 3 × 3 heterogéneo con un parámetro

**11.** Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{array}\right.$$

a) Resuélvelo para el valor de **a** que lo haga compatible indeterminado.

b) Resuelve el sistema que se obtiene para a = 2

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 1 \Rightarrow -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1, a = -1$$

Para $a \neq 1$, $a \neq -1$, R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas, sistema heterogéneo compatible determinado.

Para a = 1

$$R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 1^a - 2^a \\ 1^a - 3^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R(C) = 2 \neq R(A) = 3$, sistema heterogéneo incompatible.

Para a = –1

$$R\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 1^a + 2^a \\ 2^a - 3^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas, sistema heterogéneo compatible indeterminado.

a) Resolución cuando es compatible indeterminado:

Pasamos de la última matriz en la que hemos calculado el rango a forma de sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y + z = 4 \\ 2y + 2z = 5 \end{array}\right\} y = 5/2 - z \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x + 5/2 - z + z = 4 \\ y = 5/2 - z \end{array}\right\}$$

Solución general: **$x = -3/2$, $y = 5/2 - z$**

Solución en paramétricas: **$x = -3/2$, $y = 5/2 - \lambda$, $z = \lambda$; $\lambda \in \mathbb{R}$**

b) Resuelve el sistema que se obtiene para a = 2

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 4 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y + z = 4 \end{array}\right\}$$

Cambiamos la $1^a$ ecuación con la segunda:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 1 \\ 5y - z = 2 \\ 3y = 3 \end{array}\right\} y = 1$$

$$\left.\begin{array}{r} x - 2 + 3 = 1 \\ 5 - z = 2 \\ y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 3 \\ y = 1 \end{array}$$

Solución: **$x = 0$, $y = 1$, $z = 3$**

## Discutir y resolver un sistema 3 × 3 homogéneo con un parámetro

**12.** Dado el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{aligned} x + ky - z &= 0 \\ kx - y + z &= 0 \\ (k+1)x + y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

averigua para qué valores de **k** tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resuélvelo en tales casos.

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k^2 - k - 2 \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2, k = -1$$

Para $k \neq 2$, $k \neq -1$, $R(C) = 3$ = número de incógnitas, solo tiene la solución $x = y = z = 0$

Para $k = 2$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ 3x + y &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & \\ & 2 \cdot 1^a - 2^a \\ & 3 \cdot 1^a - 3^a \end{aligned} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 5y - 3z &= 0 \\ \cancel{5y - 3z = 0} \end{aligned}\right\} y = 3z/5$$

$$\left.\begin{aligned} x + 6z/5 - z &= 0 \\ y &= 3z/5 \end{aligned}\right\} x = -z/5$$

La solución general es: $\mathbf{x = -z/5, y = 3z/5}$

La solución en paramétricas: $\mathbf{x = -\lambda/5, y = 3\lambda/5, z = \lambda; \lambda \in \mathbb{R}}$

Para $k = -1$

$$\left.\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ -x - y + z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x - z &= 0 \\ \cancel{-x + z = 0} \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} x = z$$

La solución general es: $\mathbf{x = z, y = 0}$

La solución en paramétricas: $\mathbf{x = \lambda, y = 0, z = \lambda; \lambda \in \mathbb{R}}$

## Discutir y resolver un sistema 4 × 3 heterogéneo con un parámetro

**13.** Dado el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y - az &= 4 \\ -ax + y + az &= 0 \\ -x + 2ay &= a + 2 \\ 2x - y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

discútelo según los valores de **a,** y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ -a & 1 & a & 0 \\ -1 & 2a & 0 & a+2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = a^3 - a^2 - 8a + 12$$

$a^3 - a^2 - 8a + 12 = 0 \Rightarrow a = 2, a = -3$

Para $a \neq 2$, $a \neq -3$, $R(C) < R(A) = 4$, sistema heterogéneo incompatible.

Para $a = 2$, $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas, sistema heterogéneo compatible indeterminado.

Solución: $x = 8z/7 + 4/7$, $y = 2z/7 + 8/7$

Para $a = -3$, $R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas, sistema heterogéneo compatible determinado.

Solución: $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$

# Ejercicios y problemas resueltos

## Discutir y resolver un sistema 2 × 2 heterogéneo con un parámetro

**14.** Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} x - ay = 2 \\ ax - \;\; y = a + 1 \end{array}\right\}$$

se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro **a**. Resolverlo cuando la solución sea única.

b) Determinar para qué valor o valores de **a** el sistema tiene una solución en la que y = 2

a) Discusión

$$\begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{vmatrix} = a^2 - 1 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1, a = -1$$

Para $a \neq 1$, $a \neq -1$, R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas, sistema compatible determinado.

Para a = 1

$$R\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)_{1^a - 2^a} = R\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

R(C) = R(A) = 1 < número de incógnitas, sistema heterogéneo compatible indeterminado.

Para a = –1

$$R\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right)_{1^a + 2^a} = R\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

R(C) = 1 ≠ R(A) = 2, sistema heterogéneo incompatible.

La solución es única cuando $a \neq 1$, $a \neq -1$; hay que resolverlo en función de **a**

$$\left.\begin{array}{r} x - ay = 2 \\ ax - \;\; y = a + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -a \\ a+1 & -1 \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{a^2 + a - 2}{a^2 - 1} = \frac{(a+2)\cancel{(a-1)}}{(a+1)\cancel{(a-1)}} = \frac{a+2}{a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & a+1 \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{-a+1}{a^2 - 1} = -\frac{\cancel{a-1}}{(a+1)\cancel{(a-1)}} = -\frac{1}{a+1}$$

Solución: $\mathbf{x = \dfrac{a+2}{a+1}, \; y = -\dfrac{1}{a+1}; \; a \neq \pm 1}$

b) Si y = 2, sustituimos y = 2 y resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2a = 2 \\ ax - \;\; 2 = a + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} x = 2a + 2 \\ a(2a + 2) - 2 = a + 1 \end{array}$$

$$2a^2 + 2a - 2 = a + 1 \Rightarrow 2a^2 + a - 3 = 0$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -3/2 \end{cases}$$

Tiene la solución y = 2 cuando **a = 1, a = –3/2**

# Ejercicios y problemas

PAU

## Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

**1** Un sistema lineal heterogéneo es compatible determinado si (C, matriz de los coeficientes, y A, matriz ampliada con los términos independientes):

- ☐ R(C) < R(A)
- ☐ R(C) = R(A) = Nº de incógnitas
- ☐ R(C) > R(A)
- ☐ R(C) ≠ R(A)

**2** Si tenemos el sistema lineal matricial CX = B tal que existe $C^{-1}$, la solución es:

- ☐ X = BC
- ☐ $X = BC^{-1}$
- ☐ X = CB
- ☐ $X = C^{-1}B$

**3** Un sistema lineal homogéneo:

- ☐ siempre es compatible.
- ☐ siempre es incompatible.
- ☐ unas veces es compatible y otras incompatible.
- ☐ ninguna de las anteriores es cierta.

**4** Un sistema lineal de tres ecuaciones con dos incógnitas:

- ☐ si R(C) = R(A) = 2, es compatible.
- ☐ si R(A) = 3, es compatible.
- ☐ si R(C) = 3, es compatible.
- ☐ si R(C) = R(A) = 3, es compatible.

**5** Un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas:

- ☐ si R(C) = R(A) = 2, es compatible determinado.
- ☐ si R(C) ≠ R(A), es compatible determinado.
- ☐ si R(C) = R(A) = 3, es compatible determinado.
- ☐ si R(C) < R(A), es compatible determinado.

**6** Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro **k**

$$\left\{\begin{array}{l} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky \qquad = 0 \\ 5x + ky \qquad = 0 \\ \quad x + \qquad 2z = 1 \end{array}\right.$$

- ☐ Es siempre incompatible.
- ☐ Para k ≠ 0, compatible determinado.
- ☐ Para k = 0, compatible determinado.
- ☐ Para k = 0, compatible indeterminado.

**7** Se considera el sistema:
$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x \qquad + 2z = a^2 \end{array}\right\}$$

donde **a** es un parámetro real.

Discutir el sistema en función del valor de **a**

- ☐ Para a = 0, no tiene solución, y para a = 1, compatible indeterminado.
- ☐ Si a ≠ 0, incompatible, y si a = 0, compatible indeterminado.
- ☐ Si a = 0, incompatible, y si a ≠ 0, compatible indeterminado.
- ☐ Si a ≠ 1, incompatible, y si a = 1, compatible indeterminado.

**8** Se considera el sistema:
$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x \qquad + 2z = a^2 \end{array}\right\}$$

donde **a** es un parámetro real.

Resuelve el sistema para a = 0

Resuelve el sistema para a = 1

- ☐ Para a = 0 no tiene solución; para a = 1, x = −2z + 1, y = −z + 2
- ☐ Para a = 0, x = y = z = 0; para a = 1 no tiene solución.
- ☐ Para a = 0, x = 2, y = −3, z = 5; para a = 1, x = 1, y = 2, z = 3
- ☐ Para a = 0, x = −1, y = −2, z = −3; para a = 1, x = 3, y = 2, z = 0

**9** Dado el sistema:
$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y \qquad = 1 \end{array}\right\}$$

estudia su compatibilidad según los valores de **a**

- ☐ Si a ≠ 0, a ≠ 2, compatible determinado; si a = 1, incompatible; si a = 2 incompatible.
- ☐ Si a ≠ 1, compatible determinado; si a = 1, compatible indeterminado.
- ☐ Si a ≠ 0, compatible determinado; si a = 0, compatible indeterminado.
- ☐ Si a ≠ −1, a ≠ 3, compatible determinado; si a = −1, incompatible; si a = 3, incompatible.

**10** Dado el sistema:
$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y \qquad = 1 \end{array}\right\}$$

resuélvelo cuando sea posible.

- ☐ Si a ≠ 1, x = 1, y = 1, z = 1 − a
- ☐ Si a = 1, x = 1/2, y = 1/2, z = (1 − a)/2
- ☐ x = 1/2, y = 1/2, z = (1 − a)/2 para a ≠ 1 y x = λ, y = 1 − λ, z = 0; $\lambda \in \mathbb{R}$ para a = 1
- ☐ No se puede resolver porque R(C) ≠ R(A)

# Ejercicios y problemas propuestos

## 1. Teorema de Rouché

**19.** Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \\ 2x - 5y + z = -2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 5x + 4y + 5z = 9 \\ x - 2y = 1 \\ 5x + 3y + 5z = 5 \end{array}\right\}$

**20.** Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + y + 4z = 0 \\ 4x - y + 2z = -4 \\ 3x - y + z = -2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 8x + y + 4z = 9 \\ 5x - 2y + 4z = 6 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$

**21.** Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{array}\right\}$

**22.** Discute y resuelve, si es posible, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4y - z + 2t = 0 \\ x + y + z = 3 \\ 5x - 2y - 4z - t = -12 \end{array}\right\}$$

## 2. Regla de Cramer y forma matricial

**23.** Resuelve por Cramer:

a) $\left.\begin{array}{l} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{array}\right\}$

**24.** Resuelve por Cramer:

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 3x - 4y = 5 \\ 7x - y - 3z = 8 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right\}$

**25.** Resuelve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**26.** Resuelve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 3. Resolución de sistemas de cuatro ecuaciones

**27.** Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 2z + 2t = 2 \\ 2x - y + z - 4t = 1 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + z - 2t = 1 \end{array}\right\}$$

**28.** Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{array}\right\}$$

**29.** Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{array}\right\}$$

**30.** Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - 3z + t = 1 \\ 2x - y - z - 3t = 2 \\ 7x - y - 6z - 8t = 7 \\ 4x + 3y - 7z - t = 4 \end{array}\right\}$$

## 4. Discusión de sistemas con parámetros

**31.** Discute, según los valores del parámetro **m,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} mx + my = 6 \\ x + (m - 1)y = 3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} (m + 1)x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = 4 \\ x + my + 2z = 2 \end{array}\right\}$

**32.** Discute, según los valores del parámetro **a,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + az = 9 \\ x - y - 6z = 5 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + az = 6 \end{array}\right\}$

**33.** Discute, según los valores del parámetro **k,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 6 \\ x + y = k \\ x + 2y = 2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ kx + 3y - 2z = 0 \\ -x - 4z = 3 \end{array}\right\}$

# Ejercicios y problemas

## Para ampliar

**34.** Resuelve y clasifica los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y - z = 4 \\ x + y + z = 3 \\ 2x - 3z = -1 \\ 4x + 5z = 6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x - y + 3z + 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right\}$

**35.** Para cada valor del parámetro real **k,** se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k^2 \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) discutir el sistema según los valores de **k**

b) resolverlo en los casos en que sea compatible.

**36.** Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro **m:**

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + (m + 2)z = 3 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema para los distintos valores de **m**

b) Resuelve el sistema para m = 3

**37.** Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real **a:**

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro **a**

b) Resuelve el sistema para a = –1

c) Resuelve el sistema para a = 2

**38.** Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real $\lambda$:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ y - z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro $\lambda$

b) Resuelve cuando sea indeterminado.

**39.** Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro **a**

b) Resuelve el sistema cuando tenga más de una solución.

**40.** Sea el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -x + ky + 2z = k \\ 2x + ky - z = 2 \\ kx - y + 2z = k \end{array}\right\}$$

a) Discute la compatibilidad del sistema según los valores del parámetro **k**

b) Resuelve el sistema para k = –1

c) Resuelve el sistema para k = 2

**41.** Siendo **a** un número real cualquiera, se define el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - az = 1 \\ -y + z = 0 \\ ax + z = a \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del valor de **a**

b) Encuentra todas sus soluciones para a = 1

**42.** Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real $\lambda$:

$$\left.\begin{array}{l} y + z = 1 \\ (1 - \lambda) + y + z = \lambda \\ x + (\lambda - 1)y - z = 0 \end{array}\right\}$$

donde $\lambda$ es un número real.

a) Discute el sistema según los valores del parámetro $\lambda$

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 0$

c) Resuelve el sistema para $\lambda = 3$

**43.** Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real $\lambda$:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 5z = 0 \\ 2x - \lambda y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\}$$

Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro $\lambda$ y resuélvelo.

# Ejercicios y problemas propuestos

**44.** Considera el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ -\lambda x + 3y + z &= -7 \\ x + 2y + (\lambda + 2)z &= -5 \end{aligned}\right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro $\lambda$

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

**45.** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} ax + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + ay + 4z &= 2 \\ 2x + ay + 6z &= a - 2 \end{aligned}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro **a**

b) Resuélvelo para a = 2

**46.** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 6 \\ -x - y + (a - 4)z &= 7 \\ x + y + 2z &= 11 \end{aligned}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro real **a**

b) Resuélvelo para a = 4

**47.** Sea el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} (a + 1)x + 2y + z &= a + 3 \\ ax + y &= a \\ ax + 3y + z &= a + 2 \end{aligned}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro real **a**

b) Resuelve el sistema en los casos en que resulte compatible determinado.

**48.** Se considera el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + my &= 0 \\ x + mz &= m \\ x + y + 3z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores de **m**

b) Resuelve el sistema para m = 6

**49.** Sea el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{aligned} x + z &= 0 \\ x + my + 2mz &= 0 \\ 2x + my + (2m + 3)z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

a) Calcula el valor de **m** para el que el sistema tenga soluciones distintas de la trivial.

b) Halla las soluciones.

## Problemas

**50.** Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

a) estudia su compatibilidad.

b) añade al sistema una ecuación de tal forma que el sistema resultante tenga solución única. Justifica la respuesta y encuentra dicha solución.

c) añade al sistema dado una ecuación de tal forma que el sistema resultante sea incompatible. Justifica la respuesta.

**51.** Se considera el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= a \\ x + a^2 z &= 2a + 1 \\ x - y + a(a - 1)z &= 2a \end{aligned}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro real **a**

b) Resuelve el sistema para a = 3

**52.** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones en las incógnitas x, y, z, t:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ y + 2z + t &= 0 \\ 2x + 2ky - t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

a) Encuentra los valores de **k** para los que el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es 2

b) Resuelve el sistema anterior para k = 0

**53.** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x + 2y &= 3 \\ -x + 2\lambda z &= -1 \\ 3x - y - 7z &= \lambda + 1 \end{aligned}\right\}$$

a) Halla todos los valores del parámetro $\lambda$ para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.

b) Resuelve el sistema para los valores de $\lambda$ obtenidos en el apartado anterior.

c) Discute el sistema para los restantes valores de $\lambda$

**54.** Discute el sistema, según el valor del parámetro **m,** y resuelve en los casos de compatibilidad.

$$\left.\begin{array}{r}2x + 3y + z = 4\\ 3x + y + mz = 6\\ -2x - 10y - 2z = m - 4\end{array}\right\}$$

**55.** Dado el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x + z = 1\\ y + (a-1)z = 0\\ x + (a-1)y + az = a\end{array}\right\}$$

a) discute el sistema según el valor del parámetro **a**

b) resuelve el sistema en todos los casos de compatibilidad.

**56.** Discute, según los valores del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}2y - z = k\\ 3x - 2z = 11\\ y + z = 6\\ 2x + y - 4z = k\end{array}\right\}$$

**57.** Discute, según los valores del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x + y - z = 2\\ kx + y + z = 1\\ x - y + 3z = -3\\ 4x + 2y = k\end{array}\right\}$$

**58.** Discute, según los valores del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x + y + 5z = 0\\ 2x - 3y = 0\\ x - y + z = 0\\ x + 2y + 2kz = k\end{array}\right\}$$

**59.** Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro **m** y resuélvelo cuando sea posible:

$$\left.\begin{array}{r}x + 2z - 3 = 0\\ 3x + y + z + 1 = 0\\ 2y - z + 2 = 0\\ x - y + mz + 5 = 0\end{array}\right\}$$

**60.** Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro **a:**

$$\left.\begin{array}{r}ax + z + t = 1\\ ay + z - t = 1\\ ay + z - 2t = 2\\ az - t = 0\end{array}\right\}$$

## Para profundizar

**61.** Discute y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores de los parámetros **a** y **b:**

$$\left.\begin{array}{r}3x - y + 2z = 1\\ x + 4y + z = b\\ 2x - 5y + az = -2\end{array}\right\}$$

**62.** Discute, según los valores de los parámetros $\lambda$ y $\mu$, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda x + y + z = \mu\\ x + y + \lambda z = 2\\ 2x + y + \lambda z = \mu\end{array}\right\}$$

**63.** Discute, según los valores de los parámetros **a** y **b,** el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r}2x - 5y + az = -2\\ 3x - y + 2z = 1\\ x + 4y + z = b\end{array}\right\}$$

**64.** Calcula el valor de **a** y **b** para que el sistema siguiente sea compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r}2x - y + z = 3\\ x - y + z = 2\\ 3x - y - az = b\end{array}\right\}$$

**65.** Estudia, según los diferentes valores de **a** y **b,** la compatibilidad del sistema:

$$\left.\begin{array}{r}2x - y - 2z = b\\ x + y + z = 5\\ 4x - 5y + az = -10\end{array}\right\}$$

**66.** Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r}ax + y + z = 1\\ x + ay + z = b\\ x + y + az = 1\end{array}\right\}$$

a) discute el sistema en función de **a** y **b**

b) resuelve el sistema para **a** = **b** = –2

**67.** Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r}2x - y + z = 3\\ x - y + z = 2\\ 3x - y - az = b\end{array}\right\}$$

a) halla los valores de **a** y **b** para los que el sistema sea compatible indeterminado y su solución sea una recta.

b) halla la solución para los valores obtenidos en el apartado anterior.

# Tema 4. Sistemas lineales con parámetros

## Paso a paso

**68.** Discute, según los valores de **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} (1-k)x + y + z &= 0 \\ x + (1-k)y + z &= k \\ x + y + (1-k)z &= k^2 \end{aligned}\right\}$$

**Solución:**

4. Sistemas lineales con parámetros
Alba Maza Sánchez
Óscar Arias López
Paso a paso

a) Introduce la matriz **C** de los coeficientes, como **C(k)**

b) Copia la matriz **C(k),** cambia la **C** por **A,** coloca el cursor en cualquier lugar de la última columna. En Matrices selecciona ▼ **Menú** y elige **Añadir columna a la derecha.**

c) Introduce la columna de los términos independientes.

d) Resuelve la ecuación:

**resolver(|C(k)| = 0)**

e) Clasifica el sistema según los valores de **k**

Ejercicio 68

$C(k) = \begin{pmatrix} 1-k & 1 & 1 \\ 1 & 1-k & 1 \\ 1 & 1 & 1-k \end{pmatrix} \rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} -k+1 & 1 & 1 \\ 1 & -k+1 & 1 \\ 1 & 1 & -k+1 \end{pmatrix}$

$A(k) = \begin{pmatrix} 1-k & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-k & 1 & k \\ 1 & 1 & 1-k & k^2 \end{pmatrix} \rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} -k+1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -k+1 & 1 & k \\ 1 & 1 & -k+1 & k^2 \end{pmatrix}$

resolver( |C(k)| = 0) → {{k=0}, {k=3}}

Si $k \neq 0$, $k \neq 3$, R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas

El sistema es compatible determinado.

Estudio para k = 0

$C(0) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango(C(0)) → 1

$A(0) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

rango(A(0)) → 1

Para k = 0, R(C) = R(A) = 1 < 3 = número de incógnitas

Sistema compatible indeterminado.

Estudio para k = 3

$C(3) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

rango(C(3)) → 2

$A(3) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

rango(A(3)) → 3

Para k = 3, R(C) = 2 < R(A) = 3

Sistema incompatible.

**69.** Resuelve el sistema cuando sea posible, según los valores de **a,** y clasifícalo.

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \\ x + y + z &= a \end{aligned}\right\}$$

**Solución:**

a) Como hay una ecuación más que incógnitas, se calcula el determinante de la matriz ampliada.

Ejercicio 69

$C(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

resolver( |A(a)| = 0) → {{a=−3}, {a=1}}

Para todo valor de $a \neq -3$, $a \neq 1$, R(C) < R(A) = 4

El sistema es incompatible.

Estudio para a = −3

$C(-3) \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango(C(−3)) → 3

$A(-3) \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

rango(A(−3)) → 3

Para a = −3, R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas.

Sistema compatible determinado.

$\text{resolver}\begin{bmatrix} -3x + y + z = 1 \\ x - 3y + z = 1 \\ x + y - 3z = 1 \\ x + y + z = -3 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=-1, y=-1, z=-1\}\}$

Estudio para a = 1

$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango(C(1)) → 1

$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango(A(1)) → 1

Para a = 1, R(C) = 1 = R(A) < número de incógnitas = 3

Sistema compatible indeterminado.

$\text{resolver}\begin{bmatrix} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=-z-y+1, y=y, z=z\}\}$

**70. Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

## Así funciona

Matrices ▼ **Menú**

Contiene las opciones:


### Sustituir en una matriz A un parámetro k por un número

Se introduce la matriz como **A(k):** por ejemplo, para sustituir en la matriz **A(k)** el valor del parámetro **k** por **2,** se escribe: **A(2)**

## Practica

**71.** Discute el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y + 4z = 5 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{array}\right\}$$

**72.** Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = -8 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{array}\right\}$$

**73.** Resuelve matricialmente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 5y = 4 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{array}\right\}$$

**74.** Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z - 3t = 2 \\ 2x + 5y + 3z - 8t = 4 \\ x + 2y + 2z - 4t = 3 \\ 3x + 6y + 5z - 11t = 8 \end{array}\right\}$$

**75.** Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{array}\right.$$

a) Resuélvelo para el valor de **a** que lo haga compatible indeterminado.

b) Resuelve el sistema que se obtiene para a = 2

**76.** Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ x - z = -1 \\ 3x - y + z = 10 \end{array}\right\}$$

**77.** Discute, según los valores del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} kx + y = 1 \\ x + (k + 1)y = 1 \\ x + ky = 1 \end{array}\right\}$$

**78.** Clasifica el sistema siguiente según los valores del parámetro **k**

$$\left.\begin{array}{r} kx + y - 2z = 0 \\ -x - y + kz = 1 \\ x + y + z = k \end{array}\right\}$$

**79.** Dado el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{r} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k + 1)x + y = 0 \end{array}\right\}$$

averigua para qué valores de **k** tienen soluciones distintas de x = y = z = 0. Resuélvelo en tales casos.

**80.** Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{array}\right\}$$

determina para qué valor o valores de **a** el sistema tiene una solución en la que y = 2

## Paso a paso

**68.** Discute, según los valores de **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned}(1-k)x + y + z &= 0\\ x + (1-k)y + z &= k\\ x + y + (1-k)z &= k^2\end{aligned}\right\}$$

**Solución:**

a) Introduce la matriz de los coeficientes y asígnale la letra C

b) Introduce la matriz columna de los términos independientes y asígnale la letra B

c) En la entrada de expresiones escribe:

**append_columns(C, B)**

y elige **Introducir y Simplificar.**

d) Asígnale a esta matriz ampliada la letra A

• Cálculo del determinante de la matriz de los coeficientes.

a) Calcula el determinante de la matriz de los coeficientes, **det(C)**

$$k^2(3-k)$$

b) Resuelve la ecuación correspondiente:

$$k = 3 \lor k = 0$$

• Para todo valor de $k \neq 0$ y $k \neq 3$ se verifica que $R(C) = R(A) = 3 \Rightarrow$ El sistema es heterogéneo y compatible determinado.

• Estudio para k = 0

a) Selecciona la matriz ampliada. En la barra de herramientas elige **Sustituir variables,** escribe en **Nuevo valor: 0,** y haz *clic* en **Simplificar.**

b) Con la nueva matriz seleccionada, escribe en la barra de entrada de expresiones **row_reduce** y pulsa **F4** para que se copie a su derecha entre paréntesis.

c) Pulsa **Introducir y simplificar,** y se obtiene:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$R(C) = R(A) = 1 <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

• Estudio para k = 3

a) Selecciona la matriz ampliada y sustituye el parámetro **k** por 3

b) Reduce por filas la matriz obtenida. Se obtiene:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$R(C) = 2 < R(A) = 3 \Rightarrow$ El sistema es heterogéneo e incompatible.

**69.** Resuelve el sistema cuando sea posible, según los valores de **a,** y clasifícalo.

$$\left.\begin{aligned}ax + y + z &= 1\\ x + ay + z &= 1\\ x + y + az &= 1\\ x + y + z &= a\end{aligned}\right\}$$

**Solución:**

• Como hay una ecuación más que incógnitas, se calcula el determinante de la matriz ampliada:

a) Introduce la matriz de los coeficientes, C, la de los términos independientes, B, y a partir de ellas halla la matriz ampliada, A

b) Calcula el determinante de A, **det(A):**

$$a^4 - 6a^2 + 8a - 3$$

c) Halla sus raíces reales:

$$a = -3 \lor a = 1$$

• Para todo valor $a \neq -3$ y $a \neq 1$, se tiene que el $R(C) < R(A) = 4 \perp \Rightarrow$ El sistema es heterogéneo e incompatible.

• Estudio para a = –3

a) Selecciona la matriz ampliada y sustituye **a** por –3

b) Reduce por filas la matriz obtenida.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$R(C) = R(A) = 3 \Rightarrow$ El sistema es heterogéneo y compatible determinado. Del sistema equivalente se obtiene la solución:

$$x = -1, y = -1, z = -1$$

• Estudio para k = 1

a) Selecciona la matriz ampliada y sustituye **a** por 1

b) Reduce por filas la matriz obtenida. Se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(C) = R(A) = 1 \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, el sistema equivalente es:

$$x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z$$

**70.** **Internet.** Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

## Así funciona

### Discusión de un sistema

Para discutir un sistema:

a) Se introduce la matriz de los coeficientes y se le asigna la letra **C**

b) Se introduce la matriz columna de los términos independiente y se le asigna la letra B

c) Se forma la matriz ampliada, **append_columns(C, B),** y se le asigna la letra **A**

d) Se calcula el determinante que haga falta y se calculan sus raíces.

e) Se estudia el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada con: **row_reduce(A)**

## Practica

**71.** Discute el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 3x + y + 4z &= 5 \\ 2x - y + 3z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

**72.** Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= -8 \\ x + 3y - 2z &= 5 \\ 2x + y + 3z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

**73.** Resuelve matricialmente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 5y &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

**74.** Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z - 3t &= 2 \\ 2x + 5y + 3z - 8t &= 4 \\ x + 2y + 2z - 4t &= 3 \\ 3x + 6y + 5z - 11t &= 8 \end{aligned}\right\}$$

**75.** Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x - ay + z &= 1 \\ x + y + z &= a + 2 \end{aligned}\right.$$

a) Resuélvelo para el valor de **a** que lo haga compatible indeterminado.

b) Resuelve el sistema que se obtiene para $a = 2$

**76.** Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + z &= 2 \\ x - z &= -1 \\ 3x - y + z &= 10 \end{aligned}\right\}$$

**77.** Discute, según los valores del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} kx + y &= 1 \\ x + (k + 1)y &= 1 \\ x + ky &= 1 \end{aligned}\right\}$$

**78.** Clasifica el sistema siguiente según los valores del parámetro **k**

$$\left.\begin{aligned} kx + y - 2z &= 0 \\ -x - y + kz &= 1 \\ x + y + z &= k \end{aligned}\right\}$$

**79.** Dado el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{aligned} x + ky - z &= 0 \\ kx - y + z &= 0 \\ (k + 1)x + y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

averigua para qué valores de **k** tienen soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resuélvelo en tales casos.

**80.** Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x - ay &= 2 \\ ax - y &= a + 1 \end{aligned}\right\}$$

determina para qué valor o valores de **a** el sistema tiene una solución en la que $y = 2$

# Ponte a prueba

## Problemas resueltos

**1.** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que verifica $A^3 - I = O$; con I, matriz identidad, y O, matriz nula.

b) Calcula $A^{12}$

c) Basándote en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas, halla la matriz X que verifica la igualdad

$$A^2X + I = A$$

**a)**

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego: $A^3 - I = O$

**b)** La matriz **A** es cíclica de orden **3**

$$\begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

$A^{12} = A^3 = \mathbf{I}$

**c)** Se multiplica por la izquierda en los dos miembros por **A**

$$A \cdot (A^2 X + I) = A \cdot A \Rightarrow A^3 \cdot X + A = A^2 \Rightarrow X + A = A^2 \Rightarrow X = A^2 - A$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

---

**2.** Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Define rango de una matriz.

b) Calcula el rango de A según los valores del parámetro **k**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Estudia si se puede formar una base de $R^3$ con las columnas de A según los valores del parámetro **k.** Indica con qué columnas.

**a)** El rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes.

**b)**

$$R\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = R\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_4 & C_3 & C_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & k & k \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1^a + 2^a \\ \\ \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & k+1 & k+3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 2^a - 2 \cdot 3^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & k+1 & k+3 \\ 0 & 0 & k+3 & k-3 \end{pmatrix} = 3$$

para cualquier valor de **k,** ya que **k** no puede ser 3 y –3 a la vez.

**c)** Para k = –3, el determinante formado por los vectores columnas 4ª, 3ª y 1ª de A es cero. Luego los tres vectores son linealmente dependientes. Se puede formar una base con los vectores de las columnas 3ª, 2ª y 1ª

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \Rightarrow$$ Las columnas 1ª, 2ª y 3ª son linealmente independientes para k = –3

Para k ≠ –3 se puede formar una base con las columnas 1ª, 3ª y 4ª

**3.** Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$$

$$B = (a,\ 2,\ 3)$$

$$C = (4,\ 0,\ 2)$$

a) Halla los valores de x, y, z, para los que A no tiene inversa.

b) Determina los valores de **a** para los que el sistema $B \cdot A = C$ tiene solución.

c) Resuelve el sistema anterior cuando sea posible.

**a)** Para que A no tenga inversa, el determinante de A debe valer cero.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = y^2 - y^2z \Rightarrow y^2 - y^2z = 0 \Rightarrow y^2(1 - z) = 0 \Rightarrow y = 0;\ z = 1$$

La matriz **A** no tiene inversa para los valores **$y = 0$,** o bien **$z = 1$**

**b)**

$$B \cdot A = C \Rightarrow (a \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix} = (4 \quad 0 \quad 2) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} ax + 2y \qquad = 1 \\ ay + 3z = 0 \\ ax + 2y + 3z = 2 \end{array}\right\}$$

Sea la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada, respectivamente:

$$M = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 3 & 0 \\ a & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|M| = 3a^2 \Rightarrow 3a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

Para todo valor $a \neq 0$, $R(M) = R(N) = 3$ = número de incógnitas $\Rightarrow$ el **sistema es compatible determinado.**

Para $a = 0$ se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 3^a - 1^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2^a/3 \\ 3^a - 2^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Se tiene $R(M) = 2 \neq R(N) = 3 \Rightarrow$ **Sistema incompatible.**

**c)** Para $a \neq 0$, resolvemos por Cramer

$$|M| = 3a^2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{3a^2} = \mathbf{\frac{a + 2}{a^2}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix}}{3a^2} = \mathbf{-\frac{1}{a}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 2 & 2 \end{vmatrix}}{3a^2} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

# Ponte a prueba

## Problemas resueltos

**4.** Calcula una matriz cuadrada X sabiendo que verifica

$$XA^2 + BA = A^2$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$XA^2 + BA = A^2$

$XA^2 = A^2 - BA$

Calculamos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; A^2 - BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$X\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

---

**5.** Dado el sistema de ecuaciones con incógnitas x, y, z,

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z &= \alpha \\ 2x + 6y - 11z &= 2 \\ x - 2y + 7z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

se pide:

a) determinar razonadamente el valor de $\alpha$ para el cual el sistema es compatible.

b) para ese valor obtenido en a) de $\alpha$, calcular el conjunto de soluciones del sistema.

c) explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las tres ecuaciones del sistema, en función de los valores de $\alpha$

**a)** Sea C la matriz de los coeficientes y A la matriz ampliada.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}; A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada.

$$R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 1^a - 3^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & -2 & 5 & 2(\alpha - 1) \\ 0 & 4 & -10 & \alpha - 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2 \cdot 2^a + 3^a \end{array} =$$

$$= R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & -2 & 5 & 2(\alpha - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 5(\alpha - 1) \end{array}\right)$$

Para $\alpha \neq 1 \Rightarrow R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \Rightarrow$ **Sistema incompatible.**

Para $\alpha = 1 \Rightarrow R(C) = R(A) = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ **Sistema compatible indeterminado.**

**b)** Para $\alpha = 1$, se tiene el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ -2y + 5z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 1 - 2z,\ y = \frac{5}{2}z$$

La solución es:

$$\mathbf{x = 1 - 2\lambda;\ y = \frac{5}{2}\lambda,\ z = \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

**c)** Para $\alpha = 1$, los tres planos se cortan en una recta. Para $\alpha \neq 1$, los tres planos se cortan dos a dos. No hay dos planos paralelos.

## Problemas propuestos

**1.** Sea A una matriz $3 \times 3$ de columnas $C_1, C_2$ y $C_3$ (en ese orden). Sea B la matriz de columnas $C_1 + C_2, 2C_1 + 3C_3$ y $C_2$ (en ese orden). Calcula el determinante de B en función del de A

**2.** Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right.$$

a) Discútelo según los valores del parámetro **a**

b) Resuélvelo en el caso a = 2

**3.** Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{array}\right\}$$

a) discútelo según los valores del parámetro **k**

b) resuélvelo cuando tenga infinitas soluciones.

**4.** Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores del parámetro **m** para los que el rango de A es menor que 3

b) Estudia si el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de **m** obtenidos en el apartado anterior.

**5.** Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda$ es un número real.

a) Encuentra los valores de $\lambda$ para los que la matriz AB tiene inversa.

b) Dados **a** y **b** números reales cualesquiera, ¿puede ser el sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

compatible determinado con A, la matriz del enunciado?

**6.** Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) resolver la ecuación matricial AX + X = B, donde X es una matriz $2 \times 2$

b) resolver el sistema: $\left\{\begin{array}{l} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{array}\right.$, siendo X e Y dos matrices de orden $2 \times 2$

**7.** Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) determina el rango de M según los valores del parámetro **a**

b) determina para qué valores de **a** existe la matriz inversa de M. Calcula dicha matriz inversa para a = 2

**8.** Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real $\lambda$ e incógnitas x, y, z

$$\left.\begin{array}{r} (\lambda + 2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\lambda + 6)y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\lambda - 2)z = 0 \end{array}\right\}$$

se pide:

a) calcular para qué valores de $\lambda$ el sistema solo admite la solución

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

b) para cada valor de $\lambda$ que hace indeterminado el sistema, obtén todas sus soluciones.

c) explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $\lambda = -3$

**9.** A es una matriz $3 \times 3$ tal que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) calcular el determinante de la matriz $A^3$ y la matriz inversa de $A^3$

b) calcular la matriz fila X = (x, y, z), que es solución de la ecuación matricial $X A^3 = B A^2$, donde B es la matriz fila B = (1, 2, 3)

c) calcular la matriz inversa de A