Algebra (EI)

Notas de Teoría

22/10/12

Espacios vectoriales Euclidianos

Recordemos de los cursos de física o geometría de vectores, el *producto escalar* o *producto interno* entre dos vectores es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

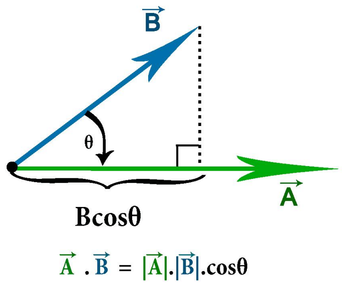

FIGURA 1. Producto escalar de vectores

Si estos vectores estuvieran en el plano, y los representamos como pares ordenados de $\mathbb{R}^2$ de la manera siguiente:

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2)$$
$$\mathbf{B} = (b_1, b_2),$$

entonces se tendría

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2.$$

Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3),$$

entonces tendríamos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

En general, tenemos esta definición:

Definición 0.1. *Sean* $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ *y* $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ *vectores de* $\mathbb{R}^n$*, el* producto escalar *entre* $\boldsymbol{v}$ *y* $\boldsymbol{w}$ *se define como*

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots + v_n \cdot w_n.$$

Un producto interno permite definir *longitudes* de vectores y *distancias* entre ellos.

Definición 0.2. *La* longitud *(o* norma*) de un vector es*

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}.$$

La distancia *entre* $\boldsymbol{w}$ *y* $\boldsymbol{w}$ *es* $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|$.

En los espacios "visuales" ($\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$), estas definiciones de longitud y distancia coinciden con lo que uno puede comprobar "haciendo el dibujo" y midiendo esas distancias. Lo interesante de esta definición es que permite definir distancias en cualquier espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, incluso cuando n es un número grande.

Ejemplo 0.3. Si $\boldsymbol{v} = (2,1,2,0)$ y $\boldsymbol{w} = (0,0,3,4)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3,\\
&\|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{0^2+0^2+3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5,\\
&\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\ | = \sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2+(2-3)^2+(0-4)^2} = \sqrt{22}.
\end{aligned}$$

Con la definición geométrica de producto escalar, uno tiene que $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 0$ si estos vectores se encuentran " a 90 grados" el uno del otro. En general tenemos lo siguiente:

Definición 0.4.

- *Si* $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 0$*, entonces los vectores* $\boldsymbol{v}$ *y* $\boldsymbol{w}$ *se dicen* ortogonales.
- *Más en general, un conjunto de vectores* $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k\}$ *se dice* ortogonal *si cada par de vectores de ese conjunto es ortogonal.*

Ejemplo 0.5. El conjunto $\{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,2)\}$ es ortogonal, ya que

$$\begin{aligned}
&(1,1,0)\cdot(1,-1,0) = 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 0 = 0,\\
&(1,1,0)\cdot(0,0,2) = 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 2 = 0,\\
&(1,-1,0)\cdot(0,0,2) = 1\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 2 = 0.
\end{aligned}$$

Definición 0.6. *Un conjunto de vectores* $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k\}$ *se dice* ortonormal *si*

- $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k\}$ *es ortogonal*
- $\|\boldsymbol{v}_1\| = 1$, $\|\boldsymbol{v}\|_2 = 1, \ldots, \|\boldsymbol{v}_k\| = 1$.

Ejemplo 0.7. La base canónica de $\mathbb{R}^n$, $\{(1,0,\ldots,0),\ (0,1,\ldots,0),\ \ldots,\ (0,0,\ldots,1)\}$ es un conjunto ortonormal.

La importancia de conjuntos ortogonales y ortonormales se basa en lo siguiente:

Proposición 0.8.

- *Un conjunto ortogonal de vectores que no contiene al vector nulo es linealmente independiente.*
- *Un conjunto ortonormal de vectores es linealmente independiente.*
- *Si* $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k\}$ *es una base de un subespacio vectorial* $\mathbb{S}$*, y* $\boldsymbol{v}\in\mathbb{S}$*, entonces las coordenadas de* $\boldsymbol{v}$ *respecto de la base* $\mathcal{B}$ *son*

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_k.$$

Ejemplo 0.9. Consideremos $\mathbb{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$, una base ortonormal de $\mathbb{S}$ es

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \right\}.$$

Sea $\boldsymbol{v} = (-1, 1, 0)$. las coordenadas de $\boldsymbol{v}$ con respecto a la base $\mathcal{B}$ son

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (-1, 1, 0) \cdot \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) = 0, \\ \alpha_2 &= (-1, 1, 0) \cdot \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) = -\sqrt{2}; \end{aligned}$$

y verificamos que efectivamente estos números son las coordenadas del $(-1, 1, 0)$ en esa base:

$$\boldsymbol{v} = (-1, 1, 0) = 0 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) + (-\sqrt{2}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$$

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Ante la pregunta de si dado un subespacio cualquiera, habrá una base ortonormal con la cual pueda trabajar para simplificar cálculos, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 0.10. *Todo subespacio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^n$ admite una base ortonormal. Es más, dado $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ base de $\mathbb{S}$, existe una base ortonormal $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_k\}$ tal que*

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_j \rangle = \langle \boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_j \rangle$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, k$.

La demostración de este teorema es “constructiva” en el sentido que nos da un procedimiento para conseguir la base $\mathcal{B}'$ a partir de la base $\mathcal{B}$. Este algoritmo se llama *proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt*, y es bastante sencillo de implementar. Veamoslo primero con un ejemplo:

Ejemplo 0.11. Calcular una base ortonormal del subespacio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^4$ que tiene por base $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0, 0), (1, 0, 1, 2), (-1, 0, 0, 1)\}$.

Intentaremos primero calcular una base $\mathcal{B}''$ de vectores *ortogonales*, y luego a partir de allí conseguir la base ortonormal. Para ello hacemos:

1. $\boldsymbol{v}''_1 = (1, -1, 0, 0)$.
2. $\boldsymbol{v}''_2 = (1, 0, 1, 2) + \lambda \cdot (1, -1, 0, 0)$, con la condición $\boldsymbol{v}''_1 \cdot \boldsymbol{v}''_2 = 0$, o sea

$$(1, -1, 0, 0) \cdot (1, 0, 1, 2) + \lambda(1, -1, 0, 0) \cdot (1, -1, 0, 0) = 1 + 2\lambda = 0.$$

Luego, $\lambda = -\frac{1}{2}$, y $\boldsymbol{v}''_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2)$.

3. Ahora planteamos $\boldsymbol{v}_3'' = (-1,0,0,1) + \lambda_1 \boldsymbol{v}_1'' + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2''$ con $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{v}_3'' \cdot \boldsymbol{v}_1'' = 0,\ \boldsymbol{v}_3'' \cdot \boldsymbol{v}_2'' = 0$. O sea,

$$(-1,0,0,1)\cdot(1,-1,0,0) + \lambda_1(1,-1,0,0)\cdot(1,-1,0,0) + \lambda_2(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,2)\cdot(1,-1,0,0)$$
$$= -1 + 2\lambda_1 = 0,$$

$$(-1,0,0,1)\cdot(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,2) + \lambda_1(1,-1,0,0)\cdot(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,2) + \lambda_2(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1,2)\cdot(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1,2)$$
$$= \tfrac{3}{2} + \tfrac{11}{2}\lambda_2 = 0.$$

Nos queda el siguiente sistema de ecuaciones lineales en λ_1 y λ_2 :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 & & = & 1 \\ & \tfrac{11}{2}\lambda_2 & = & -\tfrac{3}{2}, \end{cases}$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = -\frac{3}{11}$. O sea,

$$\boldsymbol{v}_3'' = \left(-\frac{4}{11}, -\frac{4}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{5}{11}\right).$$

Luego, la base de vectores ortogonales $\mathcal{B}''$ verifica

- $\langle (1,-1,0,0)\rangle = \langle \boldsymbol{v}_1''\rangle$,
- $\langle (1,-1,0,0),\ (1,0,1,2)\rangle = \langle \boldsymbol{v}_1'', \boldsymbol{v}_2''\rangle$,
- $\langle (1,-1,0,0),\ (1,0,1,2),\ (-1,0,0,1)\rangle = \langle \boldsymbol{v}_1'', \boldsymbol{v}_2'', \boldsymbol{v}_3''\rangle$.

Finalmente, para conseguir la base $\mathcal{B}'$ del teorema, "normalizamos" estos vectores:

$$\begin{array}{rclclcl} \boldsymbol{v}_1' & = & \frac{\boldsymbol{v}_1''}{\|\boldsymbol{v}_1''\|} & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0) & = & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), \\ \boldsymbol{v}_2' & = & \frac{\boldsymbol{v}_2''}{\|\boldsymbol{v}_2''\|} & = & \frac{1}{\sqrt{11/2}}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,2) & = & \left(\frac{\sqrt{22}}{22}, \frac{\sqrt{22}}{22}, \frac{\sqrt{22}}{11}, 2\frac{\sqrt{22}}{11}\right), \\ \boldsymbol{v}_3' & = & \frac{\boldsymbol{v}_3''}{\|\boldsymbol{v}_3''\|} & = & \frac{1}{\sqrt{66/11}}\left(\frac{4}{11}, -\frac{4}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{5}{11}\right). & & \end{array}$$

Y claramente se verifica que $\mathcal{B}'$ es una base ortonormal de $\mathbb{S}$ que cumple con las condiciones del teorema.

En general, dada la base de $\mathbb{S}$ $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$, para construir la base ortogonal $\mathcal{B}''$, se procede recursivamente de la siguiente manera:

- $\boldsymbol{v}_1' := \boldsymbol{v}_1$,
- Si ya están definidos $\boldsymbol{v}_1'', \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1}''$, definimos

(1)
$$\boldsymbol{v}_j'' = \boldsymbol{v}_j + \lambda_1 \boldsymbol{v}_1'' + \ldots + \lambda_{j-1}\boldsymbol{v}_{j-1}'',$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}$ son números reales que se eligen de tal manera que

$$\boldsymbol{v}_j'' \cdot \boldsymbol{v}_1'' = 0,\ \boldsymbol{v}_j'' \cdot \boldsymbol{v}_2'' = 0, \ldots, \boldsymbol{v}_j'' \cdot \boldsymbol{v}_{j-1}'' = 0.$$

Esta condición impone un sistema de ecuaciones lineales en los λ's que tiene solución única. De hecho, es fácil ver que para todo $k = 1, \ldots, j-1$, se tiene

$$\lambda_k = -\frac{\boldsymbol{v}_j \cdot \boldsymbol{v}_k''}{\|\boldsymbol{v}_k''\|^2}.$$

También es de fácil verificación que $\boldsymbol{v}_j'' \neq \mathbf{0}$, el vector nulo de $\mathbb{R}^n$, ya que sino tendríamos de la igualdad (1), que el vector $\boldsymbol{v}_j$ sería un elemento del subespacio generador por $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1}\}$, lo cual contradice el hecho de que la familia $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

Para pasar de la base ortogonal $\mathcal{B}''$ a la base ortonormal $\mathcal{B}'$, solo hay que normalizar cada elemento de esta base: $\boldsymbol{v}'_j := \frac{1}{\|\boldsymbol{v}''_j\|}\boldsymbol{v}''_j$, $j = 1, \ldots, k$.