Algebra (EI)

Notas de Teoria

16/10/12

1. Intersección de Subespacios

Recordemos que dados dos conjuntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, su *intersección* es el conjunto de elementos que pertenecen tanto al primer conjunto como al segundo. En símbolos

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{x}/\, \mathbf{x} \in \mathbf{A}\,\mathrm{y}\,\mathbf{x} \in \mathbf{B}\}.$$

Proposición 1.1. *Sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ subespacios de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Entonces $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ es también un subespacio.*

Demostración. Recordemos que para demostrar que un subconjunto (en este caso $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$) de $\mathbb{V}$ es un subespacio vectorial, hemos de verificar las siguientes 3 condiciones:

1. $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$
2. si $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$, entonces $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$
3. si $\boldsymbol{v} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \cdot \boldsymbol{v} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

Veamos que $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ cumple con cada una de estas condiciones:

1. El vector nulo $\mathbf{0}$ de $\mathbb{V}$ es un elemento tanto de $\mathbb{S}$ como de $\mathbb{T}$ ya que ambos son subespacios (y por lo tanto, tienen que contener al vector nulo). Luego, es un elemento en común de ambos y por lo tanto pertenece a la intersección. O sea, $\mathbf{0} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$, y esto implica que $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.
2. Dado que tanto $\mathbb{S}$ como $\mathbb{T}$ son subespacios, si $\boldsymbol{v} \in \mathbb{S}$ y $\boldsymbol{w} \in \mathbb{S}$ entonces la suma $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in \mathbb{S}$. Análogamente, si $\boldsymbol{v} \in \mathbb{T}$ y $\boldsymbol{w} \in \mathbb{T}$, entonces $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in \mathbb{S}$. Luego, si ambos pertenecen a $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$, entonces $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ también será un elemento de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.
3. De la misma manera, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{v} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ entonces se tendrá por un lado que $\lambda \cdot \boldsymbol{v} \in \mathbb{S}$ (ya que $\mathbb{S}$ es un subespacio) y por la misma razón tendremos $\lambda \cdot \boldsymbol{v} \in \mathbb{T}$. Luego, $\lambda \cdot \boldsymbol{v} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$, que es lo que queríamos verificar.

□

La mejor manera de calcular intersección de subespacios es utilizar su representación por medio de ecuaciones.

Ejemplo 1.2. Si $\mathbb{S}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 :\, x_1 + x_2 + x_3 = 0,\, x_1 - x_4 = 0\}$ y $\mathbb{T}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 :\, x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$, entonces

$$\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{T}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 :\, x_1 + x_2 + x_3 = 0,\, x_1 - x_4 = 0, x_1 - x_3 - x_4 = 0\}.$$

2. Suma de Subespacios

Dados dos conjuntos **A** y **B**, su *unión* es el conjunto de elementos que pertenecen al primer conjunto o al segundo (también incluye a la intersección). En símbolos

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{\mathbf{x}/\, \mathbf{x} \in \mathbf{A}\, \text{o}\, \mathbf{x} \in \mathbf{B}\}.$$

A diferencia de la intersección, si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son subespacios de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$ no necesariamente es un subespacio, lo cual es fácil de verificar ya que en general la suma de un vector de $\mathbb{S}$ y de otro de $\mathbb{T}$ no necesariamente pertenece a la unión de estos dos conjuntos.

Definición 2.1. *Se define* $\mathbb{S}+\mathbb{T} \subset \mathbb{V}$ *como el* subespacio generado *por* $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$*, es decir es el menor subespacio que contiene a la unión de estos dos subespacios.*

Proposición 2.2.

i) *Si* $\mathbb{S} = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ *y* $\mathbb{T} = \langle \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \rangle$*, entonces*

$$\mathbb{S} + \mathbb{T} = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \rangle.$$

iii) $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{S},\ \boldsymbol{w} \in \mathbb{T}\}$.

La primer afirmación de la proposición 2.2 nos proporciona una manera práctica de calcular una suma de subespacios, si tenemos generadores de los mismos.

Ejemplo 2.3. Si $\mathbb{S}_2 = \langle (1, -1, 0),\ (1, 1, 1) \rangle$ y $\mathbb{T}_2 = \langle (1, 0, 2) \rangle$, entonces

$$\mathbb{S}_2 + \mathbb{T}_2 = \langle (1, -1, 0,\ (1, 1, 1),\ (1, 0, 2) \rangle.$$

Luego, para calcular sumas e intersecciones, convendrá tener ambas representaciones de los espacios.

Ejemplo 2.4. Calcular generadores y ecuaciones de $\mathbb{S}_3 + \mathbb{T}_3$ y $\mathbb{S}_3 \cap \mathbb{T}_3$, donde
$\mathbb{S}_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, y
$\mathbb{T}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) :\ a + b + c + d = 0,\ b = d \right\}$.

Calculemos primero ecuaciones para $\mathbb{S}_3$:
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_3$ si y solamente si existen α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

De aquí se deduce que

$$\begin{cases} \alpha_1 & & = & a \\ & 0 & = & b \\ & \alpha_2 & = & c \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & = & d \end{cases}$$

Con matriz asociada (como sistema en α_1, α_2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 1 & 1 & d \end{pmatrix}.$$

Haciendo eliminación de Gauss sobre esta matriz, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 1 & 1 & d \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - F_1 - F_3 \mapsto F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d-a-c \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & \boxed{b} \\ 0 & 0 & \boxed{d-a-c} \end{pmatrix}.$$

Luego, se tiene la representación siguiente de $\mathbb{S}_3$ por medio de ecuaciones:

$$\mathbb{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b = 0,\, d-a-c = 0 \right\},$$

y calculamos

$$\mathbb{S}_3 \cap \mathbb{T}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a+b+c+d = 0,\, b = d,\, b = 0,\, d-a-c = 0 \right\}.$$

Para la suma, tendremos que encontrar generadores de $\mathbb{T}_3$. De las condiciones $a+b+c+d = 0$, $b = d$ deducimos que toda matriz de $\mathbb{S}_3$ se escribe de la manera siguiente: $\begin{pmatrix} -c-2d & d \\ c & d \end{pmatrix}$, con c y $d \in \mathbb{R}$ cualesquiera. Luego,

$$\begin{pmatrix} -c-2d & d \\ c & d \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y esto nos dice que

$$\mathbb{T}_3 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ahora podemos calcular fácilmente

$$\mathbb{S}_3 + \mathbb{T}_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

3. Fórmula de Grassman

Notar que en el ejercicio 2.4 se puede mostrar fácilmente que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{S}_3$ (ya que genera $\mathbb{S}_3$ y todo conjunto de 2 vectores es linealmente independiente a menos que uno de ellos sea múltiplo del otro) y -por los mismos motivos- se tendrá que $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\mathbb{T}_3$. Sin embargo, el conjunto

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

NO es una base de $\mathbb{S}_3 + \mathbb{T}_3$ ya que, si bien generan todo el espacio, no es un conjunto linealmente independiente. Por ejemplo, se tiene la siguiente relación de dependencia lineal:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la igualdad de arriba podemos deducir que la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pertenece tanto a $\mathbb{S}_3$ (ya que es combinación lineal de vectores de $\mathbb{S}_3$) y a $\mathbb{T}_3$ (ya que es uno de los generadores de este espacio. Luego, se tiene $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_3 \cap \mathbb{T}_3$, y no es difícil demostrar que

$$\mathbb{S}_3 \cap \mathbb{T}_3 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \ \mathbb{S}_3 + \mathbb{T}_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

y más aún que

$$\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ y } \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

son bases de $\mathbb{S}_3 \cap \mathbb{T}_3$ y $\mathbb{S}_3 + \mathbb{T}_3$ respectivamente. Esta situación ocurrirá en general, aunque de una manera menos sutil: uniendo los elementos de dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de dos subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$, se podrán "eliminar" tantos generadores linealmente dependientes como elementos tiene una base de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$. Este resultado se conoce como la *fórmula de Grassman*, que relaciona las dimensiones de la suma y de la intersección en función de las dimensiones de cada uno de los subespacios.

Teorema (Fórmula de Grassman): *Si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son subespacios de un espacio vectorial (de dimensión finita) $\mathbb{V}$ entonces*

$$\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) + \dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{T}).$$