Algebra (EI)

Notas de Teoría

25/09/12

`Producto de Matrices - Matriz Inversa`

Recordemos que la definición de producto de matrices es poco intuitiva, pero veremos pronto las ventajas que tiene. Para multiplicar matrices, el número de columnas de la primer matriz ha de ser igual al número de filas de la segunda. Por ejemplo, las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

se pueden multiplicar ya que la primera tiene 3 columnas y la segunda tiene 3 filas. El resultado del producto es

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notar que en este caso también es posible realizar el producto $B \cdot A$, pero el resultado será una matriz de 3 filas y 3 columnas:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

O sea que en este caso no se cumple que $A \cdot B$ sea igual a $B \cdot A$. De hecho, ambas matrices son cuadradas pero de tamaños distintos.

Definition 0.1. La traspuesta de una matriz M de m filas y n columnas es aquella matriz que tiene n filas y m columnas, donde el elemento que se encuentra en la fila i y columna j de la nueva matriz es el que estaba en la fila j y columna i de la matriz original.

Denotamos con M^T a la traspuesta de M.

Ejercicio 0.2. Si A y B son las matrices definidas más arriba, se tiene

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notar que, cualquiera sea el tamaño de la matriz M, siempre es posible hacer el producto $M \cdot M^T$ y $M^T \cdot M$.

Producto de Matrices y Eliminación de Gauss: Una de las primeras aplicaciones del producto de matrices será para poder codificar el proceso de eliminación de Gauss sobre una matriz dada. Consideremos por ejemplo la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al hacer eliminación de Gauss sobre C obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

donde las operaciones que hemos realizado fueron (en este orden):

1. intercambiamos las filas 1 y 2;
2. multiplicamos la primer fila por $\frac{1}{2}$;
3. a la tercer fila le restamos 3 veces la primer fila;
4. a la tercer fila le restamos la segunda fila.

Cada una de estas operaciones puede obtenerse de multiplicar la matriz que está a la izquierda por una matriz dada y obtener la que está a la derecha. Veamos la primera de todas:

para intercambiar dos filas en una matriz hay que multiplicarla (a izquierda) por la matriz cuadrada que tiene todos 1's en la diagonal, ceros afuera, e intercambiamos luego en esta matriz las filas que queremos permutar.

Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Segunda regla:

para multiplicar una fila de una matriz por un número cualquiera hay que multiplicarla (a izquierda) por la matriz cuadrada que tiene todos 1's en la diagonal, ceros afuera, a la que cambiamos el 1 que figura en la fila que queremos cambiar por el número por el cual queremos multiplicar.

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la última regla del proceso de Gauss se traduce así

para sumarle a la fila i de una matriz un múltiplo la fila j de la misma matriz, hay que multiplicarla (a izquierda) por la matriz cuadrada que tiene todos 1's en *la diagonal, ceros afuera, a la que cambiamos el* 0 *que figura en el lugar* (j, i) *por el múltiplo en cuestión.*

En nuestro ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Definition 0.3. La matriz cuadrada que tiene 1's en la diagonal y ceros afuera, se denomina la matriz identidad. La denotaremos por I_n, donde n es el tamaño que tiene esa matriz.

El motivo por el cual se llama matriz identidad es porque si M es una matriz de $n \times m$, entonces

$$I_n \cdot M = M,$$

es decir, la matriz identidad actúa como si fuera el número 1 en la multiplicación de matrices.

Definition 0.4. Si M es una matriz cuadrada, M se dice *invertible* si existe otra matriz cuadrada M' tal que

$$M \cdot M' = M' \cdot M = I.$$

No toda matriz cuadrada es invertible, por ejemplo si $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces si existiera M' tendria que ser de la forma $M' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix}$, con $x, y, z, v \in \mathbb{R}$, pero al plantear la ecuación $M \cdot M' = I$ resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y de aquí extraemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + z & = & 1 \\ y + v & = & 0 \\ x + z & = & 0 \\ y + v & = & 1 \end{cases}$$

que resulta incompatible. Luego, no existe una matriz M' que cumpla las condiciones que tiene que cumplir una inversa de M, y con ello concluímos que M no tiene inversa.