Chapter3

不定積分與積分技巧

3.1

不定積分及基本積分公式

定義3.1 /例題1

定義 3.1

若 $F'(x)=f(x),\ \forall x\in I$，則稱 F 為 f 在區間 I 上的**反導函數 (Antiderivative)**。

例題 1

當 $f(x)=x$，令 $F(x)=\dfrac{x^2}{2}$，則

$$F'(x)=x=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}，$$

故由定義 3.1 知 $F(x)=\dfrac{x^2}{2}$ 爲 $f(x)=x$ 的反導函數。

例題2

例題 2

當 $f(x)=0$，令 $F(x)=c$，c 爲任意的常數，則

$$F'(x)=0=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}，$$

故由定義 3.1 知任意的常數皆爲 0 的反導函數。

例題3

例題 3

當 $f(x)=x$，令 $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+c$，其中 c 爲任意常數，則

$$F'(x)=x=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}，$$

故 $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+c$ 亦爲 $f(x)=x$ 的反導函數。

定理3.1

定理 3.1

若 $F'(x)=G'(x)=f(x),\ \forall x\in[a,\ b]$，則

$$G(x)=F(x)+c,\ \forall x\in[a,\ b]。$$

(即若 F 與 G 皆為 f 在 $[a,\ b]$ 上的反導函數，則 F 與 G 相差一個常數。)

定理3.1證明

證明： 令 $H=G-F$，則 $H'(x)=G'(x)-F'(x)=0,\ \forall x\in(a,\ b)$，

由均值定理可知 $H(x)=c,\ \forall x\in(a,\ b)$。

又因 H 在 $[a,\ b]$ 上可微分，故 H 在 $[a,\ b]$ 上連續，

所以 $c=\lim_{x\to a^+} H(x)=H(a)$，

而且 $c=\lim_{x\to b^-} H(x)=H(b)$，

故 $H(x)=c,\ \forall x\in[a,\ b]$，

即 $G(x)=F(x)+c,\ \forall x\in[a,\ b]$，得證。

積分

$$\int \boxed{f(x)}\,dx = \boxed{F(x)+c}$$

以微分驗證

積分

$$\int \boxed{x^2}\,dx = \boxed{\frac{x^3}{3}+c}$$

以微分驗證

所以，若 F 為 f 的一個反導函數，則 f 的其他反導函數必定為 $F+c$ 的型態，其中 c 為一常數。

為了方便起見，我們以 $\int f(x)\,dx$ 表示 $f(x)$ 的反導函數的一般式，$\int f(x)\,dx$ 也稱為 $f(x)$ 對 x 的不定積分 (Indefinite Integral)，函數 $f(x)$ 稱為被積分函數 (Integrand)。

因此，若 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的一個反導函數，則 $f(x)$ 的不定積分為 $\int f(x)\,dx = F(x)+c,\ c \in \mathbb{R}$，其中 c 稱為積分常數。

例題4

例題 4

由例題 1 知 $\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c$；由例題 2 知 $\int 0\,dx=c$。

微分：$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$	$\Leftrightarrow$	積分：$\int f(x)\,dx=F(x)+c$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n,\ n\neq -1$	$\Leftrightarrow$	公式一：$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ n\neq -1$
$\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$\Leftrightarrow$	公式二：$\int x^{-1}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx=\ln\lvert x\rvert+c$
$\frac{d}{dx}e^x=e^x$	$\Leftrightarrow$	公式三：$\int e^x\,dx=e^x+c$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)=a^x$	$\Leftrightarrow$	公式四：$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+c,\ a>0,\ a\neq 1$
$\frac{d}{dx}(-\cos x)=\sin x$	$\Leftrightarrow$	公式五：$\int \sin x\,dx=-\cos x+c$
$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$	$\Leftrightarrow$	公式六：$\int \cos x\,dx=\sin x+c$
$\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$	$\Leftrightarrow$	公式七：$\int \sec^2 x\,dx=\tan x+c$
$\frac{d}{dx}(-\cot x)=\csc^2 x$	$\Leftrightarrow$	公式八：$\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+c$

[redacted]

微分：$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$	$\Leftrightarrow$	積分：$\int f(x)\,dx=F(x)+c$
$\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x$	$\Leftrightarrow$	公式九：$\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+c$
$\frac{d}{dx}(-\csc x)=\csc x\cot x$	$\Leftrightarrow$	公式十：$\int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+c$
$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert<1$ $\frac{d}{dx}(-\cos^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert<1$	$\Leftrightarrow$	公式十一：$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+c$ $=-\cos^{-1}x+k,\ \lvert x\rvert<1$
$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$ $\frac{d}{dx}(-\cot^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$	$\Leftrightarrow$	公式十二：$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+c$ $=-\cot^{-1}x+k,\ x\in\mathbb{R}$
$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ \lvert x\rvert>1$ $\frac{d}{dx}(-\csc^{-1}x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ \lvert x\rvert>1$	$\Leftrightarrow$	公式十三：$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\sec^{-1}x+c$ $=-\csc^{-1}x+k,\ \lvert x\rvert>1$

註：若 $\int f(x)\,dx=F(x)+c$，則 $\int f(t)\,dt=F(t)+c,\ \int f(u)\,du=F(u)+c,\cdots$。

例題5

例題 5

(a) $\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{1}{3}x^3 + c$；

(b) $\int x^{10}\,dx = \frac{x^{10+1}}{10+1} + c = \frac{1}{11}x^{11} + c$。

例題6

例題 6

(a) $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{1}{-1}x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$；

(b) $\int \frac{1}{x^{10}}dx = \int x^{-10}dx = \frac{x^{-10+1}}{-10+1} + c = \frac{1}{-9}x^{-9} + c = -\frac{1}{9x^9} + c$。

例題7

例題 7

(a) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + c = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$；

(b) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \dfrac{1}{\frac{5}{3}} x^{\frac{5}{3}} + c = \dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$。

例題8

例題 8

(a) $$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c=\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{x}+c\text{；}$$

(b) $$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}+c=\frac{1}{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+c=3\sqrt[3]{x}+c\text{。}$$

例題9

例題 9

(a) $\int 2^x\,dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + c$；

(b) $\int 10^x\,dx = \dfrac{10^x}{\ln 10} + c$。

例題10

例題 10

(a) $\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3+c$；

(b) $\int \sqrt{u}\,du=\int u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}\sqrt{u^3}+c$。

定理3.2

定理 3.2

若 $F'(x)=f(x),\ G'(x)=g(x)$，k 為常數，則

(1) $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx=kF(x)+c$。

(2) $$\int (f(x)+g(x))\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$
$$=F(x)+G(x)+c\text{。}$$

$$\int (f(x)+kg(x))\,dx=\int f(x)\,dx+k\int g(x)\,dx$$
$$=F(x)+kG(x)+c\text{。}$$

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x)]\, dx$$

$$= k_1 \int f_1(x)\, dx + k_2 \int f_2(x)\, dx + \cdots + k_n \int f_n(x)\, dx$$

$$= k_1 F_1(x) + k_2 F_2(x) + \cdots + k_n F_n(x) + c \text{。}$$

$$\int f(x)g(x)\, dx \neq \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx \text{，}$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx \neq \frac{\int f(x)\, dx}{\int g(x)\, dx} \text{。}$$

例題11

例題 11

求 $\int (4x^2 - 3x + 7)\,dx$。

解 原式 $= 4\int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 7\int 1\,dx$

$$= 4\cdot\frac{x^3}{3} - 3\cdot\frac{x^2}{2} + 7\cdot x + c$$

$$= \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x + c\text{。}$$

例題12

例題 12

求 $\int\left(3x^4-5\sqrt[3]{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}+6\right)dx$。

解

$$\text{原式}=\int(3x^4-5x^{\frac{1}{3}}+4x^{-\frac{1}{2}}+6)\,dx$$

$$=3\int x^4\,dx-5\int x^{\frac{1}{3}}\,dx+4\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx+6\int 1\,dx$$

$$=3\cdot\frac{x^5}{5}-5\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+4\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+6x+c$$

$$=\frac{3}{5}x^5-\frac{15}{4}\sqrt[3]{x^4}+8\sqrt{x}+6x+c\text{。}$$

例題13

例題 13

求 $\int (2x+3)^2\,dx$。

解 原式 $= \int ((2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3 + 3^2)\,dx$

$$= \int (4x^2 + 12x + 9)\,dx$$

$$= 4\cdot\frac{x^3}{3} + 12\cdot\frac{x^2}{2} + 9\cdot x + c$$

$$= \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 9x + c\text{。}$$

例題14

例題 14

求 $\int x^2\left(2x^3+\dfrac{3}{x^3}-2\right)dx$。

解 原式 $=\int\left(2x^5+\dfrac{3}{x}-2x^2\right)dx$

$$=\frac{1}{3}x^6+3\ln|x|-\frac{2}{3}x^3+c\text{。}$$

例題 15

求 $\int \frac{(x^2-2)^2}{5x^3}dx$。

解

$$原式=\frac{1}{5}\int \frac{(x^4-4x^2+4)}{x^3}dx$$

$$=\frac{1}{5}\int \left(x-\frac{4}{x}+4x^{-3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}-4\ln|x|+\frac{4}{-2}x^{-2}\right)+c$$

$$=\frac{1}{10}x^2-\frac{4}{5}\ln|x|-\frac{2}{5x^2}+c$$ 。

例題 16

求 $\int e^x(2+3e^{-x})\,dx$。

解 原式 $=\int (2e^x+3e^0)\,dx$

$=\int (2e^x+3)\,dx$

$=2e^x+3x+c$。

例題17

例題 17

求 $\int (2x^3+5e^x+3^x)\,dx$。

解 原式 $=2\int x^3\,dx+5\int e^x\,dx+\int 3^x\,dx$

$$=\frac{1}{2}x^4+5e^x+\frac{3^x}{\ln 3}+c$$。

例題18

例題 18

求 $\int (2\cos\theta + 5\sin\theta)\, d\theta$。

解

原式 $= 2\int \cos\theta\, d\theta + 5\int \sin\theta\, d\theta$

$= 2\sin\theta - 5\cos\theta + c$。

3.2

變數變換法(代換法)

3.2.1 基本代換法 定理3.3

定理 3.3

若 F 為 f 的一個反導函數，即 $\int f(x)\,dx = F(x) + c$，則

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + c \text{。}$$

證明： $\dfrac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$

$= f(g(x))g'(x)$，得證。

例題1

例題 1

求 $\int (2x+3)^{100}\,dx$。

解 令 $u=2x+3$，則 $du=2dx$，即 $dx=\frac{1}{2}du$。

$$原式=\int u^{100}\cdot\frac{1}{2}du$$

$$=\frac{1}{2}\int u^{100}\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{101}}{101}+c=\frac{u^{101}}{202}+c$$

$$=\frac{(2x+3)^{101}}{202}+c,\ c\in\mathbb{R}。$$

例題2

例題 2

求 $\int e^{ax}\,dx,\ a \neq 0,\ a \in \mathbb{R}$。

解 **方法一：**

我們熟悉的基本積分公式有 $\int e^x\,dx = e^x + c$，那是因為 $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$，

但是 $\dfrac{d}{dx}e^{ax}$ 不等於 e^{ax}，而是 ae^{ax}，所以 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{a}e^{ax}\right)$ 才會等於 e^{ax}，

因此 $\dfrac{1}{a}e^{ax}$ 是 e^{ax} 的反導函數，

$\therefore \int e^{ax}\,dx = \dfrac{1}{a}e^{ax} + c$。

方法二：

若我們令 $u=ax$，則 $du=adx$，即 $dx=\dfrac{1}{a}du$，

故

$$
\begin{aligned}
\int e^{ax}\,dx &= \int e^{u}\cdot\frac{1}{a}\,du \\
&= \frac{1}{a}\int e^{u}\,du \quad \left(\because \int e^{x}\,dx=e^{x}+c,\ \therefore \int e^{u}\,du=e^{u}+c\right) \\
&= \frac{1}{a}(e^{u}+c_0),\ c_0\in\mathbb{R} \\
&= \frac{1}{a}e^{u}+c,\ c=\frac{c_0}{a}\in\mathbb{R} \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}+c\ 。
\end{aligned}
$$

例題 3

求 $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$。

解 令 $u=1+x^3$，則 $\dfrac{du}{dx}=3x^2$，即 $x^2\,dx=\dfrac{1}{3}du$。

故 $\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx=\int\sqrt{1+x^3}\cdot x^2\,dx$

$$=\int\sqrt{u}\cdot\frac{1}{3}du=\frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{9}(1+x^3)^{3/2}+c\text{。}$$

我們也可以用下列的寫法，有時候會比較方便，

$$\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int\sqrt{1+x^3}\,3x^2\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\int(1+x^3)^{\frac{1}{2}}\,d(1+x^3)\quad(\text{因爲 } d(1+x^3)=3x^2\,dx)$$

$$=\frac{1}{3}\frac{(1+x^3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c$$

$$=\frac{2}{9}(1+x^3)^{3/2}+c\text{ 。}$$

例題4

例題 4

求 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$。

解法一：

令 $u=x^2+4$，則 $\frac{du}{dx}=2x$，即 $x\,dx=\frac{1}{2}du$。

$$原式=\int \frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int u^{-1/2}du$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}+c=\sqrt{u}+c=\sqrt{x^2+4}+c。$$

解法二：

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}2\,x\,dx=\frac{1}{2}\int(x^2+4)^{-1/2}\,d(x^2+4)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+4)^{1/2}}{\frac{1}{2}}+c=\sqrt{x^2+4}+c\text{。}$$

例題5

例題 5

求 $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,dx$。

解

令 $u=x^2+4x+5$，則 $\frac{du}{dx}=2x+4=2(x+2)$，

即 $(x+2)\,dx=\frac{1}{2}\,du$。

故原式 $=\int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}\,du=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,du=\frac{1}{2}\ln|u|+c$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5|+c=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+c$。

例題6

例題 6

求 $\int \frac{1}{(ax+b)^n}dx$，其中 $a \neq 0$，a, b 皆爲常數。

解 令 $u=ax+b \Rightarrow dx=\frac{1}{a}du$。

$$原式=\int \frac{1}{u^n}\cdot\frac{1}{a}du=\frac{1}{a}\int u^{-n}\,du$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{a}\ln|u|+c, & 當\ n=1\\ \frac{1}{a}\left(\frac{u^{-n+1}}{-n+1}\right)+c, & 當\ n\neq 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{a}\ln|ax+b|+c, & 當\ n=1\\ \frac{-1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}}+c, & 當\ n\neq 1\end{cases}。$$

例題 7

證明 (a) $\int \cos(mx)\,dx=\dfrac{1}{m}\sin(mx)+c$；

(b) $\int \sin(mx)\,dx=\dfrac{-1}{m}\cos(mx)+c$。

解 (a) 令 $u=mx$，則 $\dfrac{du}{dx}=m$，即 $dx=\dfrac{1}{m}du$。

故 $\int \cos(mx)\,dx$

$$=\int \cos u\cdot\left(\frac{1}{m}du\right)=\frac{1}{m}\int \cos u\,du=\frac{1}{m}\sin u+c$$

$$=\frac{1}{m}\sin(mx)+c\text{。}$$

(b) 省略 (與 (a) 類似)。

例題8

例題 8

求 $\int (2\cos 3x + 4\sin 5x)\,dx$。

解 利用例題 7 的結果，得

$$\int (2\cos 3x + 4\sin 5x)\,dx = 2\cdot\frac{1}{3}\sin 3x + 4\cdot\frac{-1}{5}\cos 5x + c$$

$$= \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{4}{5}\cos 5x + c\text{。}$$

例題9

例題 9

求 $\int \tan^2 x \sec^2 x \, dx$。

解

令 $u = \tan x$，則 $\dfrac{du}{dx} = \sec^2 x$，

即 $\sec^2 x \, dx = du, \ \tan^2 x = (\tan x)^2 = u^2$。

原式 $= \int u^2 \, du = \dfrac{u^3}{3} + c = \dfrac{\tan^3 x}{3} + c$。

例題10

例題 10

求 $\int \tan x\,dx$。

解

因為 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，令 $u=\cos x$，

則 $\dfrac{du}{dx}=-\sin x$，即 $\sin x\,dx=-du$。

$$\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=\int \frac{-1}{u}du$$

$$=-\int \frac{1}{u}du=-\ln|u|+c$$

$$=-\ln|\cos x|+c=\ln|\cos x|^{-1}+c$$

$$=\ln|\sec x|+c。$$

例題11

例題 11

求 $\int \sec x\,dx$。

解

令 $u=\sec x+\tan x$，則 $\dfrac{du}{dx}=\sec x\tan x+\sec^2 x$，

即 $\sec x(\sec x+\tan x)\,dx=du$。

$$\int \sec x\,dx=\int \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{(\sec x+\tan x)}dx$$

$$=\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+c$$

$$=\ln|\sec x+\tan x|+c$$ 。

例題12

例題 12

求 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$。

解

令 $u=\sqrt{x}$，則 $\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，即 $\frac{1}{\sqrt{x}} dx=2\,du$。

原式 $=2\int e^u\,du=2e^u+c=2e^{\sqrt{x}}+c$。

例題13

例題 13

$$\int e^{4x}(3e^{2x}-2e^{-3x})\,dx=?$$

解　原式 $=\int (3e^{(4x+2x)}-2e^{(4x-3x)})\,dx$

$$=\int (3e^{6x}-2e^{x})\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{6x}-2e^{x}+c$$ 。

例題14

例題 14

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx = ?$$

解

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}dx \text{。}$$

令 $u = 2x$，則 $dx = \frac{1}{2}du$。

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{1}{2}\,du \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\
&= \frac{1}{2}\sin^{-1} u + c \\
&= \frac{1}{2}\sin^{-1}(2x) + c \text{ 。}
\end{aligned}
$$

例題15

例題 15

證明 (a) $\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$；

(b) $\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$。

解

(a) $\int \sinh x\,dx = \int \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + c = \cosh x + c$。

(b) $\int \cosh x\,dx = \int \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} + c = \sinh x + c$。

例題 16

$$\int (\sinh x \cdot \cosh x)\, dx = ?$$

解

原式 $= \int \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int [(e^x)^2 - (e^{-x})^2]\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int (e^{2x} - e^{-2x})\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{-2} e^{-2x}\right) + c$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right) + c$$

$$= \frac{1}{4} \cosh(2x) + c$$ 。

例題17

例題 17

$\int \operatorname{sech} x \, dx = ?$

解

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = \int \frac{1}{\cosh x} dx$$

$$= \int \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$= \int \frac{2}{e^{-x}(e^{2x}+1)} dx$$

$$= \int \frac{2e^x}{e^{2x}+1} dx \text{。}$$

令 $u=e^x$，得 $du=e^x\,dx$。

$$原式=\int \frac{2}{u^2+1}\,du$$

$$=2\tan^{-1}u+c$$

$$=2\tan^{-1}(e^x)+c$$ 。

3.2.2代數代換法

例題 18

求 $\int x\sqrt{3x+1}\,dx$。

解 令 $u=3x+1$，則 $x=\frac{1}{3}(u-1)$，即 $dx=\frac{1}{3}du$。

$$\text{原式}=\int\frac{1}{3}(u-1)\cdot\sqrt{u}\cdot\frac{1}{3}du$$

$$=\frac{1}{9}\int(u^{3/2}-u^{1/2})\,du$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}}-\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right)+c$$

$$=\frac{2}{45}(3x+1)^{5/2}-\frac{2}{27}(3x+1)^{3/2}+c\text{。}$$

例題19

例題 19

求 $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$。

解 令 $u=1+\sqrt{x}$，則 $x=(u-1)^2,\ dx=2(u-1)\,du$。

$$\text{原式}=\int \frac{(u-1)^2}{u}\cdot 2(u-1)\,du$$

$$=2\int \frac{(u-1)^3}{u}\,du$$

$$=2\int \left(u^2-3u+3-\frac{1}{u}\right)du$$

$$=2\left(\frac{u^3}{3}-\frac{3}{2}u^2+3u-\ln|u|\right)+c$$

$$=\frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3-3(1+\sqrt{x})^2+6(1+\sqrt{x})-2\ln(1+\sqrt{x})+c\text{。}$$

例題20

例題 20

求$\int \frac{6x+1}{\sqrt[5]{3x+1}}dx$。

解 令 $u=3x+1$，則 $x=\frac{1}{3}(u-1)$, $dx=\frac{1}{3}du$。

$$原式=\int \frac{6\cdot\left[\frac{1}{3}(u-1)\right]+1}{\sqrt[5]{u}}\cdot\frac{1}{3}du$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{2u-1}{u^{1/5}}\,du$$

$$=\frac{1}{3}\int(2\cdot u^{4/5}-u^{-1/5})\,du$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{u^{9/5}}{\frac{9}{5}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{u^{4/5}}{\frac{4}{5}}+c$$

$$=\frac{10}{27}(3x+1)^{9/5}-\frac{5}{12}(3x+1)^{4/5}+c\text{ 。}$$

例題21

例題 21

求 $\int \frac{4x^2-3}{\sqrt{(2x+3)^3}}dx$。

解 令 $u=2x+3$，則 $x=\frac{1}{2}(u-3),\ dx=\frac{1}{2}du$。

$$原式=\int \frac{4\left[\frac{1}{2}(u-3)\right]^2-3}{\sqrt{u^3}}\cdot\frac{1}{2}du$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{u^2-6u+9-3}{u^{3/2}}du$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(u^{1/2}-6u^{-1/2}+6u^{-3/2}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}-6\cdot\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}+6\cdot\frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right)+c$$

$$=\frac{1}{3}(2x+3)^{3/2}-6(2x+3)^{1/2}-6(2x+3)^{-1/2}+c$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3}-6\sqrt{2x+3}-\frac{6}{\sqrt{2x+3}}+c。$$

例題 22

求 $\int \frac{x^3+x}{\sqrt{4-x^2}}dx$。

解

令 $u=4-x^2$，則 $x^2=4-u,\ du=-2x\,dx$，即 $x\,dx=-\frac{1}{2}du$。

原式 $=\int \frac{(x^2+1)}{\sqrt{4-x^2}}\cdot x\,dx$

$$= \int \frac{5-u}{\sqrt{u}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du$$

$$= -\frac{1}{2} \int (5u^{-1/2} - u^{1/2})\, du$$

$$= -\frac{1}{2}\left[5 \cdot \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} - \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right] + c$$

$$= -5(4-x^2)^{1/2} + \frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} + c \text{ 。}$$

例題 23

求 $\int \frac{x+3}{x^2+4x+5}dx$。

解 分母的二次多項式配方得

$x^2+4x+5=(x+2)^2+1$，

令 $u=x+2$，則 $x=u-2,\ dx=du$。

$$原式 = \int \frac{(x+2)+1}{(x+2)^2+1}\,dx$$

$$= \int \frac{u+1}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}\,du + \int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \tan^{-1} u + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) + \tan^{-1}(x+2) + c \text{。}$$

3.3

有理函數之積分

狀況一：$Q(x)$ 可分解成數個不重複的一次因式之乘積。

$$\text{若 } f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)}\text{，}$$

其中 $a_i\neq 0$ 而且 a_ix+b_i 皆不相同，$i=1, 2, \cdots, n$。

顯然，當 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 爲眞分式時，多項式 $P(x)$ 的次數必定小於 n，則必定存在唯一的一組實數常數 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，使得

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{c_1}{a_1x+b_1}+\frac{c_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{c_n}{a_nx+b_n}\text{。}$$

由 3.2.1 節例題 6 知 $\int\frac{k}{ax+b}dx=\frac{k}{a}\ln|ax+b|+c$，因此

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

$$=\int\left(\frac{c_1}{a_1x+b_1}+\frac{c_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{c_n}{a_nx+b_n}\right)dx$$

$$=\frac{c_1}{a_1}\ln|a_1x+b_1|+\frac{c_2}{a_2}\ln|a_2x+b_2|+\cdots+\frac{c_n}{a_n}\ln|a_nx+b_n|+c\text{。}$$

例題1

例題 1

求 $\int \frac{x+1}{x^2-4}dx$。

解 $x^2-4=(x+2)(x-2)$，

令 $\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}$，

通分得 $\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{A(x-2)+B(x+2)}{x^2-4}$，

$$x+1=(A+B)x+2(-A+B)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 2(-A+B)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{4} \\ B=\dfrac{3}{4} \end{cases},$$

$$\text{原式}=\int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x+2}+\frac{\frac{3}{4}}{x-2} \right) dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x+2|+\frac{3}{4}\ln|x-2|+c \text{。}$$

例題2

例題 2

求 $\int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} dx$。

解 因為被積分函數為假分式，可利用長除法將原式化作

$$\int \left[(x - 3) + \frac{5x + 6}{x^2 + 3x + 2}\right] dx，$$

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$，

令 $\dfrac{5x+6}{x^2+3x+2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}$，通分比較係數得

$A(x+2)+B(x+1)=5x+6$，

即 $\begin{cases} A+B=5 \\ 2A+B=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=4 \end{cases}$，

$$\text{故原式} = \int\left[(x-3)+\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x+2}\right]dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-3x+\ln|x+1|+4\ln|x+2|+c\text{。}$$

狀況二：$Q(x)$ 可分解成重複的一次因式之乘積。

若 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x)}{(ax+b)^n}$，其中整數 $n>1$，$P(x)$ 的次數 $<n$，

則必定存在唯一的一組實數常數 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，使得

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{c_n}{(ax+b)^n}+\frac{c_{n-1}}{(ax+b)^{n-1}}+\cdots+\frac{c_2}{(ax+b)^2}+\frac{c_1}{(ax+b)}\text{。}$$

由 3.2.1 節例題 6 得知

$$\int\frac{1}{(ax+b)^k}dx=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\ln|ax+b|+c, & \text{當 } k=1\\[2ex] \dfrac{-1}{a(k-1)(ax+b)^{k-1}}+c, & \text{當 } k=2,3,\cdots,n\end{cases},$$

故 $\int f(x)\,dx = \int \frac{P(x)}{(ax+b)^n}\,dx$

$$= \int \left[\frac{c_n}{(ax+b)^n} + \frac{c_{n-1}}{(ax+b)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_2}{(ax+b)^2} + \frac{c_1}{ax+b}\right] dx$$

$$= c_n \int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx + c_{n-1} \int \frac{1}{(ax+b)^{n-1}}\,dx + \cdots$$

$$+ c_2 \int \frac{1}{(ax+b)^2}\,dx + c_1 \int \frac{1}{ax+b}\,dx$$

$$= \frac{-1}{a}\left\{\frac{c_n}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} + \frac{c_{n-1}}{(n-2)(ax+b)^{n-2}} + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{c_3}{2(ax+b)^2} + \frac{c_2}{1(ax+b)} - c_1 \ln|ax+b|\right\} + c \text{ 。}$$

例題3

例題 3

求 $\int \frac{x^2+2x-6}{(x-1)^3}dx$。

解 首先將被積分函數化爲部分分式如下：

令 $\frac{x^2+2x-6}{(x-1)^3}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)}$，

將右式通分後再與左式比較係數得

$$x^2+2x-6=A+B(x-1)+C(x-1)^2$$

$$=Cx^2+(B-2C)x+(A-B+C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=1 \\ B-2C=2 \\ A-B+C=-6 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=4 \\ C=1 \end{cases} ,$$

$$\text{原式} = \int \left[\frac{-3}{(x-1)^3} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)}\right] dx$$

$$= \frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{4}{x-1} + \ln|x-1| + c \text{。}$$

例題4

例題 4

求 $\int \frac{5x^2 - x + 1}{x^3 - 4x^2} dx$。

解 $\int \frac{5x^2 - x + 1}{x^3 - 4x^2} dx = \int \frac{5x^2 - x + 1}{x^2(x-4)} dx = \int \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-4} \right) dx$

$= -\frac{A}{x} + B\ln|x| + C\ln|x-4| + c$。

其中 A, B, C 可由 $A(x-4) + Bx(x-4) + Cx^2 = 5x^2 - x + 1$，

比較係數得到：$A = -\frac{1}{4},\ B = \frac{3}{16},\ C = \frac{77}{16}$。

例題5

例題 5

求 $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}dx$。

解

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}dx = \int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x-1)^2}dx$$

$$= \int \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{(x-1)}dx$$

$$= -\frac{A_2}{x+1} + A_1 \ln|x+1| - \frac{B_2}{x-1} + B_1 \ln|x-1| + c$$ 。

其中 A_1, A_2, B_1, B_2 可由

$A_2(x-1)^2 + A_1(x+1)(x-1)^2 + B_2(x+1)^2 + B_1(x+1)^2(x-1) = x^2+x+1$，

比較係數，

解得：$A_1=0,\ A_2=\frac{1}{4},\ B_1=0,\ B_2=\frac{3}{4}$。

狀況三：$Q(x)$ 可分解成 n 個不重複的不可約的二次因式之連乘積。

即 $Q(x)=(a_1x^2+b_1x+c_1)\cdot(a_2x^2+b_2x+c_2)\cdots(a_nx^2+b_nx+c_n)$，其中 $b_i^2-4a_ic_i<0,\ i=1,2,\cdots,n$。

(當判別式 $b^2-4ac<0$，則稱二次式 ax^2+bx+c 爲不可約的。)

若

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$=\frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\cdots(a_nx^2+b_nx+c_n)},$$

其中 $P(x)$ 之次數 $<2n$，且 $b_i^2-4a_ic_i<0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，則必定存有唯一的一組 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n,\ B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_n$，使得

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{P(x)}{Q(x)}\\ &=\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}\ \text{。}\end{aligned}$$

則 $\displaystyle\int f(x)\,dx$

$$=\int\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}dx+\int\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}dx+\cdots+\int\frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}dx\ \text{。}$$

其中 $\displaystyle\int\frac{A_ix+B_i}{a_ix^2+b_ix+c_i}dx$ 之積分，可以以類似 3.2.1 節例題 5 與 3.2.2 節例題 23 之技巧處理。

例題 6

求 $\int \frac{2x^3+5x^2+8x+8}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}dx$。

解 令 $\frac{2x^3+5x^2+8x+8}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$

$\Rightarrow 2x^3+5x^2+8x+8$

$=(Ax+B)(x^2+2x+2)+(Cx+D)(x^2+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=2 \\ 2A+B+D=5 \\ 2A+2B+C=8 \\ 2B+D=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=3 \\ C=2 \\ D=2 \end{cases},$$

原式 $=\int \frac{3}{x^2+1}dx+\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx$，

令 $u=x^2+2x+2$，則 $du=(2x+2)\,dx$，

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx=\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+c$$

$$=\ln(x^2+2x+2)+c \text{。}$$

所以原式 $=3\tan^{-1}x+\ln(x^2+2x+2)+k$。

狀況四：$Q(x)$ 可分解成重複之不可約的二次因式的連乘積。

若 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n}$，

其中 $b^2-4ac<0$，且整數 $n>1$，$P(x)$ 的次數 $<2n$，

則必定存有唯一的一組 $A_1, A_2, \cdots, A_n, B_1, B_2, \cdots, B_n$，使得

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}\text{。}$$

則 $\displaystyle\int f(x)\,dx$

$$=\int\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}dx+\int\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}dx+\cdots+\int\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}dx\text{。}$$

關於 $i \geq 2$ 時，$\int \frac{A_i x + B_i}{(ax^2+bx+c)^i} dx$ 的積分法如下：

(1) 當 $\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) = k(A_i x + B_i)$ 時，

令 $u = ax^2+bx+c$，

則 $(A_i x + B_i)\, dx = \frac{du}{k}$，

$\int \frac{A_i x + B_i}{(ax^2+bx+c)^i} dx = \int \frac{1}{u^i} \cdot \frac{du}{k}$。

(2) 當 $\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) \neq k(A_i x + B_i)$ 時，

可將 ax^2+bx+c 配方後利用 3.2.2 節例題 23 之技巧或 3.6 節之三角代換法解之。

例題 7

求 $\int \frac{x^3+7x^2+18x+17}{(x^2+4x+5)^2}dx$。

解

令 $\frac{x^3+7x^2+18x+17}{(x^2+4x+5)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+4x+5)}+\frac{Cx+D}{(x^2+4x+5)^2}$，

即 $x^3+7x^2+18x+17=(Ax+B)(x^2+4x+5)+(Cx+D)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ 4A+B=7 \\ 5A+4B+C=18 \\ 5B+D=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases},$$

原式 $=\int \frac{x+3}{x^2+4x+5}dx+\int \frac{x+2}{(x^2+4x+5)^2}dx$，

由 3.2.2 節例題 23 知 $\int \frac{x+3}{x^2+4x+5}dx$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+\tan^{-1}(x+2)+k_1 \text{ 。}$$

又，令 $u=(x^2+4x+5)$，則 $\frac{1}{2}du=(x+2)dx$，

$$\int \frac{x+2}{(x^2+4x+5)^2}dx = \int \frac{1}{u^2}\cdot\frac{1}{2}du$$

$$= -\frac{1}{2u}+k_2$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+4x+5)}+k_2 \text{ 。}$$

所以原式 $=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+\tan^{-1}(x+2)-\frac{1}{2(x^2+4x+5)}+k$ 。