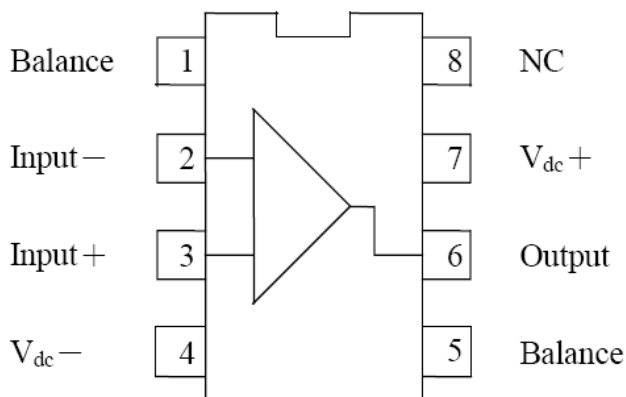


第八章 積分器

國立勤益科技大學資工系
游正義

【E424研究室】

youjy@ncut.edu.tw



實驗原理

- 類比計算機中除了加法基本運算電路外，其另一基本電路即為積分器，如下圖所示，又稱為密勒積分器(miller integrator)。

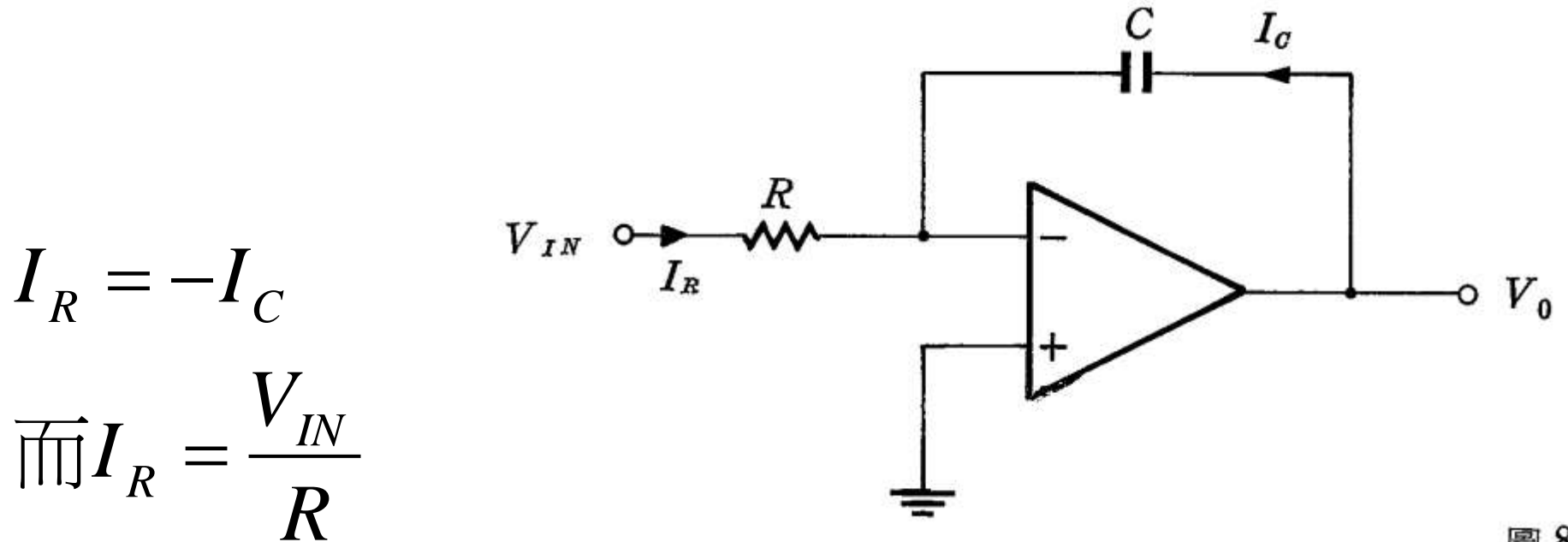


圖 8 - 1

$Q = CV_o$ (電容器兩端之電壓為 V_o)

$$I_C = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CV_o) = C \frac{dV_o}{dt}$$

$$I_R = -I_C$$

因此 $\frac{V_{IN}}{R} = -C \frac{dV_O}{dt}$

$$\frac{dV_O}{dt} = -\frac{V_{IN}}{RC}$$

$$dV_O = -\frac{V_{IN}}{RC} dt$$

$$V_O = -\frac{1}{RC} \int V_{IN} dt$$

- 輸出訊號為輸入訊號的積分與增益常數 $1/RC$ 之乘積再倒相 180° 。
- 若輸入訊號為直流電壓，則左式之積分可消去，成為

$$V_O = -\frac{V_{IN}}{RC} \cdot t$$

$$V_O = -\frac{V_{IN}}{RC} \cdot t$$

- 上式表示若一直流電壓接至積分器之輸入端，輸出電壓最初為零伏，而後將以等斜率爬升至放大器的最大值。
- 由於具有反相的關係，當輸入電壓為負值，將使輸出到達最大之正電壓值，若為正電壓輸入，則輸出將被驅向最大之負電壓值，如圖8-2所示。

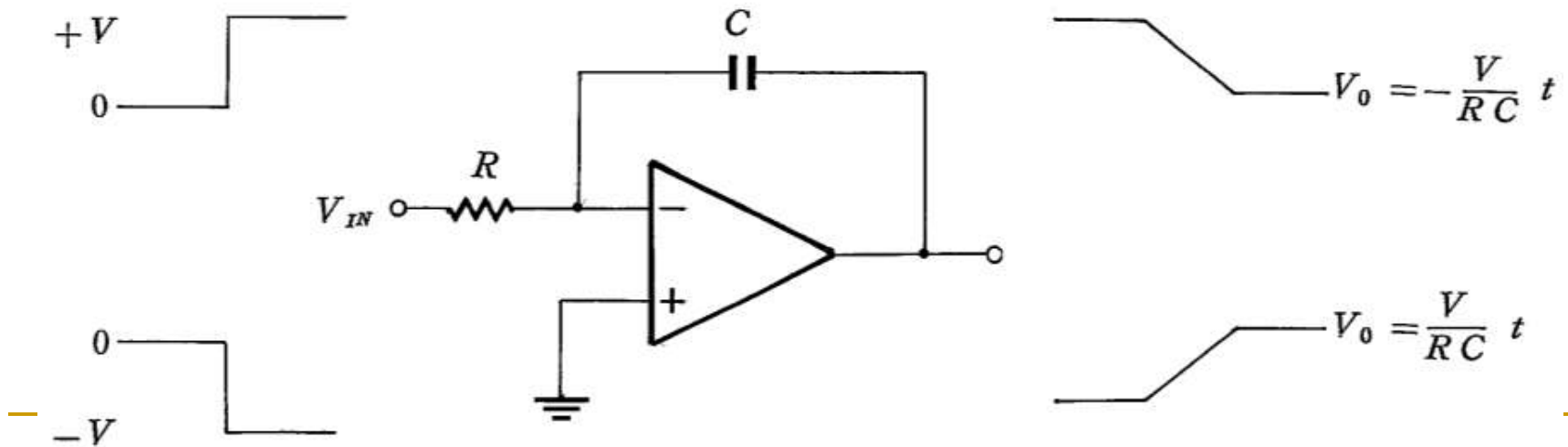


圖 8-2

斜坡電壓，其斜率由輸入電壓之大小及電路之增益常數來決定，若輸入電壓一直維持著固定直流電壓，則斜坡電壓最後將會達到最大的輸出電壓而不在變化，此時積分器之輸入與輸出的關係不再成立，稱之為過荷。

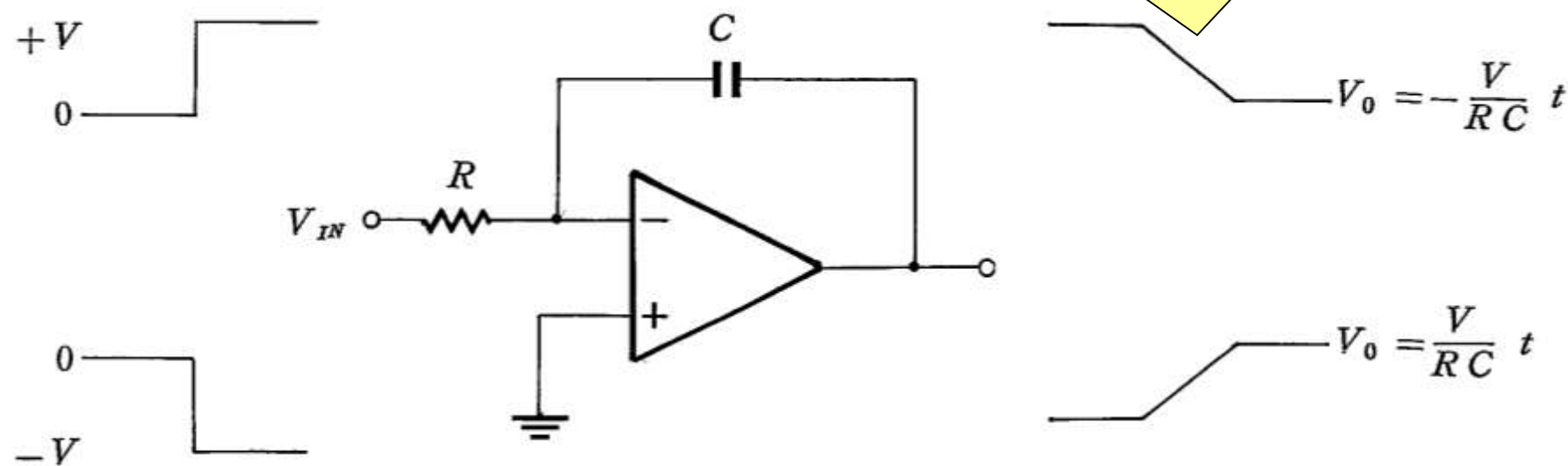
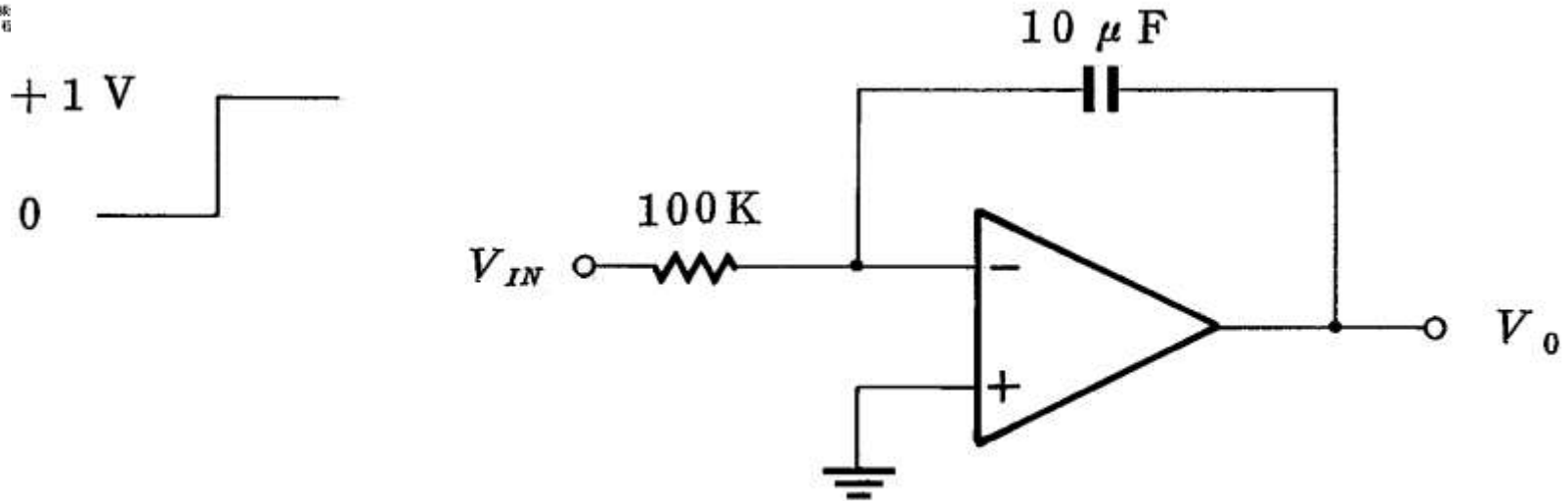


圖 8-2



■ 增益常數 $\frac{1}{RC} = \frac{1}{100 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6}} = \frac{1}{1} = 1$

■ 在輸入電壓為+1V時，輸出之斜坡電壓為

$$V_O = -\frac{V_{IN}}{RC} \cdot t = -1 \cdot t$$

■ 上式表示輸出電壓每秒鐘下降1V，10秒鐘後共下降10V。



- 若電容器改為 $1\mu\text{F}$ ，則增益常數為

$$\frac{1}{RC} = \frac{1}{100 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-6}} = \frac{1}{10^{-1}} = 10$$

- 其輸出之斜坡電壓為

$$V_0 = -\frac{V_{IN}}{RC} \cdot t = -10 \cdot t$$

- 上式表示輸出電壓每秒鐘下降 10V ，在理論上， 10 秒後共下降 100V ，但是由於OP Amp本身所接的電壓為定值，當輸出電壓接近 $-V_{CC}$ 電壓後，即維此電壓而不再繼續下降，除非有外來因素（譬如輸入電壓改變為負電壓）來改變其工作狀況。

- 若輸入訊號改用方波，其頻率為**10Hz**，振幅為**4V**峰值電壓，電路之增益常數為

$$\frac{1}{RC} = \frac{1}{100 \times 10^3 \times 0.1 \times 10^{-6}} = \frac{1}{10^{-2}} = 100$$

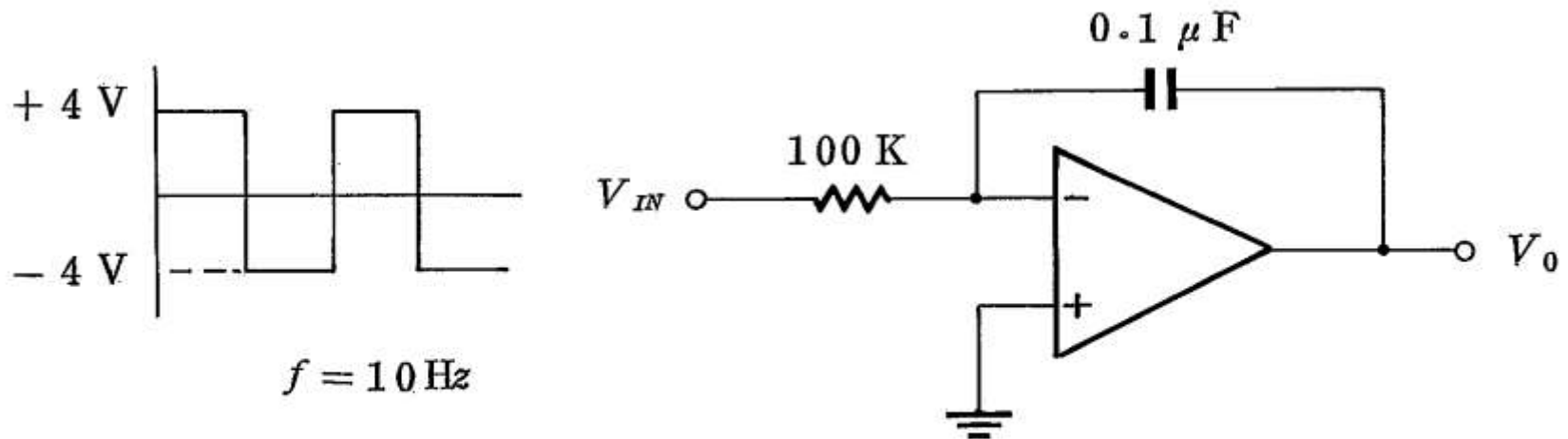


圖 8-4



- 我們可以將方波看成兩個不同電壓輸入的直流電壓，當輸入為**+4V**直流電壓時，其輸出電壓為

$$V_0 = -\frac{V_{IN}}{RC} \cdot t = -100V_{IN} \cdot t$$

- 由於輸入頻率為**10Hz**，故其週期為

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10} = 0.1\text{秒}$$

- 波形是對稱方波，正、負波形所佔的時間為全週期的一半，故

$$t = \frac{T}{2} = \frac{0.1\text{秒}}{2} = 0.05\text{秒}$$



- 因此 V_O 在 t 時間後之電壓為

$$V_O = -100 \cdot (+4) \cdot 0.05 = -20V$$

- 若OP Amp所加之 V_{CC} 電壓為 $\pm 10V$ ，在理想狀況下，其輸出最大正負飽和電壓為 $\pm 10V$ （一般均小於 $\pm 10V$ ，約在 $\pm 9.8V$ 左右），而此時電路在 $t=0.05$ 秒時， V_O 為 $-20V$ ，已超過IC的飽和電壓，因此 V_O 在 t 為

$$t = \frac{10V}{100 \frac{1}{\text{秒}} \cdot 4V} = 0.025\text{秒}$$

- 時，已到達，而在 0.025 秒至 0.05 秒之間，一直維持在不變，如圖8-5所示。

- 在 $t=0.05$ 秒時，方波由 $+4\text{ V}$ 轉變為 -4 V ，則 V_o 在 0.05 秒至 0.1 秒內將被充電之電壓為

$$\begin{aligned}
 V_o &= -100 \bullet (-4) t \Big|_{t=0.05}^{t=0.1} \\
 &= -100 \bullet (-4) (0.1 - 0.05) \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

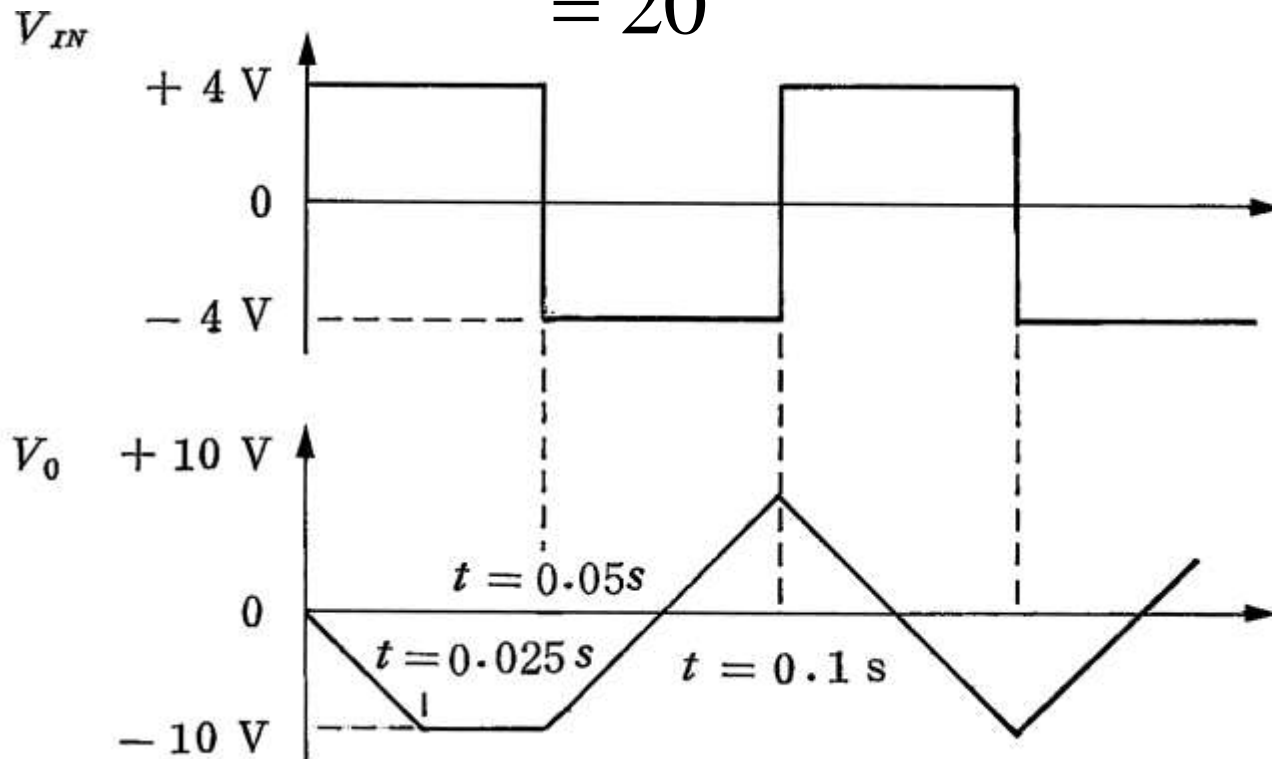


圖 8-5

- 但是當方波由+4V轉變為-4V時，電容器所貯存的電壓-10V仍維持著，此電壓不因輸入電壓的瞬間改變而放電或消失，因此當輸入變為-4V時， V_O 的起始電壓為-10V，如圖8-5所示。
- 輸入電壓繼續變換，則輸出電壓波形亦跟著變化，以示波器觀測其輸出波形，則可以看到輸出為一三角波，而第一週之波形無法觀測，除非以極精密的儀器（例如：儲存示波器）才能觀測出。
- 必須注意的是：在實驗中，曾經提起OP Amp的偏壓電流及抵償電壓對其輸出產生電壓的誤差，而在積分器中，此種現象更為嚴重。

- 抵償電壓 V_{OS} 可以看似直流電壓，經由電容器，可以產生一線性的昇坡電壓，其極性視 V_{OS} 之極性而定； $I_{(-)}$ 電流在無輸入訊號時，由輸出 V_O 經回授電容器至“-”輸入端，亦將產生一昇坡電壓（ $I_{(-)}$ 電流為定值）。
- 因此在一段時間後，偏壓電流及抵償電壓將會使電容器充至飽和電壓，此飽和電壓將影響輸入電壓經由積分器所產生的輸出電壓波形；同時，抵償電壓 V_{OS} 在輸入為零時亦將為輸出電壓的一部分，故在實際應用的積分器上，

(1) 式(4)將改由下面式子替代。

$$V_O = -\frac{1}{RC} \int V_{IN} dt + \frac{1}{RC} \int V_{OS} dt + \frac{1}{C} \int I_{(-)} dt + V_{OS}$$

- 根據上式，我們可以瞭解當 V_{IN} 為零時， V_O 仍受 V_{OS} 及 $I_{(-)}$ 之影響，在一段時間後，趨向於飽和電壓，因此無論 V_{IN} 何時加入，最後將以飽和電壓為其起始電壓。

【例】圖8-6之電路 $R=10K$ ， $C=0.01\mu F$ ， $V_{CC}=\pm 12V$ ，輸入訊號為2V峰值電壓之方波，若頻率變化如下，試會出輸入、輸出波形？ $f=$
 (a) 1.25K (b) 2.5K (c) 500 Hz

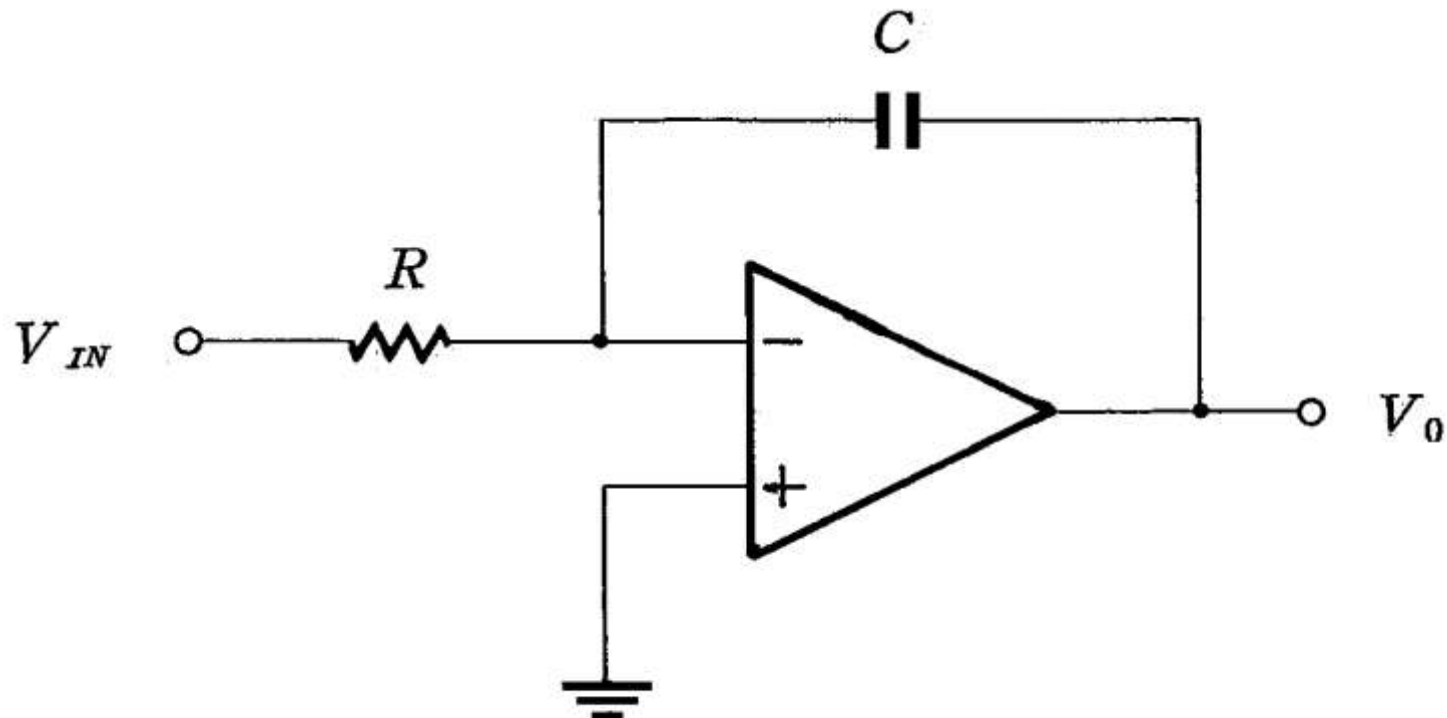


圖 8-6



【解】 電路之增益常數為 $\frac{1}{RC} = \frac{1}{10 \times 10^3 \times 0.01 \times 10^{-6}} = 10^4$

- 假使 V_O 受 V_{OS} 及 $I_{(-)}$ 之影響，在 V_{IN} 不接時，已到達正飽和電壓，則不同輸入頻率，可有不同輸出電壓。

(a) 若 $f=1.25K$ ，則 $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1.25K} = 0.8ms$

□ 半週之時間為 $t = \frac{T}{2} = 0.4ms$

$$V_0 = -\frac{V_{IN}}{RC} \cdot t = -10^4 \times 2 \times 0.4 \times 10^{-3} = -8$$

$$V_0 = -\frac{V_{IN}}{RC} \cdot t = -10^4 \times (-2) \times 0.4 \times 10^{-3} = 8$$

□ 因此可以得到輸入、輸出波形如圖8-7所示。

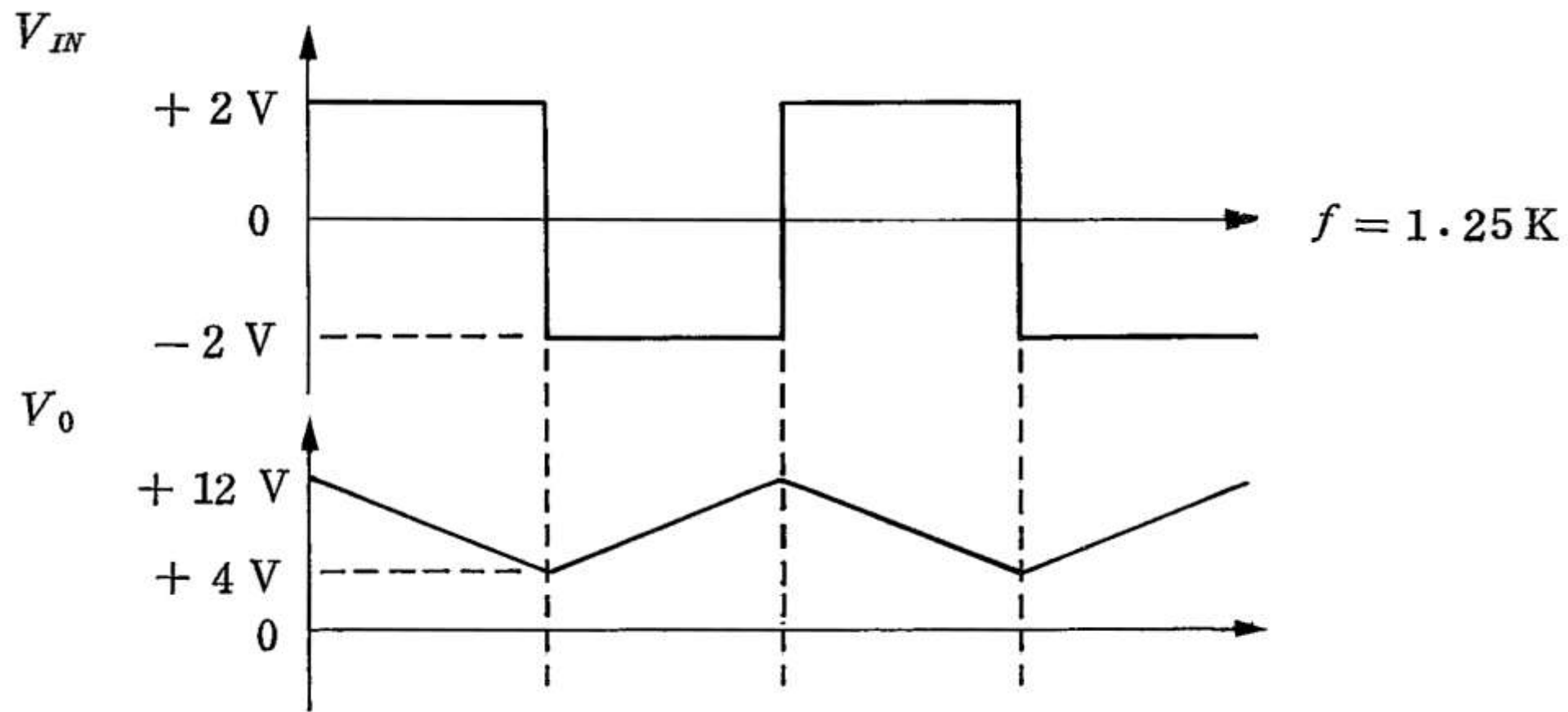


圖 8-7

(b) 若 $f=2.5K$ ，則 $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2.5K} = 0.4ms$

□ 半週之時間為 $t = \frac{T}{2} = 0.2ms$

$$V_0 = -\frac{V_{IN}}{RC} \cdot t = -10^4 \times 2 \times 0.2 \times 10^{-3} = -4$$

$$V_0 = -\frac{V_{IN}}{RC} \cdot t = -10^4 \times (-2) \times 0.2 \times 10^{-3} = 4$$

□ 因此可以得到輸入、輸出波形如圖8-8所示。

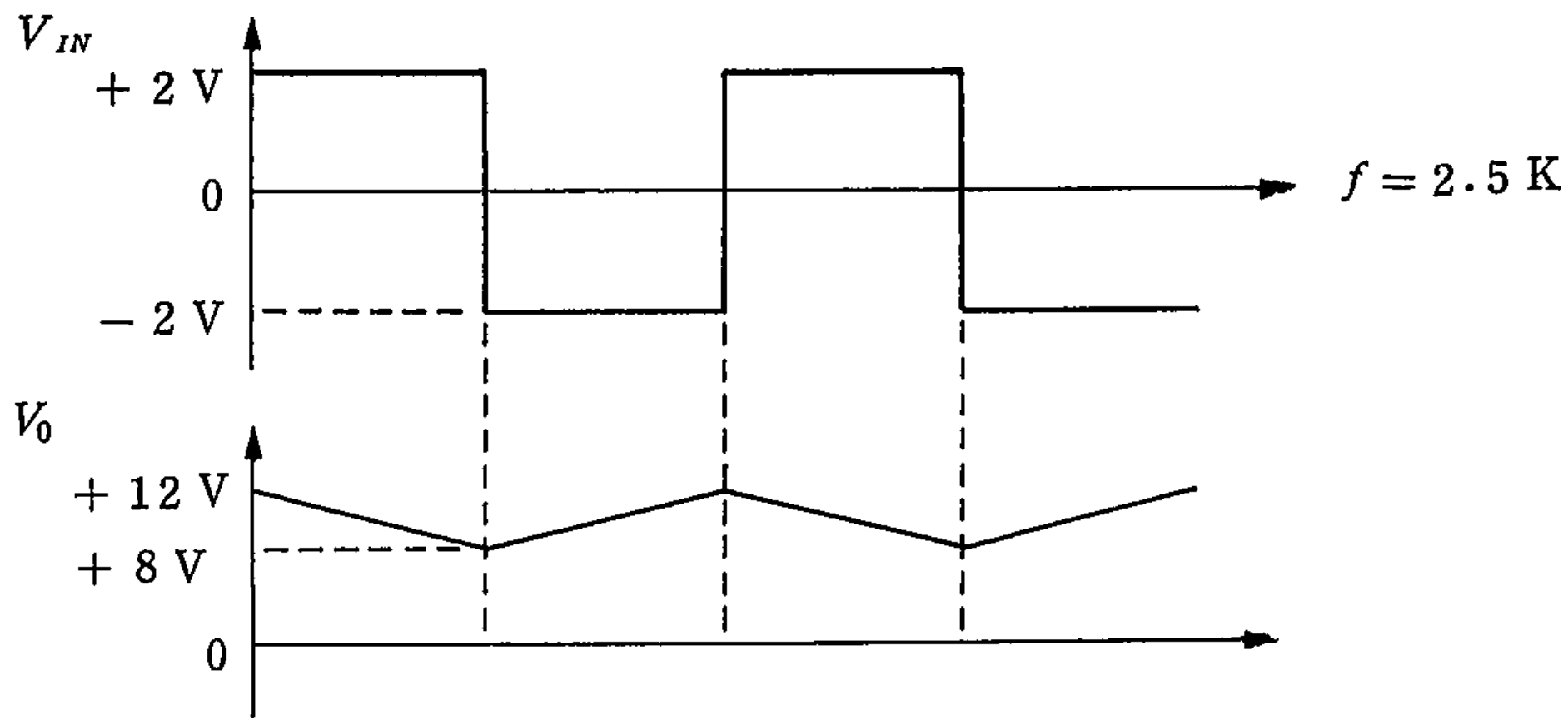


圖 8-8

(c) 若 $f=500\text{Hz}$ ，則 $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{500\text{Hz}} = 2\text{ms}$

□ 半週之時間為 $t = \frac{T}{2} = 1\text{ms}$

$$V_0 = -\frac{V_{IN}}{RC} \cdot t = -10^4 \times 2 \times 1 \times 10^{-3} = -20$$

$$V_0 = -\frac{V_{IN}}{RC} \cdot t = -10^4 \times (-2) \times 1 \times 10^{-3} = 20$$

□ 因此可以得到輸入、輸出波形如圖8-9所示。

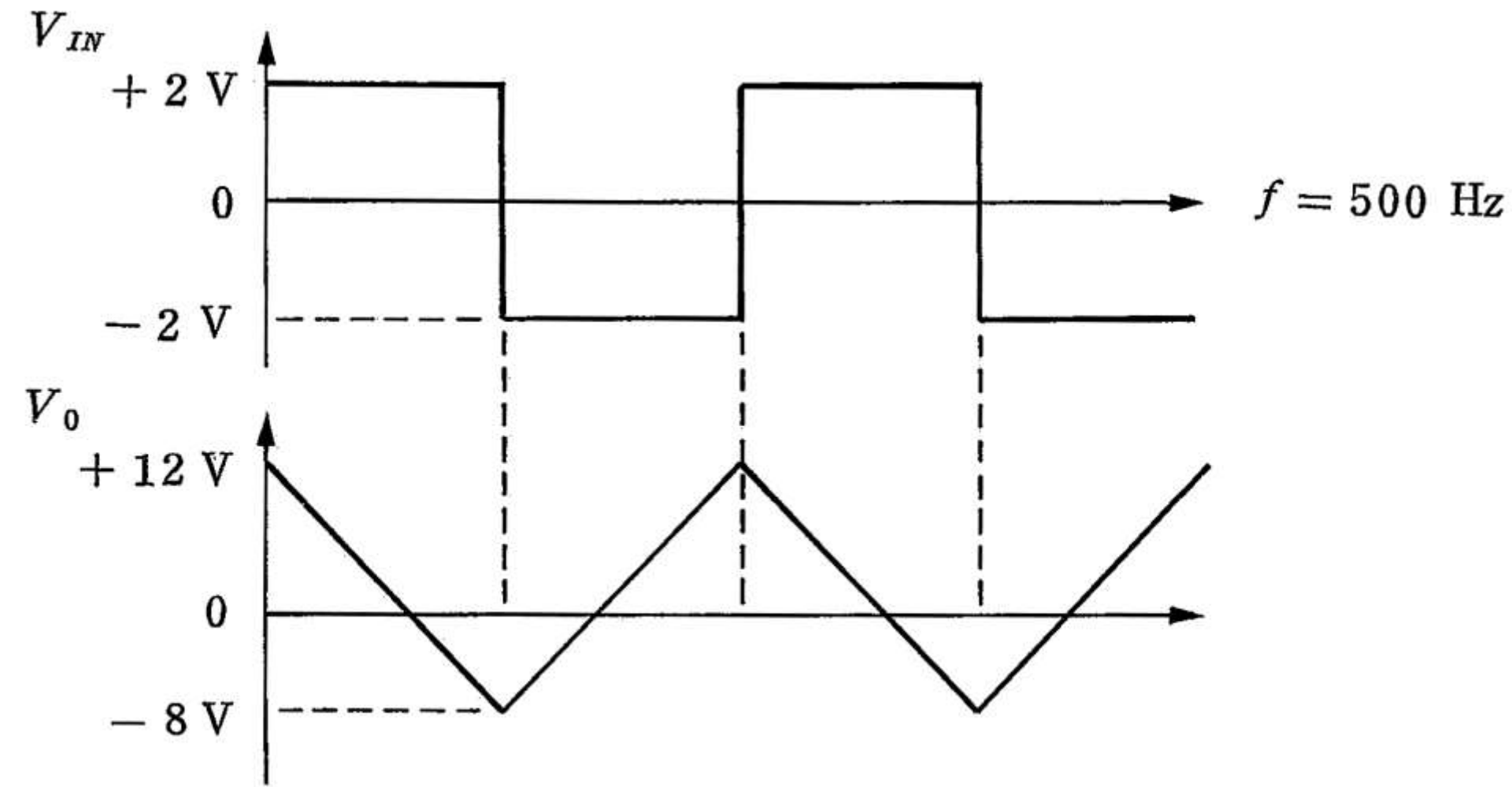


圖 8-9

- 由上面之例子，可以發現只要電容器被充的電壓不超過正、負飽和電壓之差的絕對值（即例題中 $12\text{V} - (-12\text{V}) = 24\text{V}$ ），在輸出端都能觀測到一三角波波形，而非圖8-10之波形（以 $f = 500\text{Hz}$ 為例）。

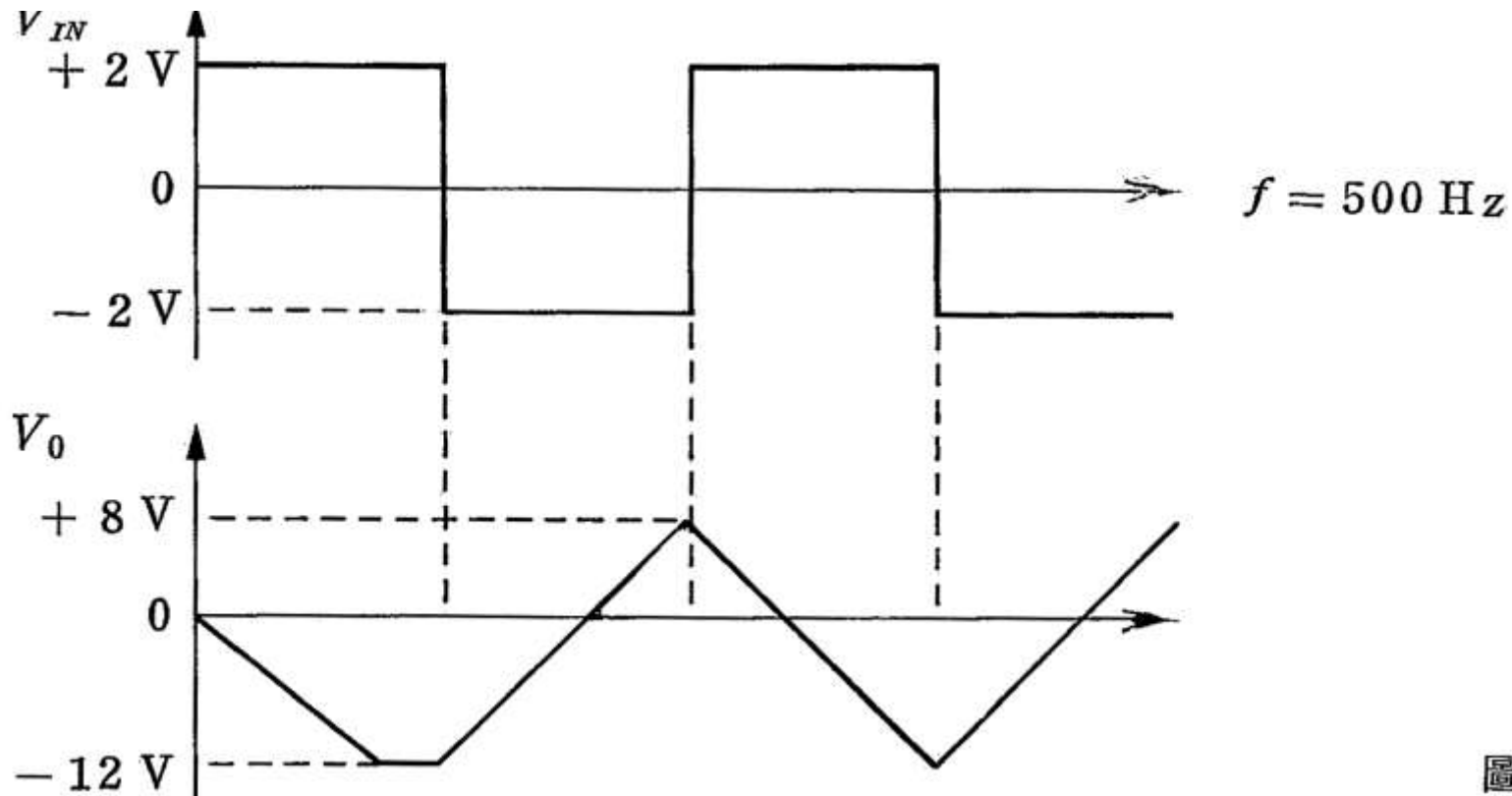


圖 8-10

■ 為了要消除抵償電壓 V_{OS} 及 $I_{(-)}$ 電流對積分器的影響，在實用之積分器上都加上一些補償電路，以降低其誤差，其方法為：

□ V_{OS} 項之消除：

- (1) 選擇較低 V_{OS} 值之OP Amp。
- (2) 如圖8-11所示，在電容器兩端並接一開關 S ，週期性的將 2 其短路，以消除電容器所儲存的飽和電壓。
- (3) 在電容器兩端並聯一電阻（約 $1M$ 左右），以限制 V_{OS} 在低頻率之電壓增益，但是 R_d 的存在也限制電路之工作頻率必須大於

$$f = \frac{1}{2\pi R_d C}$$

否則電路無法構成積分作用。同時，積分器亦可看成是對不同頻率有不同增益及相移變化之放大器，並接電阻，可以限制放大器之低頻增益。

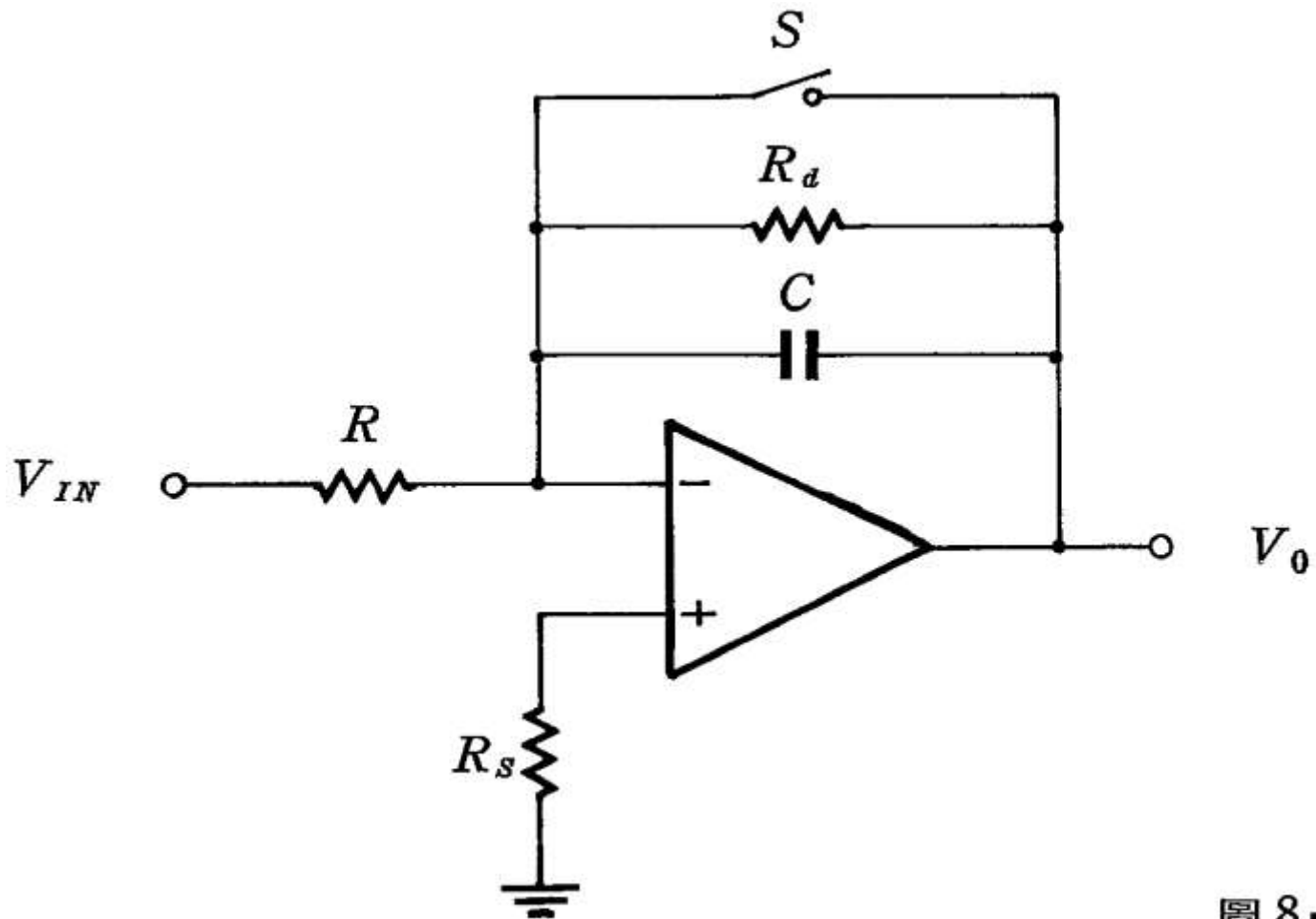


圖 8-11

□ $I_{(-)}$ 項之消除：

- 在“+”輸入端接一電阻 R_S 至地，適當地選擇 R_S 電阻（見實驗四之原理敘述），使輸出之誤差降至最小。同時，選擇輸入端為FET之OP Amp，其偏壓電流值極小，對電路所產生之誤差亦較小。

- 假使積分器有兩個以上的輸入端，如圖8-12所示，則其電路可分析如下：

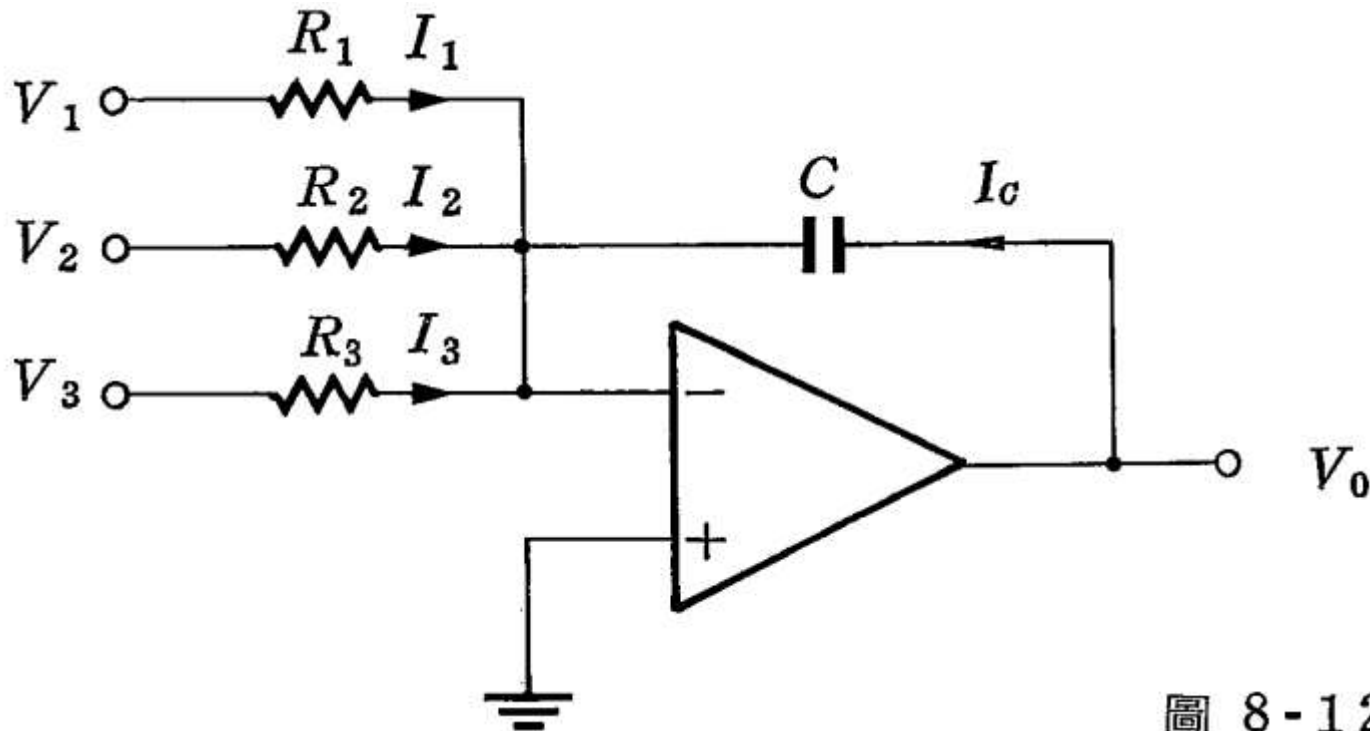


圖 8-12

$$I_1 + I_2 + I_3 = -I_C$$

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V_2}{R_2}, \quad I_3 = \frac{V_3}{R_3} \quad (\text{“-” 輸入端為虛接地})$$

$$I_C = C \frac{dV_0}{dt}$$

$$\text{故 } \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} = -C \frac{dV_0}{dt}$$

$$V_0 = - \left[\frac{1}{R_1 C} \int V_1 dt + \frac{1}{R_2 C} \int V_2 dt + \frac{1}{R_3 C} \int V_3 dt \right]$$

- 上式之積分器可工作於各種不同的輸入訊號，亦可連接成多輸入端之積分器單體，用來解數學上之微分方程。

- 假使在電容器上串接一電阻，如圖8-13所示，則輸出與輸入之關係可表示為

$$V_0 = -\frac{R_f}{R} V_{IN} - \frac{1}{RC} \int V_{IN} dt$$

- 圖8-13所串接之 R_f 電阻，對輸入電壓作一倒向電壓放大，因此對輸出電壓波形會產生很大的變化。

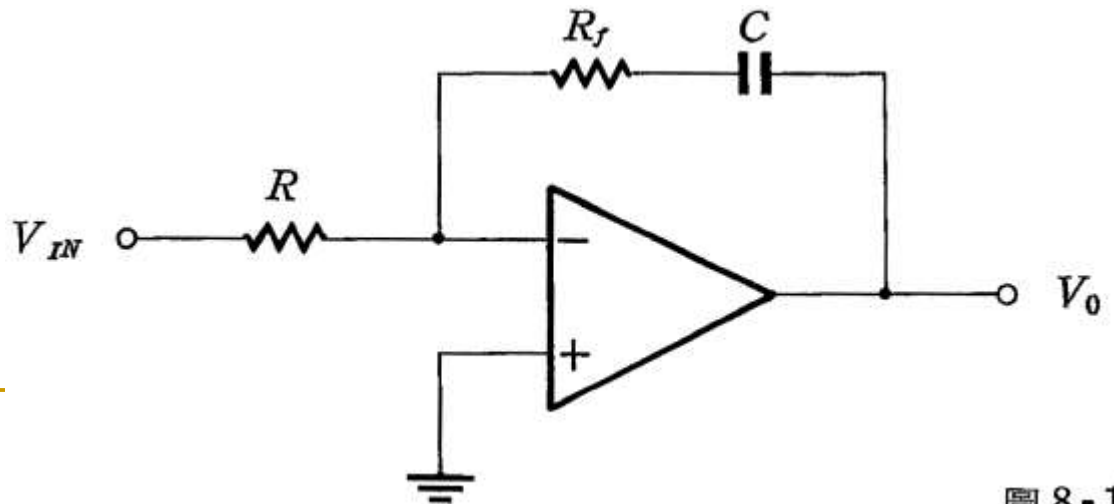


圖 8-13



- 若積分器接成圖8-14所示之電路，由於“+”，“−”兩輸入端點之電壓差為0，且沒有電流流進OP Amp，故

$$I_1 = I_{C1}, I_2 = I_{C2}$$

$$\text{則 } \frac{V_1 - V_{(-)}}{R} = C \frac{d(V_{(-)} - V_0)}{dt}$$

$$\frac{V_2 - V_{(+)}}{R} = C \frac{d(V_{(+)} - 0)}{dt} = C \frac{dV_{(+)}}{dt}$$

$$V_{(+)} = V_{(-)} = V \text{ 代入上兩式}$$

$$\frac{V_1}{R} - \frac{V}{R} = C \frac{dV}{dt} - C \frac{dV_0}{dt}$$

$$\frac{V_2 - V}{R} = C \frac{dV}{dt}$$

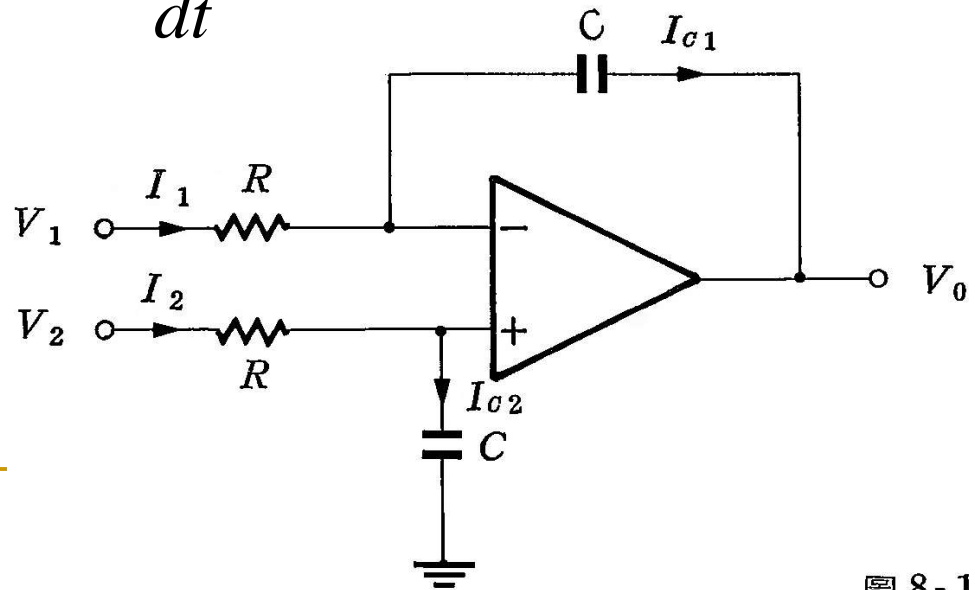


圖 8-14

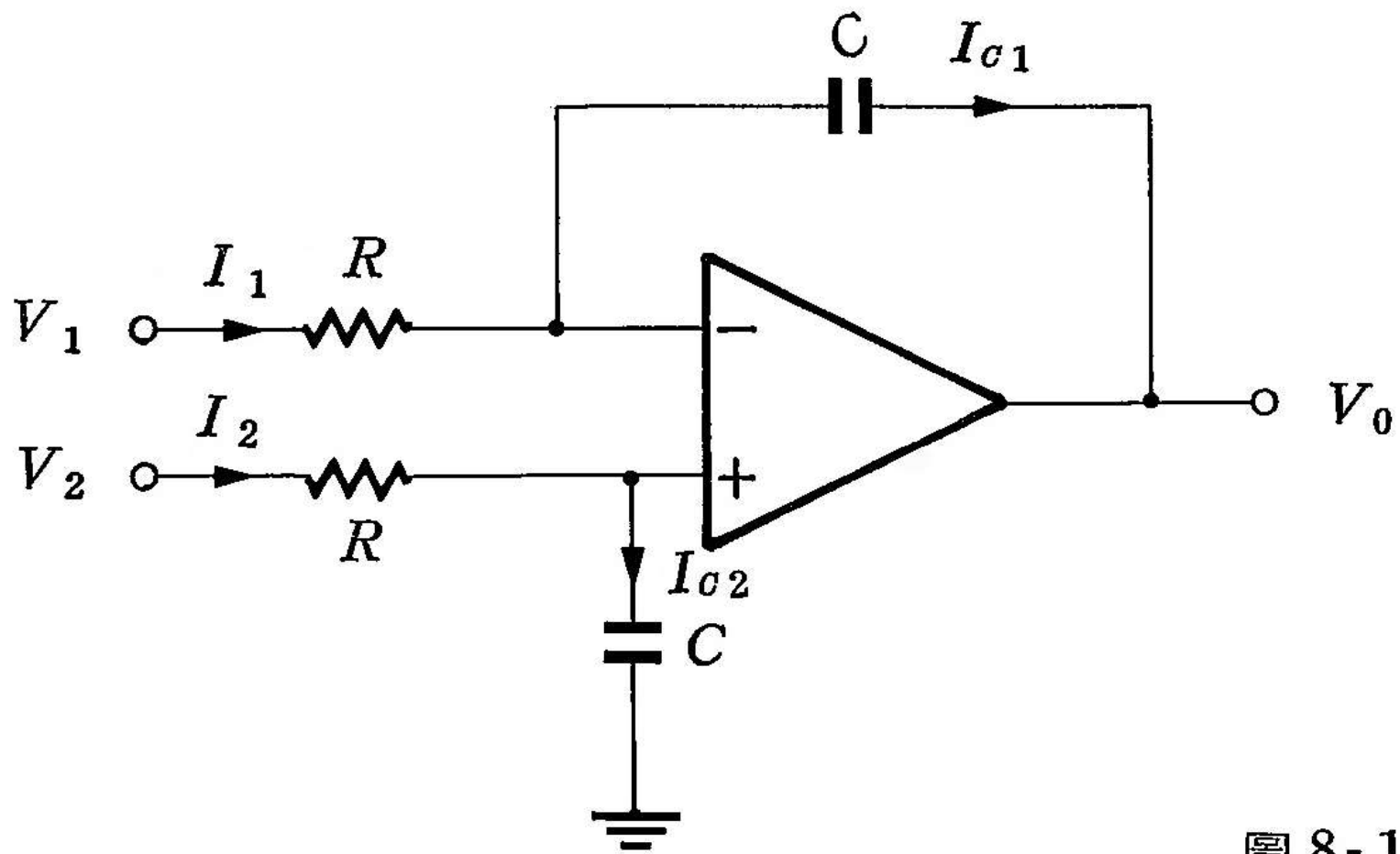


圖 8-14



- 將上式代入上上式，可得

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{R} - \frac{V}{R} &= \frac{V_2 - V}{R} - C \frac{dV_0}{dt} \\ &= \frac{V_2}{R} - \frac{V}{R} - C \frac{dV_0}{dt}\end{aligned}$$

$$\therefore C \frac{dV_0}{dt} = \frac{V_2}{R} - \frac{V}{R} - \frac{V_1}{R} + \frac{V}{R} = \frac{V_2}{R} - \frac{V_1}{R}$$

$$dV_0 = \frac{1}{RC} \int (V_2 - V_1) dt$$

最後可得

$$V_0 = \frac{1}{RC} \int (V_2 - V_1) dt$$

- 因此圖8-14之電路，我們可稱之為差動積分器，由於此電路受CMRR及溫度、電壓漂移誤差的影響，副作用較大，一般皆採用圖8-15所示之差動積分器，其輸出電壓為

$$I_1 + I_2 = -I_C$$

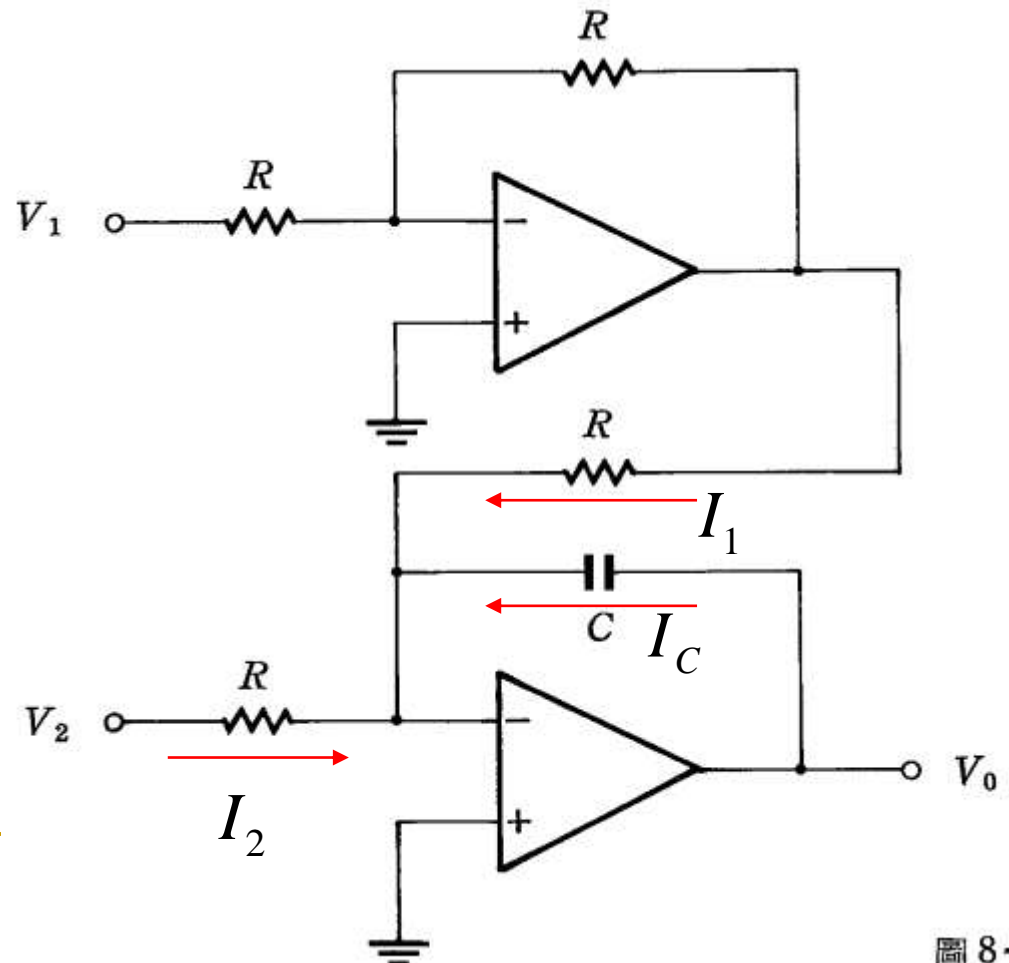
$$I_1 = \frac{-V_1}{R}, \quad I_2 = \frac{V_2}{R}$$

$$I_C = C \frac{dV_0}{dt}$$

$$\frac{-V_1}{R} + \frac{V_2}{R} = -C \frac{dV_0}{dt}$$

$$\frac{V_1}{RC} - \frac{V_2}{RC} = \frac{dV_0}{dt}$$

$$V_0 = \frac{1}{RC} \int (V_1 - V_2) dt$$



三、實驗步驟

1. 直流電壓輸入測試：

- (1) 如圖 8-16 連接綫路。
- (2) 選擇輸入直流電壓 V_{IN} 為 +0.1 V (輸入電壓調整後，將電源關掉 (power off))。
- (3) 以示波器 DC 檔觀測輸出 V_o 之波形，將輸入電壓之電源及電路之供給電源同時打開 (power on)。
- (4) 觀測示波器上之直流波形由零電壓至飽和電壓所需之時間，並記錄其結果於表 8-1 中。
- (5) 計算理論上之時間，並與測試值相比較。
- (6) 改變輸入直流電壓如表 8-1 所示，重覆(3)~(5)之步驟，並記錄其結果於表 8-1 中。
- (7) 若 R 改用 10K， C 維持不變，重覆(2)~(6)之步驟，並記錄其結果於表 8-1 中。
- (8) 若 R 改用 100K， C 改用 $1\ \mu\text{F}$ ，重覆(2)~(6)之步驟，並記錄其結果於表 8-1 中。
- (9) 若 R 改用 1M， C 維持不變，重覆(2)~(6)之步驟，並記錄其結果於表 8-1 中。
- (10) 改用其他型號之 OP Amp，重覆(1)~(9)之步驟，並記錄其結果於表 8-2 中。

2. 正弦波輸入之測試：

- (1) 如圖 8-17 連接綫路。
- (2) 置輸入訊號 V_{IN} 之頻率為 100 Hz，振幅為 1 V 峯值，以示波器 DC 檔觀測其輸入及輸出波形，並繪其波形於表 8-3 中。
- (3) 繪出理論之波形，並與測試波形相比較。
- (4) 改變輸入頻率如表 8-3 所示，重覆(2)、(3)之步驟，並繪其波形於表 8-3 中。

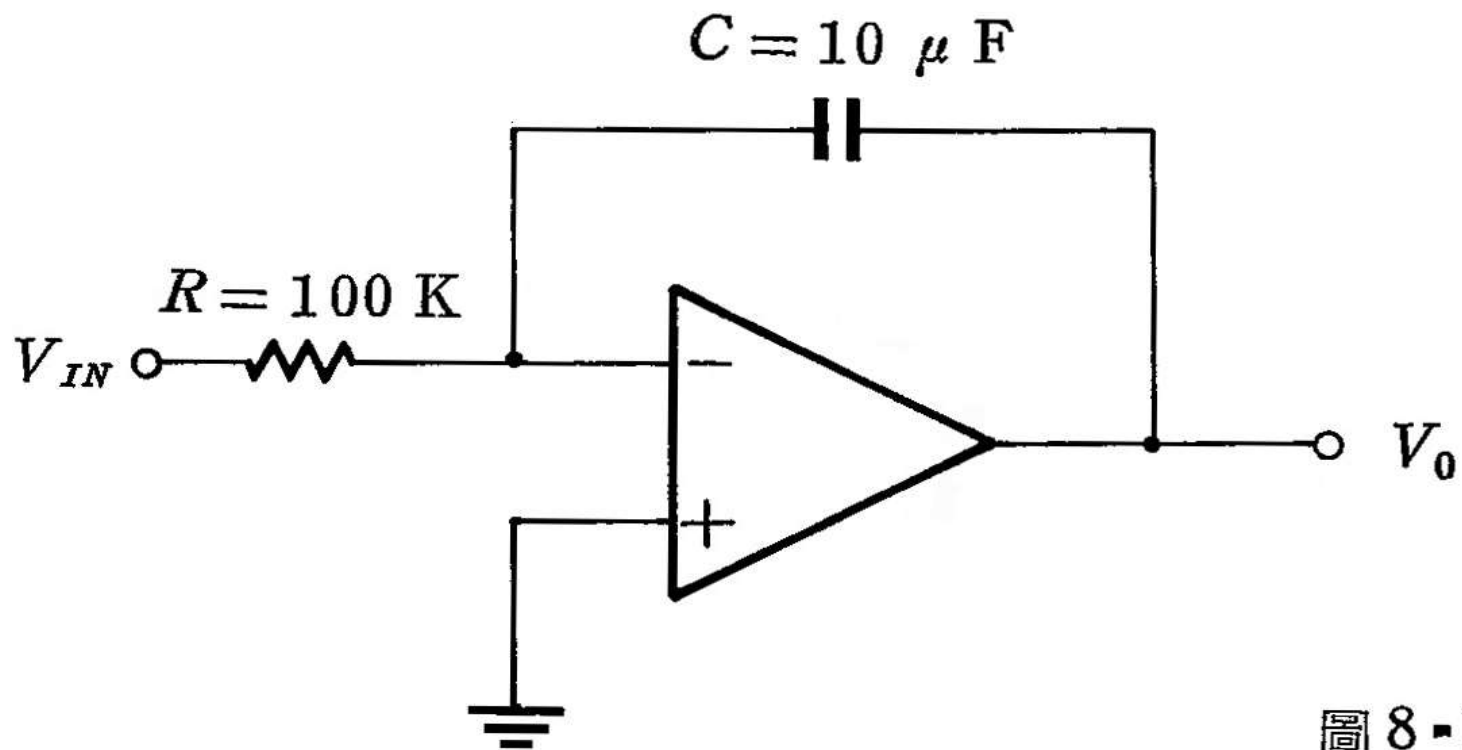


圖 8-16

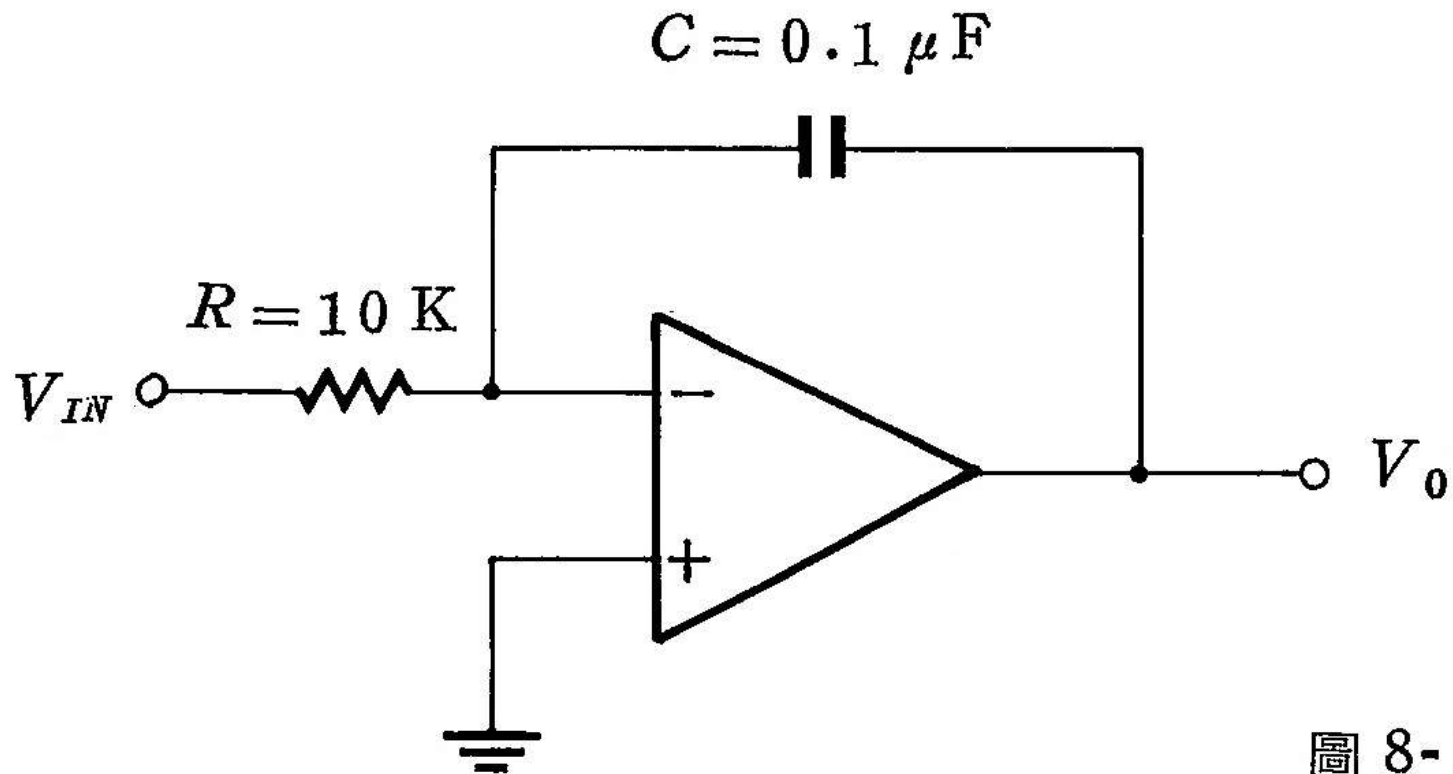


圖 8-17

- (5) 改變輸入峯值電壓如表 8-3 所示，重覆(2)~(4)之步驟，並繪其波形於表 8-3 中。
- (6) 若 R 改用 1 K， C 維持不變，重覆(2)~(5)之步驟，並繪其波形於表 8-4 中。
- (7) 若 C 改用 $0.01\ \mu\text{F}$ ， R 仍為 1 K，重覆(2)~(5)之步驟，並繪其波形於表 8-5 中。
- (8) 如圖 8-18 連接線路。
- (9) 置輸入訊號 V_{IN} 之頻率為 100 Hz，振幅為 1 V 峯值，以示波器 DC 檔觀測其輸入及輸出波形，並繪其波形於表 8-6 中。
- (10) 繪出理論之波形，並與測試波形相比較。
- (11) 改變輸入頻率如表 8-6 所示，重覆(9)、(10)之步驟，並繪其波形於表 8-6 中。
- (12) 改變輸入峯值電壓如表 8-6 所示，重覆(9)~(11)之步驟，並繪其波形於表 8-6 中。
- (13) 若 R 改用 1 K， C 維持不變，重覆(9)~(12)之步驟，並繪其波形於表 8-7 中。
- (14) 若 C 改用 $0.1\ \mu\text{F}$ ， R 仍為 1 K，重覆(9)~(12)之步驟，並繪其波形於表 8-8 中。

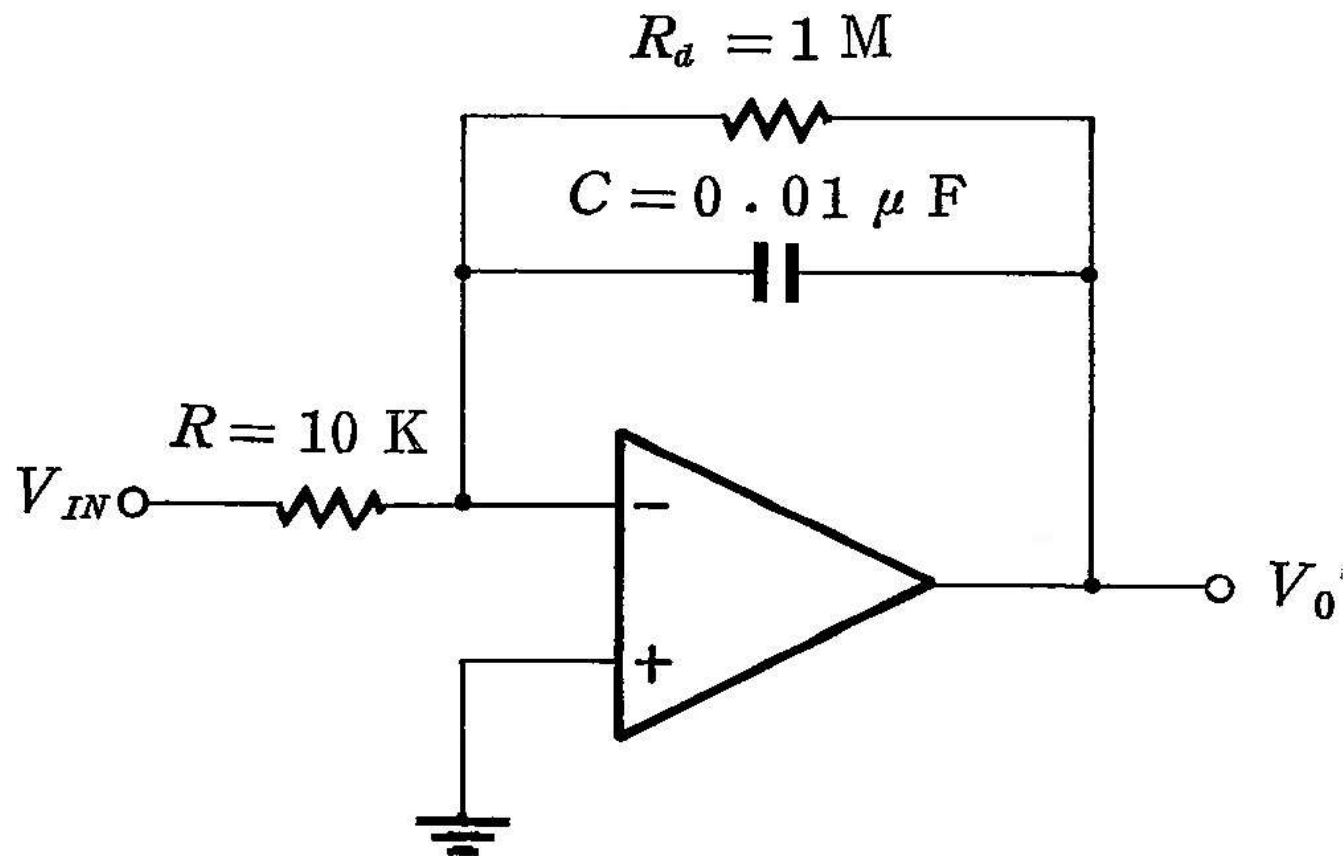


圖 8-18

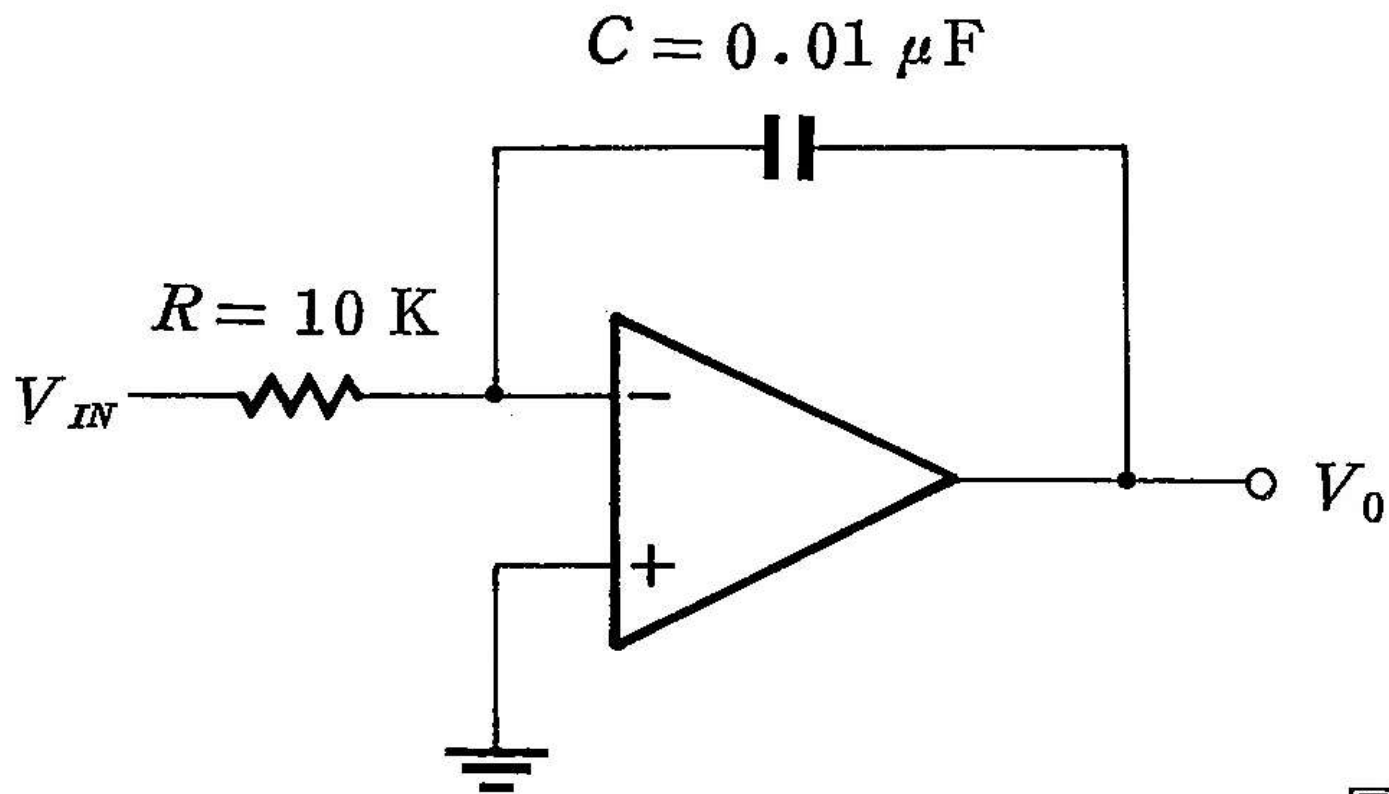


圖 8-19

3 方波輸入之測試：

- (1) 如圖 8-19 連接線路。
- (2) 置輸入訊號 V_{IN} 之頻率為 100 Hz，振幅為 1 V 峯值，以示波器 DC 檔觀測其輸入及輸出波形，並繪其波形於表 8-9 中。
- (3) 繪出理論之波形，並與測試波形相比較。
- (4) 改變輸入頻率如表 8-9 所示，重覆(2)、(3)之步驟，並繪其波形於表 8-9 中。
- (5) 改變輸入峯值電壓如表 8-9 所示，重覆(2)~(4)之步驟，並繪其波形於表 8-9 中。
- (6) 若 R 改用 1 K， C 維持不變，重覆(2)~(5)之步驟，並繪其波形於表 8-10 中。
- (7) 若 C 改用 $0.001 \mu F$ ， R 仍為 1 K，重覆(2)~(5)之步驟，並繪其波形於表 8-11 中。
- (8) 如圖 8-20 連接線路。
- (9) 置輸入訊號 V_{IN} 之頻率為 100 Hz，振幅為 1 V 峯值，以示波器 DC 檔觀測其輸入及輸出波形，並繪其波形於表 8-12 中。
- (10) 繪出理論之波形，並與測試波形相比較。
- (11) 改變輸入頻率如表 8-12 所示，重覆(9)、(10)之步驟，並繪其波形於表 8-12 中。
- (12) 改變輸入峯值電壓如表 8-12 所示，重覆(9)~(11)之步驟，並繪其波形於表 8-12 中。
- (13) 若 R 改用 10K， C 維持不變，重覆(9)~(12)之步驟，並繪其波形於表 8-13 中。
- (14) 若 C 改用 $0.1 \mu F$ ， R 仍為 10K，重覆(9)~(12)之步驟，並繪其波形於表 8-14 中。

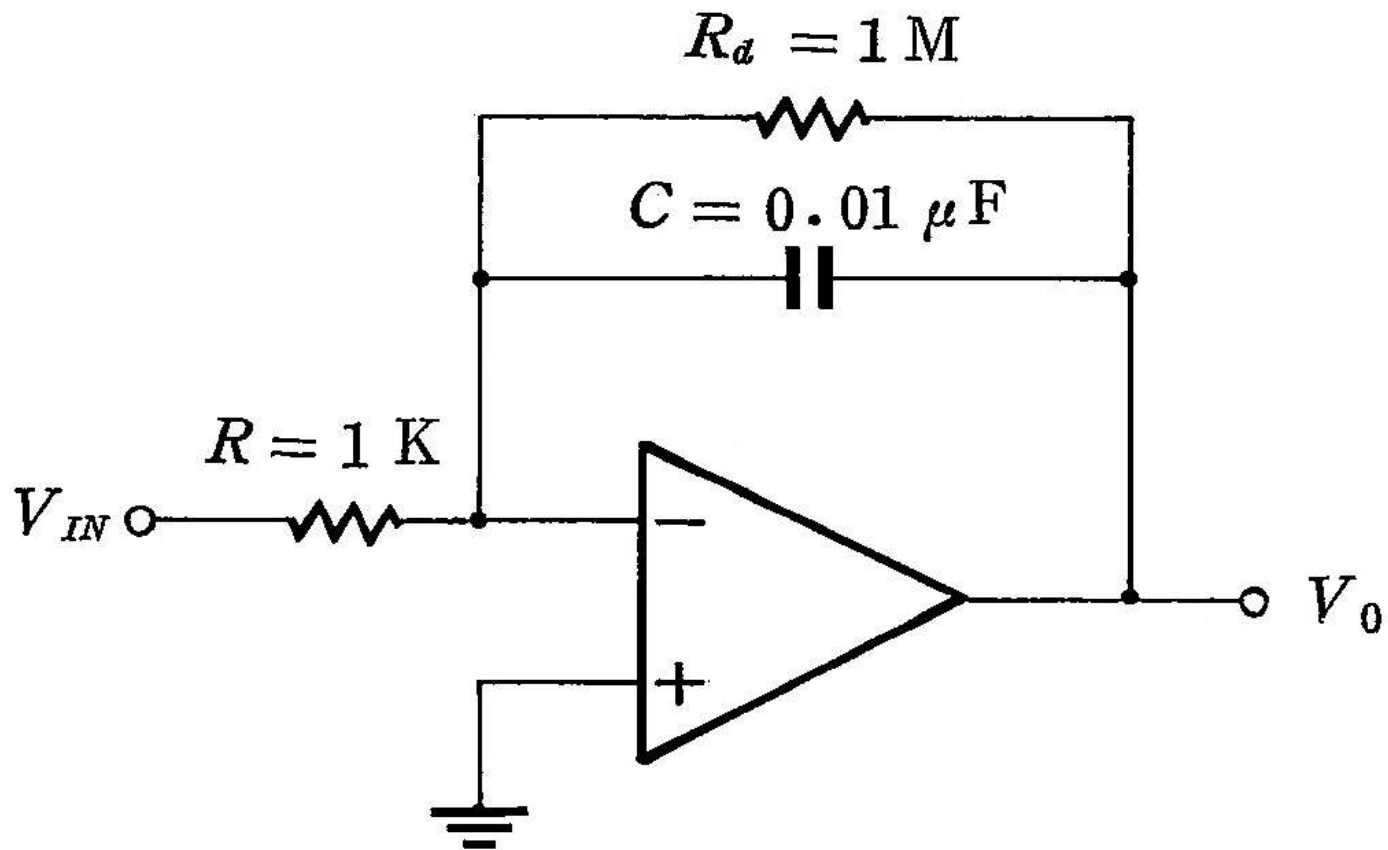


圖 8-20

討論