

# Matemáticas

Profesor: Rodolfo Lobo Carrasco

Estudiante: Isidora Lira Gonzalez





Figure 1: Sofía Kovalevskaya

Algunos símbolos importantes que podrías conocer en el futuro:

- $\infty$  Infinito
- $\forall$  Para todo (para cualquier)
- $\notin$  No pertenece
- $\in$  Pertenece
- $\mathbb{N}$ : Conjunto de los números naturales
- $\mathbb{Z}$ : Conjunto de los números enteros
- $\mathbb{Q}$ : Conjunto de los números racionales
- $\mathbb{Q}^*$ : Conjunto de los números irracionales
- $|$  Tal que.
- $\{\}$  Conjunto.
- $\mathbb{S} = \{x + z | x \in \mathbb{N} \text{ y } z \in \mathbb{N}\}$ , para leer los símbolos anteriores es solo mezclar las palabras que escribí antes en el orden que aparecen:  $\mathbb{S}$  es el conjunto de los  $x + z$  tal que  $x$  pertenece a los números naturales y  $z$  pertenece a los números naturales.
- $\neq$  Diferente de
- $\leq$  Menor o igual que
- $\geq$  Mayor o igual que
- $<$  Menor que
- $>$  Mayor que
- $A(t), B(t), \dots f(t)$ :  $A, B$  y  $f$  dependen de  $t$ . (Notación que usamos para funciones).
-  Cada vez que aparezca este símbolo entonces colocaré algún comentario importante o detalle.

Mi correo: [rodolfolobo@ug.uchile.cl](mailto:rodolfolobo@ug.uchile.cl)

*Pandemia, Junio 2020.*

*It is impossible to be a mathematician without being a poet in soul.*

*Es imposible ser matemático sin ser un poeta en el alma.*

*Sofia Kovalevskaya, Matemática Rusa. Fue la primera mujer que consiguió una plaza como profesora universitaria en Europa (Suecia, 1881).*



## Contenidos

<b>1</b>	<b>Sumas y Restas .....</b>	<b>7</b>
1.1	Un pequeño repaso de sumas	7
1.2	Ejercicios: sumemos!	11
1.3	Repasando restas	11
1.4	Ejercicios: vamos a restar!	13
<b>2</b>	<b>Multiplicaciones y Divisiones .....</b>	<b>15</b>
2.1	Ahormando tiempo: tablas de multiplicar	15
2.2	Tablero de la división	17
2.3	Ejercicios: vamos a dividir con nuestro tablero!	19
<b>3</b>	<b>Fracciones .....</b>	<b>25</b>
3.1	Un pequeño repaso: Qué son las fracciones?	25
3.1.1	Observemos algunos ejemplos .....	26
<b>4</b>	<b>Tableros de Juegos Didácticos .....</b>	<b>29</b>





## 1.1 Un pequeño repaso de sumas

Para empezar, haremos un pequeño repaso de operatorias básicas. Por qué? porque necesitamos incorporar ideas nuevas como *fracciones*. Las fracciones nos permiten entender la naturaleza de muchas cosas y objetos, para ello es **fundamental** entender las multiplicaciones y divisiones. Es por ello que revisaremos algunas ideas rápidamente!. Sabes cuánto suman los siguientes números?:

- $3+1$
- $3+3$
- $3+5$
- $3+7$
- $5+5$

- $5+6$
- $6+4$
- $6+5$
- $6+6$
- $7+3$
- $7+4$
- $7+5$
- $0+5$
- $0+10$
- Es cierto que:  $0+a = a$  si  $a$  es cualquier número?.

Si alguna de estas cosas las has olvidado recuerda:

1. Hay algunas sumas que son fáciles de recordar y ellas te permitirán realizar sumas mayores o que parecen "*más difíciles*", por ejemplo:

$$5 + 5 = 10 \quad \text{suma fácil de recordar}$$

$$5 + 7 = 12 \quad \text{suma aparentemente más difícil}$$

$$9 + 1 = 10 \quad \text{suma aparentemente más difícil}$$

Veamos como deberíamos pensar una suma más compleja:

$$5 + 7 = \underbrace{5 + 5}_{\text{Suma conocida}} + 2 = 12$$

$$5 + \underbrace{13}_{10+3} = \underbrace{5 + 10}_{\text{Suma conocida}} + 3 = 15 + 3 = 18$$

2. Hay otras sumas que pueden hacerse sin pensar mucho usando una **técnica** o **nemotecnia**. Por ejemplo, cuando sumamos **nueve a otro número**:

$$\color{blue}{1} + 9 = 9 + \color{blue}{1} = 10$$

$$\color{blue}{9} + \color{blue}{2} = 11$$

$$\color{blue}{9} + \color{blue}{3} = 12$$

$$\color{blue}{9} + \color{blue}{4} = 13$$

$$\color{blue}{9} + \color{blue}{5} = 14$$

$$\color{blue}{9} + \color{blue}{6} = 15$$

$$\color{blue}{9} + \color{blue}{7} = 16$$

$$\color{blue}{9} + \color{blue}{8} = 17$$

$$\color{blue}{9} + \color{blue}{9} = 18$$

Lograste entender la regla para sumar estos números? fíjate en los números de color azul!. Ahora ejercitemos algunas sumas:

- $7+4$

- $4+7$

- $5+8$

- $1+5+5+5$
  - $5+5+5+5+5$     5 veces!
  - $11+21$
  - $34+67$
3.  Cuando sumamos es muy importante intentar imaginar la cantidad de cosas que estamos sumando. Porque cuando obtenemos el resultados podemos saber **aproximadamente** cuánto nos debería dar y así no cometer un error muy grande.
4. Existen otras formas de sumar, cuando trabajamos con dos o más cifras, por ejemplo:

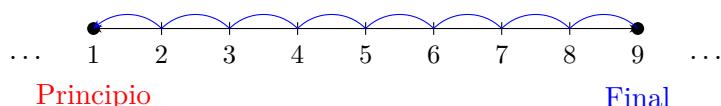
$$\begin{array}{r}
 + 1201 \\
 109 \\
 \hline
 1310
 \end{array}$$

Recuerdas cómo se hace? (se llama *algoritmo de la suma*). Practiquemos algunos ejercicios!.

$$\begin{array}{r} + 1211 \\ 101 \\ \hline 1312 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 5241 \\ 2121 \\ \hline 7362 \end{array}$$

5. Otra forma de imaginarnos una suma puede ser a través de una recta que se llama *recta de números naturales*. A veces aparece simplemente representada con la letra  $\mathbb{N}$ . Por ejemplo, la suma  $1+8$  podría dibujarse así!

Caminamos 8 espacios desde el 1 hacia la *derecha*



## 1.2 Ejercicios: sumemos!

### 1.1 Ejercicios

1. En los problemas a)-i), sumemos utilizando las diferentes formas estudiadas: rectas, dibujos y números.

a)  $7 + 17$

b)  $6 + 4$

c)  $11 + 9$

d)  $10 + 6$

e) Tengo 23 manzanas en el refrigerador de mi casa. Por error mi mamá compró 7 manzanas mas y 4 peras. Cuántas manzanas tenemos ahora?. Cuántas frutas en total tenemos en casa si sólo tenemos manzanas y peras?.

2. En los problemas f)-h), intente calcular las sumas sin escribir!.

f)  $0 + 1 + 2 + 3 + 4$

g)  $5 + 5 + 5 + 5$

h)  $6 + 5 + 4$ , intente explicar cómo podría ser más rápido y fácil hacer este tipo de sumas.

3. En los problemas i)-k), calcule la suma usando el algoritmo.

i)  $1579 + 123$

j)  $2578 + 1134$

k)  $2912 + 1555$

## 1.3 Repasando restas

Vamos rápidamente a revisar algunas restas, puedes decirme cuál es el valor de las siguientes operaciones:

- $3 - 1$

- $3 - 3$

- $5 - 3$
- $3 - 5$  ¡Si! por ahora no vamos a restar números más grandes a números chiquititos.
- $8 - 4$
- $17 - 0$
- $32 - 0$
- Es cierto que:  $a - 0 = a$  si  $a$  es cualquier número natural?.

Si alguna de estas cosas las has olvidado recuerda:

1. Hay algunas restas que son fáciles de recordar y ellas te permitirán realizar sumas mayores o que parecen "*más difíciles*", por ejemplo:  $+]^{*}]]$

$$10 - 2 = 8 \quad \text{resta fácil de recordar}$$

$$10 - 5 = 5 \quad \text{resta fácil de recordar}$$

$$13 - 5 = 8 \quad \text{resta aparentemente más difícil}$$

Veamos como deberíamos pensar una resta más compleja:

$$13 - 5 = \underbrace{\mathbf{10 + 3}}_{\text{Suma conocida}} - 5 = \underbrace{\mathbf{10 - 5}}_{\text{Resta conocida}} + 3 = 8$$

2. Es posible escribir una tabla de restas para cada número del 1 al 9 que te

permitirá recordar con mayor facilidad en el futuro. Por ejemplo:

$$1 - 0 = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

$$2 - 0 = 2$$

$$2 - 1 = 1$$

$$2 - 2 = 0$$

$$3 - 0 = 3$$

$$3 - 1 = 2$$

$$3 - 2 = 1$$

$$3 - 3 = 0$$

Construye todas las que faltan hasta el número 9.

3. También es posible usar un *algoritmo* para resolver sustracciones o restas. Por

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 12 \\ \hline \end{array}$$

ejemplo: 107

4. Por qué crees tú que siempre restamos a números más grandes números más pequeños?.  
5. En qué momento de la vida cotidiana tú crees que podríamos utilizar las restas?.



Podemos concluir de nuestro repaso de sumas y restas que las sumas de los primeros 9 números y las restas de los primeros 9 números son fundamentales para realizar cualquier cálculo.

## 1.4 Ejercicios: vamos a restar!

### 1.2 Ejercicios

**1.** En los problemas a)-i), restaremos utilizando las diferentes formas estudiadas: rectas, dibujos y números.

a)  $17 - 7$

b)  $6 - 4$

c)  $11 - 9$

d)  $10 - 6$

e) Habían 23 manzanas en el refrigerador de mi casa. Por alguna razón desconocida mi mamá se ha comido 7 manzanas. Cuántas manzanas tenemos ahora?. Cuántas manzanas tendríamos si solo hubiera comido 5?.

**2.** En los problemas f)-h), intente calcular las restas sin escribir!

f)  $4 - 3 - 1$

g)  $5 - 3 - 2$

h)  $6 - 3 - 2 - 1$ , intente explicar cómo podría ser más rápido y fácil hacer este tipo de restas.

**3.** En los problemas i)-k), calcule la suma usando el algoritmo.

i)  $1579 - 123$

j)  $2578 - 1134$

k)  $2912 - 1555$

## 2. Multiplicaciones y Divisiones

### 2.1 Ahorrando tiempo: tablas de multiplicar

Aprendernos las tablas de multiplicar permite ahorrarnos tiempo. Y el tiempo es algo importante en nuestras vidas. Por ejemplo Isidora, imaginemos que quieras sumar 7 veces el número 8:

$$\underbrace{8+8+8+8+8+8+8}_{7 \text{ veces}} = ?$$

Si estas cansada o si fueran más veces las que debes sumar, entonces perderás mucho tiempo, papel y energía en calcular esta suma de número repetidos. Justamente esto es lo que la multiplicación permite!, hacer rápidamente este cálculo. Lamentablemente, para aprenderlas debemos memorizar estos números. Yo te proponto **2** formas:

1. Una forma sería:

- **Cantar muchas veces y bailar las tablas (has click!)**
- Luego, hacer ejercicios.

2. Otra forma sería:

- Dibujar tu propia tabla con muchos colores que a ti te ayuden a recordar.  
Y luego cantar.
- Finalmente, hacer ejercicios.

En la próxima página te dejaré una tabla, para que la copies y hagas una tuya, con dibujos de *Gomball* y los colores que quieras.

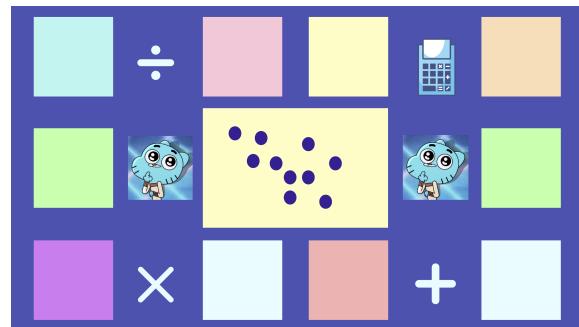
.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

## 2.2 Tablero de la división

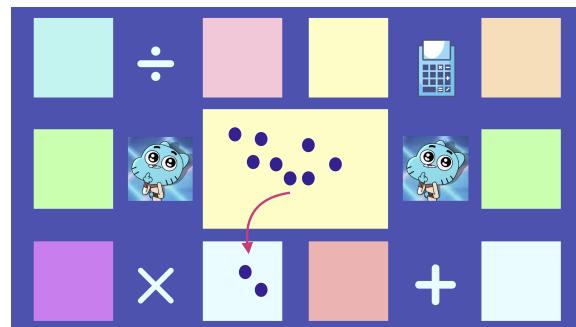
Ahora, revisaremos las dos formas que tenemos para jugar en el tablero de división. Para esto voy a solucionar el ejemplo  $10 \div 2$ .

1. **La primera forma** consiste en retirar 2 porotos cada vez, y colocar cada grupo en cajas separadas. Al final **sumas el número de cajas** que utilizaste y ese es el resultado de la división. En el caso de  $10 \div 2$  tenemos:

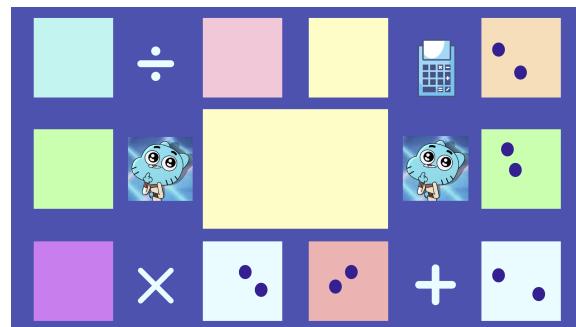
- Paso 1: colocas los 10 porotos en el centro.



- Paso 2: Retiras 2 porotos de cada vez y los vas colocando en las cajas pequeñas.



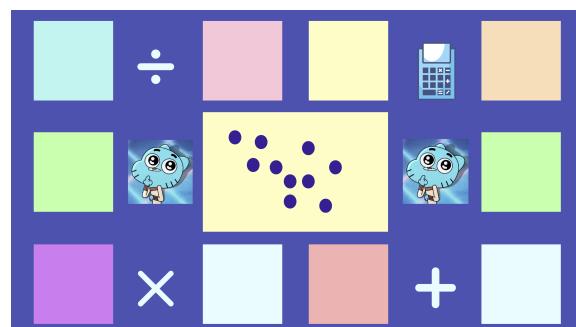
- Una vez terminado esto, tu tablero se verá como esta imagen,



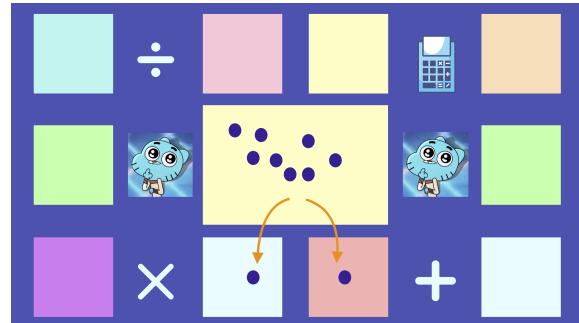
si observas, hemos utilizado **5 cajas pequeñas**. Por lo tanto, el resultado de nuestra división es 5. Esta primera forma nos permite pensar la división de la siguiente manera: *"cuántas veces podemos restar 2 a 10"*.

2. La **segunda forma** consiste en separar nuestros porotos del centro en **dos grupos**, esto porque estamos dividiendo por 2. Y luego **contar cuántos porotos hay dentro de una caja**, siendo este número el resultado de la división.

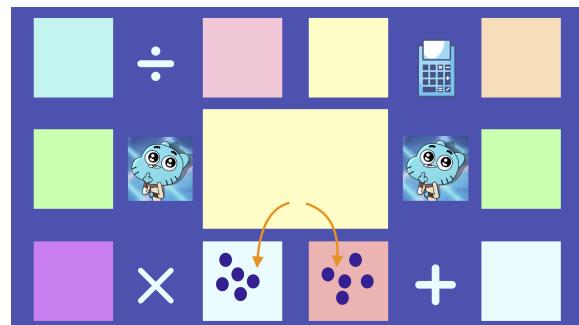
- Paso 1: colocas los 10 porotos en el centro.



- Paso 2: Eliges 2 cajas (pues estamos dividiendo por dos) y comienzas uno por uno a quitar porotos del centro y colocarlos alternadamente en cada caja. Es decir, intentas dejar en cada caja la misma cantidad.



- Finalmente, tu tablero debe lucir así, como puedes observar, tenemos en



cada caja tiene **5 porotos**, es decir que 5 es el resultado de nuestra división. En esta segunda forma estamos pensando la división de la siguiente manera: *debemos intentar formar dos grupos iguales a partir de diez porotos (o dividirlo en dos partes iguales si es posible). El número de porotos que obtenemos por grupo es el resultado de la división.*

Es importante que sepas realizar las dos formas! y más importante aún que entiendas que no siempre podremos dejar dividido los números de forma exacta. Por ejemplo,  $10 \div 3$  es 3 y nos sobrará un poroto que llamaremos **resto**.

**R**

Resumiendo, en el primer grupo vas restando el número que divide, y luego cuentas las cajas que usaste. En el segundo, separas en partes iguales al número que divide contando los porotos dentro de las cajas!. No te confundas! y juega mucho para entender las dos formas.

## 2.3 Ejercicios: vamos a dividir con nuestro tablero!

## 2.1 Ejercicios

1. En los problemas a)-i), vamos a dividir usando las primera forma y una vez terminada esta tarea, dividirás de la segunda forma usando el tablero.

a)  $18 \div 3$

b)  $18 \div 6$

c)  $21 \div 7$

d)  $35 \div 7$

e)  $40 \div 5$

f)  $40 \div 8$

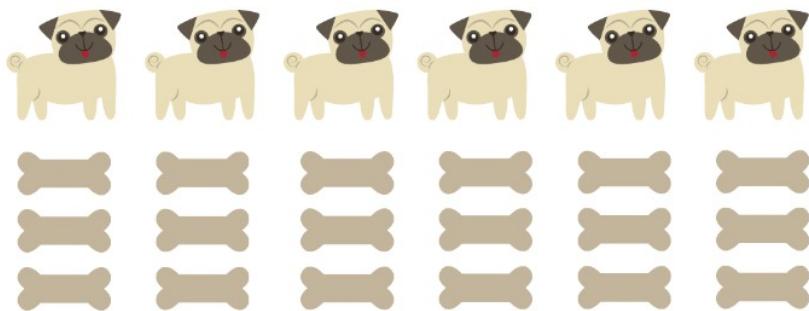
g)  $28 \div 4$

h)  $14 \div 2$

i)  $42 \div 6$

j) Estamos jugando con un grupo de 49 personas un juego en equipos y queremos dividir en 7 partes iguales, para que el juego sea justo. ¿Cuántas personas tiene cada grupo?.

# MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN \*

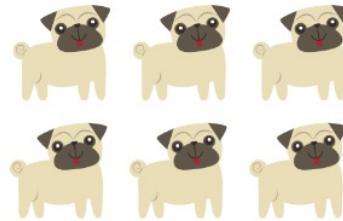


## PREGUNTA

¿Cuántos huesos  
hay en total?

## RESPUESTA

$$6 \times \underline{\quad} = \underline{\quad}. \text{ Hay } \underline{\quad} \text{ huesos.}$$



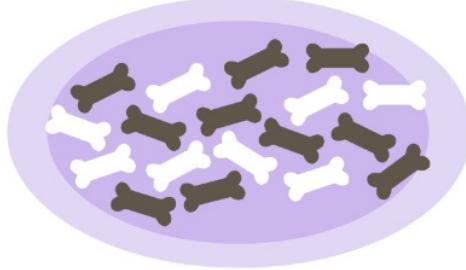
## PREGUNTA

¿Cuántos huesos  
recibe cada perro?

## RESPUESTA

$$18 : \underline{\quad} = \underline{\quad}. \text{ Cada perro recibe } \underline{\quad} \text{ huesos.}$$

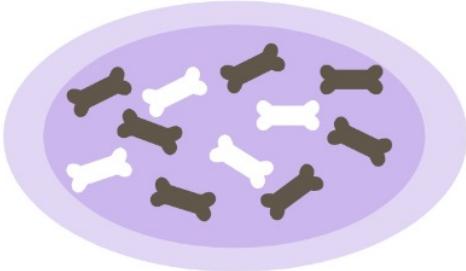
Figure 2.1: Otras actividades de multiplicación y división.

**PREGUNTA**

¿Cuántos huesos  
recibe cada perro?

**RESPUESTA**

$18 : \underline{\quad} = \underline{\quad}$ . Cada perro recibe  
 $\underline{\quad}$  huesos.

**PREGUNTA**

¿Cuántos huesos  
recibe cada perro?

**RESPUESTA**

$11 : \underline{\quad} = \underline{\quad}$ . Cada perro recibe  
 $\underline{\quad}$  huesos y me sobra  $\underline{\quad}$

Figure 2.2: Otras actividades de multiplicación y división.

## MÁS PREGUNTAS!



¿Cuáles son los dos números que sumados dan 12 y multiplicados dan 35?



¿Cómo escribirías en forma de multiplicación  
 $4 + 4 + 4 + 4 + 4$ ?

¿Cuánto es el resultado de esta suma?



Un postre se prepara con 2 huevos. ¿Cuántos postres podré hacer si tengo 10 huevos?



¿Cuál de las siguientes respuestas no es igual a 28?

- a)  $7 \times 4$
- b)  $4 \times 7$
- c)  $14 \times 2$
- d)  $3 \times 9$



Figure 2.3: Otras actividades de multiplicación y división.



## DESCUBRAMOS QUÉ DICE EL MENSAJE ESCONDIDO!

$10 : 2 \longrightarrow \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square$

$3 \times 2 \longrightarrow \square \quad \square \quad \square \quad \square$

$25 : 5 \longrightarrow \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square$

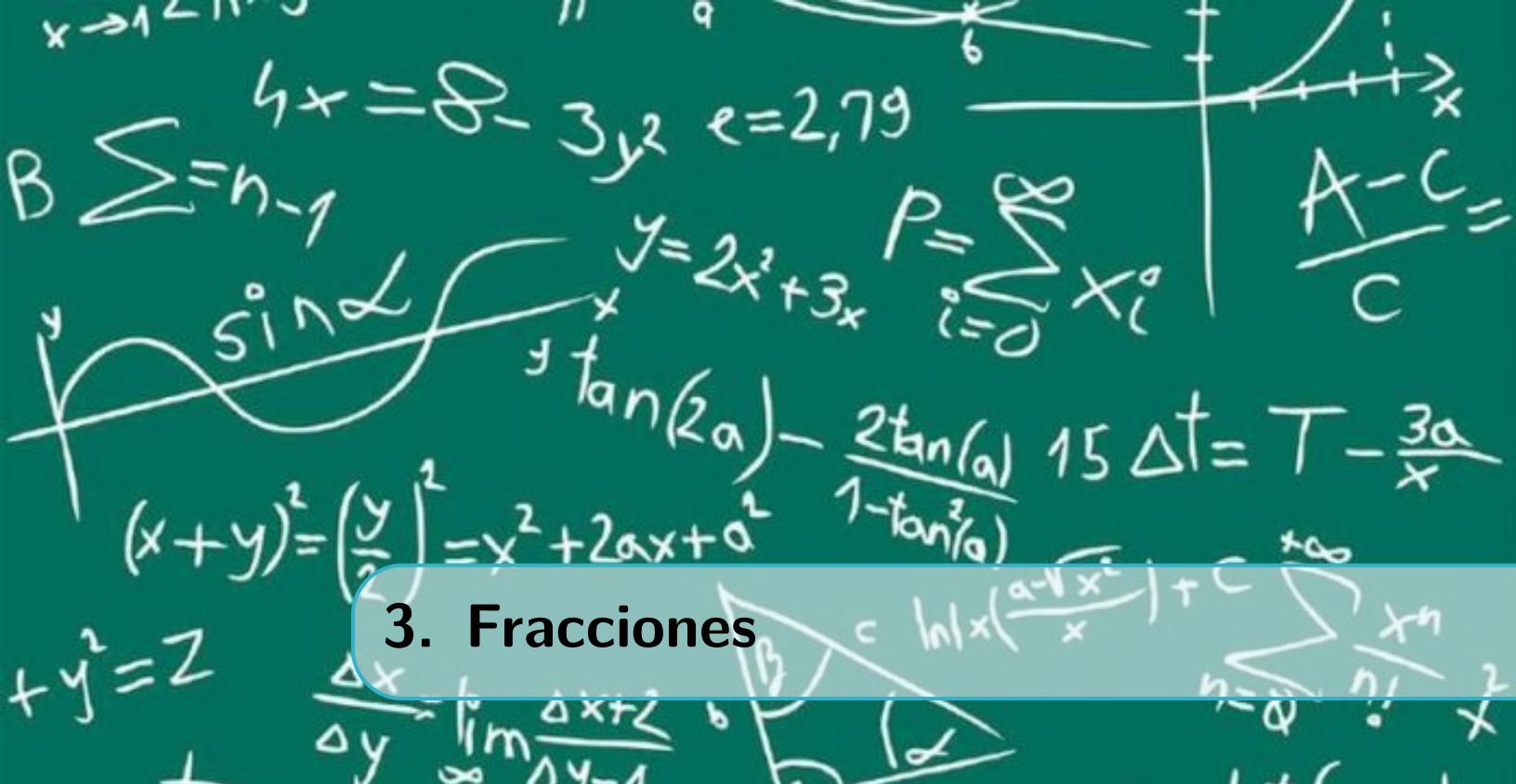
$14 : 7 \longrightarrow \square \quad \square \quad \square$

$48 : 6 \longrightarrow \square \quad \square \quad \square \quad \square$

$6 \times 5 \longrightarrow \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square$

$28 : 7 \longrightarrow \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square$

Figure 2.4: Otras actividades de multiplicación y división.



### 3.1 Un pequeño repaso: Qué son las fracciones?

Recordando que:

- Conjunto de Números Naturales:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Conjunto de Números Enteros:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Qué pasa si dividimos entre sí, los números del conjunto  $\mathbb{Z}$ , entonces nace un nuevo conjunto:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ and } b \in \mathbb{Z} \text{ con } b \neq 0 \right\}$

En esta primera parte revisaremos rápidamente algunos conceptos de fracciones. Por qué? porque sin ellas no podremos entender potencias y exponenciales.

**Definition 3.1.1** Las **fracciones** son una forma de representar números racionales.

En términos simples son números diferentes de los números enteros  $\mathbb{Z}$  y naturales  $\mathbb{N}$ . Recuerda que los números racionales también pueden ser representados por los números **decimales**. La letra para representar este conjunto de números es  $\mathbb{Q}$ .

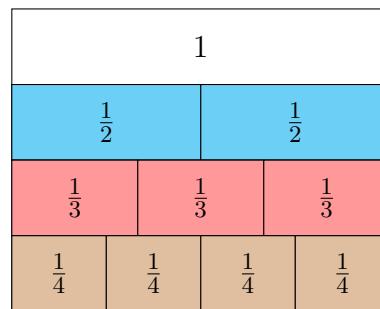
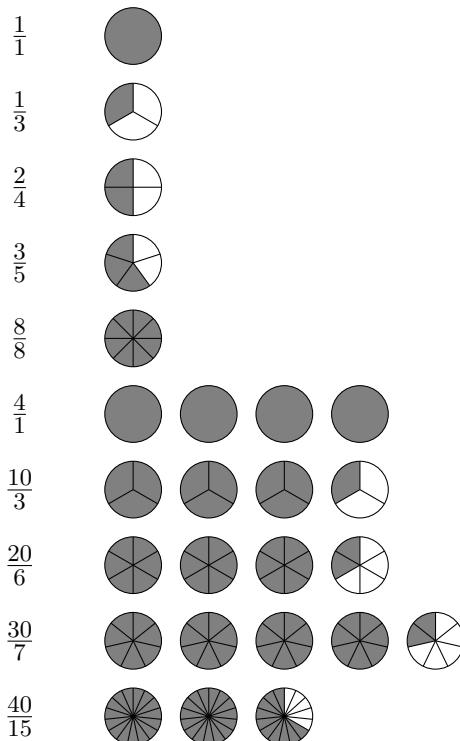


Figure 3.1: Dividiendo por dos.

### 3.1.1 Observemos algunos ejemplos



A medida que más divisiones hacemos...parece menos fácil de *imaginar*. Observemos un ejemplo diferente, donde las divisiones son más fáciles de distinguir:

Primera pregunta:

- Quién es más grande?:  $\frac{1}{2}$  o  $\frac{1}{4}$
- Quién es más grande?:  $\frac{3}{2}$  o  $1\frac{1}{2}$

- Quién es más pequeño?:  $\frac{1}{2}$  o  $\frac{1}{8}$

Una vez superada estas preguntas, vienen otras que serán importantes en el futuro y podríamos responder solo dibujando:

- Cómo sumarías?:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
- Cómo sumarías?:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$



En este pequeño capítulo introductorio repasamos algunas ideas de fracciones que son fundamentales para entender correctamente las potencias y raíces. Es muy importante no olvidarse de estas ideas!.



## 4. Tableros de Juegos Didácticos

A continuación, algunos juegos didácticos que hemos utilizado!.



Figure 4.1: Tablero de sumas, restas y multiplicaciones.

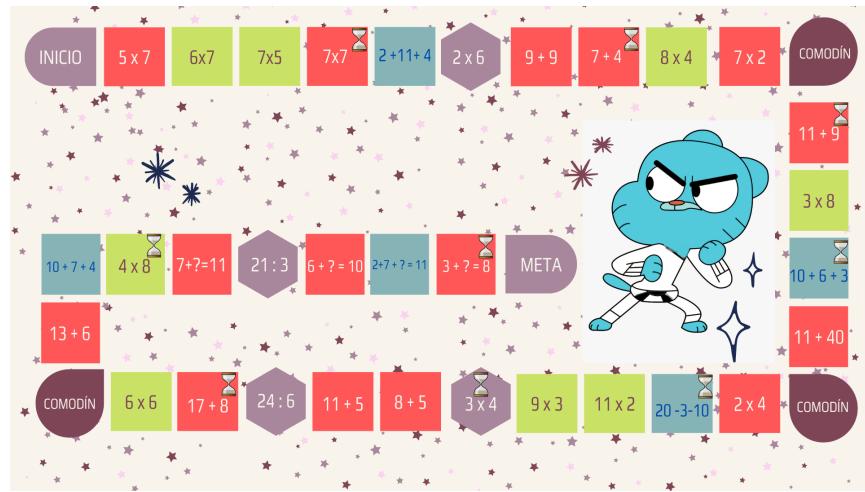


Figure 4.2: Tablero de sumas, restas y multiplicaciones, versión avanzada.

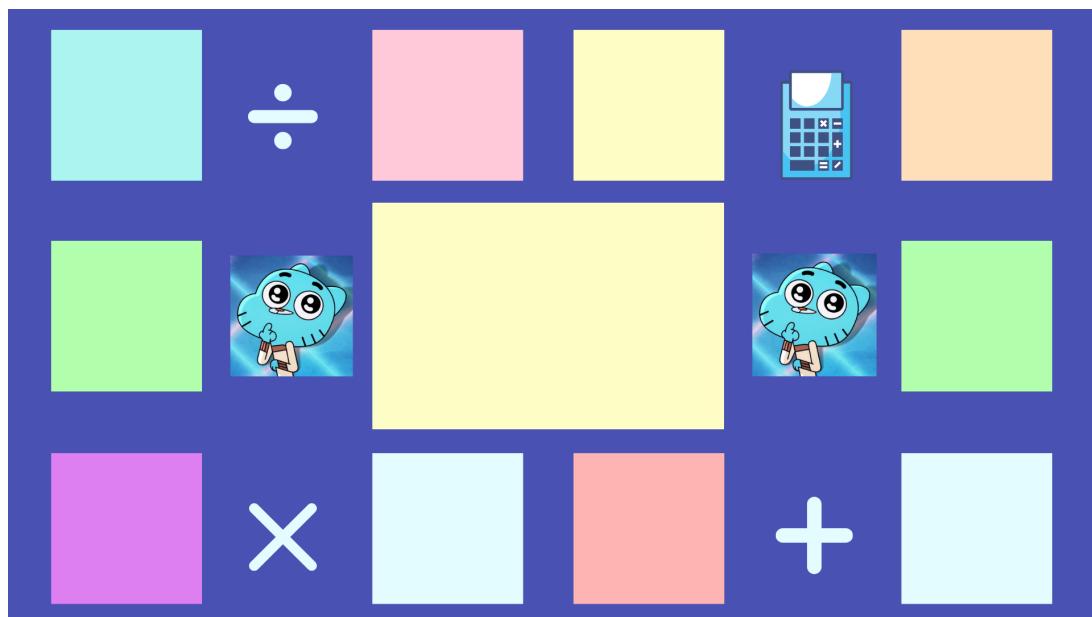


Figure 4.3: Tablero de sumas, restas y divisiones.