Matemáticas

Profesor: Rodolfo Lobo Carrasco

Estudiante: Maite Beltrán Lobo

Figure 1: Sofia Kovaleskaya

Algunos símbolos importantes que debemos conocer:

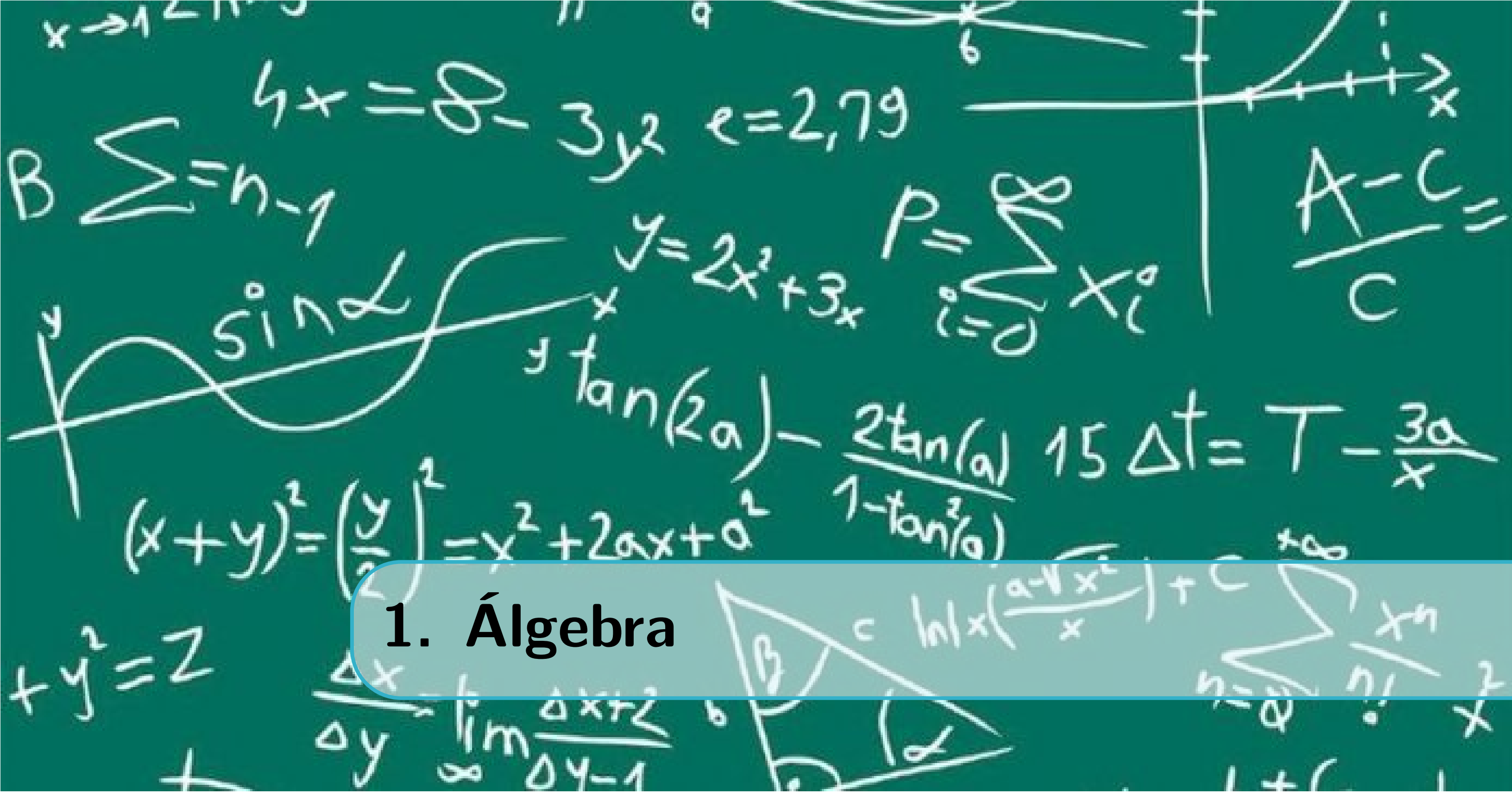
- ∞ Infinito
- $\forall$ Para todo (para cualquier)
- $\notin$ No pertenece
- $\in$ Pertenece
- $\mathbb{N}$: Conjunto de los números naturales
- $\mathbb{Z}$: Conjunto de los números enteros
- $\mathbb{Q}$: Conjunto de los números racionales
- $\mathbb{Q}^*$: Conjunto de los números irracionales
- $|$ Tal que.
- $\{\}$ Conjunto.
- $\mathbb{S} = \{x+z | x \in \mathbb{N} \text{ y } z \in \mathbb{N}\}$, para leer los símbolos anteriores es solo mezclar las palabras que escribí antes en el orden que aparecen: $\mathbb{S}$ es el conjunto de los $x+z$ tal que x pertenece a los números naturales y z pertenece a los números naturales.
- $\neq$ Diferente de
- $\leq$ Menor o igual que
- $\geq$ Mayor o igual que
- $<$ Menor que
- $>$ Mayor que
- $A(t)$, $B(t)$, $\ldots f(t)$: A,B y f dependen de t. (Notación que usamos para funciones).
- R Cada vez que aparezca este símbolo entonces colocaré algún comentario importante o detalle.

Mi correo: rodolfolobo@ug.uchile.cl

Pandemia, Junio 2020.

> *It is impossible to be a mathematician without being a poet in soul.*
> *Es imposible ser matemático sin ser un poeta en el alma.*
> *Sofia Kovalevskaya, Matemática Rusa. Fue la primera mujer que consiguió una plaza como profesora universitaria en Europa (Suecia, 1881).*

Contenidos



1. Álgebra

1.1 Un pequeño repaso de álgebra

Para empezar, haremos un pequeño repaso de propiedades de álgebra, porque no podemos tener problemas con sumas y restas para trabajar potencias y raices!. Entonces vamos rápido, puedes sumar las siguientes expresiones?

- $2a+a$
- $2a+a+c^2-3a^2+(c-1)^2$
- $\dfrac{a}{b}+\dfrac{2a}{b}$
- $\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a}{c}$
- $\dfrac{c}{a}\div\dfrac{a}{c}$
- $3-(-3)$

- $a-(-a)$
- $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a+b}$
- $-3-[(-3)\cdot -2]$
- $(a-b)^2-a^2$
- $\dfrac{(a^2-b^2)}{(a-b)}$

Si alguna de estas cosas las has olvidado recuerda:

1. Un **monomio** es un término se compone de una **base**, es decir **un sólo término**, por ejemplo:

$$\begin{array}{rl} a & \text{monomio} \\ b^2 & \text{monomio} \\ a+b & \text{binomio} \\ b^2+a & \text{binomio} \\ a\cdot b & \text{monomio} \end{array}$$

Si te confunde que b^2 sea un solo término porque pensaste $b^2 = b\cdot b$, imagina que $b=3$ entonces $b^2=9$, es decir, continua siendo un sólo número que esta escrito como la multiplicación de dos. También ocurre lo mismo con $a\cdot b$. Además, lo mismo ocurre con la división, observa:

$$\begin{array}{rl} \dfrac{a}{b} & \text{monomio} \\ \dfrac{b^2}{b} & \text{monomio} \\ \dfrac{a}{b}+b & \text{binomio} \\ \dfrac{a}{b}+\dfrac{b^2}{b} & \text{binomio} \end{array}$$

Esto es **muy importante**, porque cuando sumamos objetos algebraicos (letras) podemos estudiar casos generales!, en vez de reemplazar números como hicimos antes , entendemos que pasaría de forma general. Así ganamos tiempo y no necesitamos gastar tanto papel. Vulgarmente, diremos que vamos a sumar **peras con peras y manzanas con manzanas**, formalmente entonces sumaremos aquellos monomios que tienen misma base o la misma cara. Veamos las respuestas de la lista anterior con los contenidos o propiedades que usamos:

- $2a+a=3a$ también $3a=a+a+a=3a$ (suma de monomios)
- $2a+a+c^2-3a^2+(c-1)^2=3a+c^2-3a^2+c^2-2c+1$ entonces: $\cdots=-3a^2+3a+2c^2-2c+1$ (cuadrado de binomio)
- $\frac{a}{b}+\frac{2a}{b}=\frac{a}{b}$ (suma de fracciones o monomios)
- $\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}=1$ (multiplicación de fracciones)
- $\frac{c}{a}\div\frac{a}{c}=\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c^2}{a^2}$ (división de fracciones)
- $3-(-3)=6$ (suma de números enteros)
- $a-(-a)=2a$ (suma de números enteros)
- $\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}=\frac{b+a}{a+b}=\frac{a+b}{a+b}=1$ (suma de fracciones y conmutatividad)
- $-3-[(-3)\cdot-2]=-3-(+6)=-3-6=-9$
- $(a-b)^2-a^2=a^2-2ab+b^2-a^2=-2ab+b^2$
- $\frac{(a^2-b^2)}{(a-b)}=\frac{(a+b)\cdot(a-b)}{(a-b)}=(a+b)$ (suma por su diferencia y cuadrado de binomio)

  R Es importante memorizar el cuadrado de binomio y la suma por su diferencia. Una forma de hacerlo es aprender a obtener tales fórmulas.

2. Entonces la propiedades fundamentales de la **suma**, trabajando con números reales (ya veremos que son los números reales, pensemos por ahora que son los números que usaremos durante todo nuestro estudio) se pueden resumir así:

$$\begin{aligned} a+b&=b+a && \textbf{(Conmutatividad)}\\ a+(b+c)&=(a+b)+c && \textbf{(Asociatividad)}\\ a+0&=a && \textbf{(Elemento Neutro)}\\ a+(-a)&=0 && \textbf{(Elemento Inverso Aditivo)} \end{aligned}$$

3. La **multiplicación** tiene sus propias reglas:

$$
\begin{aligned}
a \cdot b = b \cdot a &\quad \textbf{(Asociatividad en la Mult.)} \\
a \cdot 0 = 0 &\quad \textbf{(Multiplicación por cero)} \\
a \cdot 1 = a &\quad \textbf{(Neutro Multiplicativo)} \\
a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad a \neq 0 &\quad \textbf{(Inverso Multiplicativo)}
\end{aligned}
$$

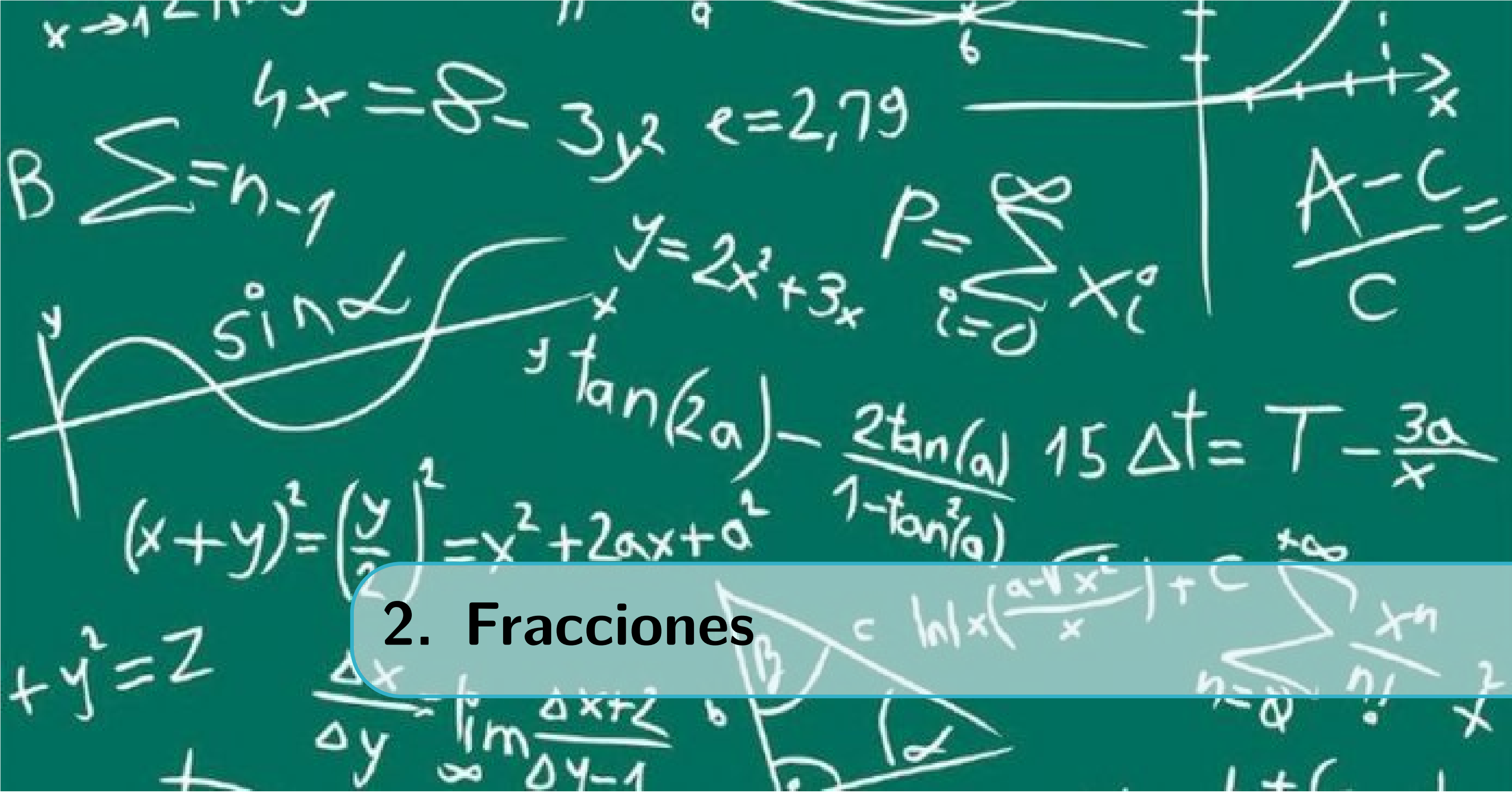
La regla donde la suma y la multiplicación se unen es la distribución, muy importante para nosotros, porque nos sirve para factorizar:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \textbf{(Distributividad)}$$

De esta manera podemos usar solo esas propiedades y entendiendo lo que es un monomio para resolver este tipo de problemas. Por ejemplo si tenemos los monomios a^2, a^4 y nos piden reducir la expresión:

$$\frac{a^4 - a^2}{a^2 - 1} = \frac{a^2(a^2 - 1)}{a^2 - 1} = a^2$$

En este ejemplo use la distribución y división de fracciones.



2. Fracciones

2.1 Un pequeño repaso: Qué son las fracciones?

Recordando que:

- Conjunto de Números Naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Conjunto de Números Enteros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Qué pasa si dividimos entre sí, los números del conjunto $\mathbb{Z}$, entonces nace un nuevo conjunto: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{and} \quad b \in \mathbb{Z} \quad \text{con } b \neq 0\}$

En esta primera parte revisaremos rápidamente algunos conceptos de fracciones. Por qué? porque sin ellas no podremos entender potencias y exponenciales.

Definition 2.1.1 Las **fracciones** son una forma de representar números racionales. En términos simples son números diferentes de los números enteros $\mathbb{Z}$ y naturales $\mathbb{N}$. Recuerda que los números racionales también pueden ser representados por los números **decimales**. La letra para representar este conjunto de números es $\mathbb{Q}$.

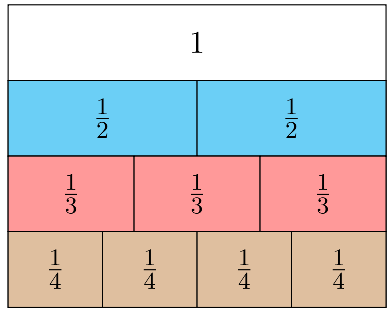
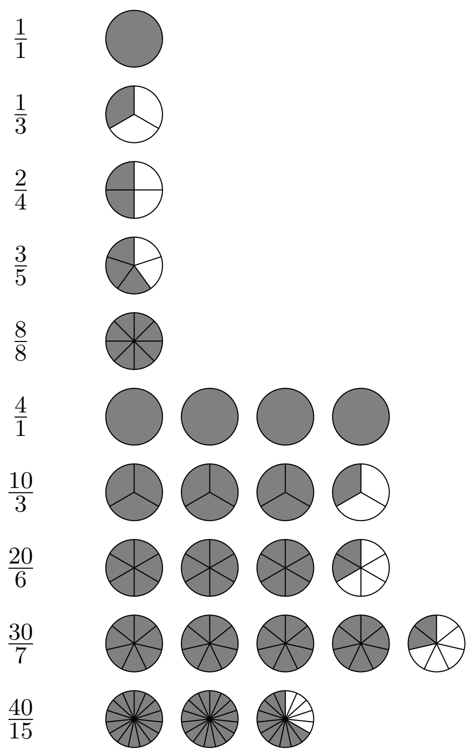


Figure 2.1: Dividiendo por dos.

2.1.1 Observemos algunos ejemplos



A medida que más divisiones hacemos...parece menos fácil de *imaginar*. Observemos un ejemplo diferente, donde las divisiones son más fáciles de distinguir:

Primera pregunta:

- Quién es más grande?: $\dfrac{1}{2}$ o $\dfrac{1}{4}$
- Quién es más grande?: $\dfrac{3}{2}$ o 1

- Quién es más pequeño?: $\dfrac{1}{2}$ o $\dfrac{1}{8}$

Una vez superada estas preguntas, vienen otras que serán importantes para resolver ejercicios! en potencias o exponenciales:

- Cómo sumarías?: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}$
- Cómo sumarías?: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}$
- Cómo sumarías?: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$
- Cómo sumarías?: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$
- Cómo multiplicarías?: $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}$
- Cómo dividirías?: $\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}$

Preguntas rápidas:

- Son iguales o diferentes: $\dfrac{1}{2}$ con 0.5
- Son iguales o diferentes: $\dfrac{1}{4}$ con 0.15
- Son iguales o diferentes: $\dfrac{1}{4}$ con 0.25
- Son iguales o diferentes: $\dfrac{1}{3}$ con 0.33

Pregunta del millón: supongamos que estoy en una tarde aburrida de junio, pensando en que pasaría si alguien se pone a sumar un buen rato *fracciones*, pero no cualquier fracción. Primero me pongo a sumar $\frac{1}{2}$ más la mitad de esa fracción, que es

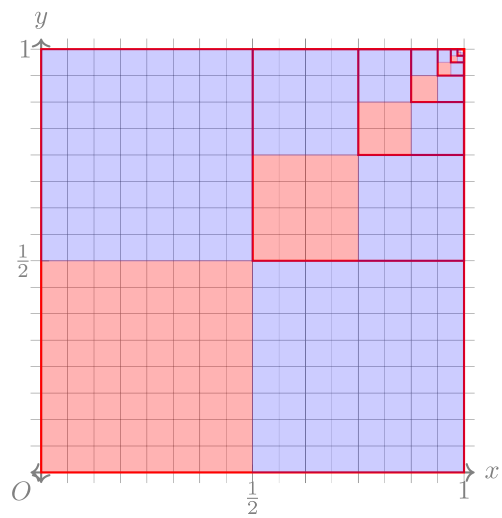
$\frac{1}{4}$, así mira:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Y sumamos la mitad de el último número, así

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

Y continuamos...Qué podría ocurrir? Crecerá mucho esa suma?. Qué relación puedes observar entre esta locura de sumar sin parar y este dibujo?.



Para responder esta pregunta, puedes tomar papel y tijeras e intentar ir sumando cuadraditos (áreas) que representen estas cantidades!.

R En este pequeño capítulo introductorio repasamos algunas ideas de fracciones que son fundamentales para entender correctamente las potencias y raíces. Es muy importante no olvidarse de estas ideas!.

2.1 Ejercicios

1. En los problemas a)-g), determine la suma y resta de fracciones o expresiones algebraicas según corresponda.

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$

b) $\frac{5}{9}+\frac{1}{11}$

c) $\frac{5}{9}-\frac{1}{11}$

d) $z^2+2z-3az+2z^2-z+2az$

e) $\frac{a}{z+c}+\frac{b}{z+c}$

f) $\frac{3c}{d}-\frac{c}{d}+\frac{d}{c}$

g) $d\cdot\left(\frac{3c}{d}-\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)$

2. En los problemas h)-k), intente escribir de diferentes formas la misma fracción (como decimal, como dibujo, como fracción etc).

h) $\frac{1}{2}$ i) $\frac{0.2}{4}$

j) $\frac{1}{4}$ k) $\frac{3}{2}$

3. Hemos comprado una pizza delivery en el Rústiko de Maipú. Infelizmente todos quieren comer. Entonces llega la Karin y te pide $\frac{1}{3}$ de la pizza para ella, tu decides darle porque la quieres. Luego, justo antes que puedas comer!, llega tú papá y te pide la mitad. Cuánta pizza ha quedado para ti?.

4. Un número compuesto o fracción compuesta se escribe de la siguiente forma $\Huge 1\normalsize\frac{1}{3}$ que es simplemente una **suma** de números. Por ejemplo: $\Huge 1\normalsize\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$. Calcule los siguientes números:

l) $\Huge 1\normalsize\frac{1}{3}$ m) $\Huge 3\normalsize\frac{2}{3}$

n) $\Huge 7\normalsize\frac{2}{3}$

2.2 División de Fracciones

Ahora que hemos entendido como sumar o restar fracciones con igual o diferente denominador podemos entender la división de fracciones. Para ello observaremos dos ejemplos pequeños y luego entenderemos un ejemplo más complejo.

1. Primero, supongamos que queremos dividir:

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$$

como fue explicado en la clase anterior, dividir es restar sucesivas veces, o preguntarse *Cuántas veces cabe* $\frac{1}{4}$ *en* $\frac{3}{4}$. En este caso, podemos restar tres veces $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$ y la división nos da por resultado 3, es decir podemos restar tres veces y obtenemos resto igual a cero. Usaremos la figura 2.2 para entender este ejemplo. Este ejemplo es sencillo, porque los denominadores son iguales en ambas fracciones, es decir, tenemos trocitos del triángulo que son del mismo **tamaño**.

2. Ahora, observemos un caso con dos fracciones de diferente tamaño:

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$$

Observemos como estarian representadas gráficamente estas dos fracciones: Solo

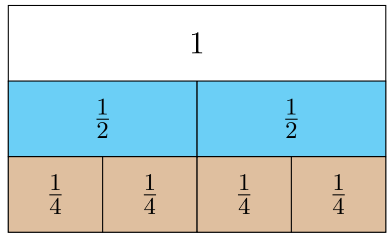


Figure 2.2: Fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$.

utilizando el dibujo, percibimos que la fracción $\frac{1}{4}$ cabe 2 veces en un trozo de tamaño $\frac{1}{2}$. Si utilizamos **fracciones equivalentes** como lo hicimos para sumar y restar podemos observar lo siguiente:

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot \color{red}{2}}{2 \cdot \color{red}{2}} \div \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \div \frac{1}{4} = 2$$

oberva la figura 2.2 y cuenta cuantos cuartos caben en dos cuartos. Hasta ahora, la lógica que usabamos para sumar nos permite entender las fracciones, cuando transformamos ellas en fracciones equivalentes.

3. Observemos este nuevo ejemplo, un poco más complicado que los anteriores:

$$\frac{5}{6} \div \frac{1}{3}$$

ahora, las fracciones representan diferentes **tamaños**. Para pensar este problema tenemos dos caminos. Si aplicamos la técnica de *fracciones equivalentes*, en el número que se encuentra al lado derecho de la división tendríamos:

$$\frac{5}{6} \div \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \div \frac{1 \cdot \color{red}{2}}{3 \cdot \color{red}{2}} = \frac{5}{6} \div \frac{2}{6}$$

Observa la figura 3. Si dividimos, percibimos que la fracción $\frac{2}{6}$ cabe 2 veces y nos sobraría un pedazo de $\frac{1}{6}$, es decir, nos sobra la mitad de $\frac{2}{6}$. Por lo tanto, el resultado de esta división es $\mathbf{2}\frac{1}{2} = 2.5$.

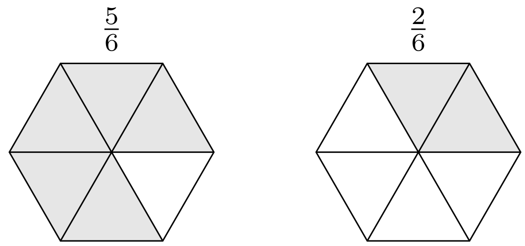


Figure 2.3: Fracciones equivalentes en la división.

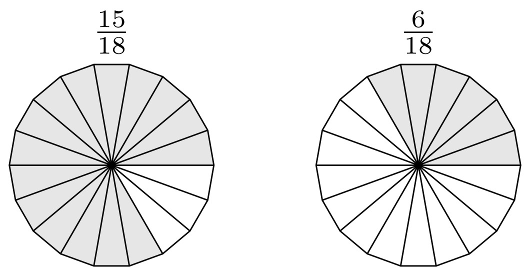


Figure 2.4: Fracciones equivalentes en la división, usando otras fracciones equivalentes.

4. Ahora pensemos este problema desde otro punto de vista. Vamos a igualar los denominadores de otra forma, usaremos fracciones equivalentes pero tomaremos números más grandes. Ahora vamos a querer utilizar denominador común igual a 18.

$$\frac{5}{6} \div \frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} \div \frac{1 \cdot 6}{3 \cdot 6} = \frac{15}{18} \div \frac{6}{18}$$

gráficamente estas fracciones son representadas por la figura 4. Nuevamente, la fracción $\frac{6}{8}$ cabe dos veces y media, es decir $2\frac{1}{2}$. Ahora observemos la **técnica** que enseñan en los colegios y veamos que es lo que realmente esta haciendo!:

$$\frac{5}{6} \div \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \div \frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 1} = \frac{15}{6}$$

Mantengo la izquierda e invierto la derecha

Es decir, dividimos 15 en 6 sin importar como realizamos la fracción equivalente que nos daba pedacitos de tamaño $\frac{1}{18}$, en el caso anterior era 5 dividido en 2 con una fracción equivalente que nos daba pedacitos de tamaño $\frac{1}{6}$. Finalmente, comparando los dos resultados: $\frac{5}{2} = \frac{15}{6} = \frac{3\cdot 5}{3\cdot 2} = \frac{5}{2}$. O sea, *una vez las fracciones tiene el mismo denominador, el resultado es simplemente la división de los numeradores.*

2.2.1 Repasando!

Aprendimos a utilizar fracciones equivalentes para sumar, restar y dividir. También entendimos como funciona la división de fracciones. Aqui hay dos imágenes para recordar cada técnica:

- Fracciones equivalentes:

$$\frac{a\cdot c}{b\cdot c} = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot \boxed{\frac{c}{c}}}_{} = \frac{a}{b}$$

recordando $\frac{a}{b}\cdot 1 = \frac{a}{b}$

- Multiplicación de fracciones:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

- División:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Mantengo la izquierda e invierto la derecha, luego multiplico

2.2 Ejercicios

1. En los problemas a)-e), determine la división o multiplicación según sea el caso, reduciendo lo máximo que pueda.

a) $\frac{1}{2}\div\frac{2}{4}$

b) $\frac{3}{7}\div\frac{3}{11}$

c) $\left(\frac{3}{7}\div\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{4}$

d) $3\div\frac{3}{11}$

e) $d\cdot\left(\frac{3c}{d}\div\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}\right)$

2. En los problemas f)-h), intente escribir de diferentes formas la misma división.

f) $\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}$

g) $\frac{0.2}{4}\div\frac{0.25}{8}$

h) $\frac{3}{2}\div\frac{5}{6}$

3. Ahora sumas, restas, multiplicaciones y divisiones: Todos juntos!.

i) $\left[\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{8}{12}-\frac{1}{3}\right)\right]\cdot\frac{9}{2}$

j) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$

k) Una idea interesante que podemos explorar con fracciones se llama: fracciones continuas. Supongamos que tenemos el número 3.245 y queremos escribirlo de una forma parecida al ejercicio (j)).

$$3.245 = 3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{4}}}$$

Cómo crees que se hace esto?.

l) $d\cdot\left(\frac{3c}{d}\div\frac{c}{d}-\frac{d}{c}\right)$

Una fracción continua muy interesante y famosa descubierta por William Brouncker(1620 – 5 Abril 1684) es la siguiente:

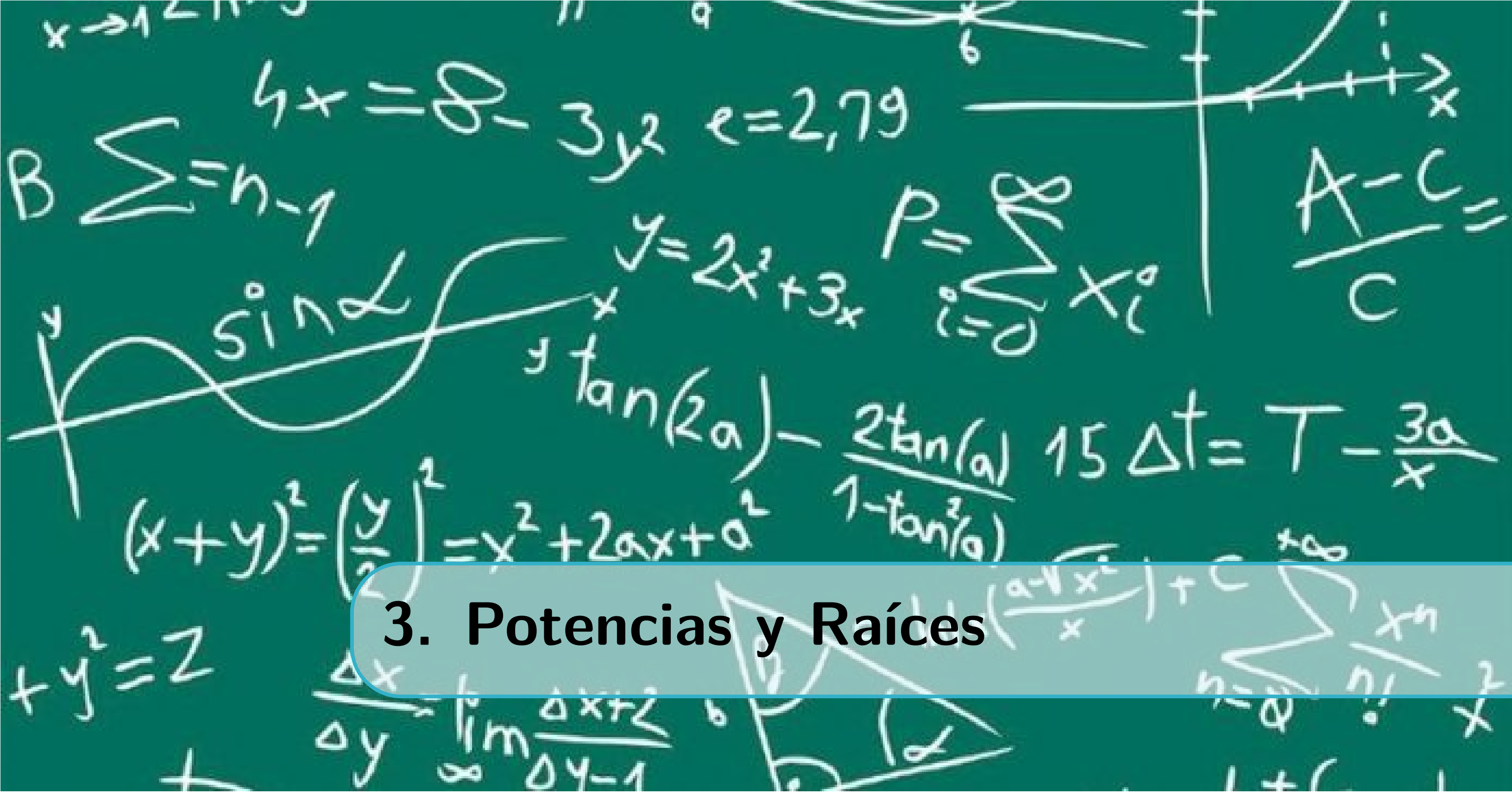
$$\frac{4}{\pi} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ddots}}}}}$$

y así infinitamente...

Y otra fracción continua, que llaman "*la más simple*" es la siguiente:

$$\Phi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}$$

El número Φ es un número lleno de misterios. Él aparece en toda la naturaleza, en las relaciones de los tamaños de nuestro cuerpo, panales de abejas, flores, cuadros famosos etc. Ahora revisa este video antiguo de `Disney` donde explican algunas ideas sobre este número misterioso **(has click!)**.
También puedes mirar algunas imágenes de arte visual basados en estos números para crear nuevas obras de arte **(has click!)**.



3. Potencias y Raíces

3.1 Las Potencias y Raíces son lo mismo?

Antes de responder esta importante pregunta vamos a explicar estos conceptos desde diferentes puntos de vista!. Primeramente, para qué sirven las potencias?. **Las potencias** son una forma de **notación** de números que pueden ser extremadamente grandes o infinitamente pequeños. Por ejemplo:

Números grandes

$$\begin{aligned} 169 &= 13^2 \\ 32768 &= 2^{15} \end{aligned}$$

Números pequeños

$$\begin{aligned} 0.25 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ 0.00003051757 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \frac{1}{32768} \\ 0.00003051757 &= 2^{-15} \end{aligned}$$

Observa que en esta primera parte, el signo de la **potencia** representa una diferencia importante. Qué podrías decirme tú? Cuántas notaciones hay para representar a cada número en estos ejemplos?.

Ahora observa el siguiente ejemplo:

$$32768 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-15} = 2^{15}$$

Qué ha ocurrido?. Como vimos, existe cierta relación *visual* entre números grandes y pequeños cuando usamos la notación de potencias. Las potencias de forma general se escriben de la siguiente forma:

exponente

$$b^a = Potencia$$

base

Una forma de entender las potencias es la siguiente:

$$2^5 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 32 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$$

$$3^4 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 81 \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81}$$

Ahora con exponentes negativos:

$$\begin{aligned}
2^{-5} &= \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{2^5} = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}\\
3^{-4} &= \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{3^4} = \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81}\\
\left(\frac{-7}{11}\right)^{-2} &= \frac{11^2}{(-7)^2} = \left(\frac{11}{-7}\right)\cdot\left(\frac{11}{-7}\right) = \frac{121}{49}\\
\left(\frac{1}{-2}\right)^{-5} &= \frac{(-2)^5}{1^5} = (-2)^5 = -2\cdot -2\cdot -2\cdot -2\cdot -2 = -32\\
\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} &= \frac{3^4}{1^4} = 3^4 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 81
\end{aligned}$$

Con exponentes positivos:

$$\left(\frac{7}{11}\right)^2 = \frac{7^2}{11^2} = \left(\frac{7}{11}\right)\cdot\left(\frac{7}{11}\right) = \frac{49}{121}$$

Todos estos ejemplos se pueden resumir usando fórmulas generales, lo que llamamos **algebra** algunas veces. Entonces las primeras propiedades importantes son:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \forall b \neq 0 \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n} \quad \forall a \neq 0 \tag{3.2}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \forall a \neq 0 \tag{3.3}$$

De estas últimas relaciones es directo que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b} \quad \forall b \neq 0 \tag{3.4}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \quad \forall a \neq 0 \tag{3.5}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \forall a \neq 0 \tag{3.6}$$

$$a^1 = a \quad \forall a \neq 0 \tag{3.7}$$

Qué pasaría si multiplicamos dos potencias de **igual base**. Tomemos uno de los ejemplos anteriores:

$$\left(\frac{7}{11}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{11}\right)^2 = \frac{7^2}{11^2} \cdot \frac{7^2}{11^2} = \frac{7^2 \cdot 7^2}{11^2 \cdot 11^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11} = \frac{7^4}{11^4}$$

$$\left(\frac{7}{-11}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{-11}\right)^2 = \frac{7^2}{(-11)^2} \cdot \frac{7^2}{(-11)^2} = \frac{7^2 \cdot 7^2}{(-11)^2 \cdot (-11)^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{-11 \cdot -11 \cdot -11 \cdot -11} = \frac{7^4}{(-11)^4}$$

$$7^2 \cdot 7^3 = 7^5$$

Como debes haber notado, si tenemos multiplicación de potencias de igual base entonces podemos deducir las siguientes propiedades:

$$(b)^m \cdot (b)^n = (b)^{m+n} \quad \forall \quad b \neq 0 \tag{3.8}$$

$$(b)^m \div (b)^n = (b)^{m-n} \quad \forall \quad b \neq 0 \tag{3.9}$$

$$b^0 = 1 \quad b \neq 0 \quad \text{(Propiedad polémica.)} \tag{3.10}$$

Vamos a deducir o entender algunas de estas propiedades con algunos ejemplos!: La primera propiedad es directa, la análisamos en los ejemplos. La segunda propiedad quiero que tú la intentes entender (necesitas saber dividir fracciones). La última propiedad yo la explicaré y tiene relación con la propiedad (3.9). Observa los siguientes ejemplos:

$$3 \div 3 = \frac{3}{3} = 1 = 3^1 \div 3^1 = 3^{1-1} = 3^0$$

$$-1 \div -1 = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$1345 \div 1345 = \frac{1345}{1345} = 1$$

Esto muestra en partes la propiedad (3.10) (pues tiene otros misterios que no podemos explicar en este curso). Finalmente, todo número entero elevado a 1 es siempre 1, por ejemplo:

$$3^1 = 3$$

$$-1^1 = -1$$

$$\left(\frac{7}{6}\right)^1 = \frac{7^1}{6^1} = \frac{7}{6}$$

De forma general tenemos entonces una nueva propiedad:

$$b^1 = b \quad \forall \quad b \in \mathbb{Q} \tag{3.11}$$

Hasta aqui tenemos **11** propiedades. Lo bueno es que serán **las mismas propiedades** para trabajar raíces...pues en realidad pueden usar la misma notación. Ahora una pregunta...cuales de las propiedades vistas en realidad están **repetidas? o mejor dicho escrita de otra forma?**.

Observemos las últimas propiedades importantes para potencias que **tienen igual exponente** pero distinta base, en realidad son las mismas propiedades (3.1) y (3.2) pero vistas de otra forma:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \tag{3.12}$$
$$a^n \div b^n = (a \div b)^n \tag{3.13}$$

Finalmente, qué pasa si elevamos una potencia a otra potencia?

$$a^{m^n} = a^{m \cdot n} \tag{3.14}$$

Intenta plantear un ejemplo donde puedas mostrar que lo anterior se cumple.

R Recuerda que todos los números enteros pueden escribirse como si estuvieran divididos por 1. Por ejemplo: $14 = \frac{14}{1}$, $-41 = \frac{-41}{1}$. Esto te puede ayudar a recordar la propiedad

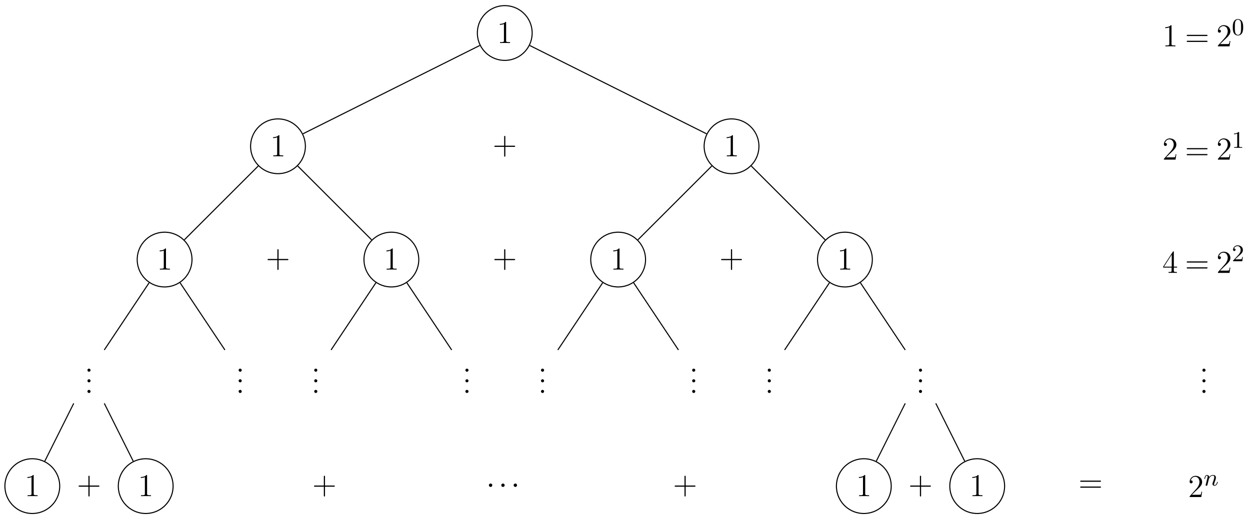
R Cuidado con los signos negativos!. Observa que $-a^n \neq (-a)^n$ si n es par. Esto sucede de la siguente forma:

$$-3^2 = -1 \cdot 3^2 = -1 \cdot 9 = -9 \neq (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

Por eso los paréntesis son importantes. Ellos determinan quién es la base.

3.2 Pequeño ejemplo: Cómo se usan las potencias en la ciencia?

Ahora usemos las propriedades anteriores, para ver un ejemplo práctico. Supongamos que tenemos una bacteria que a cada segundo se duplica. Inicialmente tenemos una sola bacteria cuando miramos por el microscópio, pasado un segundo tenemos dos bacterias, pasado dos segundos tenemos 4 etc. Gráficamente podemos representarlo así:



Ahora, resolveremos uno de los ejemplos que aparece en la guía escrito con **error**. A continuación escribiré el enunciado del problema y tú me debes decir cuál es el error:

> Una población de bacterias A decrece a la mitad cada semana, mientras que una población B crece en un tercio cada semana. Inicialmente, la población A es de 1000 bacterias y la población B es de 243.

1. Cuántas bacterias tiene cada población luego de transcurridos tres semanas.
2. Cuál es el total de las dos poblaciones al cabo de tres semanas.

El caso de que disminuya a la mitad sería idéntico a nuestra figura con forma de árbol pero de abajo hacia arriba. Tendríamos algo asi:

$$\begin{aligned}
1+1+\cdots+1 &= 1000 && \text{Al comienzo } t=0\\
1+1+\cdots+1 &= 500 && \text{Primera semana } t=1\\
&\vdots\\
1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 &= 10 && \text{Semana } n-1 \ t=n-1\\
1+1+1+1+1 &= 5 && \text{Semana } n \ t=n
\end{aligned}$$

Hasta la semana n tendremos 5 bacterias, luego no podemos contar con números enteros el número de bacterias, lo entiendes?. Pero escribir con sumas no ayuda mucho...usemos la notación aprendida de potencias!:

$$\begin{aligned} 10^3 = (2\cdot 5)^3 = 2^3\cdot 5^3 = 1000 &\quad \text{Al comienzo, } t=0 \\ 10^2\cdot 5 = 2^2\cdot 5^3 = 500 &\quad \text{Primera semana, } t=1 \\ \vdots \\ 2\cdot 5 = 10 &\quad \text{Semana } n-1,\ t=n-1 \\ 5 = 5 &\quad \text{Semana } n,\ t=n \end{aligned}$$

Ahora miremos como funciona la fórmula:

$$A(t) = 1000\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Esta expresión se lee así: *La cantidad de bacterias $A(t)$ a medida que pasa el tiempo en semanas es igual a 1000 multiplicado por un medio elevado a t.* El inicio lo consideramos como el tiempo *cero*, entonces si $t=0$ y reemplazamos en nuestra fórmula obtenemos:

$$A(0) = 1000\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

Ahora usamos la propiedad **polémica** (3.10), toda potencia elevado a cero es igual a la unidad:

$$A(0) = 1000\cdot 1 = 1000$$

Y ahora leemos nuestra fórmula de la siguiente forma: *El número de bacterias en el tiempo $t=0$ o inicio, es igual a 1000 unidades.* Luego, cuando $t=1$ substituimos nuevamente en la fórmula:

$$A(1) = 1000\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1$$

Usamos la propiedad (3.11) y obtenemos:

$$A(1) = 1000\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1000}{2} = 500$$

Lo anterior lo hicimos solo para comparar nuestros resultados con los cálculos que hicimos mentalmente. Ahora, respondemos la pregunta. A las tres semanas:

$$A(3) = 1000\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1000}{8} = 125$$

y tenemos 125 bacterias. **Ya te diste cuenta del error que hay en la guía?.** Si no te has dado cuenta esta es la fórmula de la guía:

$$A(t) = 1000\cdot\frac{1^t}{2}$$

Cuál es el error? intenta substituir como lo hicimos anteriormente y dime qué pasa con esta fórmula.

Ahora responderemos la segunda parte. Para ello necesitamos la fórmula para las bacerias del tipo B, esta fórmula esta dada por:

$$B(t) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^t \cdot 243$$

Luego de tres semanas:

$$B(3) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 243 = \left(\frac{3}{3}+\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 243 = \left(\frac{3+1}{3}\right)^3 \cdot 243 = \frac{4^3}{3^3}\cdot 3^5 = \frac{4^3\cdot 3^5}{3^3} = 4^3\cdot\frac{3^5}{3^3} = 4^3\cdot 3^2$$

En el desarrollo anterior solo utilizamos propiedades de potencias y fracciones sin necesidad de una calculadora. El resultado final es $4^3\cdot 3^2 = 64\cdot 9 = 576$. Luego, el número total de bacterias al cabo de tres semanas es $A(3)+B(3) = 125+576 = 701$ bacterias.

3.3 Resolvamos algunos ejercicios

1. Agrupe utilizando las propiedades (por base o exponente):
   (a) Por ejemplo: $7^5\cdot 31^5 = (7\cdot 31)^5$

   (b) Por ejemplo: $\frac{3^3}{7^3} = \left(\frac{3}{7}\right)^3$

   (c) Por ejemplo: $\frac{3^3}{7^3}\cdot 7^{-3} = \frac{7^{-3}}{7^3}\cdot 3^3 = 7^{(-3-3)}\cdot 3^3 = 7^{-6}\cdot 3^3$

   (d) $(-3)^2\cdot(-3)^{-7}$

   (e) $2^5\cdot 3^5$

   (f) $\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{11}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{11}\right)^{-5}$

   (g) $2^{5^2}\cdot 3^{5^2}$

   (h) $(-2)^5\cdot(-3)^5$

   (i) $(2)^5\cdot(4)^7$ **Pista: Convierte el 4 en 2**.

   (j) $\left(\frac{-3}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{11}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{-3}{7}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{11}\right)^{-5}$

   (k) $2^{5^{-2}}\cdot 3^{5^{-2}}$

   (l) $(0.5)^7\cdot(0.5)^{-11}$

(m) $(0.25)^7 \cdot (0.5)^{-11}$ **Pista: Algo parecido al ejercicio** (i)

2. Un poco de operatorias. Encuentre el resultado de las siguientes expresiones usando propiedades de potencias y fracciones:
   (a) $(-3)^2 \cdot -2^2$

   (b) $\left(1+\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{5^{-3}}{4^{-3}}$

   (c) $\left(1+\frac{1}{4}\right)^2 \div \frac{5^{-3}}{4^{-3}}$

   (d) $\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^5}{\left(\dfrac{3}{4}\right)}$

   (e) $\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^3}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^5}$

   (f) $\left((0.\overline{2})^3 \div (0.\overline{2})^{-5}\right)^2$

3. Ejercicios de substitución. Sea $a = 2$, $b = 3$ y $c = -7$. Calcule y simplifique.
   (a) $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^6} \cdot \dfrac{b}{a}$

   (b) $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^0}$

   (c) $-1 \cdot c^3$

Hasta aquí hemos revisado bastante de potencias. Anota tus dudas, pregunta todo lo que puedas. En la siguiente lista, dejo dos profesores de youtube que pueden complementar tus estudios, sólo has click en el nombre:

- **Profesora Susi (has click!)**
- **Julio Profe (has click!)**

3.4 Lenguaje de problemas escritos: un breve resumen

Como hemos revisado los problemas escritos son muchas veces *la piedra en el zapato*. Algunos conceptos claves para resolver estos problemas requieren que asociemos algunos conceptos de suma, resta, multiplicación y fracciones para poder **modelarlos**.

3.4.1 Porcentajes

Un porcentaje es una forma **adimensional** de comparar el tamaño de dos números. Adimensional quiere decir que no está medido ni en *metros,centímetros, grados celcius o cualquier otra medida física que conozcas.* Siempre tomamos como referencia un número para calcular este valor. En definitiva: dividimos en 100 partes iguales un número y cada parte es un 1% (esto se lee "*un porciento*"). Por ejemplo, supongamos que el máximo valor que podemos obtener en la prueba como nota es 10 (el 100%). Si hemos obtenido la nota 7.3, Cuál es el porcentaje en relación a 10?. Esto podemos calcularlo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{10}{7.3} &= \frac{100}{x} \qquad / \cdot \frac{x \cdot 7.3}{10} \\ x &= \frac{100 \cdot 7.3}{10} = 73\%\end{aligned}$$

La fracción de la izquierda debe ser igual a la fracción de la derecha, pues estamos diciendo que nuestro numerador 10 es equivalente al numerador 100 y el denominador 7.3 al denominador x, como si fuera un espejo, donde la fracción de la derecha esta *amplificada* por un valor que no conocemos pero, que en definitiva, arroja el mismo resultado.

Además el símbolo $\% = \frac{1}{100}$, representa una 100-aba parte de la fracción. Por ejemplo:

$$43\% = \frac{43}{100} = 43 \cdot 0.01 = 0.43$$

Es decir, estamos representando el máximo valor de algo por la fracción $\frac{100}{100} = 1$ por un entero que esta dividido en 100 partes iguales. Luego, todo valor menor al máximo estará representado por un número menor que 1.

3.4.2 Múltiplos

Alguna vez te enfrentarás a los siguientes enunciados: el doble, el triple, el cuádruplo, el quintuplo, etc. Estos *amplifican* la variable en cuestión usando la multiplicación. Por otro lado, la mitad, un tercio o una tercera parte, un cuarto o una cuarta parte etc, representan una disminución de la variable a través de la *división*, o analogamente, la multiplicación por una fracción menor a 1.

Frase	Representación matemática
El doble de x	$2 \cdot x$
El doble de x	$x + x$
x se duplicó	$2 \cdot x$
El triple de x	$3 \cdot x$
x se triplicó	$3 \cdot x$
El cuádruplo x	$4 \cdot x$
La mitad de x	$\frac{1}{2} \cdot x$
La mitad de x	$0.5 \cdot x$
La mitad de x	$x - \frac{x}{2}$
x disminuye a la mitad	$\frac{x}{2}$
La cuarta parte de x	$0.25 \cdot x$
La cuarta parte de x	$\frac{1}{4} \cdot x$
La cuarta parte de x	$x - \frac{3x}{4} = x - 3\frac{x}{4}$

Generalmente, el **tiempo** es una variable muy utilizada en física o matemáticas para crear ejercicios. Por ejemplo, supongamos que c es la cantidad de conejos que tenemos en un corral. Sin pensar en la cantidad de machos o hembras, esperamos que la cantidad de conejos se duplique a cada semana. Observe la tabla de como los conejos fueron creciendo:

Semana	Cantidad de Conejos
1	c
2	$2 \cdot c$
3	$4 \cdot c$
4	$8 \cdot c$

Simplemente estamos multiplicando por dos el valor anterior, utilizamos potencias para modelar este tipo de crecimiento de la siguiente forma:

$$\text{Cantidad de conejos}(t) = \text{Cantidad inicial} \cdot \text{Cuanto crece cada semana}^t$$

Matemáticamente:

$$p(t) = c \cdot 2^t$$

donde t es el tiempo en semanas, c es la cantidad inicial de conejos y $p(t)$ es la población de conejos en el instante t. Veamos un ejemplo diferente.

Imagina que una población de **Chukaw** (pájaro del Wallmapu), representada con la letra p, crece cada mes de la siguiente forma:

Mes	Cantidad de *pu Chukaw*
1	p
2	$15+p$
3	$30+p$
4	$45+p$

Cómo esta creciendo esta población? de qué forma podrías modelar el crecimiento a través de una fórmula matemática?.

3.5 Raíces

Ahora estudiaremos raíces. Lo bueno es que utilizaremos las **mismas** propiedades para trabajar. Antes de comenzar tenemos que dejar claro lo siguiente:

$$\sqrt[\text{indice}]{\text{Base}^{\text{exponente}}} := \text{Base}^{\dfrac{\text{exponente}}{\text{indice}}} \tag{3.15}$$

Es decir, son diferentes **notaciones** pero representan un mismo objeto: *potencias con exponentes fraccionarios*. En nuestro dibujo anterior de potencias (el de 3 colores), nuestro exponente a era un número entero, o lo mismo que $a \in \mathbb{Z}$. Observa que ahora nuestro término $a = \frac{\text{exp}}{\text{ind}}$ será una fracción:

$$b^a = Potencia \Longleftrightarrow b^{\frac{\text{exp}}{\text{ind}}} = Potencia$$

El símbolo $\Longleftrightarrow$ nos dice que: *la expresión de la izquierda es equivalente a la expresión de la derecha.* Algunos ejemplos:

$$\sqrt[7]{5^{11}} = 5^{\frac{11}{7}}$$
$$\sqrt[9]{7^2} = 7^{\frac{2}{9}}$$
$$\sqrt[3]{3^{-4}} = 3^{-\frac{4}{3}}$$

R Siempre se coloca el símbolo negativo en el exponente, no en el índice.

R La raíz puede responder a la pregunta: *a que número elevamos la base b para obtener la potencia P?*. Por ejemplo:

$$5^x = 125 \qquad \text{A qué número elevamos 5 para obtener 125?}$$

Cuando aparece el símbolo de raíz $\sqrt{\cdot}$ aparece sin **índice** entonces la raíz se llama *raíz cuadrada*. Por ejemplo,

$$\sqrt{2} = \sqrt[2]{2^1} = 2^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt{7} = \sqrt[2]{7^1} = 7^{\frac{1}{2}}$$

3.5.1 Multiplicación y División de Raíces de Igual Base

Como fue dicho anteriormente, las raíces y potencias representan un mismo objeto. Por lo tanto las propiedades de potencias nos permitirán trabajar la multiplicación y división de raíces. Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[3]{2^{-1}} = 2^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{3}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4}$$

En este último ejemplo es posible hacer otro tipo de modificación (observe que existen muchas formas de escribir un mismo número!): Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{3}{3}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{2}$$
$$\sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$$

Cuántas propiedades de potencias utilicé? (intenta nombrarlas).

Observe ahora la división:

$$\sqrt[3]{2^5} \div \sqrt[3]{2^{-1}} = 2^{\frac{5}{3}} \div 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{3}--\frac{1}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$$
$$\frac{\sqrt[3]{2^5}}{\sqrt[3]{2^{-1}}} = \frac{2^{\frac{5}{3}}}{2^{-\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{5}{3}--\frac{1}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$$

R Generalmente, la dificultad de los ejercicios es saber escribir de diferentes formas el mismo número.

3.5.2 Suma de raíces: fantasma del monomio

Entonces, primero veremos como se suman las raíces. Para sumar raíces simplemente tenemos que pensar en los objetos de misma base o **monomios** (si no te acuerdas revisa este capítulo (has click aquí → **1.1**). Digamos que $a = \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{7}$. Son dos números con diferentes bases, observa:

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$
$$7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$$

Si estos números se suman obtenemos

$$2^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{7} \approx 4.059964873437686$$

En este caso es fácil notar que ambas bases son números primos (números divisibles solo por sí mismos, si te has olvidado de estos números **(has click aquí!)**). Entonces debemos considerar dos cosas muy importantes antes de continuar:

- Todos los números se pueden escribir como producto de potencias de números primos.

$$\begin{aligned} 150 &= 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ 2304 &= 256 \cdot 9 = 2^8 \cdot 3^2 \\ 169 &= 13^2 \\ 154 &= 2 \cdot 7 \cdot 11 \end{aligned}$$

  Por qué crees que esto es verdad?, Cómo se te ocurriría mostrar que es cierto?.
- Calcular el valor aproximado de una raíz es un problema histórico con diferentes soluciones. Una forma posible de realizar esto para raíces cuadradas es conocer los cuadrados perfectos de algunos números, así:

$$5^2 = 25$$
$$6^2 = 36$$

  Es decir $\sqrt{25} = 5$ y $\sqrt{36} = 6$. Luego, conociendo esto podríamos estimar (con una cantidad considerable de error decimal, dependiendo de como usaremos este número) la raíz $\sqrt{30}$. Pues sabemos que:

$$5 < \sqrt{30} < 6$$

  Aqui, podríamos arriesgarnos a decir lo siguiente: tal vez la respuesta se encuentra justo a la mitad entre 5 y 6, es decir 5,5.

R Demostraremos por contradicción que todo número natural puede representarse cómo número primo. Supongamos que existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ que **no** puede representarse como multiplcación de números primos. Supongamos que n es el número natural más pequeño que no puede representarse como producto de números primos, por ende es diferente de 1. Y tampoco puede ser un número primo. Entonces existe un número distinto de n y de 1 que divide a n y no es primo. Llamaremos a ese número a. Por definición de divisibilidad n podría escribirse como $n = a \cdot b$, donde a y b son enteros positivos menores que n y debido a nuestro razonamiento, debería ser posible escribirlos como producto de números primos. Luego, n también es posible de representar como producto de números primos, lo que genera una **contradicción**. Lo último implica que no existe un número natural que no pueda ser representado como producto de números primos.

3.5.3 Distintos tipos de suma

Ahora, explicaré cada uno de estos puntos por separado para luego sumar raíces sin dudar!. Vamos a revisar 3 casos por separado:

1. Suma de raíces de igual base
   (a) **Igual base, igual índice**. Este es el caso más simple, por ejemplo:

$$2\sqrt[3]{7} + 5\sqrt[3]{7}$$
$$2\sqrt[4]{21} - 5\sqrt[4]{21}$$

   (b) **Diferente base, igual índice**: Para ello usaremos **suma de raíces de distinta base**, con transformación a base común (representación de un número natural como multiplicación de números primos, también llamado *Teorema fundamental de la aritmética*).

$$2\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135}$$
$$x\sqrt[3]{xy^4} - y\sqrt[3]{x^4y}$$

   (c) **Igual base, distinto índice**: no tenemos escapatoria.

$$2\sqrt[3]{7} + 5\sqrt[6]{7}$$
$$2\sqrt[4]{21} - 5\sqrt[3]{21}$$