

# Trabajo práctico de procesamiento de señales II - Estimación de trayectorias utilizando el filtro de Kalman

## 1. Objetivo

Se desea estimar en tiempo real la trayectoria 2D de un vehículo. Para esto, a bordo del vehículo se tienen dos acelerómetros y un giróscopo como se muestra en la figura 1 que entregan información de aceleración en los ejes  $x, y$  (denominadas  $Acel_x(t), Acel_y(t)$  respectivamente) e información de velocidad angular en el eje  $z$  (denominada  $\omega(t)$ ). Estos instrumentos están fijos al vehículo y entregan información de manera continua. Adicionalmente se cuenta con un radar que en instantes de tiempo discretos entrega información de posición del vehículo. El objetivo de este trabajo es utilizar un filtro de Kalman que fusione la información provista por estos instrumentos para poder determinar la trayectoria del vehículo.

## 2. Motivación

Se desea conocer la trayectoria (posición, velocidad y orientación) de un vehículo (ver figura 2), el cual está equipado con dos acelerómetros fijos al vehículo en las direcciones (ortogonales)  $x^b$  e  $y^b$ , adicionalmente se cuenta con información de un giróscopo en el eje  $z^b$  que entrega información de velocidad angular, es decir  $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}(t)$ . La información de aceleración y velocidad angular está disponible en todo instante de tiempo. Adicionalmente, se cuenta con información de un radar que entrega mediciones de posición y velocidad ( $P^e, V^e$ ) en instantes de tiempo discretos  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

La posición del vehículo se desea expresar en el sistema de referencia  $x^e, y^e$ . Uno de los problemas que se tiene es que no se conoce la orientación del vehículo (es decir el ángulo  $\theta(t)$ ) por lo que no es inmediato relacionar la información conocida en los ejes  $x^b, y^b$  con los ejes  $x^e, y^e$ . Sería posible calcular esta orientación a partir de la medición del giróscopo mediante la expresión,

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t \omega(s) ds + \theta(t_0).$$

Pero para esto es necesario conocer la orientación inicial  $\theta(t_0)$ , dato que no se conoce. Más precisamente, las ecuaciones que relacionan las mediciones de los acelerómetros y giróscopos con la trayectoria del vehículo son las siguientes:

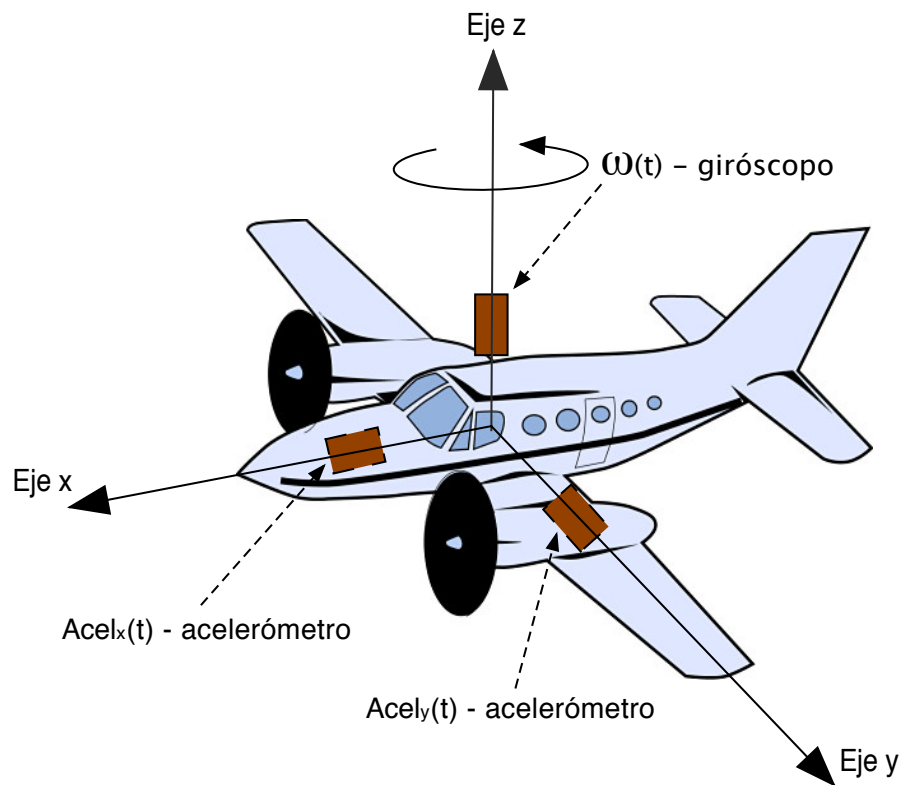


Figura 1: Vehículo del cual se desea estimar su trayectoria.

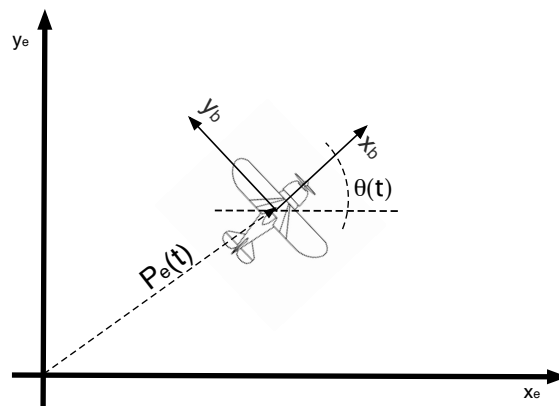


Figura 2: Ejes de referencia utilizados.

$$\dot{P}^e(t) = V^e(t), \quad (1)$$

$$\dot{V}^e(t) = C_b^e(t)A^b(t), \quad (2)$$

$$\dot{C}_b^e(t) = C_b^e(t) \begin{pmatrix} 0 & -\omega(t) \\ \omega(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$(4)$$

donde  $P^e(t) \in \mathbb{R}^2$  es la posición del vehículo en el plano  $x^e, y^e$ ,  $V^e(t) \in \mathbb{R}^2$  es la velocidad del vehículo en el plano  $x^e, y^e$ ,  $A^b(t) \in \mathbb{R}^2$  es la medición de los acelerómetros expresadas en las ternas del vehículo  $x^b, y^b$  y  $\omega(t) \in \mathbb{R}$  es la medición del giróscopo y  $C_b^e(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es la matriz que relaciona las mediciones expresadas en los ejes  $x^b, y^b$  con los ejes  $x^e, y^e$ . La matriz  $C_b^e(t)$  se relaciona con el ángulo  $\theta(t)$  mediante:

$$C_b^e(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}.$$

Además de las ecuaciones (1) se necesitan conocer las condiciones iniciales  $P^e(0), V^e(0), C_b^e(0)$ . En la práctica estas condiciones iniciales se conocen con cierto error ( $\Delta P^e \in \mathbb{R}^2, \Delta V^e \in \mathbb{R}^2, \Delta \theta \in \mathbb{R}$ ) por lo que no es posible determinar con exactitud la trayectoria del vehículo a partir de las mediciones de acelerómetros y giróscopos. Observar que el error en  $\Delta \theta$  se relaciona con un error en  $\Delta C_b^e$ .

Utilizando las mediciones externas provistas por el radar se desea implementar un filtro de Kalman que permita estimar la trayectoria del vehículo corrigiendo el error en condiciones iniciales de posición, velocidad y orientación  $\Delta P^e, \Delta V^e, \Delta \theta$ , respectivamente.

## Ejercicios

Se conocen los siguientes datos de la trayectoria:

- Las condiciones iniciales del sistema con cierto error:
  - $\Delta P^e \approx 100m$  (del orden de 100m), en cada eje.
  - $\Delta V^e \approx 0,2m/s$ , en cada eje.
  - $\Delta \theta \approx 40^\circ$ .
- Sobre las mediciones:
  - Se muestrea la información del giróscopo y de los acelerómetros a 100Hz.
  - Los acelerómetros y el giróscopo entregan información sin error.
  - El ruido de medición del radar es blanco, gaussiano, con media cero y desvío de 10m (en cada eje) para la posición y 0,1m/s en velocidad.

- Las mediciones del radar están tomadas en forma periódica, cada 1seg.
1. Indique cómo haría para utilizar un filtro de Kalman para estimar la trayectoria utilizando la información disponible. Indique cuál serían las matrices del modelo, tenga en cuenta que el modelo debe ser discretizado.
  2. Estime la trayectoria del vehículo. Para esto utilice las mediciones de los acelerómetros (archivo Acel.mat), la del giróscopo (archivo Gyro.mat) y la del radar (Radar.mat). Calcule el error de estimación comparando con la trayectoria real (archivo trayectoria.mat)
  3. Suponga ahora que el radar posee un sesgo en velocidad (del orden de  $1m/s$  en cada eje). Modifique el modelo de estado del sistema de manera tal de poder incluir el sesgo del radar y estimarlo. La medición del radar está dada en el archivo Radar-sesgo-vel.mat. Grafique el error de estimación tanto de la trayectoria como del sesgo del sensor. Discuta los resultados.
  4. Suponga ahora que el radar posee un sesgo en posición (del orden de  $20m$  en cada eje). Modifique el modelo de estado del sistema de manera tal de poder incluir el sesgo del radar y estimarlo. La medición del radar está dada en el archivo Radar-sesgo-pos.mat. Grafique el error de estimación tanto de la trayectoria como del sesgo del sensor. Discuta los resultados.
  5. Programe el algoritmo de Kalman basado en la factorizaciones QR y de Cholesky vistos en el curso y realice nuevamente el punto 2. comparando los resultados.
  6. Dado que en la práctica uno no puede comparar los resultados obtenidos con la trayectoria real ¿Qué le parece que podría hacer para "verificar" si el filtro de Kalman está funcionando correctamente? ¿Cómo sabría si los datos que está teniendo son útiles o no? De una explicación concisa.
  7. Suponga que tiene un sesgo en la medición de los acelerómetros (del orden de  $0,2m/s^2$  en cada eje). Explique cómo modificaría el esquema de estimación para poder estimar el sesgo de los acelerómetros.

### 3. Simulaciones

Los archivos fueron generados con el software FreeMat-3.6, el cual es un ambiente de desarrollo y análisis de datos para aplicaciones científicas y de ingeniería. Es un software gratuito y de código abierto. Es similar al software comercial MATLAB de la empresa Mathworks. De hecho, la sintaxis es común entre ambos softwares, al igual que los formatos de archivos. El FreeMat-3.6 puede descargarse de (<http://freemat.sourceforge.net/>), para Linux, Mac y Windows, incluso el código fuente.

*Descripción de los archivos*

A continuación se describe el contenido de cada uno de los archivos que debe utilizar para resolver el problema propuesto:

Todos los archivos *.mat* se pueden cargar con el FreeMat-3.6, mediante el comando *load*.

- *Acel.mat*: Contiene una variable llamada *Acel* con la medición de los acelerómetros (ejes  $x^b, y^b$  en ese orden) indexada con el tiempo en la primera columna.
- *Gyro.mat*: Contiene una variable llamada *Gyro* con la medición del giróscopo (ejes  $x^b, y^b$  en ese orden) indexada con el tiempo en la primera columna.
- *Radar.mat*, *Radar-sesgo-vel.mat*, *Radar-sesgo-pos.mat*: Son las mediciones del radar. Contiene dos variables, *Pradar* y *Vradar* con los datos de posición y velocidad medidas por el radar (ejes  $x^e, y^e$  en ese orden) indexados con el tiempo en la primera columna.
- *trayectoria.mat*: Contiene tres variables, llamadas *Preal*, *Vreal*, *Theta* con a información de la posición, velocidad y orientación de la trayectoria real vehículo en los ejes  $x^e, y^e$  indexados con el tiempo en la primera columna.