

# 基于布朗粒子运动的微小位移测量实验设计与验证

E

2025 年 8 月 14 日

## 摘要

热力学基本规律在宏观体系中已得到广泛验证，但其在微观尺度下的适用性仍需深入探讨。该实验从微观粒子的热运动出发，以布朗运动为典型模型，结合实验与理论分析，通过测量布朗粒子的随机位移行为，验证不可逆过程中的熵产生机制。进一步地，我们建立了布朗运动中扩散系数与熵产生之间的热力学不确定关系，揭示了微观热运动背后的统计规律及其与热力学第二定律的一致性。该实验研究为从微观尺度验证热力学基本规律提供了有效途径，并对理解非平衡态下微观体系的热力学行为具有重要意义。

**关键字：** 布朗运动，熵产生率，热力学不确定关系，离轴全息

## Abstract

The basic laws of thermodynamics have been widely verified in the macro system, but its applicability at the micro scale still needs to be further explored. Based on the thermal motion of microscopic particles, this experiment takes Brownian motion as a typical model, and combines experimental and theoretical analysis. By measuring the random displacement behavior of Brownian particles, the entropy generation mechanism in irreversible process is verified. Furthermore, we establish the thermodynamic uncertainty relationship between diffusion coefficient and entropy generation in Brownian motion. The statistical law behind microscopic thermal motion and its consistency with the second law of thermodynamics are revealed. This experimental study provides an effective way to verify the basic laws of thermodynamics from the microscopic scale. It is of great significance to understand the thermodynamic behavior of micro-system in non-equilibrium state.

**Keywords:** Brownian motion, entropy production rate, thermodynamic uncertainty relation, off-axis holography

# 目录

<b>1</b>	<b>题意解析</b>	<b>4</b>
1.1	题目 . . . . .	4
<b>2</b>	<b>实验原理</b>	<b>5</b>
2.1	有效动能温度公式推导 . . . . .	5
2.2	噪声强度与扩散系数的修正关系 . . . . .	6
2.3	离轴全息的原理与重建 . . . . .	7
<b>3</b>	<b>理论模拟</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>装置设计</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>实验内容</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>误差分析</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>结论与展望</b>	<b>12</b>
<b>8</b>	<b>参考文献</b>	<b>13</b>
<b>9</b>	<b>附录</b>	<b>14</b>
9.1	人员分工 . . . . .	14
9.2	代码展示 . . . . .	14
9.3	部分全息图与拍摄图展示 . . . . .	14

# Chapter 1

## 题意解析

### 1.1 题目

这里是 section 部分

#### 1.1.1 目的

这里是 subsection 部分

## Chapter 2

# 实验原理

### 2.1 有效动能温度公式推导

考虑被光阱束缚的布朗粒子运动，在自由粒子近似下忽略势能项，其朗之万方程为：

$$m \frac{dv}{dt} = -\gamma v + \xi(t) + \zeta(t), \quad (2.1)$$

其中：

- $v = \dot{x}$  为粒子速度；
- $\xi(t)$  为热噪声，对应环境温度  $T_w$ ；
- $\zeta(t)$  为外部随机力，振幅为  $\sigma$ 。

噪声的统计特性如下：

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2\gamma k T_w \delta(t - t'), \quad (2.2)$$

$$\langle \zeta(t) \zeta(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t'), \quad (2.3)$$

$$\langle \xi(t) \zeta(t') \rangle = 0. \quad (2.4)$$

定义总噪声  $\eta(t) = \xi(t) + \zeta(t)$ ，其自相关函数为：

$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = (2\gamma k T_w + \sigma^2) \delta(t - t'). \quad (2.5)$$

朗之万方程的稳态解为：

$$v(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{\gamma}{m}(t-\tau)} \eta(\tau) d\tau. \quad (2.6)$$

计算速度方差：

$$\begin{aligned} \langle v^2(t) \rangle &= \frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t e^{-\frac{\gamma}{m}(t-\tau)} e^{-\frac{\gamma}{m}(t-\tau')} \langle \eta(\tau) \eta(\tau') \rangle d\tau d\tau' \\ &= \frac{2\gamma k T_w + \sigma^2}{m^2} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{2\gamma}{m}(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{2\gamma k T_w + \sigma^2}{2\gamma m}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

根据能量均分定理：

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}kT_{\text{kin}}, \quad (2.8)$$

代入上式可得：

$$T_{\text{kin}} = T_w + \frac{\sigma^2}{2k\gamma}. \quad (2.9)$$

因此，外部随机力会等效提高布朗粒子的有效动能温度，其增加量与噪声强度平方成正比，与阻尼系数成反比。

## 2.2 噪声强度与扩散系数的修正关系

### 2.2.1 噪声强度的定义

从朗之万方程的过阻尼形式出发：

$$\gamma \dot{x} = f(x, t) + \eta(t), \quad (2.10)$$

其中  $\gamma$  为摩擦系数， $\eta(t)$  为零均值随机噪声，其完整统计特性为：

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = (2\gamma k_B T_w + \sigma^2) \delta(t - t'), \quad (2.11)$$

其中第一项为热噪声，第二项为外加电场噪声。

### 2.2.2 扩散系数的推导

根据随机微分方程理论：

$$D = \frac{2\gamma k_B T_w + \sigma^2}{2\gamma^2}. \quad (2.12)$$

将第一项识别为 Einstein 关系：

$$D = \frac{k_B T_w}{\gamma} + \frac{\sigma^2}{2\gamma^2}. \quad (2.13)$$

### 2.2.3 引入迁移率

定义  $\mu \equiv 1/\gamma$ ，可得：

$$D = \mu k_B T_w + \frac{\sigma^2 \mu^2}{2}. \quad (2.14)$$

### 2.2.4 量纲验证

- $\gamma$ : [N·s/m] (摩擦系数)
- $\sigma^2$ : [N<sup>2</sup>·s] (噪声强度)
- $k_B T_w$ : [N·m] (热能)

检验非热噪声项的量纲：

$$\frac{\sigma^2}{2\gamma^2} \rightarrow \frac{[\text{N}^2 \cdot \text{s}]}{[\text{N}^2 \cdot \text{s}^2 / \text{m}^2]} = [\text{m}^2 / \text{s}], \quad (2.15)$$

与扩散系数的量纲一致。

### 2.2.5 熵产生率公式修正

概率流保持原定义：

$$J(x, t) = \mu f(x, t)p(x, t) - D \partial_x p(x, t), \quad (2.16)$$

其中  $D$  包含了非线性项  $\sigma^2 \mu^2 / 2$ 。熵产生率为：

$$\dot{S} = \frac{1}{D} \left\langle \left( \frac{J}{p} \right)^2 \right\rangle \geq \frac{\langle \dot{x} \rangle^2}{D}. \quad (2.17)$$

## 2.3 同轴全息的原理与重建

同轴全息 (In-line Holography) 是最早由 Gabor 提出的全息记录方式，其特点是物光与参考光共轴传播，通过干涉产生的全息图直接记录在探测平面上。该方法无需复杂的光路调整，但重建时需解决共轭像与原始像重叠的问题。

### 2.3.1 原理

设物光复振幅为  $O(x, y)$ ，同轴参考光为平面波，其复振幅可表示为

$$R(x, y) = A_r e^{i\phi}, \quad (2.18)$$

其中  $A_r$  为恒定振幅， $\phi$  为初始相位。干涉强度分布为

$$I(x, y) = |O(x, y) + R(x, y)|^2 = |O(x, y)|^2 + |A_r|^2 + 2A_r \text{Re}\{O(x, y)e^{-i\phi}\}, \quad (2.19)$$

其中第三项包含物光的振幅与相位信息。由于参考光与物光同轴，所有频谱成分在频域中重叠于零频附近。

### 2.3.2 重建

同轴全息重建需通过相位恢复算法或多次曝光法分离重叠像。典型数值重建步骤如下：

1. 对全息图  $I(x, y)$  进行二维傅里叶变换：

$$\mathcal{F}\{I(x, y)\} = \mathcal{F}\{|O|^2 + |A_r|^2\} + \mathcal{F}\{OR^*\} + \mathcal{F}\{O^*R\}, \quad (2.20)$$

2. 利用迭代相位恢复算法 (如 Gerchberg-Saxton 算法) 从重叠频谱中提取物光场  $O(x, y)$ ，或通过多幅不同相移的全息图分离各成分：

$$O(x, y) = \frac{1}{4A_r} \sum_{k=1}^4 I_k(x, y) e^{-i\phi_k}, \quad (2.21)$$

其中  $\phi_k$  为第  $k$  次曝光引入的已知相移。

3. 对提取的复振幅  $O(x, y)$  进行菲涅尔衍射积分，实现物平面在任意距离  $z$  的重构：

$$U(x, y; z) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F}[O(x, y)] \cdot e^{i2\pi z \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - f_x^2 - f_y^2}} \right\}. \quad (2.22)$$

同轴全息系统结构简单、光路稳定，适用于粒子场测量与微小物体成像，但需通过相位调制或算法处理解决像重叠问题。



## 2.4 离轴全息的原理与重建

离轴全息（Off-axis Holography）是一种通过在记录过程中引入参考光与物光的倾斜干涉来实现像分离的数字全息方法。其核心思想是在探测面上形成包含物光波前信息的干涉条纹，并通过空间频域滤波提取所需的复振幅信息，从而实现三维波场的数值重建。

### 2.4.1 原理

设物光复振幅为  $O(x, y)$ ，参考光复振幅为

$$R(x, y) = A_r e^{i2\pi(f_x x + f_y y)}, \quad (2.23)$$

其中  $A_r$  为参考光幅值， $f_x, f_y$  为由倾斜角决定的空间频率分量。干涉强度分布可表示为

$$I(x, y) = |O(x, y) + R(x, y)|^2 = |O(x, y)|^2 + |A_r|^2 + O(x, y)R^*(x, y) + O^*(x, y)R(x, y), \quad (2.24)$$

其中第三项和第四项分别为携带物光复振幅信息的正、共轭像调制项。

由于参考光与物光具有一定倾斜角， $O(x, y)R^*(x, y)$  和  $O^*(x, y)R(x, y)$  在频域中被移至原点两侧，不同于零频项  $|O|^2 + |A_r|^2$ ，从而可在频谱平面中利用带通滤波选取目标像的频谱区域，抑制共轭像与零级像的干扰。

### 2.4.2 重建

首先对干涉图  $I(x, y)$  进行二维傅里叶变换：

$$\mathcal{F}\{I(x, y)\} = \mathcal{F}\{|O|^2 + |A_r|^2\} + \mathcal{F}\{OR^*\} + \mathcal{F}\{O^*R\}, \quad (2.25)$$

通过滤波保留所需的  $\mathcal{F}\{OR^*\}$  项并进行逆傅里叶变换，可得到物光的复振幅分布（除去已知参考光相位）：

$$O'(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{I(x, y)\} \cdot H(f_x, f_y)], \quad (2.26)$$

其中  $H(f_x, f_y)$  为空间频域带通滤波器。若需将物平面重构到某一距离  $z$ ，可利用菲涅尔衍射积分进行数值传播：

$$U(x, y; z) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F}[O'(x, y)] \cdot e^{i2\pi z \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - f_x^2 - f_y^2}} \right\}, \quad (2.27)$$

其中  $\lambda$  为波长， $f_x, f_y$  为空间频率坐标。

该方法通过频域分离实现单次拍摄下的相位重建，具有结构简单、计算高效、适应性强等优点，广泛应用于显微成像、位相测量及动态过程监测等领域。

## Chapter 3

### 理论模拟

## Chapter 4

## 装置设计

## Chapter 5

### 实验内容

## Chapter 6

## 误差分析

## Chapter 7

## 结论与展望

## Chapter 8

## 参考文献

# Chapter 9

## 附录

### 9.1 人员分工

队员	分工
队员一	负责数据收集与清洗，包括数据集的整理、缺失值处理以及特征初步筛选。
队员二	负责模型搭建与训练，包括选择合适的算法、调整参数以及模型性能评估。
队员三	负责实验结果分析与可视化，将模型输出进行图表化展示，并撰写分析报告。
队员四	负责论文撰写与排版，整合各部分内容，确保格式和逻辑的统一性。

### 9.2 代码展示

#### 9.2.1 网络模型

```
1 # 这里是代码示例
```

Listing 9.1: 生成器

### 9.3 部分全息图与拍摄图展示