空でない集合 A に対し，A の有限列全体の集合 $\bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$ を A^* と書く．ただし A^0 は空列 ε のみを要素としてもつ集合 $\{\varepsilon\}$ とする．$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^*$ $(n > 0)$ の長さ n を $|\boldsymbol{a}|$ と書き，$|\varepsilon| = 0$ とする．$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^*$ $(n \geq 2)$ に対し，$\operatorname{head} \boldsymbol{a} = a_1$，$\operatorname{tail} \boldsymbol{a} = (a_2, \ldots, a_n)$ とする．$a \in A^1 = A$ に対しては $\operatorname{head} a = a$，$\operatorname{tail} a = \varepsilon$ とする．$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in A^*$ $(m > 0)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in A^*$ $(n > 0)$ の連結を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^*$ と定義する．$\boldsymbol{a} \in A^*$ に対し $(\boldsymbol{a}, \varepsilon) = (\varepsilon, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$ とする．

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A^*$ に対し，2 項関係 $\boldsymbol{a}$ b.w. $\boldsymbol{b}$（b.w. は begins with の略）を次のように定義する：ある $\boldsymbol{c} \in A^*$ が存在して $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ であるとき，またそのときに限り，$\boldsymbol{a}$ b.w. $\boldsymbol{b}$ である．以下が成り立つ．

- 任意の $\boldsymbol{a} \in A^*$ について，$\boldsymbol{a}$ b.w. $\boldsymbol{a}$ である．
- 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A^*$ について，$\boldsymbol{a}$ b.w. $\boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b}$ b.w. $\boldsymbol{a}$ ならば $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ である．
- 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in A^*$ について，$\boldsymbol{a}$ b.w. $\boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b}$ b.w. $\boldsymbol{c}$ ならば $\boldsymbol{a}$ b.w. $\boldsymbol{c}$ である．
- 任意の $\boldsymbol{a} \in A^*$ について，$\boldsymbol{a}$ b.w. ε である．
- 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A^*$ について，$\boldsymbol{a}$ b.w. $\boldsymbol{b}$ ならば $|\boldsymbol{a}| \geq |\boldsymbol{b}|$ である．
- 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A^*$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \varepsilon)$ について，$\boldsymbol{a}$ b.w. $\boldsymbol{b}$ は $\operatorname{head} \boldsymbol{a} = \operatorname{head} \boldsymbol{b}$ かつ $\operatorname{tail} \boldsymbol{a}$ b.w. $\operatorname{tail} \boldsymbol{b}$ と同値である．

$\mathbb{N}$ を非負整数の集合とする．

これから，「b.w. を含む式を解く」ということについて考えたい．以下はその例である．

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^*$ に対し，$(\boldsymbol{x}, 1, 2, 1)$ b.w. $(1, 2, 1)$ は，以下のいずれかが成り立つことと同値である．
  - $\boldsymbol{x} = \varepsilon$.
  - $\boldsymbol{x} = (1, 2)$.
  - ある $\boldsymbol{t} \in \mathbb{N}^*$ が存在して $\boldsymbol{x} = (1, 2, 1, \boldsymbol{t})$.
- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{N}^*$ に対し，$(2, 1, 1)$ b.w. $(\boldsymbol{x}, 1)$ かつ $\boldsymbol{x}$ b.w. $(\boldsymbol{y}, 1)$ が成り立つことは，$\boldsymbol{x} = (2, 1)$ かつ $\boldsymbol{y} = 2$ が成り立つことと同値である．

このように，変数を含み「(式) b.w. (式)」という形で表される式がいくつか与えられたとき，それらを満たす解の集合を得る方法を，様々な場合について考える．

1　1 変数の場合

$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ の部分集合 P, Q が与えられる．任意の $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in P$ について $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ b.w. $\boldsymbol{b}$ を満たし，任意の $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \in Q$ について $\boldsymbol{c}$ b.w. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d})$ を満たすような $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^*$ 全体の集合 $S(P, Q)$ を求めたい．

$\boldsymbol{c} = \varepsilon$ かつ $\boldsymbol{d} \neq \varepsilon$ であるような $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \in Q$ が存在する場合，$S(P, Q) = \varnothing$ となる．$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in P$ において $\boldsymbol{b} = \varepsilon$ の場合は任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^*$ が $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ b.w. $\boldsymbol{b} = \varepsilon$ を満たし，$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \in Q$ において $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} = \varepsilon$ の場合は任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^*$ が $\boldsymbol{c} = \varepsilon$ b.w. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d})$ を満たすから，$S(P \setminus (\mathbb{N}^* \times \{\varepsilon\}), Q \setminus \{(\varepsilon, \varepsilon)\}) = S(P, Q)$ である．以下，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in P$ ならば $\boldsymbol{b} \neq \varepsilon$ であり，$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \in Q$ ならば $\boldsymbol{c} \neq \varepsilon$ であると仮定する．

$\boldsymbol{x} = \varepsilon$ が解となることは，任意の $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in P$ について $\boldsymbol{a}$ b.w. $\boldsymbol{b}$ が成り立ち，かつ任意の $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \in Q$ について $\boldsymbol{c}$ b.w. $\boldsymbol{d}$ が成り立つことと同値である．以下，$\boldsymbol{x} = \varepsilon$ 以外の解を探すために $\boldsymbol{x} \neq \varepsilon$ と仮定する．

任意の $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in P$ について $\boldsymbol{x} \neq \varepsilon$，$\boldsymbol{b} \neq \varepsilon$ であるから，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ b.w. $\boldsymbol{b}$ は，$\operatorname{head} \boldsymbol{x} = \operatorname{head} \boldsymbol{b}$ かつ $(\operatorname{tail} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ b.w. $\operatorname{tail} \boldsymbol{b}$ と同値である．同様に，任意の $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \in Q$ について $\boldsymbol{c} \neq \varepsilon$，$\boldsymbol{x} \neq \varepsilon$ であるから，$\boldsymbol{c}$ b.w. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d})$ は，$\operatorname{head} \boldsymbol{c} = \operatorname{head} \boldsymbol{x}$ かつ $\operatorname{tail} \boldsymbol{c}$ b.w. $(\operatorname{tail} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{d})$ と同値である．よって，

- $P_{\text{head}} = \{\text{head}\,\boldsymbol{b} \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in P\}$
- $P_{\text{tail}} = \{(\boldsymbol{a}, \text{tail}\,\boldsymbol{b}) \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in P\}$
- $Q_{\text{head}} = \{\text{head}\,\boldsymbol{c} \mid (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \in Q\}$
- $Q_{\text{tail}} = \{(\text{tail}\,\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \mid (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \in Q\}$

とおくと，任意の $h \in P_{\text{head}} \cup Q_{\text{head}}$ について $\text{head}\,\boldsymbol{x} \in h$ が成り立ち，かつ $\text{tail}\,\boldsymbol{x} \in S(P', Q')$ が成り立つとき，かつそのときに限り，$\boldsymbol{x} \in S(P, Q)$ が成り立つ．

以上から，$P, Q \subset \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ を受け取って $S(P, Q)$ を返す関数 SolveSingleVariable のアルゴリズムは以下のようになる．

function SolveSingleVariable(P, Q)
  $P_{\text{head}}, P_{\text{tail}}, Q_{\text{head}}, Q_{\text{tail}} \leftarrow \varnothing$
  for all $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in P$ **do**
    if $\boldsymbol{b} \neq \varepsilon$ **then**
      $P_{\text{head}} \leftarrow P_{\text{head}} \cup \{\text{head}\,\boldsymbol{b}\}$
      $P_{\text{tail}} \leftarrow P_{\text{tail}} \cup \{(\boldsymbol{a}, \text{tail}\,\boldsymbol{b})\}$
    end if
  end for
  for all $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \in Q$ **do**
    if $\boldsymbol{c} = \varepsilon$ **then**
      if $\boldsymbol{d} \neq \varepsilon$ **then**
        return $\varnothing$
      end if
    else
      $Q_{\text{head}} \leftarrow Q_{\text{head}} \cup \{\text{head}\,\boldsymbol{c}\}$
      $Q_{\text{tail}} \leftarrow Q_{\text{tail}} \cup \{(\text{tail}\,\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})\}$
    end if
  end for
  if $P_{\text{head}} = Q_{\text{head}} = \varnothing$ **then**
    return $\mathbb{N}^*$
  end if
  $S \leftarrow \varnothing$
  if $\boldsymbol{a}$ b.w. $\boldsymbol{b}$ for all $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in P$ **and** $\boldsymbol{c}$ b.w. $\boldsymbol{d}$ for all $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \in Q$ **then**
    $S \leftarrow \{\varepsilon\}$
  end if
  if $P_{\text{head}} \cup Q_{\text{head}} = \{x_1\}$ for some $x_1 \in \mathbb{N}^*$ **then**
    $S \leftarrow S \cup \{(x_1, \boldsymbol{x}') \mid \boldsymbol{x}' \in \text{SolveSingleVariable}(P_{\text{tail}}, Q_{\text{tail}})\}$
  end if
  return S
end function