量子力学ノート

とが

目次

第 1 章　2021/4/21

1. 要点（1 次元 Schrödinger 方程式）

1 次元の直線上を動く質量 m の粒子の波動関数 $\varPsi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ は Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \varPsi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \varPsi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\varPsi(x,t)$$

を満たす．ただし $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ はポテンシャル，$\hbar$ は換算プランク定数，i は虚数単位．

暗黙の了解として，$\mathit{\Psi}$ とその n 次導関数は $x \to \pm\infty$ で 0 に収束するものとする．

ある $\mathit{\Psi}$ が Schrödinger 方程式を満たすなら，定数 A をかけた $A\mathit{\Psi}$ も Schrödinger 方程式を満たす（計算 1）．

$\mathit{\Psi}$ が Schrödinger 方程式を満たすとき，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathit{\Psi}(x,t)\right|^2\mathrm{d}x$ は t に依存しない（計算 2）．

ある解 $\mathit{\Psi}$ があったときに，定数をかけて

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathit{\Psi}'(x,t)\right|^2\mathrm{d}x = 1$$

を満たす解 $\mathit{\Psi}'$ を見つける操作を，正規化という．

波動関数 $\mathit{\Psi}(x,t)$ で表される粒子の「座標の期待値」$\langle x\rangle$ を

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left|\mathit{\Psi}(x,t)\right|^2\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathit{\Psi}^*[x]\mathit{\Psi}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

（ただし $\mathit{\Psi}^*$ は $\mathit{\Psi}$ の共役複素数）で定義する．$\langle x\rangle$ の時間微分を計算すると

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = -\frac{i\hbar}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\mathit{\Psi}^*\frac{\partial \mathit{\Psi}}{\partial x}\mathrm{d}x$$

となり（計算 3），これが粒子の「速度の期待値」$\langle v\rangle$ となる．これに m をかけた「運動量の期待値」$\langle p\rangle = m\langle v\rangle$ は

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\mathit{\Psi}^*\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right]\mathit{\Psi}\,\mathrm{d}x$$

となる．$\langle x\rangle$ の定義中の x，および $\langle p\rangle$ の定義中の $-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ は作用素とみなせる．こうして x, p の関数 $Q(x,p)$ として表せる任意の物理量の期待値が

$$\left\langle Q(x,p)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\mathit{\Psi}^*\left[Q\left(x,-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\mathit{\Psi}\,\mathrm{d}x$$

と書ける．

座標 x と運動量 p の標準偏差をそれぞれ σ_x，σ_p とすると，

$$\sigma_x\sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

が成り立つ．

2. 計算 1

$\mathit{\Psi}$ が Schrödinger 方程式を満たすとする．A を定数とすると

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(A\mathit{\Psi}\right) &= A\cdot i\hbar\frac{\partial\mathit{\Psi}}{\partial t}\\
&= A\cdot\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\mathit{\Psi}}{\partial x^2}+V\mathit{\Psi}\right)\\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A\mathit{\Psi}\right)+V\left(A\mathit{\Psi}\right)
\end{aligned}$$

より $A\mathit{\Psi}$ も Schrödinger 方程式を満たす．

3. 計算 2

Schrödinger 方程式を変形すると

$$\frac{\partial\mathit{\Psi}}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\mathit{\Psi}}{\partial x^2}-\frac{i}{\hbar}V\mathit{\Psi}$$

となり，両辺の複素共役をとると

$$\frac{\partial\mathit{\Psi}^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\mathit{\Psi}^*}{\partial x^2}+\frac{i}{\hbar}V\mathit{\Psi}^*$$

となる．これより

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^*\Psi\right) &= \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi \\
&= \Psi^*\left(\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{i}{\hbar}V\Psi\right)+\left(-\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}+\frac{i}{\hbar}V\Psi^*\right)\Psi \\
&= \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}\Psi\right)
\end{aligned}
$$

である．ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi\right) &= \Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}\Psi\right) \\
&= \Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}\Psi
\end{aligned}
$$

に注意すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi|^2\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^*\Psi\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{i\hbar}{2m}\left[\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi\right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

を得るので，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi|^2\mathrm{d}x$ が t に依存しないことが分かる．

4．計算 3

計算 2 の途中式を流用すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}x|\Psi|^2\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^*\Psi\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

となり，部分積分により

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle &= \frac{i\hbar}{2m}\left(\left[x\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi\right)\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi\right)\mathrm{d}x\right)\\
&= -\frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

となる．ここで部分積分

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi\mathrm{d}x &= \left[\Psi^*\Psi\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\mathrm{d}x\\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

に着目すると

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle = -\frac{i\hbar}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\mathrm{d}x
$$

が得られる．

第 2 章　2021/4/22

1．問題 1.9

$\Psi(x,t) = Ae^{-a\left(\left(mx^2/\hbar\right)+it\right)}$ より $\left|\Psi(x,t)\right|^2 = \Psi(x,t)\Psi^*(x,t) = A^2e^{-2amx^2/\hbar}$ なので

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Psi(x,t)\right|^2\mathrm{d}x &= A^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{2am}{\hbar}x^2}\mathrm{d}x\\
&= A^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{2am}}
\end{aligned}
$$

よって，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Psi(x,t)\right|^2\mathrm{d}x = 1$ となるためには $A = \left(\dfrac{2am}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$ であればよい．

Ψ を微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -ia\Psi \\
\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= -\frac{2amx}{\hbar}\Psi \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{2am\left(2amx^2 - \hbar\right)}{\hbar^2}\Psi
\end{aligned}
$$

となるので，Schrödinger 方程式より

$$
\hbar a\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{2am\left(2amx^2 - \hbar\right)}{\hbar^2}\Psi + V\Psi
$$

Vについて解いて $V(x) = 2a^2mx^2$.

$\left|\Psi\right|^2$ は正規分布 $N\left(0, \dfrac{\hbar}{4am}\right)$ の密度関数なので，$\langle x\rangle = 0$，$\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\hbar}{4am}}$, $\left\langle x^2\right\rangle = \sigma_x^2 = \dfrac{\hbar}{4am}$.

$-i\hbar\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = (\mathrm{const})x\Psi$ より，$\langle p\rangle = (\mathrm{const})\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^* x\Psi \mathrm{d}x = 0$.

$$
\begin{aligned}
\left\langle p^2\right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\left(-h^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\left(-2am\left(2amx^2 - \hbar\right)\Psi\right)\mathrm{d}x \\
&= -2am\left(2am\left\langle x^2\right\rangle - \hbar\right) \\
&= \hbar am
\end{aligned}
$$

$\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\hbar}{4am}}$, $\sigma_p = \sqrt{\hbar am}$ より $\sigma_x \cdot \sigma_p = \sqrt{\dfrac{\hbar}{4am} \cdot \hbar am} = \dfrac{\hbar}{2}$.

2. 問題 1.15

Schrödinger 方程式より

$$\frac{\partial \Psi_1{}^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \Psi_1{}^*}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar}V\Psi_1{}^*$$
$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar}V\Psi_2$$
$$\therefore \frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi_1{}^*\Psi_2\right) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{\partial^2 \Psi_1{}^*}{\partial x^2}\Psi_2 - \Psi_1{}^*\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2}\right)$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1{}^*\Psi_2\,\mathrm{d}x &= \frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 \Psi_1{}^*}{\partial x^2}\Psi_2 - \Psi_1{}^*\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{i\hbar}{2m}\left[\frac{\partial \Psi_1{}^*}{\partial x}\Psi_2 - \Psi_1{}^*\frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= 0\end{aligned}$$

3. 要点（時間に依存しない Schrödinger 方程式）

t に依存しない $\psi(x)$ と x に依存しない $\varphi(t)$ を用いて $\Psi(x,t) = \psi(x)\varphi(t)$ と表せると仮定すると，$\dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = \psi\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x} = \dfrac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}\varphi$ より Schrödinger 方程式は

$$i\hbar\psi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}\varphi + V\psi\varphi$$

となり，両辺を $\psi\varphi$ で割って

$$i\hbar\frac{1}{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + V$$

とすると左辺は φ，右辺は ψ だけの式になるから，ある定数 E が存在して

$$i\hbar\frac{1}{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = E$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + V = E$$

よって，時間に依存しない Schrödinger 方程式

$$
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+V\psi = E\psi
$$

を解けば，そこに $i\hbar\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = E\varphi$ の解である $\varphi = Ae^{-iEt/\hbar}$ をかけることで Ψ が得られる．

第 3 章　2021/4/23

1. 要点（1 次元井戸型ポテンシャル）

$$
V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le a) \\ \infty & (\text{otherwise}) \end{cases}
$$

とする．$\psi(0) = \psi(a) = 0$ として $0 \le x \le a$ の範囲で時間に依存しない Schrödinger 方程式 $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = E\psi$ を解くと，n を正の整数として

$$
E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}
$$

$$
\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)
$$

が得られる（計算 1）．

波動関数 Ψ の初期状態 $\Psi(x,0)$ が与えられれば，フーリエ級数展開によって

$$
\Psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)
$$

と表すことで

$$
\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}
$$

が得られる．

2. 計算 1

$k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ とおくと時間に依存しない Schrödinger 方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -k^2\psi$$

と表せるので，一般解は

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx$$

ここで $\psi(0) = A\sin 0 + B\cos 0 = B$ で，$\psi(0) = 0$ なので $B = 0$．よって $\psi(x) = A\sin kx$ だが，$\psi(a) = 0$ なのである整数 n が存在して $ka = n\pi$．よって解は定数 A と整数 n を用いて $A\sin\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right)$ と表せる．

$n = 0$ のときは $\psi(x) = 0$ となってしまうので不適．また n が負のときは定数 $A' = -A$ と正の整数 $n' = -n$ を用いて $\psi(x) = A'\sin\left(\dfrac{n'\pi}{a}x\right)$ と表せるので，n が正の整数のときだけを考えればよい．

$\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2\pi}} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{a}{2\pi}} \cos^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x$ より $\displaystyle\int_0^{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x = n\int_0^{\frac{a}{2\pi}} \mathrm{d}x = \frac{a}{2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\int_0^a |\psi|^2\mathrm{d}x &= A^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x \\ &= A^2\cdot\frac{a}{2}\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\int_0^a \left|\psi(x)\right|^2\mathrm{d}x = 1$ となるためには $A = \pm\sqrt{\dfrac{2}{a}}$ であればよい．ただし物理学の観点では $A = \sqrt{\dfrac{2}{a}}$ のときを考えれば十分らしい．

さて，$k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ と $ka = n\pi$ より E としてありえる値は $E_n = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ であり，各 E_n に対応する ψ は $\psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right)$ である．これが今回の V に対する時間に依存しない Schrödinger 方程式の解である．

3. 問題 2.4

$$
\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \int_0^a x\left|\psi_n(x)\right|^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{a}\int_0^a x\sin^2\!\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\left(\int_0^a x\sin^2\!\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x + \int_0^a (a-x)\sin^2\!\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_0^a \sin^2\!\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{a}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle x^2\right\rangle &= \int_0^a x^2\left|\psi_n(x)\right|^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{a}\int_0^a x^2\sin^2\!\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\int_0^a x^2\left(1-\cos\!\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{a}\int_0^a x^2\cos\!\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{a^2}{3} - \frac{1}{a}\left(\frac{a}{2n\pi}\left[x^2\sin\!\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\right]_0^a - \frac{a}{n\pi}\int_0^a x\sin\!\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{a^2}{3} + \frac{1}{n\pi}\left(-\frac{a}{2n\pi}\left[x\cos\!\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\right]_0^a + \frac{a}{2n\pi}\int_0^a \cos\!\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2n^2\pi^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle p \rangle &= \int_0^a \psi_n{}^*(x)\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_n(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left(-i\hbar\cdot\frac{n\pi}{a}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2n\pi i\hbar}{a^2}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{n\pi i\hbar}{a^2}\int_0^a \sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle p^2 \right\rangle &= \int_0^a \psi_n{}^*(x)\left(-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2x}\psi_n(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left(\hbar^2\cdot\frac{n^2\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2n^2\pi^2\hbar^2}{a^3}\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \sqrt{\left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2} \\
&= \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2n^2\pi^2} - \frac{a^2}{4}} \\
&= a\sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2n^2\pi^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_p &= \sqrt{\left\langle p^2 \right\rangle - \langle p \rangle^2} \\
&= \frac{n\pi\hbar}{a}
\end{aligned}
$$

より $\sigma_x\sigma_p = \hbar\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{12} - \frac{1}{2}}$，これは $n = 1$ のとき最小値 $\hbar\sqrt{\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}} = 0.568\hbar$ をとるので不確定性原理は成り立っている．

第 4 章　2021/4/25

1. 問題 2.1

1.1. (a)

$\Psi(x,t) = \psi(x)\varphi(t)$ が Schrödinger 方程式の解ならば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\Psi(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x = \left|\varphi(t)\right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi(x)\right|^2 \mathrm{d}x$$

は t によらず一定なので $\left|\varphi(t)\right|^2$ は定数である．ここで $\varphi(t) = Ae^{-iEt/\hbar}$ より

$$\begin{aligned} \left|\varphi(t)\right|^2 &= \varphi^*(t)\varphi(t) \\ &= Ae^{iE^*t/\hbar} \cdot Ae^{-iEt/\hbar} \\ &= A^2 e^{-i(E-E^*)t/\hbar} \end{aligned}$$

であるから，一定となるためには $E - E^* = 0$，すなわち E は実数でなければならない．

1.2. (b)

時間に依存しない Schrödinger 方程式について，任意の解 ψ が，実数値関数解の線型結合として表せることを示す．E が実数であるから，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + V\psi = E\psi$$

の両辺の複素共役をとると

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi^*}{\mathrm{d}x^2} + V\psi^* = E\psi^*$$

よって

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\psi+\psi^*}{2} + V\frac{\psi+\psi^*}{2} &= E\frac{\psi+\psi^*}{2} \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\psi-\psi^*}{2i} + V\frac{\psi-\psi^*}{2i} &= E\frac{\psi-\psi^*}{2i} \end{aligned}$$

より $\psi_R = \dfrac{\psi + \psi^*}{2}$ と $\psi_I = \dfrac{\psi - \psi^*}{2i}$ はともに解である．これらはそれぞれ ψ の実部と虚部であるから，$\lim_{x\to\pm\infty} \psi = 0$ より $\lim_{x\to\pm\infty} \psi_R = \lim_{x\to\pm\infty} \psi_I = 0$ であり，また

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_R\right|^2 \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_I\right|^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi\right|^2 \mathrm{d}x = 1$$

である．一方 $\left|\psi_R\right|^2$，$\left|\psi_I\right|^2$ は常に 0 以上なので $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_R\right|^2 \mathrm{d}x \geq 0$，$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_I\right|^2 \mathrm{d}x \geq 0$.

- $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_R\right|^2 \mathrm{d}x = 1$，$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_I\right|^2 \mathrm{d}x = 0$ のとき，ψ は正規化された実数値関数解 ψ_R に等しい．
- $0 < \int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_R\right|^2 \mathrm{d}x < 1$，$0 < \int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_I\right|^2 \mathrm{d}x < 1$ のとき，ψ は正規化可能な 2 つの実数値関数解 ψ_R，ψ_I の線型結合として表される．
- $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_R\right|^2 \mathrm{d}x = 0$，$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_I\right|^2 \mathrm{d}x = 1$ のとき，ψ は正規化された実数値関数解 ψ_I の i 倍に等しい．

いずれの場合も ψ を正規化可能な実数値関数解の線型結合として表すことができた．

1.3. (c)

時間に依存しない Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

において $V(x) = V(-x)$ なら

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(-x) + V(x)\psi(-x) = E\psi(-x)$$

よって

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\bigl(\psi(x) + \psi(-x)\bigr) + V(x)\bigl(\psi(x) + \psi(-x)\bigr) = E\bigl(\psi(x) + \psi(-x)\bigr)$$
$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\bigl(\psi(x) - \psi(-x)\bigr) + V(x)\bigl(\psi(x) - \psi(-x)\bigr) = E\bigl(\psi(x) - \psi(-x)\bigr)$$

より $\psi(x)+\psi(-x)$ と $\psi(x)-\psi(-x)$ はともに解である．前者は偶関数，後者は奇関数であるから，ψ を偶関数解と奇関数解の線型結合として表すことができた．

2. 問題 2.2

任意の x について $V(x) \geq E$ が成り立つと仮定する．

時間に依存しない Schrödinger 方程式を変形すると

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) = \frac{2m}{\hbar}(V(x)-E)\psi(x)$$

となる．ここである x_0 が存在して $\psi(x_0) > 0$ であると仮定する．$\psi'(x_0) \geq 0$ の場合，集合 $A = \{x \geq x_0 \mid \psi(x) \leq 0\}$ が空でないと仮定し，その下限を x_1 とおく．ψ の連続性より A は閉であるから $x_1 \in A$，また $x_0 \notin A$ より $x_0 < x_1$ である．$x_0 \leq x < x_1$ の範囲では，$\psi(x) > 0$ と $V(x) - E \geq 0$ より $\psi''(x) \geq 0$ であるから，ψ' の単調性より $\psi'(x) \geq \psi'(x_0) \geq 0$．よって ψ の単調性より $\psi(x_1) \geq \psi(x_0) > 0$ となるが，$x_1 \in A$ に反する．よって $A = \emptyset$ である．すると同様に $x_0 \leq x$ の範囲で $\psi''(x) \geq 0$ であるから ψ' の単調性，ψ の単調性より $\psi(x) \geq \psi(x_0)$ となり，ψ は正規化不可能である．同様に $\psi'(x_0) \leq 0$ の場合 $x \leq x_0$ の範囲で $\psi(x) \geq \psi(x_0)$ となるため ψ は正規化不可能である．よって $\psi(x_0) > 0$ となる x_0 は存在しない．同様に $\psi(x_0) < 0$ となる x_0 も存在しないので，ψ は定数 0 となるが，これも正規化不可能である．

よって，ある x が存在して $V(x) < E$ である（この証明は @buta_kimchi_ さんにいただいたリプをもとに書いている）．

3. 要点（1 次元調和振動子）

古典力学の単振動 $x = \sin \omega t$ を考えると，$m\ddot{x} = -m\omega^2 \sin \omega t = -m\omega^2 x$ より位置エネルギーは $V(x) = -\int\left(-m\omega^2 x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ である．この V について時間に依存しない Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi$$

を解く．

運動量を得る作用素 $-i\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ を $\hat{p}$ とおくと，$\hat{p}^2 = -\hbar^2\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ であるから，方程式は

$$\frac{1}{2m}\Big(\hat{p}^2 + (m\omega x)^2\Big)\psi = E\psi$$

と書き換えられる．ここで $\hat{a}_-, \hat{a}_+$ を

$$\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\big(\mp i\hat{p} + m\omega x\big)$$

と定義すると，方程式はさらに

$$\hbar\omega\left(\hat{a}_\pm\hat{a}_\mp \pm \frac{1}{2}\right)\psi = E\psi$$

と書き換えられる（計算 1）．

ある組 $\big(\psi, E\big)$ がこの方程式の解ならば，組 $\big(\hat{a}_+\psi, E + \hbar\omega\big)$ と組 $\big(\hat{a}_-\psi, E - \hbar\omega\big)$ もこの方程式の解となる（計算 2）．ただし ψ が正規化可能でも $\hat{a}_\pm\psi$ が正規化可能とは限らない．

組 $\big(\hat{a}_-\psi, E - \hbar\omega\big)$ について，もし $E - \hbar\omega \leq 0$（Vの最小値）ならば $\hat{a}_-\psi$ は正規化不可能なので $\hat{a}_-\psi = 0$．よって

$$\big(i\hat{p} + m\omega x\big)\psi = 0$$

を解いて $\psi = \left(\dfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$．対応する E を計算すると $\dfrac{1}{2}\hbar\omega$ となり，これが基底状態のエネルギー E_0 である．$0 < E \leq \hbar\omega$ の範囲の解はこれ 1 つなので，任意の解 E は $E_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$ と表せる．

4．計算 1

作用素 $\hat{A}$, $\hat{B}$ について交換子 $\big[\hat{A}, \hat{B}\big]$ を

$$\big[\hat{A}, \hat{B}\big] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

で定義すると

$$
\begin{aligned}
[x,\hat{p}]\psi &= (x\hat{p} - \hat{p}x)\psi \\
&= x\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right) - \left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\psi)\right) \\
&= -i\hbar x\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} + i\hbar x\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} + i\hbar\psi \\
&= i\hbar\psi
\end{aligned}
$$

より $[x,\hat{p}] = i\hbar$ なので,

$$
\begin{aligned}
\hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right) &= \hbar\omega\left(\frac{1}{2\hbar m\omega}(-i\hat{p} + m\omega x)(i\hat{p} + m\omega x) + \frac{1}{2}\right) \\
&= \hbar\omega\left(\frac{1}{2\hbar m\omega}\left(\hat{p}^2 + (m\omega x)^2 + im\omega[x,\hat{p}]\right) + \frac{1}{2}\right) \\
&= \hbar\omega\left(\frac{1}{2\hbar m\omega}\left(\hat{p}^2 + (m\omega x)^2 - \hbar m\omega\right) + \frac{1}{2}\right) \\
&= \hbar\omega \cdot \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(\hat{p}^2 + (m\omega x)^2\right) \\
&= \frac{1}{2m}\left(\hat{p}^2 + (m\omega x)^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right) &= \hbar\omega\left(\frac{1}{2\hbar m\omega}(i\hat{p} + m\omega x)(-i\hat{p} + m\omega x) - \frac{1}{2}\right) \\
&= \hbar\omega\left(\frac{1}{2\hbar m\omega}\left(\hat{p}^2 + (m\omega x)^2 - im\omega[x,\hat{p}]\right) - \frac{1}{2}\right) \\
&= \hbar\omega\left(\frac{1}{2\hbar m\omega}\left(\hat{p}^2 + (m\omega x)^2 + \hbar m\omega\right) - \frac{1}{2}\right) \\
&= \hbar\omega \cdot \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(\hat{p}^2 + (m\omega x)^2\right) \\
&= \frac{1}{2m}\left(\hat{p}^2 + (m\omega x)^2\right)
\end{aligned}
$$

5. 計算 2

$\hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right)\psi = E\psi$ より,

$$
\begin{aligned}
\hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right)\left(\hat{a}_+\psi\right) &= \hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_-\hat{a}_+ + \frac{1}{2}\hat{a}_+\right)\psi \\
&= \hbar\omega\hat{a}_+\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ + \frac{1}{2}\right)\psi \\
&= \hat{a}_+\left(\hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\right)\psi \\
&= \hat{a}_+(E + \hbar\omega)\psi \\
&= (E + \hbar\omega)\left(\hat{a}_+\psi\right)
\end{aligned}
$$

$\hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right)\psi = E\psi$ より，

$$
\begin{aligned}
\hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right)\left(\hat{a}_-\psi\right) &= \hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+\hat{a}_- - \frac{1}{2}\hat{a}_-\right)\psi \\
&= \hbar\omega\hat{a}_-\left(\hat{a}_+\hat{a}_- - \frac{1}{2}\right)\psi \\
&= \hat{a}_-\left(\hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right) - \hbar\omega\right)\psi \\
&= \hat{a}_-(E - \hbar\omega)\psi \\
&= (E - \hbar\omega)\left(\hat{a}_-\psi\right)
\end{aligned}
$$

第 5 章　2021/4/26

1. 問題 2.10

$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ より

$$
\begin{aligned}
\psi_1(x) &= \hat{a}_+\psi_0(x) \\
&= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p}+m\omega x)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+m\omega x\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-\hbar\left(-\frac{m\omega}{\hbar}xe^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right)+m\omega xe^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right) \\
&= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\cdot 2m\omega xe^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}xe^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_+\psi_1(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p}+m\omega x)\left(xe^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\,\hbar}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(-\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+m\omega x\right)\left(xe^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\,\hbar}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(-\hbar\left(x\cdot\left(-\frac{m\omega}{\hbar}xe^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right)+e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right)+m\omega x^2e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\,\hbar}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(m\omega x^2e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}-\hbar e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}+m\omega x^2e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\,\hbar}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(2m\omega x^2-\hbar\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}
\end{aligned}
$$

ψ_0, ψ_2 は偶関数，ψ_1 は奇関数なので $\psi_0{}^*\psi_1$ と $\psi_1{}^*\psi_2$ は奇関数．よって

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0{}^*\psi_1\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_1{}^*\psi_2\,\mathrm{d}x = 0
$$

一方

$$
\begin{aligned}
\int\left(2m\omega x^2-\hbar\right)e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\mathrm{d}x &= 2m\omega\int x^2e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\mathrm{d}x-\hbar\int e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\mathrm{d}x \\
&= -\hbar xe^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}+\hbar\int e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\mathrm{d}x-\hbar\int e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\mathrm{d}x \\
&= -\hbar xe^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}+(\mathrm{const})
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0{}^*(x)\psi_2(x)\mathrm{d}x &= (\mathrm{const})\int_{-\infty}^{\infty}\left(2m\omega x^2-\hbar\right)e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\mathrm{d}x \\
&= (\mathrm{const})\left[xe^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

であるから ψ_0,ψ_1,ψ_2 はそれぞれ直交する．

2. 問題 2.11

$\left|\psi_0\right|^2=\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$ は正規分布 $N\left(0,\frac{\hbar}{2m\omega}\right)$ の密度関数なので $\langle x\rangle=0$，$\left\langle x^2\right\rangle=\frac{\hbar}{2m\omega}$.

ψ_0 は偶関数なので $\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}x}$ は奇関数．よって $\psi_0\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}x}$ は奇関数なので

$$
\begin{aligned}
\langle p\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_0{}^*\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x \\
&= -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}
$$

また，$\xi=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$，$\alpha=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$ とおくと $\psi_0=\alpha e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ であるから

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\psi_0}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{m\omega}{\hbar}\frac{\mathrm{d}^2\psi_0}{\mathrm{d}\xi^2} \\
&= \frac{m\omega\alpha}{\hbar}\left(\xi^2-1\right)e^{-\frac{\xi^2}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle p^2\right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} {\psi_0}^* \left(-\hbar^2 \frac{\mathrm{d}^2\psi_0}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\frac{\xi^2}{2}} \left(-\hbar m\omega\alpha\left(\xi^2-1\right)e^{-\frac{\xi^2}{2}}\right)\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\xi^2-1\right)e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2 e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi\right) \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}\Big[\xi e^{-\xi^2}\Big]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi\right) \\
&= \frac{\hbar m\omega}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{\hbar m\omega}{2}
\end{aligned}
$$

$\left|\psi_1\right|^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$ は偶関数なので $\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\left|\psi_1\right|^2\mathrm{d}x = 0$．また上と同じ ξ と α を用いて $\psi_1 = \sqrt{2}\alpha\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ と表すと

$$
\begin{aligned}
\left\langle x^2\right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\left|\psi_1\right|^2\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hbar}{m\omega}\xi^2\cdot 2\alpha^2\xi^2 e^{-\xi^2}\cdot\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{2\hbar}{m\omega\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^4 e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{2\hbar}{m\omega\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}\Big[\xi^3 e^{-\xi^2}\Big]_{-\infty}^{\infty} + \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2 e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi\right) \\
&= \frac{3\hbar}{m\omega\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}\Big[\xi e^{-\xi^2}\Big]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi\right) \\
&= \frac{3\hbar}{2m\omega}
\end{aligned}
$$

ψ_1 は奇関数なので $\dfrac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x}$ は偶関数．よって $\psi_1\dfrac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x}$ は奇関数なので

$$\begin{aligned}\langle p\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_1{}^*\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\\ &= -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\\ &= 0\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\psi_1}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{m\omega}{\hbar}\frac{\mathrm{d}^2\psi_1}{\mathrm{d}\xi^2}\\ &= \frac{\sqrt{2}\,m\omega\alpha}{\hbar}\left(\xi^3-3\xi\right)e^{-\frac{\xi^2}{2}}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\left\langle p^2\right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_1{}^*\left(-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2\psi_1}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2}\,\alpha\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}\left(-\hbar\sqrt{2}\,m\omega\alpha\left(\xi^3-3\xi\right)e^{-\frac{\xi^2}{2}}\right)\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\mathrm{d}\xi\\ &= -\frac{2\hbar m\omega}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\xi^4-3\xi^2\right)e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi\\ &= -\frac{2\hbar m\omega}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\xi^4e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi-3\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi\right)\\ &= -\frac{2\hbar m\omega}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}\left[\xi^3e^{-\xi^2}\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi-3\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi\right)\\ &= \frac{3\hbar m\omega}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{3\hbar m\omega}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}\left[\xi e^{-\xi^2}\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi\right)\\ &= \frac{3\hbar m\omega}{2}\end{aligned}$$

ψ_0 については $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}$, $\sigma_p = \sqrt{\dfrac{\hbar m\omega}{2}}$ より $\sigma_x\sigma_p = \dfrac{\hbar}{2}$. ψ_1 については $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{3\hbar}{2m\omega}}$, $\sigma_p = \sqrt{\dfrac{3\hbar m\omega}{2}}$ より $\sigma_x\sigma_p = \dfrac{3\hbar}{2}$. いずれについても不確定性原理は成り立っている.

$T = \dfrac{p^2}{2m}$, $V = \dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$ であるから，ψ_0 については

$$
\begin{aligned}
\langle T\rangle &= \frac{\langle p^2\rangle}{2m} = \frac{\hbar\omega}{4} \\
\langle V\rangle &= \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}
\end{aligned}
$$

ψ_1 については

$$
\begin{aligned}
\langle T\rangle &= \frac{\langle p^2\rangle}{2m} = \frac{3\hbar\omega}{4} \\
\langle V\rangle &= \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle = \frac{3\hbar\omega}{4}
\end{aligned}
$$

第 6 章　2021/5/10

1. 問題 1.7

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle p\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\left(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2} + V\psi^*\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty}\left(V\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial}{\partial x}(V\psi)\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x &= \cancel{\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{-\infty}^{\infty}} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\mathrm{d}x \\
&= -\cancel{\left[\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]_{-\infty}^{\infty}} + \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

より

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right)\mathrm{d}x = 0
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle p\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(V\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial}{\partial x}(V\psi)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(V\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial V}{\partial x}\psi - \psi^* V\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right)\psi\,\mathrm{d}x \\
&= \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle
\end{aligned}
$$

2．要点（1 次元調和振動子つづき）

$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ より $\hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right)\psi_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\psi_n$ なので

$$
\hat{a}_+\hat{a}_-\psi_n = \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\psi_n = n\psi_n
$$

同様に $\hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right)\psi_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\psi_n$ なので

$$
\hat{a}_-\hat{a}_+\psi_n = \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\psi_n = (n+1)\psi_n
$$

ここで，$\hat{a}_+$ と $\hat{a}_-$ のエルミート共役性

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*\big(\hat{a}_+ g\big)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\big(\hat{a}_- f\big)^* g\,\mathrm{d}x$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*\big(\hat{a}_- g\big)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\big(\hat{a}_+ f\big)^* g\,\mathrm{d}x$$

（計算 1）に着目すると，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\big(\hat{a}_-\psi_n\big)^*\big(\hat{a}_-\psi_n\big)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty}\big(\hat{a}_+\hat{a}_-\psi_n\big)^*\psi_n\,\mathrm{d}x \\ &= n\int_{-\infty}^{\infty}{\psi_n}^*\psi_n\,\mathrm{d}x \\ &= n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\big(\hat{a}_+\psi_n\big)^*\big(\hat{a}_+\psi_n\big)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty}\big(\hat{a}_-\hat{a}_+\psi_n\big)^*\psi_n\,\mathrm{d}x \\ &= (n+1)\int_{-\infty}^{\infty}{\psi_n}^*\psi_n\,\mathrm{d}x \\ &= n+1\end{aligned}$$

であるから，$\hat{a}_-\psi_n$ の定数倍である ψ_{n-1} が $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}{\psi_{n-1}}^*\psi_{n-1}\,\mathrm{d}x = 1$ を満たすためには

$$\psi_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{a}_-\psi_n$$

$\hat{a}_+\psi_n$ の定数倍である ψ_{n+1} が $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}{\psi_{n+1}}^*\psi_{n+1}\,\mathrm{d}x = 1$ を満たすためには

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\hat{a}_+\psi_n$$

であればよい．これを繰り返して $\psi_n = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}\big(\hat{a}_+\big)^n\psi_0$ を得る．

また，次が成り立つ（計算 2）．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m\psi_n\,\mathrm{d}x = \delta_{mn}$$

3. 計算 1

$\hat{a}_+ = \dfrac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + m\omega x\right)$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*\big(\hat{a}_+ g\big)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-\hbar\int_{-\infty}^{\infty} f^*\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + m\omega\int_{-\infty}^{\infty} f^* x g\,\mathrm{d}x\right)$$

一方 $\hat{a}_- = \dfrac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + m\omega x\right)$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{a}_- f)^* g\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f^*}{\mathrm{d}x} g\,\mathrm{d}x + m\omega\int_{-\infty}^{\infty} x f^* g\,\mathrm{d}x\right)$$

ここで部分積分

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f^*}{\mathrm{d}x} g\,\mathrm{d}x &= \big[f^* g\big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f^*\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f^*\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

より $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f^*\big(\hat{a}_+ g\big)\mathrm{d}x$ と $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\big(\hat{a}_- f\big)^* g\,\mathrm{d}x$ は等しい.

4. 計算 2

$\hat{a}_+$ と $\hat{a}_-$ のエルミート共役性より

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m{}^*\big(\hat{a}_+\hat{a}_-\psi_n\big)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty}\big(\hat{a}_-\psi_m\big)^*\big(\hat{a}_-\psi_n\big)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\big(\hat{a}_+\hat{a}_-\psi_m\big)^*\psi_n\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

よって

$$n\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m{}^*\psi_n\,\mathrm{d}x = m\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m{}^*\psi_n\,\mathrm{d}x$$

であるから，$n \neq m$ ならば $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} {\psi_m}^* \psi_n \mathrm{d}x = 0$.

第 7 章　2021/5/12

1．要点（ヒルベルト空間）

可測関数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$（可積分とは限らない）に対して内積 $\langle f|g \rangle$（有限とは限らない）を

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) \mathrm{d}x$$

で定義すると，$\langle f|f \rangle$ は必ず 0 以上の実数あるいは ∞ となる．ノルム $\|f\|$ を

$$\|f\| = \sqrt{\langle f|f \rangle}$$

で定義する．このとき，集合 $L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \|f\| < \infty \right\}$ は和とスカラー倍について閉じている（問題 3.1）．また，$f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ならば $\left|\langle f|g \rangle\right| < \infty$ である（計算 1）．

2．問題 3.1

任意の $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ について

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)+g(x)\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left|f(x)\right| + \left|g(x)\right|\right)^2 \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\left|f(x)\right| + \left|g(x)\right|\right)^2 + \left(\left|f(x)\right| - \left|g(x)\right|\right)^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\left|f(x)\right|^2 + 2\left|g(x)\right|^2\right) \mathrm{d}x \\
&= 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 \\
&< \infty
\end{aligned}$$

より $f+g \in L^2(\mathbb{R})$.

任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$，$\alpha \in \mathbb{C}$ について

$$
\begin{aligned}
\|\alpha f\|^2 &= |\alpha|^2 \|f\|^2 \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

より $\alpha f \in L^2(\mathbb{R})$.

3．計算 1

任意の実数 a, b について $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$ より $ab \leq \dfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$ が成り立つことに注意すると，

$$
\begin{aligned}
\left|\langle f|g\rangle\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|f^*(x)g(x)\right|\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right| \cdot \left|g(x)\right|\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left|f(x)\right|^2 + \left|g(x)\right|^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right) \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

となる（この証明は @nkswtr さんにいただいたリプをもとに書いている）.

第 8 章　2021/5/15

1．要点（エルミート作用素）

作用素 $\hat{Q}$, $\hat{Q}^\dagger$ が任意の f, g について $\langle f|\hat{Q}g\rangle = \left\langle \hat{Q}^\dagger f \middle| g\right\rangle$ を満たすとき，これらはエルミート共役であるという．次が成り立つ：

- $(\hat{Q} + \hat{R})^\dagger = \hat{Q}^\dagger + \hat{R}^\dagger$
- α を複素数とすると $(\alpha\hat{Q})^\dagger = \alpha^*\hat{Q}^\dagger$
- $(\hat{Q}\hat{R})^\dagger = \hat{R}^\dagger\hat{Q}^\dagger$

$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}^\dagger = (-1)^n \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ である（計算 1）.

作用素 $\hat{Q}$ が $\hat{Q} = \hat{Q}^\dagger$ を満たすとき，これをエルミート作用素という．x, $\hat{p}$ はエルミート作用素である（計算 2）．波動関数 Ψ から得られる観測可能な量 Q の期待値は，エルミート作用素 $\hat{Q}$ を用いて $\langle Q \rangle = \langle \Psi | \hat{Q}\Psi \rangle$ と表される．ある波動関数 Ψ の観測可能な量 Q の分布が退化してただ 1 つの値 q をとるとき，q は $\hat{Q}$ の固有値，Ψ は $\hat{Q}$ の固有関数である（計算 3）.

エルミート作用素 $\hat{Q}$ について，次が成り立つ（計算 4）：

- $\langle \Psi | \hat{Q}\Psi \rangle$ は実数である．
- $\hat{Q}$ の固有値は実数である．
- $\hat{Q}$ の 2 つの固有関数は，固有値が異なるならば直交する．

$\hat{Q}$ の全ての固有値の集まりをスペクトルという．線形独立な複数の波動関数が同じ固有値をもつとき，スペクトルは縮退しているという．

2. 計算 1

$$\begin{aligned}
\left\langle f \middle| \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f^* \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x \\
&= \left[f^* g \right]_{\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f^*}{\mathrm{d}x} g \, \mathrm{d}x \\
&= \left\langle -\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \middle| g \right\rangle
\end{aligned}$$

より $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}^\dagger = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ であるから，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}^\dagger &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}^\dagger \right)^n \\
&= \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right)^n \\
&= (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}
\end{aligned}$$

3. 計算 2

$$
\begin{aligned}
\langle f|xg\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f^* x g \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (xf)^* g \,\mathrm{d}x \\
&= \langle xf|g\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\dagger} &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}^{\dagger} \\
&= -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$

4. 計算 3

Q の期待値は $\langle Q\rangle = q$，分散は

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \left\langle (Q-q)^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \varPsi \middle| (\hat{Q}-q)^2 \varPsi \right\rangle \\
&= \left\langle (\hat{Q}-q)\varPsi \middle| (\hat{Q}-q)\varPsi \right\rangle \\
&= \left\| (\hat{Q}-q)\varPsi \right\|^2
\end{aligned}
$$

であるから，$\sigma^2 = 0$ となるのは $\big(\hat{Q}-q\big)\varPsi = 0$ のときである．

5. 計算 4

- 内積の性質より $\left\langle \varPsi \middle| \hat{Q}\varPsi \right\rangle^* = \left\langle \hat{Q}\varPsi \middle| \varPsi \right\rangle$，エルミート作用素の定義より $\left\langle \varPsi \middle| \hat{Q}\varPsi \right\rangle = \left\langle \hat{Q}\varPsi \middle| \varPsi \right\rangle$ であるから，$\left\langle \varPsi \middle| \hat{Q}\varPsi \right\rangle = \left\langle \varPsi \middle| \hat{Q}\varPsi \right\rangle^*$ より $\left\langle \varPsi \middle| \hat{Q}\varPsi \right\rangle$ は実数．
- 固有値を q とすると $\left\langle \varPsi \middle| \hat{Q}\varPsi \right\rangle = q\langle \varPsi|\varPsi\rangle = q\left\|\varPsi\right\|^2$ であるから，$\left\langle \varPsi \middle| \hat{Q}\varPsi \right\rangle$ が実数より q も実数．

- 固有値を q_1, q_2，対応する固有関数を Ψ_1, Ψ_2 とすると，

$$\langle \Psi_1 | \hat{Q}\Psi_2 \rangle = q_2 \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle$$
$$\langle \hat{Q}\Psi_1 | \Psi_2 \rangle = q_1 \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle$$

であるが，エルミート作用素の定義より $\langle \Psi_1 | \hat{Q}\Psi_2 \rangle = \langle \hat{Q}\Psi_1 | \Psi_2 \rangle$ であるから，$q_1 \neq q_2$ ならば $\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = 0$.

第 9 章　2021/05/17

1. 要点（運動量表示）

関数 $f(x)$ のフーリエ変換を

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x$$

で定義すると，その逆変換は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} \mathrm{d}k$$

である．ここで $f(x) = \delta(x)$ とすると

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik\cdot 0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

であるから，逆フーリエ変換より

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \mathrm{d}k \end{aligned}$$

を得る．

運動量演算子 $\hat{p}$ の固有値 p と固有関数 f_p を考える．$\hat{p}=-ih\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ より

$$
\begin{aligned}
-i\hbar\frac{\mathrm{d}f_p}{\mathrm{d}x} &= pf_p \\
\therefore f_p(x) &= Ae^{\frac{ip}{\hbar}x}
\end{aligned}
$$

ここで 2 つの固有値 p_1，p_2 と対応する固有関数 $f_{p_1}(x)=A_1e^{\frac{ip_1}{\hbar}x}$，$f_{p_2}(x)=A_2e^{\frac{ip_2}{\hbar}x}$ について

$$
\begin{aligned}
\left\langle f_{p_1}\middle|f_{p_2}\right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}A_1e^{-\frac{ip_1}{\hbar}x}\cdot A_2e^{\frac{ip_2}{\hbar}x}\mathrm{d}x \\
&= A_1A_2\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{i(p_2-p_1)}{\hbar}x}\mathrm{d}x \\
&= A_1A_2\cdot\hbar\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(p_2-p_1)x}\mathrm{d}x \\
&= A_1A_2\cdot 2\pi\hbar\delta(p_2-p_1)
\end{aligned}
$$

であるから，$A_1=A_2=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ とすれば $\left\langle f_{p_1}\middle|f_{p_2}\right\rangle=\delta(p_2-p_1)$ となる．

座標表示の波動関数 $\Psi(x,t)$ に対して運動量表示の波動関数 $\Phi(p,t)$ を

$$
\begin{aligned}
\Phi(p,t) &= \left\langle f_p\middle|\Psi\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{ip}{\hbar}x}\Psi(x,t)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

で定義すると

$$
\Psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{ip}{\hbar}x}\Phi(p,t)\mathrm{d}p
$$

であり（計算 1），時刻 t における運動量 p の確率密度関数は $\left|\Phi(p,t)\right|^2$ となる．

2. 計算 1

$\mathit{\Phi}$ の定義中の p を $\hbar p$ に置き換えると

$$\mathit{\Phi}(\hbar p,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ipx}\mathit{\Psi}(x,t)\mathrm{d}x$$

となるから，$\mathit{\Psi}$ のフーリエ変換は $\sqrt{\hbar}\mathit{\Phi}(\hbar p,t)$ である．よって逆フーリエ変換より

$$\begin{aligned}\mathit{\Psi}(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ipx}\sqrt{\hbar}\mathit{\Phi}(\hbar p,t)\mathrm{d}p\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{ip}{\hbar}x}\sqrt{\hbar}\mathit{\Phi}(p,t)\frac{\mathrm{d}p}{\hbar}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{ip}{\hbar}x}\mathit{\Phi}(p,t)\mathrm{d}p\end{aligned}$$

3. 問題 3.11

1 次元調和振動子の基底状態の座標表示は $\mathit{\Psi}_0(x,t)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2-\frac{i\omega}{2}t}$ であるから，運動量表示は

$$\begin{aligned}\mathit{\Phi}_0(p,t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{ip}{\hbar}x}\mathit{\Psi}_0(x,t)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{i\omega}{2}t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2-\frac{ip}{\hbar}x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{i\omega}{2}t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x+\frac{ip}{m\omega}\right)^2-\frac{p^2}{2\hbar m\omega}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{p^2}{2\hbar m\omega}-\frac{i\omega}{2}t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{p^2}{2\hbar m\omega}-\frac{i\omega}{2}t}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m\omega}}\\&=\left(\frac{1}{\pi\hbar m\omega}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{p^2}{2\hbar m\omega}-\frac{i\omega}{2}t}\end{aligned}$$

一方古典力学におけるエネルギー $\dfrac{1}{2}\hbar\omega$ の単振動は速度 v が $\dfrac{1}{2}mv^2 \ \leq\ \dfrac{1}{2}\hbar\omega$ すなわち $-\sqrt{\dfrac{\hbar\omega}{m}} \leq v \leq \sqrt{\dfrac{\hbar\omega}{m}}$ を満たすので，運動量 mv は区間 $\left[-\sqrt{\hbar m\omega}, \sqrt{\hbar m\omega}\right]$ 内の値をとる．基底状態の調和振動子の運動量がこの範囲の値をとる確率は

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{\hbar m\omega}}^{\sqrt{\hbar m\omega}} \left|\varPhi_0(p,t)\right|^2 \mathrm{d}p &= \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar m\omega}} \int_{-\sqrt{\hbar m\omega}}^{\sqrt{\hbar m\omega}} e^{-\frac{p^2}{\hbar m\omega}} \mathrm{d}p \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar m\omega}} \cdot \sqrt{\hbar m\omega} \int_{-1}^{1} e^{-p^2} \mathrm{d}p \\
&= \mathrm{erf}(1) \\
&= 0.843
\end{aligned}$$

（ただし erf は誤差関数）．

第 10 章　2021/5/18

1. 問題 3.12

自由粒子の波動関数

$$\varPsi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)} \mathrm{d}k$$

において $k = \dfrac{p}{\hbar}$ と置換すると

$$\begin{aligned}
\varPsi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{p}{\hbar}\right) e^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{p^2}{2\hbar m}t\right)} \frac{\mathrm{d}p}{\hbar} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ip}{\hbar}x} \left(\frac{1}{\sqrt{\hbar}} \varphi\left(\frac{p}{\hbar}\right) e^{-\frac{ip^2}{2\hbar m}t} \right) \mathrm{d}p
\end{aligned}$$

よって

$$\varPhi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \varphi\left(\frac{p}{\hbar}\right) e^{-\frac{ip^2}{2\hbar m}t}$$

であり，

$$\left|\Phi(p,t)\right|^2=\frac{1}{\hbar}\left|\varphi\!\left(\frac{p}{\hbar}\right)\right|^2$$

より $\left|\Phi(p,t)\right|^2$ は t に依らない.

2. 要点（不確定性原理）

観測可能な 2 つの量 A, B について, $\langle A\rangle=\langle\Psi|\hat{A}\Psi\rangle=a$, $\langle B\rangle=\langle\Psi|\hat{B}\Psi\rangle=b$ とおく. このとき, $\sigma_A=\left\|(\hat{A}-a)\Psi\right\|$ と $\sigma_B=\left\|(\hat{B}-b)\Psi\right\|$ の積 $\sigma_A\sigma_B$ を, $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$ を用いて評価したい.

まず, シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}\sigma_A\sigma_B&=\left\|(\hat{A}-a)\Psi\right\|\cdot\left\|(\hat{B}-b)\Psi\right\|\\&\geq\left|\left\langle(\hat{A}-a)\Psi\middle|(\hat{B}-b)\Psi\right\rangle\right|\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}\left\langle(\hat{A}-a)\Psi\middle|(\hat{B}-b)\Psi\right\rangle&=\left\langle\Psi\middle|(\hat{A}-a)(\hat{B}-b)\Psi\right\rangle\\&=\langle\Psi|\hat{A}\hat{B}\Psi\rangle-b\langle\Psi|\hat{A}\Psi\rangle-a\langle\Psi|\hat{B}\Psi\rangle+ab\langle\Psi|\Psi\rangle\\&=\langle\Psi|\hat{A}\hat{B}\Psi\rangle-ab-ab+ab\\&=\langle\Psi|\hat{A}\hat{B}\Psi\rangle-ab\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}\left\langle[\hat{A},\hat{B}]\right\rangle&=\left\langle\Psi\middle|[\hat{A},\hat{B}]\Psi\right\rangle\\&=\left\langle\Psi\middle|(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})\Psi\right\rangle\\&=\langle\Psi|\hat{A}\hat{B}\Psi\rangle-\langle\Psi|\hat{B}\hat{A}\Psi\rangle\\&=\langle\Psi|\hat{A}\hat{B}\Psi\rangle-\langle\Psi|\hat{A}\hat{B}\Psi\rangle^*\\&=2i\cdot\mathrm{Im}\langle\Psi|\hat{A}\hat{B}\Psi\rangle\end{aligned}$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle(\hat{A}-a)\Psi\middle|(\hat{B}-b)\Psi\right\rangle\right| &\geq \left|\mathrm{Im}\left\langle(\hat{A}-a)\Psi\middle|(\hat{B}-b)\Psi\right\rangle\right| \\
&= \left|\mathrm{Im}\langle\Psi|\hat{A}\hat{B}\Psi\rangle\right| \\
&= \left|\frac{1}{2i}\left\langle[\hat{A},\hat{B}]\right\rangle\right|
\end{aligned}
$$

よって $\sigma_A\sigma_B \geq \left|\dfrac{1}{2i}\left\langle[\hat{A},\hat{B}]\right\rangle\right|$ が成り立つ.

特に，$\hat{A}=x$，$\hat{B}=\hat{p}$ のとき $\left\langle[x,\hat{p}]\right\rangle = [x,\hat{p}] = i\hbar$ であるから $\sigma_x\sigma_p \geq \left|\dfrac{i\hbar}{2i}\right| = \dfrac{\hbar}{2}$.

第 11 章　2021/5/19

1. 問題 3.13

$\varPhi$ を p で微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p}\varPhi(p,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial p}e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\cdot\varPsi(x,t)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{i}{\hbar\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{ipx}{\hbar}}\varPsi(x,t)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\varPhi^*(p,t)\cdot i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\varPhi(p,t) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{ipy}{\hbar}}\varPsi^*(y,t)\mathrm{d}y\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{ipx}{\hbar}}\varPsi(x,t)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{ip(y-x)}{\hbar}}\varPsi^*(y,t)x\varPsi(x,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^*(p,t)\cdot i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\Phi(p,t)\mathrm{d}p\\
&=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{ip(y-x)}{\hbar}}\mathrm{d}p\right)\Psi^*(y,t)x\Psi(x,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y-x)\Psi^*(y,t)x\Psi(x,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)\mathrm{d}x\\
&=\langle x\rangle
\end{aligned}
$$

第 12 章　2021/05/25

1. 要点

座標表示の 2 つの波動関数 Ψ_1, Ψ_2 とその運動量表示 Φ_1, Φ_2 について

$$\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle=\langle\Phi_1|\Phi_2\rangle$$

が成り立つ（計算 1）から，波動関数の座標表示と運動量表示はヒルベルト空間として同型である．そこで，座標表示や運動量表示と同型な何らかのヒルベルト空間を考え，波動関数をその空間上のベクトル $|\mathcal{S}(t)\rangle$ として表すことにする． 座標表示における $\delta(x)$ に対応するベクトルを $|x\rangle$ とすると，$\Psi(x,t)$ だったものは $\langle x|\mathcal{S}(t)\rangle$ になり， 運動量表示における $\delta(p)$（座標表示ならば $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{ipx}{\hbar}}$）に対応するベクトルを $|p\rangle$ とすると，$\Phi(p,t)$ だったものは $\langle p|\mathcal{S}(t)\rangle$ になる．

作用素はヒルベルト空間上の線形変換として表される．1 で恒等作用素を表すことにすれば，$|e_n\rangle$（$n=0,1,\dots$）が正規直交基底をなすというのは

$$\sum_n|e_n\rangle\langle e_n|=1$$

と書き表すことができ， 同様に $|e_z\rangle$（$z\in\mathbb{R}$） がディラック正規直交連続基底をなすというのは

$$\int_{-\infty}^{\infty}|e_z\rangle\langle e_z|\mathrm{d}z = 1$$

と書き表すことができる．

2. 計算 1

$$\begin{aligned}\varPhi_1(p,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{ip}{\hbar}x}\varPsi_1(x,t)\mathrm{d}x\\ \varPhi_2(p,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{ip}{\hbar}x}\varPsi_2(x,t)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

のとき，

$$\begin{aligned}\varPhi_1^*(p,t)\varPhi_2(p,t) &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{ip}{\hbar}x}\varPsi_1^*(x,t)e^{-\frac{ip}{\hbar}y}\varPsi_2(y,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{ip}{\hbar}(x-y)}\varPsi_1^*(x,t)\varPsi_2(y,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\langle\varPhi_1|\varPhi_2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\varPhi_1^*(p,t)\varPhi_2(p,t)\mathrm{d}p\\ &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{ip}{\hbar}(x-y)}\,\mathrm{d}p\right)\varPsi_1^*(x,t)\varPsi_2(y,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-y)\varPsi_1^*(x,t)\varPsi_2(y,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\varPsi_1^*(x,t)\varPsi_2(x,t)\mathrm{d}x\\ &= \langle\varPsi_1|\varPsi_2\rangle\end{aligned}$$

3. 問題 3.23

$\hat{P} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$（$\alpha$ はベクトル）とすると

$$\begin{aligned}\hat{P}^2 &= |\alpha\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| \\ &= |\alpha\rangle\langle\alpha| \\ &= \hat{P}\end{aligned}$$

また $\hat{P}|x\rangle = p|x\rangle$ ($p \in \mathbb{C}$) のとき

$$|\alpha\rangle\langle\alpha|x\rangle = p|x\rangle$$

の両辺に $\langle\alpha|$ をかけて

$$\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|x\rangle = p\langle\alpha|x\rangle$$

$$(p-1)\langle\alpha|x\rangle = 0$$

よって $p = 1$ または $\langle\alpha|x\rangle = 0$ である．$p = 1$ のとき，$|x\rangle$ は $|\alpha\rangle$ のスカラー倍で表される任意のベクトル．一方，$\langle\alpha|x\rangle = 0$ のとき

$$p|x\rangle = \hat{P}|x\rangle = |\alpha\rangle 0 = 0$$

なので $p = 0$ または $|x\rangle = 0$ となる．

4. 問題 3.24

内積 $\langle\alpha|\beta\rangle$ が $|\alpha\rangle^\dagger|\beta\rangle$ であることに注意すると

$$\langle e_m|\hat{Q}|e_n\rangle = \left(\left(\hat{Q}|e_n\rangle\right)^\dagger|e_m\rangle\right)^*$$

であり，$\hat{Q}$ のエルミート共役性より

$$\left(\hat{Q}|e_n\rangle\right)^\dagger|e_m\rangle = \langle e_n|\hat{Q}|e_m\rangle$$

であるから，

$$\langle e_m|\hat{Q}|e_n\rangle = \langle e_n|\hat{Q}|e_m\rangle^*$$

よって $Q_{mn} = Q^*_{nm}$．（うーんやはり多少不正確でも $\langle e_m|\hat{Q}|e_n\rangle = \langle\hat{Q}e_n|e_m\rangle^* = \langle e_n|\hat{Q}|e_m\rangle^*$ と書いた方が見やすいし分かりやすい）

第 13 章　2021/5/26

1. 問題 3.31

最初の基底は 1 を正規化したものである．$\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2$ より $e_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

次の基底は，$x - \langle e_0 | x \rangle e_0$ を正規化したものである．$\langle e_0 | x \rangle = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \displaystyle\int_{-1}^{1} x \, \mathrm{d}x = 0$ より $x - \langle e_0 | x \rangle e_0 = x$ であり，$\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}$ より $e_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} x$.

次の基底は，$x^2 - \langle e_0 | x^2 \rangle e_0 - \langle e_1 | x^2 \rangle e_1$ を正規化したものである．

$$
\begin{aligned}
\langle e_0 | x^2 \rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{3} \\
\langle e_1 | x^2 \rangle &= \frac{\sqrt{6}}{2} \int_{-1}^{1} x^3 \, \mathrm{d}x = 0
\end{aligned}
$$

より $x^2 - \langle e_0 | x^2 \rangle e_0 - \langle e_1 | x^2 \rangle e_1 = x^2 - \dfrac{1}{3}$ であり，

$$
\left\| x^2 - \frac{1}{3} \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{8}{45}
$$

より $e_2 = \dfrac{3\sqrt{10}}{4} \left(x^2 - \dfrac{1}{3} \right)$.

次の基底は，$x^3 - \langle e_0 | x^3 \rangle e_0 - \langle e_1 | x^3 \rangle e_1 - \langle e_2 | x^3 \rangle e_2$ を正規化したものである．

$$
\begin{aligned}
\langle e_0 | x^3 \rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-1}^{1} x^3 \, \mathrm{d}x &&= 0 \\
\langle e_1 | x^3 \rangle &= \frac{\sqrt{6}}{2} \int_{-1}^{1} x^4 \, \mathrm{d}x &&= \frac{\sqrt{6}}{5} \\
\langle e_2 | x^3 \rangle &= \frac{3\sqrt{10}}{4} \int_{-1}^{1} \left(x^5 - \frac{1}{3} x^3 \right) \mathrm{d}x &&= 0
\end{aligned}
$$

より $x^3 - \langle e_0 | x^3 \rangle e_0 - \langle e_1 | x^3 \rangle e_1 - \langle e_2 | x^3 \rangle e_2 = x^3 - \dfrac{3}{5}x$ であり，

$$\left\| x^3 - \frac{3}{5}x \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - \frac{3}{5}x \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{8}{175}$$

より $e_3 = \dfrac{5\sqrt{14}}{4}\left(x^3 - \dfrac{3}{5}x \right)$.